第 2 章・粘性流体

2023-02-25 19:52

これは L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2nd English edition, Pergamon Press, 1987. の内容を補ったノートである．内容の正確性は保証できないが，改善点・誤植（内容，体裁のどちらでも構わない）を見つけた方は筆者まで知らせてほしい．図がほとんどないが，徐々に付け加えていく予定である．

なお，♠ は第 2 版で新たに加わった部分，♠ ♠ は筆者が勝手に付け加えた部分である．また，目次，式や問題の番号，各節末尾の「目次へ戻る」ボタンにはハイパーリンクを設定し，利便性を高めたつもりである．

本文中で頻繁に参照する文献の略称は以下の通りである．

- 今井→今井功『物理学選書⑭ 流体力学（前編）』裳華房，1974
- 巽→巽友正『新物理学シリーズ 21 流体力学』培風館，1982
- Lamb → H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6th ed., Cambridge, 1932（邦訳あり）
- 『力学』，『統計物理学』，『物理的運動学』→それぞれ，ランダウ＝リフシッツ理論物理学教程の第 1 巻，第 5 巻，第 10 巻．

目次

§15　粘性流体の運動方程式

流体の運動中に生じるエネルギーの散逸が，流体の運動にどのような影響を及ぼすか考えよう．エネルギーの散逸過程は，熱力学的に不可逆な運動；内部摩擦（粘性）や熱伝導によって生じる．

粘性流体の方程式系を導きたい．導き方から明らかなように，連続の式はどのような流体に対しても成立す

る．一方で，運動方程式とエネルギー方程式[*1]は書き改めなければならない．

粘性応力テンソル

Euler 方程式は，運動量フラックス密度テンソルを Π_{ij} として

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j}$$

と書ける．(7.2) の運動量フラックスは，流体粒子の運動と圧力による，運動量の可逆な輸送を表している．粘性流体の運動方程式を得るためには，(7.2) に不可逆な運動量の輸送を表す項 $-\sigma'_{ij}$ を加えればよい．粘性流体の運動量フラックス密度テンソルは

$$\Pi_{ij} = p\delta_{ij} + \rho v_i v_j - \sigma'_{ij} = -\sigma_{ij} + \rho v_i v_j \tag{15.1}$$

と表される．テンソル

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij} \tag{15.2}$$

は**応力テンソル**，σ'_{ij} は**粘性応力テンソル**と呼ばれる．σ_{ij} は，運動する流体によって直接運ばれる運動量（$\rho v_i v_j$）以外の運動量フラックスを表している．

σ'_{ij} の一般的な形を導こう．内部摩擦は，流体粒子の速度が異なるために，流体の各部分の間に相対運動が起こる場合にのみ生じる．つまり σ'_{ij} は速度の空間微分の関数でなければならない．ここでは，速度勾配が小さく，σ'_{ij} が速度の 1 階微分の線型結合で表される流体（ニュートン流体）を考えることにしよう．この条件を満たすテンソルの一般的な形は

$$\sigma'_{ij} = a\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + a'\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + b\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} \tag*{①}$$

である（定数項は，$-p\delta_{ij}$ として既に応力テンソルに組み込まれている）．

流体が一様な角速度で回転している場合，内部摩擦は生じず $\sigma'_{ij} = 0$ でなければならない．このことから，係数についての制約条件を得ることができる．角速度ベクトルを $\boldsymbol{\Omega}$ とすると，速度は $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$ または $v_i = \varepsilon_{ilm}\Omega_l x_m$ となる（ε_{ilm} は Eddington のイプシロン）．これを①に代入し

$$\begin{aligned}
\sigma'_{ij} &= a\frac{\partial}{\partial x_j}(\varepsilon_{ilm}\Omega_l x_m) + a'\frac{\partial}{\partial x_i}(\varepsilon_{jlm}\Omega_l x_m) + b\frac{\partial}{\partial x_k}(\varepsilon_{klm}\Omega_l x_m)\delta_{ij} \\
&= a\varepsilon_{ilm}\Omega_l\delta_{jm} + a'\varepsilon_{jlm}\Omega_l\delta_{im} + b\varepsilon_{klm}\Omega_l\delta_{km}\delta_{ij} \\
&= (a\varepsilon_{ilj} + a'\varepsilon_{jli} + b\varepsilon_{klk}\delta_{ij})\Omega_l.
\end{aligned}$$

Eddington のイプシロンは添字を 1 組交換すると符号が反転するから $\varepsilon_{jli} = -\varepsilon_{ilj}$ であり，添字に重複があると 0 になるから $\varepsilon_{klk} = 0$ である．よって

$$\sigma'_{ij} = (a - a')\varepsilon_{ilj}\Omega_l = 0 \qquad \therefore \quad a = a'.$$

以上より，σ'_{ij} の一般的な形は

$$\sigma'_{ij} = a\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + b\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}$$

となる．あるいは，a, b を他の定数で表した次の形が便利である．

$$\sigma'_{ij} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) + \zeta\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} \tag{15.3}$$

[*1] エネルギー方程式については § 49 で議論する．

( ) 内を i, j について縮約すると 0 になる．η, ζ は速度に無関係の定数で，η は**粘性率**，ζ は**第２粘性率**と呼ばれる．§ 16，§ 49 で見るように，これらは正である．

$$\eta > 0, \quad \zeta > 0. \tag{15.4}$$

粘性流体の運動方程式

さて，粘性流体の運動方程式を得よう．Π_{ij} に $-\sigma'_{ij}$ を加えたことに対応して，Euler 方程式に $\dfrac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j}$ を加えればよいことがわかる．よって

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta \frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right).\end{aligned} \tag{15.5}$$

これは粘性流体の運動方程式の最も一般的な形である．η, ζ は一般に温度と圧力の関数であり，流体中で一様とは限らないから，微分の外に出すことはできない．しかし多くの場合には，η, ζ は定数とみなしてよい．その場合には

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} &= \eta\left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)\right] + \zeta \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right) \\ &= \eta \triangle v_i + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div} \boldsymbol{v}).\end{aligned}$$

よって粘性流体の運動方程式をベクトル形式で表すと

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad})\boldsymbol{v}\right] = -\operatorname{grad} p + \eta \triangle \boldsymbol{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v}. \tag{15.6}$$

この式は **Navier-Stokes 方程式**と呼ばれている．

粘性流体を論じる際，ほとんどの場合非圧縮であると仮定してよい．その場合 $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ であるから

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad})\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \frac{\eta}{\rho}\triangle \boldsymbol{v} \tag{15.7}$$

を得る．(15.3) で $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ とおくことにより，非圧縮性流体での応力テンソルは

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{15.8}$$

と簡単な形に書ける．

非圧縮性流体では，粘性はただ 1 つの係数 η で表される．このため，粘性率といえばふつう η のことを指す．また，

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \tag{15.9}$$

は**動粘性率**と呼ばれる．ある温度での気体の粘性率 η は圧力によらない[*2]が，動粘性率 ν は圧力に反比例する．

Euler 方程式で行ったのと同様にして，Navier-Stokes 方程式から圧力の項を除くことができる．(15.7) の両辺の rot をとれば，理想流体での (2.11) に対応して

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\boldsymbol{v}) = \operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \times \operatorname{rot}\boldsymbol{v}) + \nu \triangle (\operatorname{rot}\boldsymbol{v}).$$

[*2] これは気体分子運動論の結果である．『物理的運動学』§ 8 参照．

流体が非圧縮であるから，右辺第 1 項を展開して $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$ を用いると

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v})=(\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad})\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad})(\operatorname{rot}\boldsymbol{v})+\cancel{(\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{v})}\boldsymbol{v}-\cancel{(\operatorname{div}\boldsymbol{v})}(\operatorname{rot}\boldsymbol{v}),$$

$$\therefore\quad \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad})(\operatorname{rot}\boldsymbol{v})-(\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad})\boldsymbol{v}=\nu\triangle(\operatorname{rot}\boldsymbol{v}). \tag{15.10}$$

♠ (15.7) の両辺の div をとると

$$\operatorname{div}[(\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad})\boldsymbol{v}]=-\frac{1}{\rho}\triangle p$$

$$\therefore\quad \triangle p=-\rho\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)=-\rho\left[\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+v_j\frac{\partial}{\partial x_j}\cancel{(\operatorname{div}\boldsymbol{v})}\right]$$

また $\dfrac{\partial^2(v_iv_j)}{\partial x_i\partial x_j}=\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}v_j+v_i\cancel{\dfrac{\partial v_j}{\partial x_j}}\right)$ でもあるから，結局

$$\triangle p=-\rho\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}=-\rho\frac{\partial^2(v_iv_j)}{\partial x_i\partial x_j} \tag{15.11}$$

この式は，速度分布が分かっているときに圧力を求めるための Poisson 方程式である．

非圧縮性粘性流体の 2 次元流で，流線関数 $\psi(x,y)$ が満たすべき方程式を書き下そう．(10.10) の導き方から分かるように，(10.10) の左辺に $\nu\triangle(\operatorname{rot}\boldsymbol{v})=\nu\triangle(-\triangle\psi)$ を加え

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle\psi)-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\triangle\psi)+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\triangle\psi)-\nu\triangle(\triangle\psi)=0. \tag{15.12}$$

粘性流体の運動方程式の境界条件

さて，粘性流体の運動方程式の境界条件を考えよう．粘性流体と固体表面の間には常に分子間引力が働いており，表面に接する流体の層は表面に密着して静止状態にある．よって境界条件は，固定された物体の表面で流体の速度が 0 となることである．

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0} \tag{15.13}$$

理想流体では法線速度 v_n が 0 となることが条件であったが，粘性流体では，法線速度と接線速度の両方が 0 となることが条件である．

> 一般に，Euler 方程式に接線速度が 0 という条件を加えてしまうと，解が存在し得ないことに注意しよう．これは Euler 方程式が 1 階の偏微分方程式であり，$v_n=0$ 以外の境界条件を課すことは許されないためである．

また，物体表面が動く場合には，$\boldsymbol{v}$ は表面の速度に等しくなければならない．

粘性流体中にある物体表面に働く力を書き下すことは容易である．表面の面積要素 $d\boldsymbol{S}$ に働く力は，この要素を通り抜ける運動量フラックスに等しく[*3]

$$\mathit{\Pi}_{ij}dS_j=(\rho v_iv_j-\sigma_{ij})dS_j.$$

$\boldsymbol{n}$ を法線ベクトルとすると $dS_j=n_jdS$，また表面では $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ である．よって表面の単位面積に働く力 $\boldsymbol{P}$ は

$$P_i=-\sigma_{ij}n_j=pn_i-\sigma'_{ij}n_j. \tag{15.14}$$

[*3] これは各要素の静止座標系に乗って考えた場合に限る．

第 1 項は通常の圧力，第 2 項は粘性により表面に働く摩擦力である．なお (15.14) の $\boldsymbol{n}$ は流体から見て外向きを正とするベクトルであるから，固体から見て内向きが正であることに注意.

固体以外の境界条件に触れておこう．互いに混じり合わない 2 つの流体が接している場合，境界面で成り立つ条件は，流体の速度が等しいこと

$$\boldsymbol{v}^{(1)} = \boldsymbol{v}^{(2)}$$

と，もう一方の流体に働く力の大きさが等しく向きが逆となること

$$\sigma_{1,ij}n_{1,j} + \sigma_{2,ij}n_{2,j} = 0$$

である（添字 1,2 は 2 つの流体を表す）．$\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$ は逆向きであるから，$\boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2$ とおくと

$$\sigma_{1,ij}n_j = \sigma_{2,ij}n_j. \tag{15.15}$$

また，自由表面で満たされるべき条件は

$$\sigma_{ij}n_j = -pn_i + \sigma'_{ij}n_j = 0 \tag{15.16}$$

である.

