



# **Ecole des Ponts ParisTech**

## **Sorbonne Université**



### **Compte Rendu 1**

### **Calcul Numérique des Solides et Structures Non Linéaires**



Préparé par :

Melissa ABI ABDALLAH

Cybelle AL ALAM

Peter SAKR

**Année 2020-2021**

Table des matières :

1. Présentation du problème : .....	3
2. Résultats numériques : .....	3
3. Formule de Hill : .....	4
4. Comparaison avec la solution exacte : .....	5
5. Conclusion : .....	6

## 1. Présentation du problème :

On considère une matrice circulaire, de rayon  $R_m$ , centrée à l'origine munie d'une inclusion circulaire centrée à l'origine, de rayon  $R_i$ , et telle que  $R_i < R_m$ . Le comportement du système est supposé linéaire, élastique et en mode déformations planes. La matrice et l'inclusion sont isotropes mais possèdent des modules d'Young et de poisson différents.

Le système étant linéaire et élastique, la loi de Hooke s'applique au problème :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon(u) = \text{sym}(\nabla u)$$

Le but est de trouver un champ de déplacements  $u$  qui vérifie les conditions et l'équation suivantes :

$$u \in \mathcal{C} \equiv \{u : H^1(\Omega), u(x_1, x_2)|_{x_1^2 + x_2^2 = R_m^2} = (x_2, x_1)\} \quad \forall v \in \mathcal{C}_0 \equiv \mathcal{C}$$

$$\int_{\Omega} \sigma(\varepsilon(u)) : \varepsilon(v) \, dx \, dy = - \int_{\Omega} b \cdot v \, dx \, dy,$$

Avec:  $b$  = forces de volume = 0.

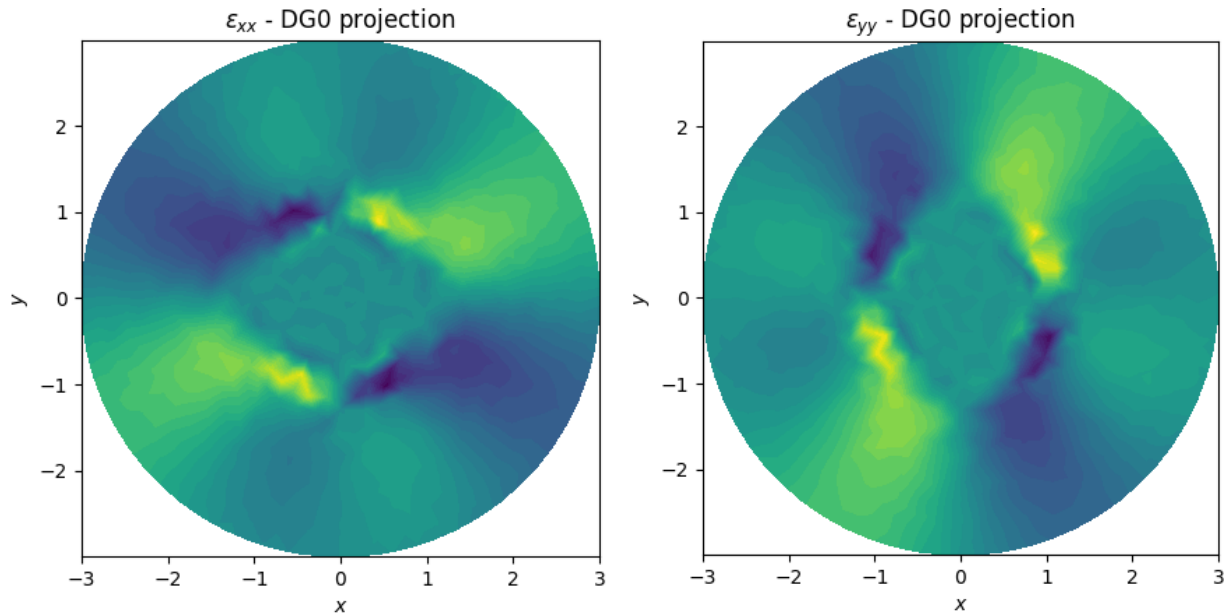
La résolution numérique du problème nécessite la création d'une fonction d'essai  $u$  et d'une fonction test  $v$  qui multiplie les 2 membres de l'équation précédente et qui appartient à un espace de vecteurs  $V$ , après avoir générer le maillage du disque et établi la condition aux limites suivante :

