第 5 章・流体中の熱伝導

2023-03-25 15:27

これは L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2nd English edition, Pergamon Press, 1987. の内容を補ったノートである．内容の正確性は保証できないが，改善点・誤植（内容，体裁のどちらでも構わない）を見つけた方は筆者まで知らせてほしい．図がほとんどないが，徐々に付け加えていく予定である．

なお，♠ は第 2 版で新たに加わった部分，♠ ♠ は筆者が勝手に付け加えた部分である．また，目次，式や問題の番号，各節末尾の「目次へ戻る」ボタンにはハイパーリンクを設定し，利便性を高めたつもりである．

本文中で頻繁に参照する文献の略称は以下の通りである．

- 今井→今井功『物理学選書⒁ 流体力学（前編）』裳華房，1974
- 巽→巽友正『新物理学シリーズ 21 流体力学』培風館，1982
- Lamb → H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6th ed., Cambridge, 1932（邦訳あり）
- 『力学』，『統計物理学』，『物理的運動学』→それぞれ，ランダウ＝リフシッツ理論物理学教程の第 1 巻，第 5 巻，第 10 巻．

目次

§49　熱輸送の一般式

§2 の終わりで，流体力学の完全な方程式系は 5 つの方程式を含まなければならないことを述べた．熱伝導や内部摩擦の過程を伴う流体であっても，連続の式と運動方程式（Navier-Stokes 方程式）は成り立つ．理想流体では，5 番目の方程式はエントロピー保存の式 (2.6) であった．粘性流体では，非可逆的なエネルギーの散逸が生じるから，この式は成り立たない．粘性流体の場合に成り立つ式を決めるために，エネルギー保存の式を考えよう．

理想流体でのエネルギー保存則は (6.1) で与えられる（ε は単位質量あたりの内部エネルギー，h は単位質量あたりのエンタルピー）：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\varepsilon\right)=-\operatorname{div}\left[\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+h\right)\right].$$

左辺は，単位体積の流体のエネルギー変化率であるから，右辺の div の中は流体表面を通る全エネルギーフラックスを表している．粘性流体の場合，ここに

1. 内部摩擦によるフラックス

2. **熱伝導**によるフラックス $\boldsymbol{q}$

を加えなければならない．§ 16 によれば，(σ'_{ij} を粘性応力テンソルとして) 1 は $v_i\sigma'_{ij}$ と書ける．2 は流体中の温度が一様でない場合に生じるエネルギーの輸送であり，マクロな運動の有無によらず存在する（すなわち，静止流体中でも生じる）．温度勾配が大きくない場合，$\boldsymbol{q}$ と温度変化の関係をただちに書き下すことができる．$\boldsymbol{q}$ を温度勾配の冪で展開して 1 次まで取れば

$$\boldsymbol{q} = -\kappa \cdot \operatorname{grad} T \tag{49.1}$$

となる（温度勾配がないとき熱伝導は生じないから定数は 0 である）．定数 κ は**熱伝導率**と呼ばれる．温度差があるとき，熱は温度の高い方から低い方へ流れるから，$\boldsymbol{q}$ と $\operatorname{grad} T$ は逆符号であり，$\kappa > 0$ でなければならない．κ は一般には温度と圧力の関数である．

1,2 を加えると，エネルギー保存則は以下のようになる．

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varepsilon\right) = -\operatorname{div}\left[\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + h\right) - v_i\sigma'_{ij} - \kappa \cdot \operatorname{grad} T\right] \tag{49.2}$$

この形でもよいが，運動方程式を用いて書き直しておくと便利である．

Landau は一から考え直しているが，我々は既に § 6 で同様の議論を行なっているから，その結果を用いることにしよう．

連続の式，運動方程式，熱力学第 1 法則より，以下の式が成り立つ．

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varepsilon\right) + \operatorname{div}\left[\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + h\right)\right] = \rho T\frac{Ds}{Dt} + v_i\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial x_j} \tag{①}$$

$\operatorname{div}(v_i\sigma'_{ij}) = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(v_i\sigma'_{ij}\right) = \sigma'_{ij}\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i\dfrac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial x_j}$ に注意して (49.2) と①を見比べると

$$\rho T\frac{Ds}{Dt} = \sigma'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T). \tag{49.4}$$

こうして**熱輸送の一般式**が得られた．粘性と熱伝導がなければ右辺は 0 であり，理想流体に対するエントロピー保存の式 (2.6) に戻る．

(49.4) の左辺は，単位体積の流体が単位時間に獲得する熱量を表している．そしてそれは，粘性散逸によるものと，伝導により考えている体積に持ち込まれるものからなる．前者について，粘性応力テンソルの表式 (15.3) を代入して，速度の空間微分で表そう．

$$\begin{aligned}
\sigma'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \underline{\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}} + \zeta\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\
&= \underline{\frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)^2} + \zeta(\operatorname{div}\boldsymbol{v})^2 \\
&\equiv \Phi
\end{aligned}$$

2 番目の等号を確かめるためには，逆向きに計算する方が楽である．

$$
\begin{aligned}
(\text{波線部}) &= \frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\cdot 2 + \frac{4}{9}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\cdot 3 + 2\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - 2\cdot\frac{2}{3}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\cdot 2\right)\\
&= \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)\\
&= (\text{下線部})
\end{aligned}
$$