曲線座標（特に円筒座標，球座標）における Navier-Stokes 方程式について本文を参照のこと．ここでは導出を省略し，先へ進むことにする.

⬆ 目次へ戻る

§16　非圧縮性流体でのエネルギー散逸

粘性によりエネルギーは散逸し，最終的には熱に変換される．非圧縮性流体でのエネルギー散逸は，簡単に計算することができる.

非圧縮性流体の全運動エネルギー

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}\rho\int v^2\,dV$$

の時間微分を計算しよう．Navier-Stokes 方程式より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) &= \rho v_i\frac{\partial v_i}{\partial t} \\
&= v_i\left[-\rho v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \rho\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j}\right] \\
&= -\rho v_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}v_iv_i\right) - \rho v_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\rho}\right) + v_i\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j}
\end{aligned}$$

ベクトル解析の公式より

$$\begin{aligned}
\rho v_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}v_iv_i\right) + \rho v_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\rho}\right) &= \rho\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) \\
&= \mathrm{div}\left[\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right)\right] - \rho\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right)\cancel{\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}}
\end{aligned}$$

である．また，第 j 成分が $v_i\sigma'_{ij}$ であるようなベクトルを $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma'}$ と書くことにすると

$$v_i\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(v_i\sigma'_{ij}\right) - \sigma'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \mathrm{div}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma'}) - \sigma'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

以上より

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) = -\operatorname{div}\left[\rho \boldsymbol{v}\left(\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right) - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma'}\right] - \sigma'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \tag{16.1}$$

(16.1) をある体積 V で積分してガウスの発散定理を用いると

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2}\rho v^2\, dV = -\int_S \left[\rho \boldsymbol{v}\left(\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right) - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma'}\right]\cdot d\boldsymbol{S} - \int_V \sigma'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, dV. \tag{16.2}$$

$\rho \boldsymbol{v}\left(\dfrac{v^2}{2}+\dfrac{p}{\rho}\right)$ は流体の運動によるエネルギーフラクス，$-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma'}$ は内部摩擦によるエネルギーフラックスである．よって (16.2) 右辺の面積分は，V の表面を通るエネルギーフラックスによる E_{kin} の変化率を表す．また第 2 項は，粘性散逸による E_{kin} の単位時間あたりの減少率を表す．

積分を全体積にわたって行おう．流体の体積が無限大なら，無限遠での速度は 0 であるから，面積分は 0 になる．また，流体の体積が有限であっても，表面での法線速度は 0 であるから，やはり面積分は 0 になる．よって

$$\dot{E}_{\mathrm{kin}} = -\int \sigma'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, dV$$

となる．σ'_{ij} が対称であることを用い，(15.8) を代入すると

$$\sigma'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\sigma'_{ij}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2.$$

よって非圧縮性流体のエネルギー散逸は

$$\dot{E}_{\mathrm{kin}} = -\frac{1}{2}\eta\int\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 dV \tag{16.3}$$

となる．エネルギーが散逸することで力学的エネルギーは減少するはずであるから，(16.3) は負でなければならない．よって

$$\eta > 0,$$

つまり粘性率は正である．

問題 16.1

ポテンシャル流に対して，(16.3) を面積分に書き換えよ．

【解答】 $v_i = \dfrac{\partial \phi}{\partial x_i}$ より $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}$ であるから

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 = 4\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 4\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(v_i\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) - v_i\frac{\partial^2 v_i}{\partial {x_j}^2}\right]$$

$\triangle \boldsymbol{v} = \operatorname{grad}(\triangle\phi) = 0$ より最右辺第 2 項は消える．結局

$$\begin{aligned}\dot{E}_{\mathrm{kin}} &= -2\eta\int\frac{\partial}{\partial x_j}\left(v_i\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) dV = -2\eta\int v_i\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, dS_j \\ &= -\eta\int\frac{\partial}{\partial x_j}(v_i v_i)\, dS_j = -\eta\int \operatorname{grad} v^2\cdot d\boldsymbol{S}.\end{aligned}$$

§17　管を通る流れ

ここでは，非圧縮性粘性流体の簡単な定常流を扱おう．

Couette 流

流体が 2 つの板に挟まれていて，上の板は下の板に対して一定の相対速度 $\boldsymbol{u}$ で動いているとする．x 軸を $\boldsymbol{u}$ の方向にとり，下の板を xz 平面（$y=0$），上の板を $y=h$ とする．このとき，流れは x 方向にのみ存在し，全ての量は y のみに依存することは明らかである．定常流であるから，(15.7) より

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{d^2 v}{dy^2} \\ 0 = \dfrac{dp}{dy} \end{cases}$$

となる（$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$ は自動的に満たされている）．第 2 式より $p=\text{const.}$ であり，第 1 式より $v=ay+b$ と書ける．境界条件は $y=0$ で $v=0$，$y=h$ で $v=u$ であるから

$$v(y) = u\frac{y}{h} \tag{17.1}$$

となり，流速分布は線形である．平均流速は

$$\overline{v} = \frac{1}{h}\int_0^h v(y)\,dy = \frac{u}{h^2}\frac{h^2}{2} = \frac{1}{2}u. \tag{17.2}$$

粘性応力テンソル σ'_{ij} のうち 0 でないものは

$$\sigma'_{xy} = \eta\frac{dv}{dy} = \eta\frac{u}{h}$$

である．よって (15.14) より，板に働く力の法線成分（y 成分）は一定値 p であり，接線成分（x 成分）は

$$y=0 \text{ で } \sigma_{xy} = \sigma'_{xy} = \eta\frac{u}{h}, \tag{17.3}$$

$$y=h \text{ で } -\eta\frac{u}{h}$$

となる．

> (15.14) によれば，固体が流体から受ける力の i 成分は，$\boldsymbol{n}$ を固体表面から外へ向く法線ベクトルとして $\sigma_{ij}n_j$ と表され，今の場合
>
> $$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij} = \begin{pmatrix} -p & \eta u/h & 0 \\ \eta u/h & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

である．$y=0$ の板にとっては $\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ であるから，力の x 成分は $\eta u/h$，y 成分は $-p$ であり，$y=h$ の板にとっては $\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ であるから，力の x 成分は $-\eta u/h$，y 成分は p である．

圧力勾配により駆動される流れ

次に，2 つの固定された板に挟まれた流体が，圧力勾配によって流れている場合を考えよう．

座標系は前と同様とし，流れは x 方向とする．Navier-Stokes 方程式は

$$\begin{cases} 0=-\dfrac{\partial p}{\partial x}+\eta\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ 0=\dfrac{\partial p}{\partial y} \end{cases}.$$

第 2 式より圧力は y によらず，x のみの関数である（すなわち圧力は上下方向に一様で，流れの方向にのみ変化する）．すると $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ は x のみの関数，$\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ は y のみの関数であるから，両者は定数でなければならない．つまり

$$\frac{dp}{dx}=\text{const.}$$

であり，圧力は x に比例する．管両端の圧力差を Δp，管の長さを l として $\dfrac{dp}{dx}=-\dfrac{\Delta p}{l}$ (<0) と書くことにすると，第 1 式は

$$\frac{d^2 v}{dy^2}=-\frac{\Delta p}{\eta l}.$$

$y=0,h$ で $v=0$ の条件から $v(y)$ を求めると

$$v(y)=\frac{\Delta p}{2\eta l}y(h-y). \tag{17.4}$$

となり，速度分布は $y=\dfrac{1}{2}h$ で極値

$$v_*=\frac{\Delta p h^2}{8\eta l}$$

をとる放物線型である．また平均速度は

$$\overline{v}=\frac{1}{h}\int_0^h v(y)\,dy=\frac{1}{h}\cdot\frac{\Delta p}{2\eta l}\cdot\frac{h^3}{6}=\frac{\Delta p h^2}{12\eta l} \tag{17.5}$$

であり，$v_*=\dfrac{3}{2}\overline{v}$ となることが分かる．さらに，下の板に働く摩擦力は

$$\sigma'_{xy}\Big|_{y=0}=\eta\,\frac{dv}{dy}\Big|_{y=0}=\frac{\Delta p}{2l}(h-2y)_{y=0}=\frac{\Delta p h}{2l} \tag{17.6}$$

であり，上の板に働く摩擦力も同じである．

Hagen-Poiseuille 流

最後に，任意の形の断面をもつ管の中の定常流を考えよう．但し，断面の形は管に沿って変わらないとする．管の軸方向に x 軸をとると，流れは x 軸に平行で，y, z のみの関数である．このとき連続の式は自動的に満たされる．また，Navier-Stokes 方程式の y, z 成分 $\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0$ より，圧力は管の断面内では一様で，x 方向のみに変化する．(15.7) の x 成分は

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p}{\eta l}. \tag{17.7}$$

よって流速分布 $v(y, z)$ は，$\triangle v = \mathrm{const.}$ という 2 次元 Poisson 方程式を，管断面の周上で $v = 0$ という条件で解くことで求められる．

半径 R の円形断面の管について，(17.7) を解こう．円の中心を原点とする極座標をとると，対称性から $v = v(r)$ であり，極座標でのラプラシアンの表式から

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) &= -\frac{\Delta p}{\eta l} \\
\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) &= -\frac{\Delta p}{\eta l}r \\
r\frac{dv}{dr} &= -\frac{\Delta p}{2\eta l}r^2 + a \\
\frac{dv}{dr} &= -\frac{\Delta p}{2\eta l}r + \frac{a}{r} \\
v(r) &= -\frac{\Delta p}{4\eta l}r^2 + a\log r + b. \qquad (17.8)
\end{aligned}$$

管の中心で速度が有限の値をもつためには，$a = 0$ でなければならない．また，$r = R$ で $v = 0$ という条件から b を決めると

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2 - r^2) \tag{17.9}$$

となり，この場合の流速分布も放物線的である．

管の断面を通って毎秒運ばれる流体の質量 Q（**流量**）を求めよう．半径 $r \sim r + dr$ のリングを通る流量は $dQ \simeq \rho \cdot 2\pi r dr \cdot v$ で近似できるから

$$Q = 2\pi\rho\int_0^R rv\, dr$$

となる．(17.9) を代入し

$$Q = 2\pi\rho \cdot \frac{\Delta p}{4\eta l}\int_0^R r(R^2 - r^2)\, dr = \frac{\pi\Delta p}{2\nu l}\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) = \frac{\pi\Delta p}{8\nu l}R^4 \tag{17.10}$$

を得る．つまり，流量は半径の 4 乗に比例する（**Hagen-Poiseuille の法則**）．

なお，$r = 0$ での速度を $v_* = \dfrac{\Delta p}{4\eta l}R^2$ とおくと，

$$\overline{v} = \frac{Q}{\rho\pi R^2} = \frac{\Delta p}{8\eta l}R^2 = \frac{1}{2}v_*$$

である．

⬆ 目次へ戻る

問題 17.1

内径 R_1，外径 R_2 のドーナツ状の断面をもつ管の中の流れを求めよ．

【解答】 (17.8) の定数 a, b を，境界条件：$r = R_1, R_2$ で $v = 0$ のもとで求める．但し計算の便宜のため，a, b の定義は

$$v(r) = -\frac{\Delta p}{4\eta l} r^2 + a \log\left(\frac{r}{R_2}\right) + b$$

とする．

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{\Delta p}{4\eta l} {R_1}^2 + a \log\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right) + b \\ 0 = -\dfrac{\Delta p}{4\eta l} {R_2}^2 + b \end{cases}$$

第 2 式より $b = \dfrac{\Delta p}{4\eta l} {R_2}^2$ であり，これを第 1 式に代入して

$$a \log\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = \frac{\Delta p}{4\eta l}({R_1}^2 - {R_2}^2) \qquad \therefore \quad a = \frac{\Delta p}{4\eta l} \cdot \frac{{R_2}^2 - {R_1}^2}{\log(R_2/R_1)}$$