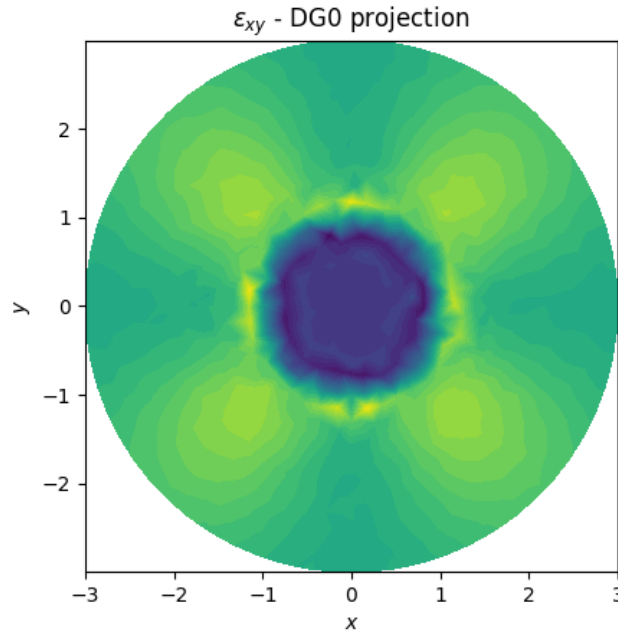
Déplacement imposé  $u(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$  sur la frontière tel que  $x_1^2 + x_2^2 = R_m^2$

A noter que l'espace  $V$  a été créé dans la famille d'éléments de Lagrange de degré 1.

## 2. Résultats numériques :

La résolution du problème aboutit aux diagrammes de déformations suivants :





On remarque que les déformations sont « presque » uniformes à une constante près, c'est la déviation qui peut être calculée de la façon suivante :

$$deviation = \frac{\int_{\Omega} Abs(\epsilon_{ij} - \langle \epsilon_{ij} \rangle) dx dy}{\langle \epsilon_{ij} \rangle}$$

Le calcul des moyennes des déformations et celui de la déviation donne les résultats suivants :

- $\langle \epsilon_{xx}^i \rangle = -2.3222 \cdot 10^{-5}$
- $\langle \epsilon_{xy}^i \rangle = 0.1795$
- $\langle \epsilon_{yy}^i \rangle = 3.6785 \cdot 10^{-5}$
- $\langle \epsilon_{xx}^m \rangle = 2.8548 \cdot 10^{-6}$
- $\langle \epsilon_{xy}^m \rangle = 1.1008$
- $\langle \epsilon_{yy}^m \rangle = -4.5223 \cdot 10^{-6}$
- ⇒ Déviation = 0.037070

### 3. Formule de Hill :

Le code suivant est utilisé pour calculer  $\langle \epsilon_{xy} \rangle$  d'après la formule de Hill :

```
mu_m = E_m/(2*(1+nu_m))
mu_i = E_i/(2*(1+nu_i))
q = (3-4*nu_m)/(8*mu_m*(1-nu_m))
b = 1/(1+2*q*(mu_i-mu_m))
print('eps_xy_inclusion = ',b)

⇒  $\langle \epsilon_{xy}^i \rangle = 0.1473$ 
```