Φ は**散逸関数**と呼ばれる．弾性理論における弾性自由エネルギー

$$F = \mu\left(u_{ij} - \frac{1}{3}u_{kk}\delta_{ij}\right)^2 + \frac{K}{2}{u_{kk}}^2$$

（$u_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ は歪みテンソル，μ は剛性率，K は体積弾性率）と比較せよ．

(49.4) の意味を明らかにするために，流体の全体積にわたってエントロピーの時間変化を計算しよう．

$$\frac{d}{dt}\int \rho s\, dV = \int \frac{\partial}{\partial t}(\rho s)\, dV$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) &= \frac{D}{Dt}(\rho s) - \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}(\rho s)\\
&= \rho\frac{Ds}{Dt} + s\frac{D\rho}{Dt} - \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}(\rho s)\\
&\qquad \text{連続の式から } s\frac{D\rho}{Dt} = -\rho s\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\\
&= \rho\frac{Ds}{Dt} - \mathrm{div}(\rho s\boldsymbol{v})
\end{aligned}
$$

$\mathrm{div}(\rho s\boldsymbol{v})$ は表面積分に変換され，無限に広がる流体を考えるとその寄与は 0 になる．よって

$$\frac{d}{dt}\int \rho s\, dV = \int \rho\frac{Ds}{Dt}\, dV \overset{(49.4)}{=} \int \frac{1}{T}\left(\mathrm{div}(\kappa\,\mathrm{grad}\,T) + \Phi\right)\, dV. \tag{②}$$

第 1 項は

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{T}\mathrm{div}(\kappa\,\mathrm{grad}\,T)\, dV &= \int\left\{\mathrm{div}\left(\frac{1}{T}\cdot\kappa\,\mathrm{grad}\,T\right) - \kappa\,\mathrm{grad}\,T\cdot\mathrm{grad}\left(\frac{1}{T}\right)\right\}dV\\
&= \int \frac{\kappa}{T}\mathrm{grad}\,T\cdot d\boldsymbol{S} + \int\frac{\kappa(\mathrm{grad}\,T)^2}{T^2}\, dV
\end{aligned}
$$

と書ける．無限に広がる流体を考え，無限遠で流体の温度が十分速く一定値に近づくと仮定すれば第 1 項は 0 となる．したがって

$$\frac{d}{dt}\int \rho s\, dV = \int \frac{\kappa(\mathrm{grad}\,T)^2}{T^2}\, dV + \int\frac{1}{T}\Phi\, dV. \tag{49.6}$$

この式は，単位時間の全エントロピーの変化を熱伝導と内部摩擦の寄与で表した式である．熱力学第 2 法則によればエントロピーは増加しなければならないから，右辺は正である．$\kappa > 0$，$\eta > 0$ であるから，第 2 粘性率 ζ も正であることが導かれた．

(49.1) を導く際に，熱伝導フラックスは圧力勾配によらず温度勾配のみで書けることを仮定していた．これは次のように正当化できる；もし $\boldsymbol{q}$ に $-\alpha\,\mathrm{grad}\,p$（$\alpha$ は比例係数）が加わったとすると，②には

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{T}\,\mathrm{div}(\alpha\,\mathrm{grad}\,p)\,dV &= \int \left\{\mathrm{div}\left(\frac{1}{T}\alpha\,\mathrm{grad}\,p\right) - \alpha\,\mathrm{grad}\,p\cdot\mathrm{grad}\left(\frac{1}{T}\right)\right\} dV \\ &= \int \frac{\alpha}{T}\,\mathrm{grad}\,p\cdot d\boldsymbol{S} + \int \frac{\alpha\,\mathrm{grad}\,p\cdot\mathrm{grad}\,T}{T^2}\,dV\end{aligned}$$

という項が加わり，結果には $\mathrm{grad}\,p\cdot\mathrm{grad}\,T$ という項が現れる．これは正にも負にもなりうるから，エントロピーは増加するとは限らなくなり，矛盾が生じる．

最後に，これまでの議論は以下に述べる点においても厳密にされなければならないことに触れておこう；温度勾配や速度勾配が存在する流体は熱力学的な平衡状態にはなく，（平衡状態で成り立つ）熱力学量の関係式は厳密には成り立たなくなる．つまり，$\rho, \varepsilon, \boldsymbol{v}$ を適切に定義したとしても，平衡状態でのエントロピーの定義により定まる量 $s = s(\rho, \varepsilon)$ は真のエントロピーではなく，積分

$$\int \rho s\,dV$$

は時間と共に増加するとは限らない．しかし，温度勾配や速度勾配が小さい場合には，この s が近似的に真のエントロピーに等しいことが示せる：この s は平衡状態での値であるから，最大値である．よってエントロピーを微小な勾配で展開したとき，1 次の項は 0 であり，2 次以上の項のみが現れる．勾配が小さければ，これらの寄与は無視できる．

⬆ 目次へ戻る

§50　非圧縮性流体中の熱伝導

⬆ 目次へ戻る

§51　無限媒質中の熱伝導

⬆ 目次へ戻る