となる．よって流速分布は

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left[{R_2}^2 - r^2 + \frac{{R_2}^2 - {R_1}^2}{\log(R_2/R_1)} \log\left(\frac{r}{R_2}\right)\right].$$

　不定積分

$$\int r \log\left(\frac{r}{R_2}\right) dr = \frac{r^2}{2} \log\left(\frac{r}{R_2}\right) - \frac{r^2}{4}$$

に注意すると

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi\rho \int_{R_1}^{R_2} rv\, dr \\ &= 2\pi\rho \cdot \frac{\Delta p}{4\eta l}\left[{R_2}^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} + \frac{{R_2}^2 - {R_1}^2}{\log(R_2/R_1)}\left\{\frac{r^2}{2} \log\left(\frac{r}{R_2}\right) - \frac{r^2}{4}\right\}\right]_{R_1}^{R_2} \\ &= \frac{\pi\Delta p}{2\nu l} \cdot \frac{1}{4}\left[2{R_2}^2({R_2}^2 - {R_1}^2) - ({R_2}^4 - {R_1}^4) + 0 - \frac{{R_2}^2 - {R_1}^2}{\cancel{\log(R_2/R_1)}}\left\{-2{R_1}^2 \cancel{\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\right\} - \frac{{R_2}^2 - {R_1}^2}{\log(R_2/R_1)}({R_2}^2 - {R_1}^2)\right] \\ &= \frac{\pi\Delta p}{8\nu l}\left[{R_2}^4 - {R_1}^4 - \frac{({R_2}^2 - {R_1}^2)^2}{\log(R_2/R_1)}\right] \end{aligned}$$

問題 17.2

楕円形の断面をもつ管の中の流れを求めよ．

【解答】 楕円の形を $\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$ とする．円は楕円の特別な場合であるから，流速分布 $v(y, z)$ は (17.9) から類推して

$$v(y, z) = v_0\left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right)$$

と書けるはずである．境界条件は満たされているから，未定の定数 v_0 を (17.7) から求めればよい．

$$v_0\left(-\frac{2}{a^2}-\frac{2}{b^2}\right)=-\frac{\Delta p}{\eta l} \qquad \therefore \quad v_0=\frac{\Delta p}{2\eta l}\cdot\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

よって，

$$v(y,z)=\frac{\Delta p}{2\eta l}\cdot\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1-\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}\right)$$

を得る．

流量は

$$Q=\int_{y^2/a^2+z^2/b^2\leqq 1}\rho v\,dydz$$

で与えられる．これを計算するために，まず変数変換 $\eta=y/a,\zeta=z/b$ により (η,ζ) 座標系に移り，次に (η,ζ) 系での極座標系に移る．

$$v=v_0(1-\eta^2-\zeta^2)=v_0(1-r^2), \quad \int_{y^2/a^2+z^2/b^2\leqq 1}dydz=\int_0^1 ab\cdot 2\pi r\,dr$$

であるから

$$Q=\rho v_0\cdot 2\pi ab\int_0^1 r(1-r^2)dr=\rho\frac{\Delta p}{2\eta l}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\cdot 2\pi ab\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi\Delta p}{4\nu l}\cdot\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}$$

問題 17.3

1 辺の長さが a の正三角形の断面をもつ管の中の流れを求めよ．

【解答】 正三角形内の任意の点 P から三辺に下ろした垂線の長さを h_1,h_2,h_3 とすると，解は

$$v=v_0\,h_1h_2h_3$$

と書ける（これは明らかに境界条件を満たす）．まずはこのことを証明しよう．

Landau 本文では幾何的に証明されているが，ここでは座標を導入する．

図のように座標を設定し，P(y,z) とおく．三辺の方程式は $z=0, y+\dfrac{z}{\sqrt{3}}=\dfrac{a}{2}, -y+\dfrac{z}{\sqrt{3}}=\dfrac{a}{2}$ であるから，点と直線の距離の公式より

$$h_1=z,\ h_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{a}{2}-y-\frac{z}{\sqrt{3}}\right),\ h_3=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{a}{2}+y-\frac{z}{\sqrt{3}}\right)$$

となり，

$$v=v_0\,h_1h_2h_3=\frac{3}{4}v_0z\left[\left(\frac{a}{2}-\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^2-y^2\right].$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}&=\frac{3}{4}v_0\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)z\left[\left(\frac{a}{2}-\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^2-y^2\right]\\&=\frac{3}{4}v_0\left[-2z+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{a^2}{4}z-\frac{a}{\sqrt{3}}z^2+\frac{1}{3}z^3\right)\right]\\&=\frac{3}{4}v_0\left(-2z-\frac{2a}{\sqrt{3}}+2z\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}av_0\end{aligned}$$

は定数となり (17.7) を満たす．これと $-\dfrac{\Delta p}{\eta l}$ を比べ $v_0 = \dfrac{2}{\sqrt{3}a} \cdot \dfrac{\Delta p}{\eta l}$ となるから

$$v = \frac{2}{\sqrt{3}a} \cdot \frac{\Delta p}{\eta l} h_1 h_2 h_3 = \frac{\sqrt{3}\Delta p}{2\eta l a} z \left[\left(\frac{a}{2} - \frac{z}{\sqrt{3}} \right)^2 - y^2 \right].$$

流量は

$$\begin{aligned}
Q &= \int \rho v \, dydz \\
&= \frac{\sqrt{3}\Delta p}{2\nu l a} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} dz \int_{-(\frac{a}{2} - \frac{z}{\sqrt{3}})}^{\frac{a}{2} - \frac{z}{\sqrt{3}}} dy \cdot z \left[\left(\frac{a}{2} - \frac{z}{\sqrt{3}} \right)^2 - y^2 \right] \\
&= \frac{\sqrt{3}\Delta p}{2\nu l a} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} dz \cdot z \cdot \frac{1}{6} \left\{ 2 \left(\frac{a}{2} - \frac{z}{\sqrt{3}} \right) \right\}^3 \\
&= \frac{\sqrt{3}\Delta p}{2\nu l a} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^3 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} dz \cdot z \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a - z \right)^3 \\
&= \frac{\sqrt{3}\Delta p}{2\nu l a} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^3 \cdot \frac{1}{20} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a \right)^5 = \frac{\sqrt{3}\Delta p a^4}{320 \nu l}.
\end{aligned}$$

※流量の積分計算では（いわゆる）1/6 公式

$$-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\, dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

および 1/20 公式（？）

$$-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^3\, dx = \frac{1}{20}(\beta - \alpha)^5$$

を用いた．

問題 17.4

共通の軸をもつ 2 つの円筒があり，外側の円筒は半径 R_2 で静止し，内側の円筒は半径 R_1 で速度 u で軸の方向に動いている．2 つの円筒間の流体の運動を求めよ．

【解答】 円筒の軸を z 軸とする円筒座標を用い，流れは z 方向を向いているとする．流れは r のみに依存し $v_z = v(r)$ と書ける．また，移流項が 0 になること，圧力が r のみに依存することは容易に分かる（z 方向の圧力勾配はないという仮定であろう）．Navier-Stokes 方程式の z 成分から

$$\triangle v = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{dv}{dr} \right) = 0 \qquad \therefore \quad v = a \log r + b.$$

境界条件：$r = R_1$ で $v = u$，$r = R_2$ で $v = 0$ から定数 a, b を求めよう．

$$\begin{cases} u = a \log R_1 + b \\ 0 = a \log R_2 + b \end{cases} \qquad \therefore \quad u = a \log(R_1/R_2)$$

$$a = \frac{u}{\log(R_1/R_2)} \ (< 0), \quad b = -a \log R_2 = -u \frac{\log R_2}{\log(R_1/R_2)}$$

よって

$$v = u\frac{\log(r/R_2)}{\log(R_1/R_2)} = u\frac{\log(R_2/r)}{\log(R_2/R_1)}$$

を得る．

円筒の単位長さに働く摩擦力を求めよう．ゼロでない粘性応力テンソルは

$$\sigma'_{zr} = \eta\frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{\eta u}{r\log(R_2/R_1)}$$

のみであるから，内側の円筒（単位長さあたりの表面積は $2\pi R_1$）に働く摩擦力の z 成分は

$$2\pi R_1\ \sigma'_{zr}\Big|_{r=R_1} = -\frac{2\pi\eta u}{\log(R_2/R_1)}.$$

同様に外側の円筒については $\dfrac{2\pi\eta u}{\log(R_2/R_1)}$ である．

問題 17.5

水平面に対して角度 α で傾いている板の上に，厚さ h の流体層があり，上面は自由表面である．重力により生じる流れを求めよ．

【解答】 板の表面を xy 平面とし，x 軸は流れの方向，z 軸は板から自由表面へ向かう方向にとる．流れは z のみに依存し $v_x = v(z)$ となる．重力場中の Navier-Stokes 方程式より

$$\begin{cases} 0 = \eta\dfrac{d^2v}{dz^2} + \rho g\sin\alpha \\ 0 = -\dfrac{dp}{dz} - \rho g\cos\alpha \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} v = -\dfrac{g\sin\alpha}{2\nu}z^2 + az + b \\ p = -\rho g z\cos\alpha + c \end{cases} .$$

境界条件：$z = h$（自由表面）で $\sigma_{xz} = \eta\dfrac{dv}{dz} = 0,\ \sigma_{zz} = -p = -p_0$（大気圧），$z = 0$ で $v = 0$ から定数 a, b, c を決める．

$$\frac{dv}{dz}\Big|_{z=h} = -\frac{g\sin\alpha}{\nu}h + a = 0 \qquad \therefore \quad a = \frac{gh\sin\alpha}{\nu}$$

$$p\Big|_{z=h} = -\rho g h\cos\alpha + c = p_0 \qquad \therefore \quad c = p_0 + \rho g h\cos\alpha$$

$$v\Big|_{z=0} = b = 0$$

以上より

$$\begin{cases} v = \dfrac{g\sin\alpha}{2\nu}(-z^2 + 2hz) = \dfrac{g\sin\alpha}{2\nu}\left[h^2 - (z-h)^2\right] \\ p = p_0 - \rho g\cos\alpha(z-h) \end{cases}$$

y 方向の単位長さを通過する流量は

$$Q = \rho\int_0^h v\,dz = \frac{\rho g\sin\alpha}{2\nu}\left(-\frac{h^3}{3} + h^3\right) = \frac{\rho g h^3\sin\alpha}{3\nu}$$

問題 17.6

等温の粘性理想気体が円形断面（半径 R）の管の中を流れているとき，圧力がどのように減少するか求めよ（理想気体の粘性率 η は圧力によらないことに注意せよ）．

【解答】 (17.10) より

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{8\eta Q}{\pi\rho R^4}. \qquad ①$$

流量 Q は，気体が圧縮性・非圧縮性のどちらであっても一定である．

- 管の短い区間では，圧力勾配が非常に大きくない限り，気体を非圧縮とみなすことができる．つまり，ρ は定数であり，①が圧力変化を与える．
- 管の長い区間を考えるときには，ρ は変化しうるから，もはや p は x の 1 次関数ではなくなる．分子量を m，ボルツマン定数を k_B とすると $\rho = \dfrac{mp}{k_B T}$ であるから，①に代入して

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{8\eta Q k_B T}{\pi m R^4}\cdot\frac{1}{p} \qquad \therefore \quad -pdp = \frac{8\eta Q k_B T}{\pi m R^4}dx$$

