



Ecole des Ponts ParisTech

Sorbonne Université

Calcul Numérique des Solides et Structures Non Linéaires



**Compte Rendu 2 :
Dimensionnement non linéaire des ponts en béton**



Présenté par :

Melissa ABI ABDALLAH

Cybelle AL ALAM

Peter SAKR

Année 2020-2021

Sommaire

Table de matières

1. Part 0	4
2. Part I.....	4
3. Part II	6
4. Part III	6
5. Part 999	6
6. Conclusion	7

Liste des figures

Figure 1 - Traction et compression maximales	4
Figure 2 - Zone de sécurité.....	4
Figure 3 - Diagramme de bifurcation u_L/Lx	5
Figure 4 - Analyse de stabilité	6
Figure 5 - Diagramme de bifurcation pour $\alpha = 0$	7
Figure 6 - Diagramme de bifurcation pour $\alpha = 0.005$	7

1. Part 0

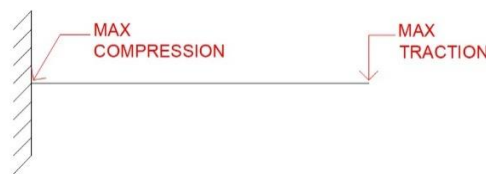
Question 0.1 :

$f_c = F / S = \rho V g / S = \rho g L_x \rightarrow L_x = f_c / (\rho g) = 2083 \text{ m}$.
Ce résultat n'est certainement pas réaliste.

Question 0.2 :

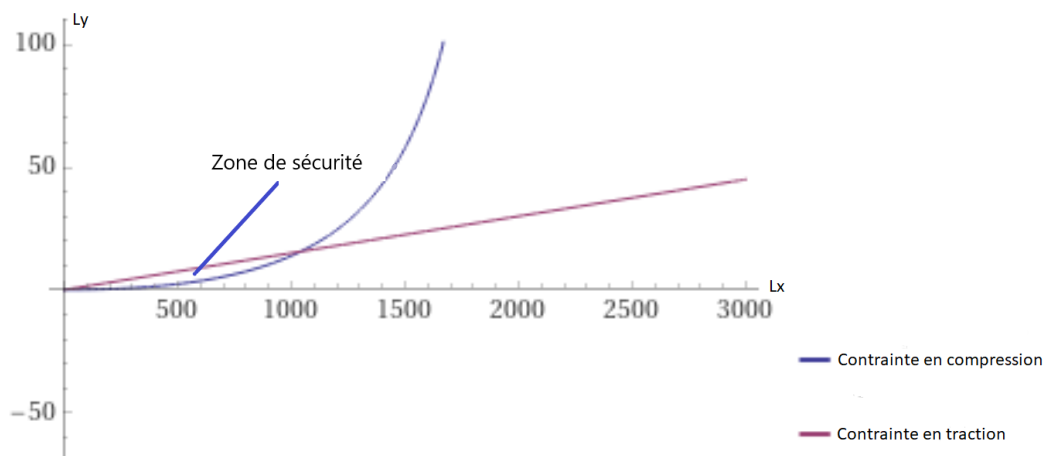
1. $N = \rho g L_y L_z (L_x - x) \cos \alpha$ et $M = \rho g L_y L_z \sin \alpha (L_x - x)^2 / 2$
2. $\sigma = N / S = \rho g (L_x - x) \cos \alpha$
- 3.

Figure 1 - Traction et compression maximales



4. En traction : $\sigma = -3\rho g \sin \alpha L_x^2 / L_y + \rho g L_x \cos \alpha \leq 0$
- En compression : $\sigma = 3\rho g \sin \alpha L_x^2 / L_y + \rho g L_x \cos \alpha \leq f_c$
- 5.

Figure 2 - Zone de sécurité



6. Pour $L_y = 10 \text{ m}$, $L_{x \text{ max}} = 666.66 \text{ m}$ limitée par la contrainte en traction
7. Pour $L_y = 20 \text{ m}$, $L_{x \text{ max}} = 1128.4 \text{ m}$ limitée par la contrainte en compression
8. il faut que $L_z \geq L_y$ car si le poteau est vérifié au flambement pour L_y , il le sera certainement pour L_z .