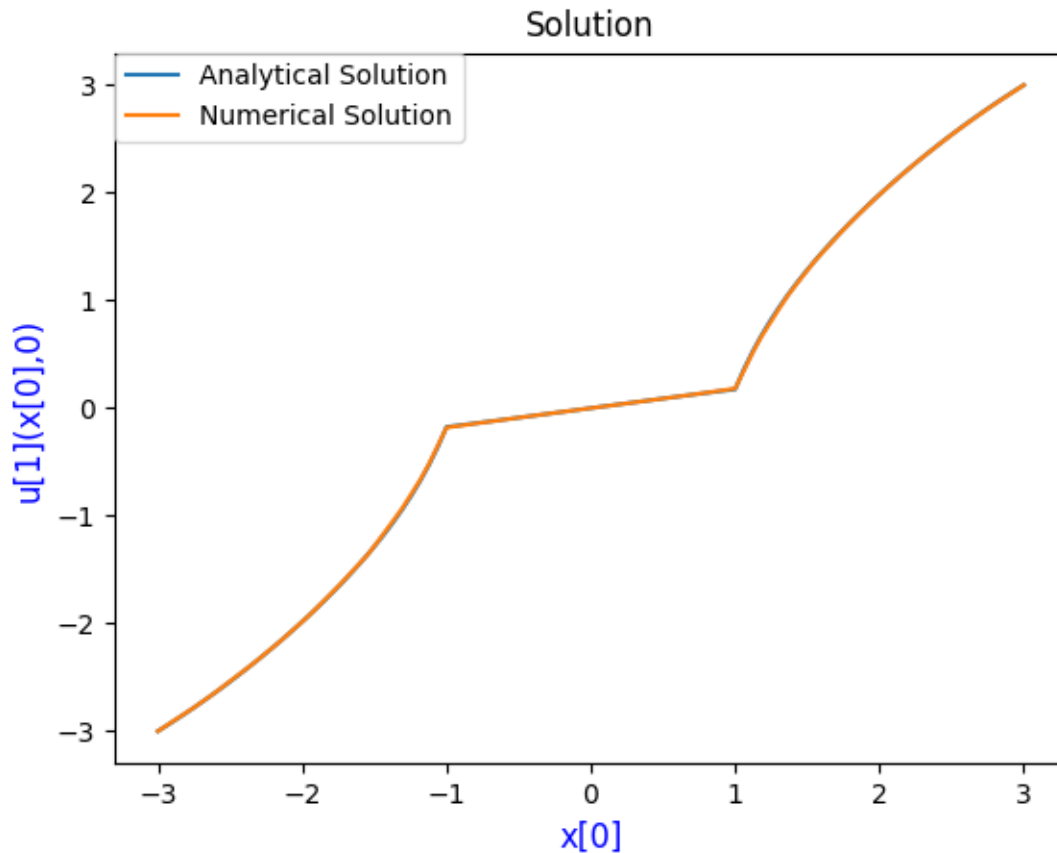
On remarque que  $\langle \epsilon_{xy}^i \rangle$  calculé d'après la méthode d'éléments finis converge vers celui de Hill.