両辺を積分し，両端の圧力を p_1, p_2，管の長さを l とすれば

$$p_1{}^2 - p_2{}^2 = \frac{16\eta Q k_B T}{\pi m R^4} l$$

⬆ 目次へ戻る

§18　回転する 2 円筒の間の流れ

軸方向の長さが無限大で，半径 $R_1 < R_2$ の同軸 2 円筒の間の定常流を考えよう．2 つの円筒はそれぞれ角速度 Ω_1, Ω_2 で軸のまわりを回転しているとする．円筒の軸を z 軸とする円筒座標系 (r, ϕ, z) では，対称性から

$$v_z = v_r = 0, \quad v_\phi = v(r), \quad p = p(r)$$

であり，円筒座標系での Navier-Stokes 方程式は

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\rho v^2}{r} \tag{18.1}$$

$$0 = \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} \tag{18.2}$$

となる（連続の式は恒等的に満たされている）．(18.2) は $v \sim r^n$ という解を持つ．代入して

$$n(n-1)r^{n-2} + nr^{n-2} - r^{n-2} = 0 \qquad \therefore \quad n = \pm 1.$$

よって $v = ar + \dfrac{b}{r}$ と書ける．定数 a, b は境界条件：$r = R_1$ で $v = \Omega_1 R_1$，$r = R_2$ で $v = \Omega_2 R_2$ から決まる．

$$\Omega_1 R_1 = aR_1 + \frac{b}{R_1} \qquad ①$$

$$\Omega_2 R_2 = aR_2 + \frac{b}{R_2} \qquad ②$$

② $\times R_2 -$ ① $\times R_1$ より

$$\Omega_2 {R_2}^2 - \Omega_1 {R_1}^2 = a({R_2}^2 - {R_1}^2) \qquad \therefore \quad a = \frac{\Omega_2 {R_2}^2 - \Omega_1 {R_1}^2}{{R_2}^2 - {R_1}^2}.$$

① $\div R_1 -$ ② $\div R_2$ より

$$\Omega_1 - \Omega_2 = b\left(\frac{1}{{R_1}^2} - \frac{1}{{R_2}^2}\right) \qquad \therefore \quad b = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)(R_1 R_2)^2}{{R_2}^2 - {R_1}^2}.$$

よって

$$v = \frac{\Omega_2 {R_2}^2 - \Omega_1 {R_1}^2}{{R_2}^2 - {R_1}^2} \cdot r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)(R_1 R_2)^2}{{R_2}^2 - {R_1}^2} \cdot \frac{1}{r} \tag{18.3}$$

となる．圧力は，(18.3) を (18.1) へ代入して積分すれば求められるが，省略する．

特別な場合として，

- $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ のとき $v = \Omega r$ となり，流体は円筒とともに剛体回転する．
- 外側の円筒がないとき（$\Omega_2 = 0, R_2 \to \infty$）

$$v = \frac{\Omega_2 - \Omega_1 (R_1/R_2)^2}{1 - (R_1/R_2)^2} \cdot r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2){R_1}^2}{1 - (R_1/R_2)^2} \cdot \frac{1}{r} \to \frac{\Omega_1 {R_1}^2}{r}$$

となり，これは自由渦と呼ばれている．

円筒に働く摩擦力のモーメントを求めよう．まず，内側の円筒の単位面積に働く摩擦力は ϕ 方向で，大きさは粘性応力テンソル

$$\begin{aligned} \sigma'_{r\phi}\Big|_{r=R_1} &= \eta\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r}\right)_{r=R_1} \\ &= \eta\left(a - \frac{b}{r^2} - a - \frac{b}{r^2}\right)_{r=R_1} \\ &= -\frac{2\eta b}{{R_1}^2} = -2\eta \frac{(\Omega_1 - \Omega_2){R_2}^2}{{R_2}^2 - {R_1}^2} \end{aligned}$$

である．これに周長 $2\pi R_1$ をかけると，（内側）円筒の単位長さに働く摩擦力になり，さらに R_1 をかけると，モーメントが得られる：

$$M_1 = -4\pi\eta \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)(R_1 R_2)^2}{{R_2}^2 - {R_1}^2} \tag{18.4}$$

外側の円筒に働くモーメントは，分子の R_1, R_2 を交換し，（表面の法線ベクトルが逆向きであることから）符号を変えたもので $M_2 = -M_1$ である．

♠ 外側の円筒が回転しておらず（$\Omega_2 = 0$），円筒間の間隔が小さいとき（$\delta \equiv R_2 - R_1 \ll R_1$），$R_1, R_2$ をまとめて R と書くと $(R_1 R_2)^2 \simeq R^4$，${R_2}^2 - {R_1}^2 = (R_2 - R_1)(R_2 + R_1) \simeq \delta \cdot 2R$ であるから

$$M_2 = +4\pi\eta \frac{\Omega_1 R^4}{\delta \cdot 2R} = \frac{\eta R S u}{\delta}.$$

ここで $S \simeq 2\pi R$ は単位長さの円筒の表面積，$u = \Omega_1 R$ は内側の円筒の回転速度である．

ここで，§ 17,18 で得られた，粘性流体の運動方程式の解について注意を述べておこう．以上の場合では，速度分布を決める式で，非線形項 $(\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad})\boldsymbol{v}$ は自動的に 0 となり，実際には線形方程式を解いたために，問題

は著しく簡単になった．このため，これらの解はすべて非圧縮性流体の運動方程式 (10.2),(10.3) も満たしている．(17.1),(18.3) に粘性係数が含まれないのはこのためである．

粘性係数が現れるのは，(17.9) のように速度が圧力勾配と関係する場合のみである；理想流体では圧力勾配がなくても管の中に流れが生じうるが，粘性流体では粘性によって圧力勾配が生じる．

⬆ 目次へ戻る

§19　相似則

粘性流体の運動を論じる際，物理量の次元解析により数々の重要な結果を得ることができる．ここでは，ある形の物体まわりの流れなど，特定の運動を考える．もし物体が球でなければ，流れの方向も指定する．あるいは，与えられた断面内の流れなど，境界で区切られた流れを考えてもよい．

このような場合，同じ形状の物体は**幾何学的に相似**であり，一方から他方に移るには，すべての長さの次元を同じ比だけ変えてやればよい．したがって，物体の形状が与えられているなら，その大きさを完全に知るためには，長さの次元（球や円筒の半径など）を 1 つ指定すれば十分である．

問題を明確にするために，物体まわりの流れを論ずることにし，まずは定常流を考える．すると主流の速度は一定である（u とする）．

流体そのものの性質を表すパラメータとしては，動粘性率 $\nu = \eta/\rho$ のみが流体力学の方程式の中に現れる (非圧縮性流体を仮定する)．方程式の未知数としては，速度 $\boldsymbol{v}$ と，密度に対する圧力の比 p/ρ があるが，これらは境界条件を通じて物体の形や大きさ，速度に依存する．物体の形は与えられているので，物体の幾何学的性質は長さの次元 l により決まる．このとき，どのような流れも，3 つのパラメータ ν, u, l で指定される．これらの次元は（SI 単位系で）

$$\nu : \mathrm{m^2/s}, \quad l : \mathrm{m}, \quad u : \mathrm{m/s}$$

である．これらの量から無次元量を作ってみよう．

$$\nu^\alpha l^\beta u^\gamma : \mathrm{m}^{2\alpha+\beta+\gamma}\,\mathrm{s}^{-\alpha-\gamma}$$

より $2\alpha+\beta+\gamma = 0, \alpha+\gamma = 0$ であり，$\gamma = 1$ とすると $\alpha = -1, \beta = 1$ となる．つまり，3 つのパラメータから作られる無次元量は **Reynolds 数**

$$\mathrm{R} \equiv \frac{ul}{\nu} = \frac{\rho u l}{\eta} \tag{19.1}$$

のみであり，他の無次元量は R だけの関数となる．Reynolds 数は，粘性項 $\sim \dfrac{\nu u}{l^2}$ に対する移流項 $\sim \dfrac{u^2}{l}$ の比とみなすことができる．

さて，長さは l を，速さは u を単位として測ることにしよう．つまり，無次元の変数 $\dfrac{\boldsymbol{r}}{l}, \dfrac{\boldsymbol{v}}{u}$ を導入する．無次元のパラメータは Reynolds 数のみであるから，非圧縮性（粘性）流体の運動方程式を解いて得られる速度は

$$\boldsymbol{v} = u\,\boldsymbol{f}\Big(\frac{\boldsymbol{r}}{l}, \mathrm{R}\Big) \tag{19.2}$$

と書くことができる．(19.2) から，同じ種類の 2 つの流れ（例えば，異なる半径の球のまわりの，粘性の異なる流れ）において，Reynolds 数が双方で等しければ，速度 $\dfrac{\boldsymbol{v}}{u}$ は $\dfrac{\boldsymbol{r}}{l}$ の同じ関数となる．長さや速度の単位を変えることにより一方から他方の流れが得られる場合，2 つの流れは**相似**であるという．つまり，Reynolds 数が等しい同じ種類の流れは相似である．これは**相似則**と呼ばれる（O. Reynolds 1883)．

(19.2) と同様の式は，圧力に関しても得ることができる．そのためには，ν, u, l から (圧力)/(密度) = (速度)^2 の次元を作る必要があり，それは例えば u^2 である．よって，無次元化した圧力 $\dfrac{p}{\rho u^2}$ は，無次元化座標 $\dfrac{\boldsymbol{r}}{l}$ と無次元パラメータ R の関数である．

$$p = \rho u^2 f\left(\frac{\boldsymbol{r}}{l}, \mathrm{R}\right) \tag{19.3}$$

次に，流れを特徴づける量のうち，座標に依存しないもの，例えば物体に働く抗力 F について，同様の議論を行おう．ν, u, l, ρ（F は単位質量あたりではない，普通の力であるから，ρ が必要である）から作られる，力の次元をもつ量は，例えば $\rho u^2 l^2$ である．よって

$$F = \rho u^2 l^2 f(\mathrm{R}). \tag{19.4}$$

続いて，流れにおいて重力が重要な役割を果たす場合を考えよう．この場合，流れは 4 つのパラメータ ν, u, l, g（重力加速度）によって指定される．ここから 2 つの独立な無次元量を作ることができる．それは例えば，Reynolds 数と **Froude 数**

$$\mathrm{F} = \frac{u^2}{gl} \tag{19.5}$$

である．

> 文献によっては，$\dfrac{u}{\sqrt{gl}}$ を Froude 数として定義しているものもある．Landau の定義は，重力項 g に対する移流項 $\sim \dfrac{u^2}{l}$ の比とみなすことができる．また $\dfrac{u}{\sqrt{gl}}$ は，表面と伝わる（微小振幅の）長波の速度に対する主流の速度の比とみなすことができる．

この場合，(19.2)〜(19.4) の関数 f は，2 つのパラメータ R, F に依存し，両者が同じ値をもつ流れは相似である．

最後に，非定常流について触れておこう．非定常流は，ν, u, l だけでなく，流れの代表的な時間スケール τ によっても特徴付けられる．例えばある形の物体が流体中で振動しているなら，τ は振動の周期である．ν, u, l, τ から，2 つの独立な無次元量を作ることができる．それは例えば，Reynolds 数と **Strouhal 数**

$$\mathrm{S} = \frac{u\tau}{l} \tag{19.6}$$

である（逆数 $\dfrac{l}{u\tau}$ で定義する文献もある）．これは，慣性項 $\sim \dfrac{u}{\tau}$ に対する移流項 $\sim \dfrac{u^2}{l}$ の比とみなすことができる．この場合，パラメータ R, S が同じ値をとるとき，流れは相似である．

なお，振動が（外力の作用によらず）自発的に起こった場合，S は運動の種類によって決まる R の関数となる：

$$\mathrm{S} = f(\mathrm{R}).$$

⬆ 目次へ戻る

§20 ♠ 小 Reynolds 数での流れ

Reynolds 数が小さいとき，Navier-Stokes 方程式はかなり簡単になる．非圧縮性流体の定常流の場合，方程式は

$$(\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad})\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\, p + \frac{\eta}{\rho}\triangle \boldsymbol{v}$$