Question 0.3 : t est un paramètre d'incrément qui nous permet de varier le chargement.

2. Part I

Question I.1 : On va étudier le comportement vis-à-vis des imperfections d'une poutre de dimensions $L_x * L_y * L_z$ encastrée à son extrémité gauche et libre à son extrémité droite, soumise à son poids propre

$$\mathbf{b} = -t \cdot \rho \cdot \mathbf{g} \cdot \cos(\alpha) \cdot \underline{\mathbf{e}}_x + t \cdot \rho \cdot \mathbf{g} \cdot \sin(\alpha) \cdot \underline{\mathbf{e}}_y \quad \text{où } \alpha \text{ est l'imperfection.}$$

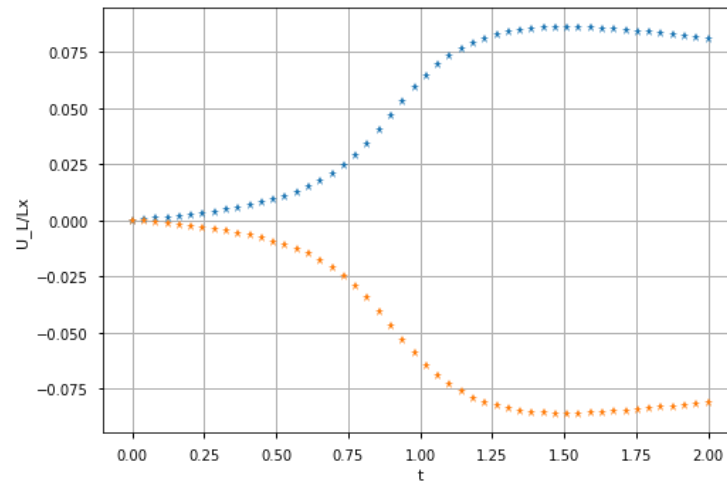


Figure 3 - Diagramme de bifurcation u_L/Lx

Nous obtenons le diagramme de bifurcation suivant sur lequel nous reportons le déplacement transverse au bord libre de la poutre.

On remarque que quand les chargements sont faibles il y a une branche stable (les déformations sont supportables) puis il y a une branche d'instabilité (les déformations augmentent brutalement en augmentant la charge) et enfin on a une branche de stabilité mais qui représente beaucoup de déformations. La bifurcation se caractérise par le fait que des branches d'équilibre (déformations, chargement) passe par le point critique de flambement et la direction prise par la nouvelle branche est le mode de flambement.

Question I.2 : En faisant varier les valeurs du paramètre de l'imperfection α et en observant les diagrammes de bifurcations pour ces différentes valeurs, on remarque que plus les imperfections sont élevées, la bifurcation commence à disparaître, le flambement sera atteint plus rapidement car plus les imperfections sont élevées plus la charge critique de flambement diminue et plus le flambement pourra se produire d'une manière prématurée sur la poutre. Et quand la valeur de α est faible le diagramme de bifurcation ne change que très peu.

Question I.3 : Pour étudier la réponse de la poutre, on commence par définir le maillage sur la structure en utilisant des éléments quadratiques qui sont les plus performants. On doit résoudre un problème non linéaire variationnel qui consiste à minimiser l'énergie potentielle étant donné les conditions aux limites, pour cela on utilise le Solveur Newton implanté dans Fenics. Pour cela, on définit le résidu et le Jacobien qui sont respectivement la dérivée première et seconde de cette énergie. On collecte toutes les informations du problème variationnel dans la classe `NonlinearVariationalProblem` et on fait appel au solveur qui utilise la méthode de Newton pour résoudre notre problème. On incrémente le chargement avec le temps, on discrétise le temps en n pas de temps de longueurs égales, le chargement varie entre les valeurs 0 et 2 en prenant 50 segments de pas (on utilise des pas de temps petits car ça nous aide à converger vers la solution). La solution du problème est obtenue en relançant le Solveur de Newton avec la solution obtenue avec le pas de temps précédent ce temps. Cela va permettre la convergence du solveur. On note qu'il faut donner à la solution une valeur initiale car elle peut ne pas être unique, si la solution initiée est trop loin ça va diverger. On donne la valeur 0 pour u , tolérance 10^{-8} , on a utilisé α égal à 0.1 pour déclencher l'instabilité et forcer le système à s'adapter à son mode de flambement.