#### 4. Comparaison avec la solution exacte :

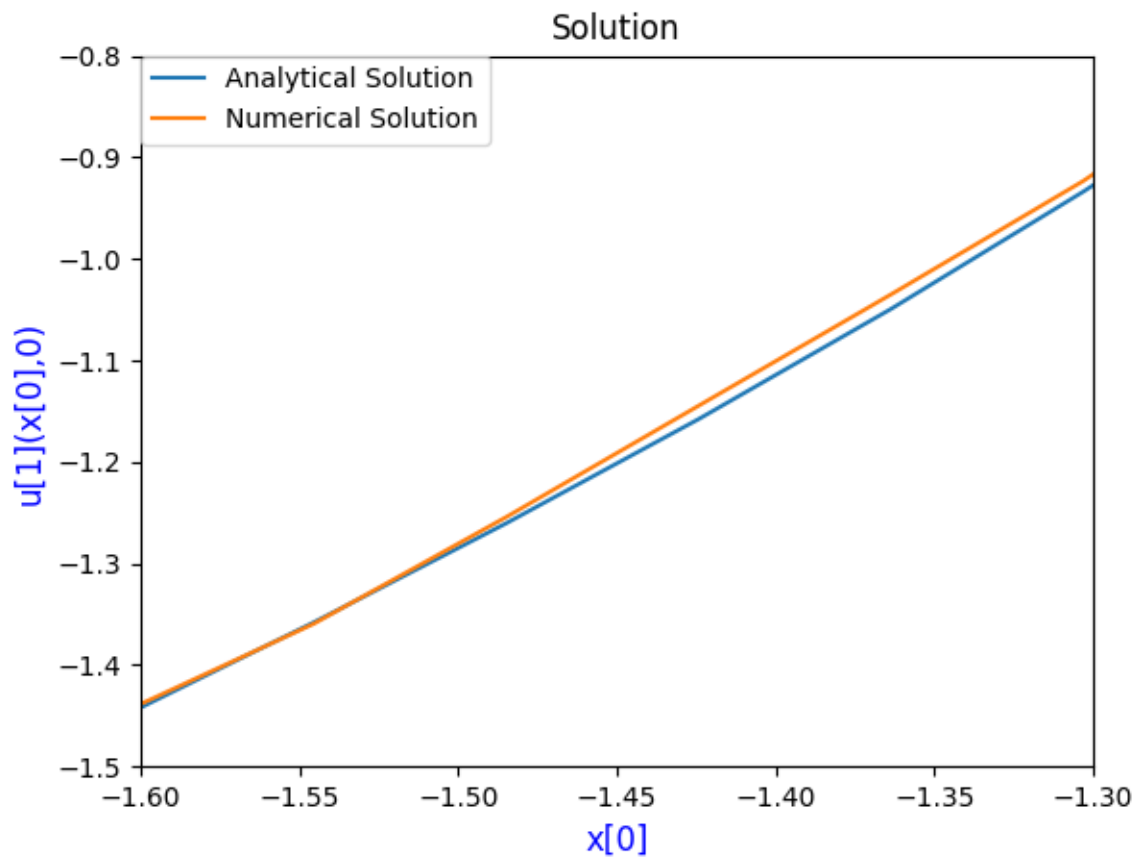
La solution analytique ou exacte du problème peut être calculée et même représentée dans un diagramme. En premier lieu, il est intéressant d'évaluer l'erreur, notée L2, entre les deux solutions :

$L2 = 0.02649 = 2.65\%$  → erreur acceptable pour le problème traité.

Ensuite, il faut tracer les courbes des deux solutions dans le même diagramme pour juger la convergence entre les deux méthodes de résolution :



D'après la figure ci-dessus, les deux solutions convergent parfaitement l'une vers l'autre ; elles semblent même être confondues, ce qui est normal vue l'ordre de grandeur de l'erreur réalisée. Néanmoins, pour plus de précision, et pour mieux visualiser la convergence des deux courbes, la fenêtre d'observation peut être agrandie pour créer un effet « zoom » et donc pour distinguer clairement les courbes l'une de l'autre dans une zone quelconque du diagramme.



Cette deuxième figure permet de « décoller » les deux courbes l'une de l'autre afin d'évaluer la méthode de résolution numérique.

## **5. Conclusion :**

La convergence réalisée entre les deux courbes, couplée avec l'ordre de grandeur de l'erreur calculée est une indication sur la validité de la méthode numérique utilisée pour résoudre le problème et le bon raffinement du maillage choisi. Ce résultat peut même être amélioré encore plus, et la solution numérique peut converger davantage vers la solution analytique en choisissant un maillage plus raffiné formé d'un plus grand nombre d'éléments qui sont éventuellement plus petits.