となる．主流の速度を u，物体の大きさを l とすると，$(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v}$ は u^2/l，$(\eta/\rho)\triangle\boldsymbol{v}$ は $\nu u/l^2$ のオーダーであり，両者の比 $\dfrac{u^2/l}{\nu u/l^2}=\dfrac{ul}{\nu}$ がちょうど Reynolds 数である．したがって，Reynolds 数が小さければ移流項を粘性項に比べて無視することができ，方程式は線形になる．

$$\eta\triangle\boldsymbol{v}-\mathrm{grad}\,p=0 \tag{20.1}$$

この式と連続の式

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0 \tag{20.2}$$

（および境界条件）により，運動が完全に決まる．また，(20.1) の rot をとった式

$$\triangle(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})=0 \tag{20.3}$$

も有用である．

例として，粘性流体中を球が一様な直線運動をする場合を考えよう（G. G. Stokes 1851）．この問題は明らかに，固定された球のまわりに生じる，無限遠で速度が $\boldsymbol{u}$ で一定となる流れの問題と等価である．最初の問題（球が動く問題）の速度分布は，2 番目の問題（球が静止している問題）の速度分布から速度 $\boldsymbol{u}$ を差し引くことで得られる；そうすれば流体は無限遠で静止し，球は一様な速度 $-\boldsymbol{u}$ で動く．

今考えている定常流の場合には，（2 番目の）固定された球のまわりの流れとして（つまり球にとっての静止系で）考えなければならない．なぜなら，（1 番目の）球が動く問題では，流体の速度が時間とともに変化してしまうからである．

$\mathrm{div}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})=\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0$ であるから，$\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}$ はあるベクトル $\boldsymbol{A}$ の rot として表すことができる；

$$\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$$

（但し $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ は無限遠で 0 になる）．$\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}$ は極性ベクトルであるから $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ も極性ベクトルであり，$\boldsymbol{A}$ は軸性ベクトルでなければならない[*4]．

さて，$\boldsymbol{A}$ は動径ベクトル $\boldsymbol{r}$ と，速度 $\boldsymbol{u}$ というパラメータに依存する（原点は球の中心にとる）．これらは極性ベクトルである．また，運動方程式と境界条件の線形性から，$\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{u}$ の 1 次関数でなければならない．極性ベクトル $\boldsymbol{r},\boldsymbol{u}$ から作られる軸性ベクトルは $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u}$ または $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u}$ であり，$\boldsymbol{A}=f'(r)\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u}$ と書けるはずである（ここで $\boldsymbol{n}$ は球の中心を原点にとったときの，位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ に平行な単位ベクトルであり，$f'(r)$ は r のスカラー関数の微分である）．$f'(r)\boldsymbol{n}=\mathrm{grad}\,f$ であるから結局

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,f\times\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}+\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}(f\boldsymbol{u}). \tag{20.4}$$

最後の等号は，$\mathrm{rot}(f\boldsymbol{u})=\boldsymbol{\nabla}f\times\boldsymbol{u}+f\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$ で $\boldsymbol{u}$ が一定であることを用いた．

Landau を読んでも $\boldsymbol{A}=f'(r)\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u}$ と書ける理由が今ひとつわからないが，こういうものだと思って先に進むことにする．同様の論法はこの後も何回か出てくる．

関数 f を求めるために，式 (20.3) を用いよう．

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}=\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}(f\boldsymbol{u})=(\mathrm{grad}\,\mathrm{div}-\triangle)\,\mathrm{rot}(f\boldsymbol{u})=-\triangle\,\mathrm{rot}(f\boldsymbol{u})$$

より

$$\begin{aligned}0&=\triangle(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})=-\triangle^2\,\mathrm{rot}(f\boldsymbol{u})\\&=-\triangle^2(\mathrm{grad}\,f\times\boldsymbol{u})=-\triangle^2(\mathrm{grad}\,f)\times\boldsymbol{u},\end{aligned}$$

[*4] ∇ は極性ベクトルであり，（極性）×（軸性）＝（極性）

$$\therefore \quad \triangle^2 \,\mathrm{grad}\, f = 0. \tag{20.5}$$

1 回積分して

$$\triangle^2 f = \mathrm{const.}$$

Landau に載っている，const. を 0 とおいてよい理由が今ひとつわからない．ここでは（後の都合も考え）積分定数を残したまま議論を進めることにする．

$\triangle = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{d}{dr}\right)$ を代入して 4 回積分すると，最終的に

$$f(r) = C_1 r^4 + C_2 r^2 + C_3 r + \frac{C_4}{r} + C_5 \tag{①}$$

を得る．定数 C_5 は結果に影響しないから除いてよい．また，速度は f の 2 階（以下の）微分で与えられるから，それらを計算してみると

$$f'(r) = 4C_1 r^3 + 2C_2 r + C_3 - \frac{C_4}{r^2}, \tag{②}$$

$$f''(r) = 12C_1 r^2 + 2C_2 + \frac{2C_4}{r^3}. \tag{③}$$

この問題では，$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ は無限遠で 0 とならなければならないから，$C_1 = C_2 = 0$ となる．C_3, C_4 を改めて a, b と書けば

$$f = ar + \frac{b}{r}. \tag{20.6}$$

$$\mathrm{grad}(r) = \frac{\boldsymbol{r}}{r},\ \mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3},\ \mathrm{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3\boldsymbol{r}}{r^5}$$

に注意すると

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}(f\boldsymbol{u}) &= \mathrm{grad}\,\mathrm{div}(f\boldsymbol{u}) - \triangle(f\boldsymbol{u}) \\
&= \mathrm{grad}(\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad}\, f) - \boldsymbol{u}\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, f \\
&= \mathrm{grad}\left[\boldsymbol{u}\cdot\left(\frac{a\boldsymbol{r}}{r} - \frac{b\boldsymbol{r}}{r^3}\right)\right] - \boldsymbol{u}\,\mathrm{div}\left(\frac{a\boldsymbol{r}}{r} - \frac{b\boldsymbol{r}}{r^3}\right) \\
&= a\left[\frac{1}{r}\mathrm{grad}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r})\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right)\right] - b\left[\frac{1}{r^3}\mathrm{grad}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r})\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right] \\
&\quad - \boldsymbol{u}\left[a\left\{\frac{1}{r}\mathrm{div}\,\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}\cdot\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} - b\left\{\frac{1}{r^3}\mathrm{div}\,\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}\cdot\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right\}\right] \\
&= a\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r} - \frac{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^3}\right) - b\left(\frac{\boldsymbol{u}}{r^3} - \frac{3(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}\right) - \boldsymbol{u}\left[a\left(\frac{3}{r} - \frac{r^2}{r^3}\right) - b\cancel{\left(\frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5}\right)}\right] \\
&= -a\frac{\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}}{r} + b\frac{3(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{u}}{r^3}
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} - a\frac{\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}}{r} + b\frac{3(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{u}}{r^3}. \tag{20.7}$$

定数 a と b は，球の表面 $r = R$ で $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ という境界条件から決まる．

$$\boldsymbol{u}\left(1 - \frac{a}{R} - \frac{b}{R^3}\right) + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\left(-\frac{a}{R} + \frac{3b}{R^3}\right) = \boldsymbol{0}$$

これがあらゆる方向の $\boldsymbol{n}$ に対して成り立つためには，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})$ の係数はそれぞれ 0 でなければならない．よって

$$1-\frac{a}{R}-\frac{b}{R^3}=0, \quad -\frac{a}{R}+\frac{3b}{R^3}=0 \qquad \therefore \quad a=\frac{3}{4}R,\ b=\frac{1}{4}R^3.$$

結局

$$f=\frac{3}{4}Rr+\frac{1}{4}\frac{R^3}{r}, \tag{20.8}$$

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}-\frac{3}{4}R\frac{\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}}{r}+\frac{R^3}{4}\frac{3(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}-\boldsymbol{u}}{r^3} \tag{20.9}$$

を得る．

$\boldsymbol{u}$ の方向を極軸とする球座標系での成分を書き下そう．動径方向の成分は，$\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{n}$ 方向へ射影したものであるから

$$v_r=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\left[1-\frac{3R}{4r}\cdot 2+\frac{R^3}{4r^3}\cdot 2\right].$$

偏角方向の成分 v_θ を求めるために，$\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v}=\alpha\boldsymbol{u}+\beta(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$ という形をしていることに着目しよう．v_θ の方向は $\boldsymbol{n}$ と垂直であるから，$\beta(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$ は v_θ に寄与しない．よって $\alpha\boldsymbol{u}$ を動径方向と垂直な方向に射影した $-\alpha u\sin\theta$ が v_θ である．以上より

$$\begin{cases} v_r=u\cos\theta\left(1-\dfrac{3R}{2r}+\dfrac{R^3}{2r^3}\right) \\ v_\theta=-u\sin\theta\left(1-\dfrac{3R}{4r}-\dfrac{R^3}{4r^3}\right) \end{cases} . \tag{20.10}$$

こうして，運動する球のまわりの流速分布が得られた．

圧力を求めるため，(20.4) を (20.1) に代入する．

$$\operatorname{grad}p=\eta\triangle\boldsymbol{v}=\eta\triangle[\cancel{\boldsymbol{u}}+\operatorname{rot}\operatorname{rot}(f\boldsymbol{u})]=\eta\triangle[\operatorname{grad}\operatorname{div}(f\boldsymbol{u})-\boldsymbol{u}\triangle f]=\eta\operatorname{grad}[\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{grad}(\triangle f)]$$

（途中で $\triangle^2 f=0$ を用いた）p_0 を無限遠での流体の圧力として

$$p=p_0+\eta\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{grad}\triangle f \tag{20.11}$$

を得る．ここで

$$\triangle f=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d}{dr}\left(ar+\frac{b}{r}\right)\right]=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\left(a-\frac{b}{r^2}\right)\right]=\frac{2a}{r},$$

$$\operatorname{grad}(\triangle f)=\frac{-2a\boldsymbol{r}}{r^3}=-\frac{3R\boldsymbol{n}}{2r^2}$$

であるから

$$p=p_0-\frac{3\eta R(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})}{2r^2} \tag{20.12}$$

を得る．

以上の式を用いて，運動する流体が固定球に及ぼす力 $\boldsymbol{F}$（あるいは，同じことだが，無限遠で静止している流体中を球が運動するときに受ける抗力）を計算することができる．引き続き，$\boldsymbol{u}$ の方向を極軸とする球座標系で考えることにすると，すべての量は球の中心からの距離 r と極軸から測った角度 θ だけの関数である．

球の面積要素 dS にはたらく力は，ベクトル $\boldsymbol{n}$ が球の外側に向かっていることに注意すると，(15.14) より

$$-p\boldsymbol{n}+\sigma'_{rr}\boldsymbol{n}+\sigma'_{r\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}. \tag{④}$$

力 $\boldsymbol{F}$ は速度 $\boldsymbol{u}$ と平行であるから，④を $\boldsymbol{u}$ 方向に射影して球の表面全体で積分したものが力の大きさである：

$$F = \int dS(-p\cos\theta + \sigma'_{rr}\cos\theta - \sigma'_{r\theta}\sin\theta) \tag{20.13}$$

(15.20) に (20.10) を代入し $r = R$ とおくと

$$\sigma'_{rr}\bigg|_{r=R} = 2\eta\,\frac{\partial v_r}{\partial r}\bigg|_{r=R} = 2\eta u\cos\theta\left(\frac{3R}{2r^2} - \frac{3R^3}{2r^4}\right)_{r=R} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\sigma'_{r\theta}\bigg|_{r=R} &= \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)_{r=R} \\
&= \eta\left[-\frac{u\sin\theta}{r}\cancel{\left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3}\right)} - u\sin\theta\left(\frac{3R}{4r^2} + \frac{3R^3}{4r^4}\right) - \frac{u\sin\theta}{r}\cancel{\left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3}\right)}\right]_{r=R} \\
&= -\frac{3\eta}{2R}u\sin\theta.
\end{aligned}$$