Le Solveur Newton est basé sur l'annulation du résidu qui s'écrit : $R(\underline{u}) = a(\underline{u}, \underline{v}) - l(\underline{v}) = 0$

On définit l'énergie potentielle :

$$\varepsilon(u) = \int_{\partial\Omega_0} w(u) \, dx_0 - \int_{\partial\Omega_0} g_0 \cdot u \, dx_0 - \int_{\partial g\Omega_0} b_0 \cdot u \, dS_0 \quad \text{Avec } \int_{\partial\Omega_0} g_0 \cdot u \, dx_0 = 0$$

Il faut trouver $u \in U$: $\varepsilon'(\underline{u})(\underline{v}) = 0$ pour tout $\underline{v} \in U_0 : \{u \text{ reg} : \underline{u} = 0 \text{ sur } \partial_u\Omega_0\}$

On linéarise le problème, il faut donc trouver $\underline{w} \in U_0 : \varepsilon''(\underline{u}_0)(\underline{v})(\underline{w}) = -\varepsilon''(\underline{u}_0)(\underline{v})$ pour tout $\underline{v} \in U_0$

3. Part II

Afin d'étudier la stabilité de la poutre, il suffit d'étudier le signe de la plus petite valeur propre de la matrice hessienne pour cela il faut étudier le signe de la dérivée seconde de l'énergie potentielle $\varepsilon''(\underline{u})(\underline{v})(\underline{w})$ (le Jacobien). En effet, si cette dernière est supérieure ou égale à zéro, il y a stabilité sinon il y a instabilité.

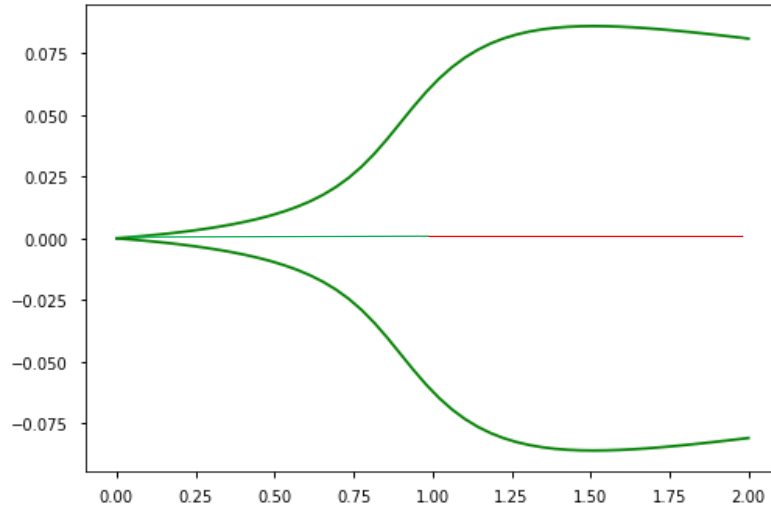


Figure 4 - Analyse de stabilité

Nous remarquons donc que lorsqu'on dépasse la charge critique de flambement, la branche fondamentale devient instable, cela est dû au fait qu'on ne peut pas savoir dans quelle direction la poutre va se déformer. Cependant, quand on impose des imperfections, la poutre reste stable toujours car elle va se déformer dans la direction où l'on va imposer l'imperfection.