また，表面での圧力は (20.12) より

$$p = p_0 - \frac{3\eta}{2R}u\cos\theta.$$

よって

$$F = \int dS\left(-p_0\cos\theta + \frac{3\eta}{2R}u\cos^2\theta + \frac{3\eta}{2R}u\sin^2\theta\right) = -p_0\int dS\cos\theta + \frac{3\eta u}{2R}\int dS.$$

$\displaystyle\int dS$ は球の表面積 $4\pi R^2$ に等しい．また

$$\int dS\cos\theta = 2\pi R^2\int_0^\pi \sin\theta\cos\theta\,d\theta = 0$$

である．以上より

$$F = 6\pi\eta Ru. \tag{20.14}$$

これは Stokes **の法則**と呼ばれる[*5]．

抗力は，速度 u と物体の大きさ R に比例しているが，これは次元解析から予想できたことである：以上の議論の出発点である (20.1),(20.2) には密度 ρ が含まれないから，力 F は，η, R, u で表されなければならない．この 3 数から作られる，力の次元をもつ組み合わせは ηRu のみである．

ゆっくりと運動する球以外の物体に対しても，(20.14) と同様の依存性がある．ただし，任意の形状の物体に働く抗力 $\boldsymbol{F}$ の方向が $\boldsymbol{u}$ と平行とは限らないから，一般に

$$F_i = \eta a_{ij}u_j \tag{20.15}$$

と書ける．ここで a_{ij} は速度によらない 2 階のテンソルである．このテンソルが対称であることは，散逸を伴うゆっくりとした運動について一般に成り立つ Onsager の相反定理の帰結である（ただし速度についての線形近似が成り立つ場合）．『統計物理学』§ 121 参照．

[*5] 後の応用のために，(20.7) で定数 a, b を決めずに計算した式を書いておくと

$$F = 8\pi\eta au \tag{20.14a}$$

となる．なお Lamb には，任意形状の楕円体に対する抗力の式が書いてあるとのこと．

Stokes の法則の精密化

Oseen 近似

球のまわりの流れの問題に対する上記の解は，球から離れたところでは，たとえ Reynolds 数が小さくても成り立たない．これを明らかにするために，(20.1) で無視した $(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v}$ の大きさを見積もってみよう．(20.9) によると，r が大きいとき $\boldsymbol{v}$ は u のオーダー，速度の微分は uR/r^2 のオーダーである．よって $(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v}$ は u^2R/r^2 のオーダーになる．圧力傾度力 $\mathrm{grad}\,p/\rho$ は，(20.12) から見積もって $\eta uR/\rho r^3$ のオーダーであり，粘性項 $\nu\triangle\boldsymbol{v}$ も $\nu uR/r^3$ のオーダーである．以上より，$(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v}$ を他の項に比べて無視できるのは

$$\frac{u^2R}{r^2}\ll\frac{\nu uR}{r^3}\qquad\therefore\quad r\ll\frac{\nu}{u}\tag{20.16}$$

程度の距離だけである．よって球から離れると，$(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v}$ はもはや無視できなくなり，求めた速度分布は正しくなくなる．

球から離れたところでの速度分布を求めるためには，(20.1) で省略した $(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v}$ の項を考慮しなければならない．この距離では $\boldsymbol{v}$ はほとんど $\boldsymbol{u}$ に等しいから，$\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}$ を近似的に $\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad}$ で置き換えることができる．よって，球から離れたところでの速度は，線形の方程式

$$(\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p+\nu\triangle\boldsymbol{v}\tag{20.17}$$

に従う（**Oseen 近似**）．

ここでは，(20.17) の解を求める手順は省略するが，得られた速度分布を用いることにより，球に働く抗力の正確な式

$$F=6\pi\eta Ru\left(1+\frac{3uR}{8\nu}\right)\tag{20.18}$$

が導かれることに触れておく（これは Reynolds 数 $\mathrm{R}=uR/\nu$ の 1 次までの展開になっている）．

Navier-Stokes 方程式に基づく Stokes の法則の精密化

Goldstein（1929）は，Oseen 方程式の解を Reynolds 数の級数に展開し，次の結果を得た．

$$F=6\pi\eta Ru\left(1+\frac{3}{8}\mathrm{R}-\frac{19}{320}\mathrm{R}^2+\cdots\right)$$

この式は一見それらしく見えるが，実は正しくない．というのは，この式は Oseen 方程式に基づくものではあっても，Navier-Stokes 方程式に基づくものではないからである．Navier-Stokes 方程式に基づく計算は Proudman と Pearson（1957）によって始められ，Chester と Breach（1969）が

$$F=6\pi\eta Ru\left[1+\frac{3}{8}\mathrm{R}+\frac{9}{40}\mathrm{R}^2\left(\log\mathrm{R}+C+\frac{5}{3}\log 2-\frac{323}{360}\right)+\cdots\right]$$

という結果を得ている（$C=0.577\cdots$ は Euler の定数）．Goldstein の結果は最初の 2 項しか正しくないことが分かる．

摂動法の詳細については，省略する．

問題 20.1

半径 $R_1<R_2$ の 2 つの同心球が，角速度 Ω_1,Ω_2 で一様に回転している．Reynolds 数 $\Omega_1{R_1}^2/\nu\ll 1$，$\Omega_2{R_2}^2/\nu\ll 1$ のとき，球の間を占める流体の運動を求めよ．

【解答】 運動方程式 (20.1) の線形性から，回転している 2 つの球の間の流体の運動は，一方が静止し他方が回転している場合の解を重ね合わせることで得られる．まずは $\Omega_2 = 0$，つまり内側の球が回転している場合を考えよう．

回転軸を極軸とする球座標系をとる．極軸に垂直な断面内では，流体の速度は ϕ 成分のみが 0 でない．また対称性から $\partial p/\partial\phi = 0$ である．よって (20.1) は $\triangle\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$（より正確には $\triangle v_\phi = 0$）となる．

角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega_1}$ は軸性ベクトルであるから，前と同様の議論により

$$\boldsymbol{v} = \mathrm{rot}[f(r)\boldsymbol{\Omega_1}] = \mathrm{grad}\, f \times \boldsymbol{\Omega_1}$$

と書くことができる[*6]．よって

$$\triangle\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}(\triangle f) \times \boldsymbol{\Omega_1} = \boldsymbol{0}.$$

$\mathrm{grad}(\triangle f)$ は r 方向を向いているから，この式が任意の $\boldsymbol{\Omega_1}$ で成り立つためには $\mathrm{grad}(\triangle f) = 0$ でなければならない．

$$\triangle f = \mathrm{const}.$$

$\triangle = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{d}{dr}\right)$ を代入して 2 回積分すると，最終的に $f(r) = ar^2 + \dfrac{b}{r}$ となり（結果に影響しない定数は省いた），

$$\mathrm{grad}\, f = \left(2ar - \frac{b}{r^2}\right)\hat{\boldsymbol{r}} = \left(2a - \frac{b}{r^3}\right)\boldsymbol{r},$$

$$\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\, f \times \boldsymbol{\Omega_1} = \left(\frac{b}{r^3} - 2a\right)\boldsymbol{\Omega_1} \times \boldsymbol{r}$$

を得る．定数 a, b は，$r = R_1$ で $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega_1} \times \boldsymbol{r}$，$r = R_2$ で $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ という境界条件から決まる：

$$\begin{cases} \dfrac{b}{{R_1}^3} - 2a = 1 \\ \dfrac{b}{{R_2}^3} - 2a = 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad b = \frac{(R_1R_2)^3}{{R_2}^3 - {R_1}^3},\ 2a = \frac{{R_1}^3}{{R_2}^3 - {R_1}^3}.$$

よって

$$\boldsymbol{v} = \frac{(R_1R_2)^3}{{R_2}^3 - {R_1}^3}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{{R_2}^3}\right)(\boldsymbol{\Omega_1} \times \boldsymbol{r}).$$

また，$\mathrm{grad}\, p = \eta\triangle\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ であるから，流体の圧力は一定である．

外側の球が回転し，内側の球が回転している場合の解も同様に求めることができ

$$\boldsymbol{v} = \frac{(R_1R_2)^3}{{R_2}^3 - {R_1}^3}\left(\frac{1}{{R_1}^3} - \frac{1}{r^3}\right)(\boldsymbol{\Omega_2} \times \boldsymbol{r})$$

となる．そして両方の球が回転している場合は

$$\boldsymbol{v} = \frac{(R_1R_2)^3}{{R_2}^3 - {R_1}^3}\left[\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{{R_2}^3}\right)(\boldsymbol{\Omega_1} \times \boldsymbol{r}) + \left(\frac{1}{{R_1}^3} - \frac{1}{r^3}\right)(\boldsymbol{\Omega_2} \times \boldsymbol{r})\right]$$

となる．

ここで，2 つの極限の場合を考えてみよう．

- 内側の球がないとき（$R_1 \to 0, \Omega_1 \to 0$）：$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega_2} \times \boldsymbol{r}$，つまり流体は球とともに剛体回転を行う．

[*6] ここの行間は前よりも狭いように感じる．$\boldsymbol{v}$ は ϕ 方向を向いているから，（r 方向の，距離に依存するベクトル）×（角速度ベクトル）で書けるとしてよいだろう．

- 外側の球がないとき（$R_2 \to \infty, \Omega_2 \to 0$）：$\boldsymbol{v} = \left(\dfrac{R_1}{r}\right)^3 (\boldsymbol{\Omega_1} \times \boldsymbol{r})$ となり，球から離れるにつれて $\mathcal{O}\big(1/r^2\big)$ で減衰する解になる．

後者の場合に，球に働く摩擦力のモーメントを計算してみよう（以下，添字 1 を省く）．

$$v_r = v_\theta = 0,\ v_\phi\ (= v) = \left(\frac{R}{r}\right)^3 \Omega r \sin\theta = \Omega R^3 \frac{\sin\theta}{r^2}$$

であるから，0 でない粘性応力テンソルは

$$\sigma'_{\theta\phi}\Big|_{r=R} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta} - \frac{v_\phi \cot\theta}{r}\right)_{r=R} = \eta\Omega R^3\left(\frac{\cos\theta}{r^3} - \frac{\cos\theta}{r^3}\right)_{r=R} = 0,$$

$$\sigma'_{\phi r}\Big|_{r=R} = \eta\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r}\right)_{r=R} = \eta\Omega R^3\left(-\frac{2\sin\theta}{r^3} - \frac{\sin\theta}{r^3}\right)_{r=R} = -3\eta\Omega\sin\theta.$$

角度 $\theta \sim \theta + d\theta$ の細い帯状領域に働くモーメントは

$$dM = (\text{力}) \times (\text{腕の長さ}) = (\text{応力}) \times (\text{面積}) \times (\text{腕の長さ}) = \sigma'_{\phi r}\Big|_{r=R} \cdot (2\pi R\sin\theta \cdot R d\theta) \cdot R\sin\theta$$

であるから，求めるモーメントは

$$M = \int_0^\pi (-3\eta\Omega\sin\theta) \cdot 2\pi R^3 \sin^2\theta\, d\theta = -6\pi\eta\Omega R^3 \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = -8\pi\eta\Omega R^3.$$

問題 20.2

密度 ρ'，粘性率 η'，半径 R の球状の液滴が，重力によって粘性率 η，密度 ρ の流体中を落下する速度を求めよ（W. Rybczyński 1911）．

【解答】 液滴が静止しているような座標系をとり，無限遠での流体の速度を $\boldsymbol{u}$ とする（すると，落下速度は $-\boldsymbol{u}$ となる）．液滴の外側（e）の流体に対しては，(20.5) の解は (20.7) である：

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{u} - a\frac{\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}}{r} + b\frac{3(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{u}}{r^3}.$$

内側（i）の流体に対する解を求めるためには，本文の①〜③に戻らなければならない：

$$f(r) = C_1 r^4 + C_2 r^2 + C_3 r + \frac{C_4}{r}$$

$$f'(r) = 4C_1 r^3 + 2C_2 r + C_3 - \frac{C_4}{r^2}$$

$$f''(r) = 12C_1 r^2 + 2C_2 + \frac{2C_4}{r^3}$$

$C_3 r, C_4/r$ は $r \to 0$ で特異的な解をもたらすから除外しなければならない．C_1, C_2 を $B/8, A/4$ と書いて

$$f(r) = \frac{A}{4}r^2 + \frac{B}{8}r^4.$$

このとき

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_{\mathrm{i}} &= \operatorname{rot}\operatorname{rot}(f\boldsymbol{u}) = \operatorname{grad}(\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{grad}f) - \boldsymbol{u}\operatorname{div}\operatorname{grad}f \\
&= \operatorname{grad}\left[\boldsymbol{u}\cdot\left(\frac{A}{2}\boldsymbol{r}+\frac{B}{2}r^2\boldsymbol{r}\right)\right] - \boldsymbol{u}\operatorname{div}\left(\frac{A}{2}\boldsymbol{r}+\frac{B}{2}r^2\boldsymbol{r}\right) \\
&= \frac{A}{2}\operatorname{grad}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}) + \frac{B}{2}\operatorname{grad}(r^2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}) - \frac{A}{2}\boldsymbol{u}\operatorname{div}\boldsymbol{r} - \frac{B}{2}\boldsymbol{u}\operatorname{div}(r^2\boldsymbol{r}) \\
&= \frac{A}{2}\boldsymbol{u} + \frac{B}{2}\left[2\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}) + r^2\boldsymbol{u}\right] - \frac{A}{2}3\boldsymbol{u} - \frac{B}{2}\boldsymbol{u}\left[2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r} + r^2\cdot 3\right] \\
&= -A\boldsymbol{u} + B\left[\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}) - 2r^2\boldsymbol{u}\right] \\
&= -A\boldsymbol{u} + Br^2\left[\boldsymbol{n}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}) - 2\boldsymbol{u}\right].
\end{aligned}
$$

定数 a, b, A, B は，$r = R$ [*7]での境界条件から決まる（法線成分 σ'_{rr} が連続という条件もあるが，書かない．この条件から u が決まるが，これは抗力とのつりあいから求める方が簡単だからである）．

- $r = R$ で（液滴内部の）流速の法線成分が 0：$v_{\mathrm{i},r} = 0$.
  $v_{\mathrm{i},r} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{i}}\cdot\boldsymbol{n} = -A\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} - Br^2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})$ より

$$A + BR^2 = 0. \qquad ⑤$$

- $r = R$ で（液滴外部の）流速の法線成分が 0：$v_{\mathrm{e},r} = 0$.
  $v_{\mathrm{e},r} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} - a\dfrac{2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}}{r} + b\dfrac{2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}$ より

$$1 - \frac{2a}{R} + \frac{2b}{R^3} = 0. \qquad ⑥$$

- $r = R$ で流速の接線成分が連続：$v_{\mathrm{i},\theta} = v_{\mathrm{e},\theta}$.
  $\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$ と分解したとき $v_\theta = -\alpha u\sin\theta$ が成り立つから

$$v_{\mathrm{i},\theta} = (A + 2Br^2)u\sin\theta, \quad v_{\mathrm{e},\theta} = \left(-1 + \frac{a}{r} + \frac{b}{r^3}\right)u\sin\theta,$$

$$\therefore \quad A + 2BR^2 = -1 + \frac{a}{R} + \frac{b}{R^3}. \qquad ⑦$$

- $r = R$ で粘性応力テンソルの剪断成分が連続：$\sigma'_{\mathrm{i},r\theta} = \sigma'_{\mathrm{e},r\theta}$.
  $\sigma'_{r\theta} = \eta\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial\theta} + \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} - \dfrac{v_\theta}{r}\right)$ であるから

$$\sigma'_{\mathrm{i},r\theta} = \eta'\left[\frac{1}{r}(A + Br^2)u\sin\theta + 4Bru\sin\theta - \frac{1}{r}(A + 2Br^2)u\sin\theta\right] = 3\eta' Bru\sin\theta,$$

$$\sigma'_{\mathrm{e},r\theta} = \eta\left[\frac{-1}{r}\left(1 - \frac{2a}{r} + \frac{2b}{r^3}\right)u\sin\theta + \left(-\frac{a}{r^2} - \frac{3b}{r^4}\right)u\sin\theta - \frac{1}{r}\left(-1 + \frac{a}{r} + \frac{b}{r^3}\right)u\sin\theta\right] = -\frac{6\eta bu\sin\theta}{r^4}.$$

[*7] 液滴の形が球からずれる効果は，高次の微小量として無視することができる．しかし，実際に球形を維持するためには，境界面での表面張力が，液滴を変形させようとする圧力差よりも大きいという条件が必要である．第 7 章によれば，表面張力の係数を α とすると表面張力は α/R のオーダーであり，圧力差は $\Delta p \sim R\operatorname{grad}p \sim R\eta\triangle\boldsymbol{v} \sim \eta u/R$ のオーダーであるから，この条件は $\eta\dfrac{u}{R} \ll \dfrac{\alpha}{R}$ と書ける．すぐ後で見るように $u \sim \rho gR^2/\eta$ であるから

$$\rho gR \ll \frac{\alpha}{R} \qquad \therefore \quad R \ll \sqrt{\frac{\alpha}{\rho g}}$$

でなければならない．

よって

$$\eta' RB = -\frac{2\eta}{R^4}b. \tag{⑧}$$

A 以外を消去する．⑤より $B = -A/R^2$ で，これを⑧へ代入して

$$\eta' R\left(-\frac{A}{R^2}\right) = -\frac{2\eta}{R^4}b \qquad \therefore \quad b = \frac{\eta' R^3}{2\eta}A.$$

⑥より

$$\frac{2a}{R} = 1 + \frac{2b}{R^3} = 1 + \frac{\eta'}{\eta}A \qquad \therefore \quad a = \frac{R}{2}\left(1 + \frac{\eta'}{\eta}A\right).$$

以上を⑦に代入して

$$A - 2A = -1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\eta'}{\eta}A\right) + \frac{\eta'}{2\eta}A,$$

$$-A = -\frac{1}{2} + \frac{\eta'}{\eta}A \qquad \therefore \quad A = \frac{\eta}{2(\eta + \eta')}\ (= -BR^2).$$

また

$$a = \frac{R}{2}\left[1 + \frac{\eta'}{2(\eta + \eta')}\right] = \frac{2\eta + 3\eta'}{4(\eta + \eta')}R, \quad b = \frac{R^3}{2}\cdot\frac{\eta'}{2(\eta + \eta')} = \frac{\eta'}{4(\eta + \eta')}R^3$$

となる．

さて，(20.14a) より抗力は

$$F = 8\pi\eta a u = 2\pi\frac{2\eta + 3\eta'}{\eta + \eta'}\eta R u$$

となり，$\eta' \to \infty$（固体球の極限）では $F \to 6\pi\eta R u$ で Stokes の法則になる．また $\eta' \to 0$（気泡の極限）では $F \to 4\pi\eta R u$ で，固体球の抗力の 2/3 になる．

最後に，液滴に働く力のつりあいから u を求めよう．

$$F = 2\pi\frac{2\eta + 3\eta'}{\eta + \eta'}\eta R u = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho - \rho')g \qquad \therefore \quad u = \frac{2(\eta + \eta')(\rho - \rho')gR^2}{3\eta(2\eta + 3\eta')}.$$

問題 20.3

半径 R の 2 枚の円板が，少し離れて平行に置かれており，両者の間を流体が満たしている．円板は一定速度 u で近づき，流体を変位させる．この運動に対する抗力を求めよ（O. Reynolds)．

【解答】下の円板の中心を原点とする円筒座標系を用い，下の円板が静止しているとする．流体層が薄いため，流れは半径方向の成分が支配的で，かつ軸対称とみなすことができる．すなわち $v_z \ll v_r$ $(v_\phi = 0)$，$\dfrac{\partial v_r}{\partial r} \ll \dfrac{\partial v_r}{\partial z}$ である．短い時間を考え，その間は定常（$\partial/\partial t = 0$）と仮定すると，運動方程式と連続の式は

$$\eta\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \tag{①}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \tag{②}$$

円板間の距離を h，外圧を p_0 とすると，境界条件は

- $z=0$ で $v_r=v_z=0$,
- $z=h$ で $v_r=0, v_z=-u$,
- $r=R$ で $p=p_0$.

①より p は r だけの関数であり，積分して $v_r=\dfrac{1}{2\eta}\dfrac{dp}{dr}z^2+az+b$ となる．境界条件より

$$\begin{cases} 0=b \\ 0=\dfrac{1}{2\eta}\dfrac{dp}{dr}h^2+ah+b \end{cases} \qquad \therefore \quad a=-\frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dr}h.$$

よって

$$v_r=\frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dr}z(z-h)$$

を得る．

次に②を z について積分し

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int_0^h rv_r\,dz+\Big[v_z\Big]_0^h=0,$$

$$\therefore \quad u=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int_0^h rv_r\,dz=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dp}{dr}\right)\cdot\frac{1}{2\eta}\int_0^h z(z-h)\,dz=-\frac{h^3}{12\eta}\cdot\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dp}{dr}\right).$$

これを $p(r)$ に関する微分方程式とみなして解こう．

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dp}{dr}\right)=-\frac{12\eta u}{h^3}r \;\Rightarrow\; r\frac{dp}{dr}=-\frac{6\eta u}{h^3}r^2+C_1$$

$$\frac{dp}{dr}=-\frac{6\eta u}{h^3}r+\frac{C_1}{r} \qquad \therefore \quad p=-\frac{3\eta u}{h^3}r^2+C_1\log r+C_2.$$

$r=0$ で p は有界でなければならないから $C_1=0$ である．また $r=R$ での条件から C_2 が決まり

$$p=p_0+\frac{3\eta u}{h^3}(R^2-r^2)$$

となる．

円板に働く抗力は，$p-p_0$ を円板全体で積分したもので

$$F=\int_0^R(p-p_0)2\pi r\,dr=2\pi\cdot\frac{3\eta u}{h^3}\int_0^R r(R^2-r^2)\,dr=\frac{3\pi\eta uR^4}{2h^3}.$$

⬆ 目次へ戻る

§21　層流タイプの伴流

> Landau では，まず伴流の定性的特徴について述べ，次に定量的議論を行なっている．しかし，ここでは前半の定性的議論のみ取り上げる．

物体のまわりの定常粘性流では，物体の後方に十分離れたところで，流れがある特性を持つ．これは，物体の形によらず議論することができる．物体の前方から，一定速度 $\boldsymbol{U}$ で流れが入射するとし，$\boldsymbol{U}$ の方向に x 軸をとる（原点は物体内部にとる）．実際の流体の速度は $\boldsymbol{U}+\boldsymbol{v}$ と表せるとする（$\boldsymbol{v}$ は無限遠で 0 になる）．

物体の後方に十分離れ，かつ x 軸に近い領域では，$\boldsymbol{v}$ は 0 でないことが知られており，**層流タイプの伴流**[*8]と呼ぶ．層流タイプの伴流は，物体に近い流線に沿って動いた流体粒子により構成される．伴流は本質的に回転的である．

♠ その理由は，物体まわりの粘性流の回転的な部分は，物体表面によるものだからである：理想流体のポテンシャル流では，速度の接線成分 v_t は表面で 0 でなくてもよいが，粘性流体では表面で $v_t = 0$ でなければならない．外側でポテンシャル流のパターンが維持されるなら，表面で v_t の不連続性，すなわち表面渦度が発生する．
粘性によってこの不連続性は平滑化され，回転状態は流体中に浸透し，そこから移流によって伴流領域へ移動する．