4. Part III

$$L_x = (\Gamma^2 E I_y^2 / 12 \rho g)^{1/3} = 455.95 \text{ m pour } L_y = 10 \text{ m et } \Gamma = 7.8$$

$$L_x = (\Gamma^2 E I_y^2 / 12 \rho g)^{1/3} = 723.78 \text{ m pour } L_y = 20 \text{ m et } \Gamma = 7.8$$

Les résultats obtenus par cette méthode de calcul sont meilleurs que ceux obtenus dans la première partie. Ce sont des longueurs plus logiques et plus proches de la réalité qui fait introduire des effets secondaires, surtout en les comparant avec le premier résultat (2083 m).

5. Part 999

Question 999.1 : Le point de bifurcation s'obtient par confusion des branches d'équilibre stable et instable, lorsque le paramètre de charge augmente.

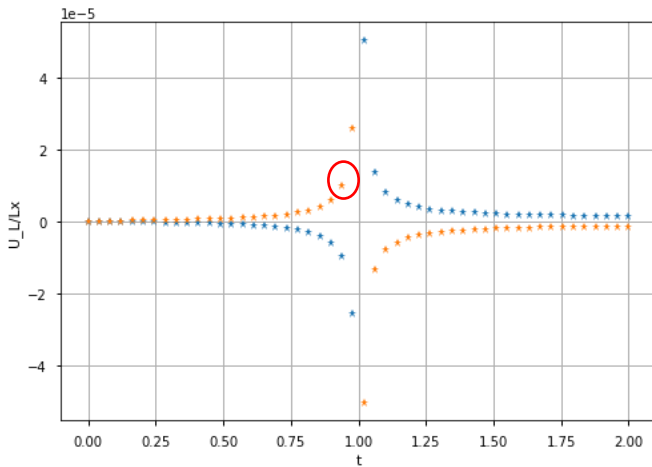


Figure 5 - Diagramme de bifurcation pour $\alpha = 0$

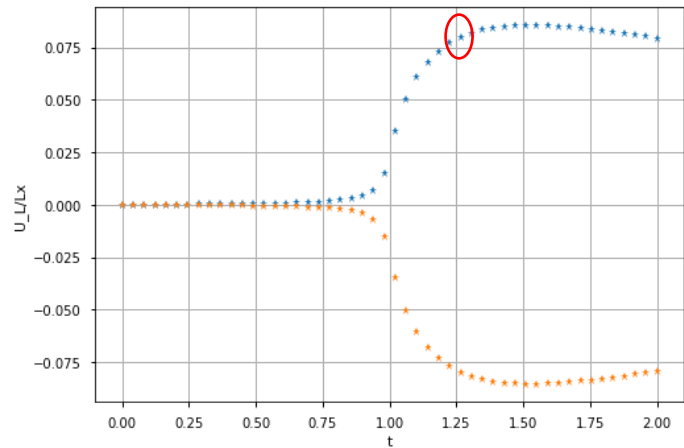


Figure 6 - Diagramme de bifurcation pour $\alpha = 0.005$

Graphiquement, le point P_2 correspond à $t = 1.25$.

Question 999.2 : Pour $L_y > 0.3$, seulement P_1 figure sur le diagramme de bifurcation.

Question 999.3 : Pour $L_y > 0.9$, on ne peut pas conclure. En variant L_y , nous avons constaté que plus la poutre est élancée plus les valeurs propres sont faibles, cela induit une faible charge critique, entraînant une plus grande facilité à la poutre de flamber. Comme cela est visible pour le cas où la poutre est assez étroite, les valeurs propres sont bien plus élevées, nous avons ainsi donc moins de facilité à passer en flambement.

6. Conclusion

L'analyse du flambement fournit une charge critique associée à un mode de flambement mais ne permet pas de savoir ce qui se passe après le flambement. On constate que le flambement d'une poutre n'empêche pas d'atteindre ou dépasser la charge appliquée, alors qu'usuellement dans les coques le changement notable de la forme des structures conduit à ce que la capacité portante chute de façon importante. Ainsi, une modification de géométrie, des imperfections introduit des flexions trop élevées. Les analyses des branches du diagramme de bifurcation sont très utiles pour la prédiction post flambage.