一方，物体の近くを通らない流線上では，粘性の影響はほとんどなく，（物体前方で渦度が 0 であったから）これらの流線上では理想流体と同じく渦度を 0 とみなすことができる．よって，伴流の部分を除けば，流れはポテンシャル流である．

さて，伴流の特性と，物体に働く力を求めよう．物体を取り囲む任意の（無限に大きい）閉曲面を通って輸送される全運動量は $\displaystyle\int \Pi_{ij} dS_j$ である．無限遠での圧力を p_0 として $p = p_0 + p'$ と表すと

$$\Pi_{ij} = (p_0 + p')\delta_{ij} + \rho(U_i + v_i)(U_j + v_j).$$

定テンソルを閉曲面上で面積分すると 0 になるから，$p_0\delta_{ij} + \rho U_i U_j$ の積分は 0 である．次に，考えている領域内の質量は一定であるから（非圧縮性を仮定する），全質量フラックス $\displaystyle\int \rho \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}$ は 0 である．つまり $\displaystyle U_i \int \rho v_j \, dS_j = 0$ である．さらに，物体から離れたところでは $\boldsymbol{v} \ll \boldsymbol{U}$ であるから，無限に大きい閉曲面上で積分するとき，$\rho U_j v_i$ に比べて $\rho v_i v_j$ を無視することができる．

以上より，この閉曲面を通る全運動量は

$$\int (p'\delta_{ij} + \rho U_j v_i) dS_j$$

となる．

次に，物体後方の無限平面 $x = x_1$ と，物体前方の無限平面 $x = x_2$ の間の流体を考えよう．この 2 面以外の境界は無限遠（$y, z \to \pm\infty$）にあり，そこでは $p', \boldsymbol{v}' \to 0$ であるから，$x = x_1, x_2$ での積分を考えればよい．よってこの領域に入ってくる全運動量は，$x = x_2$ に入ってくる運動量フラックスと，$x = x_1$ から出ていく運動量フラックスの差である．この差は，単位時間に流体から物体に与えられる運動量，つまり物体に働く力に他ならない．よって力 $\boldsymbol{F}$ の成分は

$$F_x = \left(\iint_{x_2} - \iint_{x_1} \right) (p' + \rho U v_x) \, dydz,$$

$$F_y = \left(\iint_{x_2} - \iint_{x_1} \right) \rho U v_y \, dydz,$$

$$F_z = \left(\iint_{x_2} - \iint_{x_1} \right) \rho U v_z \, dydz$$

となる．

[*8] 乱流タイプの伴流と区別してこの語を用いる．なお，伴流のことを**後流**と呼ぶこともある．

まず F_x について考えてみよう．物体の前方では伴流がないから，$x = x_2$ での積分は 0 である．伴流の外側では，流れはポテンシャル流とみなせるから，ベルヌーイの方程式

$$p_0 + p' + \frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{U} + \boldsymbol{v}|^2 = \text{const.} = p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2$$

が成り立つ．$\rho\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{v}$ に比べて $\rho v^2/2$ を無視すると

$$p' = -\rho\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{v} = -\rho U v_x.$$

よってこの近似のもとでは，F_x の被積分関数は伴流の外側で 0 となる．したがって，$x = x_1$ の，伴流が存在する領域で積分を行えばよい．また伴流の内部では，p' は ρv^2 のオーダーであり，$\rho U v_x$ に比べて小さい．以上より

$$F_x = -\rho U \iint_{x_1|\text{wake}} v_x\, dydz \tag{21.1}$$

となる（積分は，物体から十分離れた，伴流の断面で行う）．物体がないときに比べれば，伴流内の速度は遅くなっているから，$v_x < 0,\ F_x > 0$ である．

次に，物体を流れに垂直な方向へ動かす力 (F_y, F_z)，つまり**揚力**について考えよう．伴流領域の外側では流れはポテンシャル流であるから，$v_y = \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}, v_z = \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}$ と書くことができて

$$F_y = \left(\iint_{x_2} - \iint_{x_1}\right)\rho U\frac{\partial\Phi}{\partial y}\, dydz = \int dz\rho U\cdot\Phi\bigg|_{x=x_2} - \iint_{x_1}\rho U v_y\, dydz.$$

伴流のない前方では $\Phi \to 0$ であるから第 1 項は消える．また $x = x_1$ のうち伴流の外側であればやはり $\Phi \to 0$ となる．よって

$$\begin{cases} F_y = -\rho U \displaystyle\iint_{x_1|\text{wake}} v_y\, dydz \\ F_z = -\rho U \displaystyle\iint_{x_1|\text{wake}} v_z\, dydz \end{cases}. \tag{21.2}$$

ただし積分は，物体から十分離れた伴流領域内で行う．物体が対称軸を持ち，かつ流れが軸に平行なら，物体まわりの流れも軸対称である（$x = x_1$ で $v_y, v_z \simeq 0$）．もちろん揚力は 0 である．

最後に，伴流領域内部の流れについて考えよう．Navier-Stokes 方程式で各項の大きさを見積もると，物体からの距離が $r \gg \nu/U$ となるところでは $\nu\triangle\boldsymbol{v}$ を無視することができる．しかし伴流内部では，これは成立しない；$\dfrac{\partial^2\boldsymbol{v}}{\partial x^2}$ に比べ $\dfrac{\partial^2\boldsymbol{v}}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2\boldsymbol{v}}{\partial z^2}$ が大きくなるからである．移流項 $(\boldsymbol{v}\cdot\text{grad})\boldsymbol{v}$ とこれらが同程度であるという条件から，伴流の幅を見積もることができる．伴流の幅を Y，つまり x 軸から Y 程度離れると，速度が急に変化するとしよう．

$$(\boldsymbol{v}\cdot\text{grad})\boldsymbol{v} \simeq (U + v)\frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{Uv}{x}, \quad \nu\triangle\boldsymbol{v} \sim \frac{\nu v}{Y^2}$$

が同程度であるから

$$Y \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \tag{21.3}$$

となる．つまり，層流タイプの伴流の幅は，物体からの距離の平方根に比例して大きくなる．しかし Y は，x に比べれば小さい．というのは $\dfrac{Y}{x} \sim \sqrt{\dfrac{\nu}{Ux}} \ll 1$ だからである．

伴流領域内で，x が増加するにつれて速度がどのように減少するかを，(21.1) から見積もることができる．積分領域の大きさは Y^2 であるから，(21.3) も使えば

$$F_x \sim \rho U v Y^2 \sim \eta v x$$
$$\therefore \quad v \sim \frac{F_x}{\eta x}. \tag{21.4}$$

⬆ 目次へ戻る

§ 22　懸濁液の粘性率

▎大変興味深い内容であるが，どうしても行間を埋めることができなかったので，このノートでは省略する．▎

⬆ 目次へ戻る

§ 23　粘性流体の運動方程式の厳密解

粘性流体の運動方程式の非線形項が自動的に 0 にならない場合，方程式を解くのは非常に困難であり，厳密解は非常に限られた場合にしか得られていない．そのような解は，必ずしも物理的に興味深いものではない（実際には Reynolds 数が非常に大きいとき乱流になる）が，方法論的にはかなり興味深い．

回転する円板による流体の巻き込み（von Kármán swirling flow）

> 粘性流体中に置かれた無限に広い円板が，軸のまわりを一様に回転している．円板の動きによって引き起こされる流れを求めよ（T. von Kármán 1921）．

▎この問題に関しては巽の 13-2-3 も参照のこと．▎

円板を $z = 0$ とする円筒座標系をとり，流体は $z > 0$ の部分を占めているとする．そして，円板は z 軸のまわりを角速度 Ω で回転しているとする．境界条件は

- $z = 0$ で $v_r = 0,\ v_\phi = \Omega r,\ v_z = 0$,
- $z \to \infty$ で $v_r \to 0,\ v_\phi \to 0$.

遠心力によって，円板近傍の流体は軸から外側に流れるだろう．連続の式が成り立つためには，無限遠から円板に向かって $-z$ 方向の流れが存在しなければならない．このため，v_z は $z \to \infty$ で 0 とならず，負の一定値に近づく（その値は運動方程式により決まる）．

v_r と v_ϕ が回転軸からの距離に比例し，かつ全ての量が z に依存する，次のような形の解を求めよう．

$$v_r = \Omega r F(z_1),\ v_\phi = \Omega r G(z_1),\ v_z = -\sqrt{\nu\Omega} H(z_1),\ p = -\rho\nu\Omega P(z_1)\ \left(z_1 = \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} z \right). \tag{23.1}$$

これらを Navier-Stokes 方程式と連続の式へ代入して，関数 F, G, H, P に関する微分方程式を得よう（以下，プライム ($'$) は z_1 に関する微分を表すものとする）．Navier-Stokes 方程式の r 成分は

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{{v_\phi}^2}{r} = \nu \left(\cancel{\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right).$$

$$\Omega r F\cdot\Omega F-\sqrt{\nu\Omega}H\cdot\Omega r\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}F'-\frac{(\Omega r)^2}{r}G^2=\nu\left(\Omega r\cdot\frac{\Omega}{\nu}F''+\cancel{\frac{\Omega}{r}F-\frac{\Omega r}{r^2}F}\right)$$

（両辺を $\Omega^2 r$ で割って）

$$F^2-HF'-G^2=F''.$$

Navier-Stokes 方程式の ϕ 成分は

$$v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_\phi}{\partial z}+\frac{v_r v_\phi}{r}=\nu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2}}+\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial r}-\frac{v_\phi}{r^2}\right).$$

$$\Omega r F\cdot\Omega G-\sqrt{\nu\Omega}H\cdot\Omega r\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}G'-\frac{\Omega r F\cdot\Omega r G}{r}=\nu\left(\Omega r\cdot\frac{\Omega}{\nu}G''+\cancel{\frac{\Omega}{r}G-\frac{\Omega r}{r^2}G}\right)$$

（両辺を $\Omega^2 r$ で割って）

$$2FG-HG'=G''.$$

Navier-Stokes 方程式の z 成分は

$$v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}.$$

$$-\sqrt{\nu\Omega}H\cdot\left(-\sqrt{\nu\Omega}\cdot\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}H'\right)=\nu\Omega\cdot\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}P'+\nu\left(-\sqrt{\nu\Omega}\cdot\frac{\Omega}{\nu}H''\right)$$

（両辺を $\Omega^{3/2}\nu^{1/2}$ で割って）

$$HH'=P'-H''.$$

連続の式は

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{v_r}{r}=0$$

$$\Omega F-\sqrt{\nu\Omega}\cdot\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}H'+\Omega F=0\qquad\therefore\quad 2F-H'=0.$$

以上まとめて

$$\begin{cases}F^2-HF'-G^2=F''\\ 2FG-HG'=G''\\ HH'=P'-H''\\ 2F-H'=0\end{cases}.\tag{23.2}$$

境界条件は

$$\begin{cases}z_1=0\text{ で }F=0,\ G=1,\ H=0\\ z_1\to\infty\text{ で }F\to 0,\ G\to 0\end{cases}.\tag{23.3}$$

よってこの問題の解は，1 変数の連立微分方程式を解くことによって得られる．数値計算の結果は図 7 に示す通りである．

詳細は Cochran, W. (1934). The flow due to a rotating disc. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 30(3), 365-375. を参照のこと．

$z_1\to\infty$ の極限で $H\to 0.866$ となる．すなわち，無限遠での流速は $v_z(\infty)=-0.866\sqrt{\nu\Omega}$ である．

円板の単位面積に働く摩擦力の ϕ 成分は

$$\sigma_{z\phi}\Big|_{z=0}=\eta\left.\frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right|_{z=0}=\eta\cdot\Omega r\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}G'(0)=\rho\sqrt{\Omega^3\nu}G'(0)r$$

である．十分大きいが有限の半径 R を持つ円板に働く摩擦力のモーメントは（端の影響を無視して）

$$M = \int_0^R 2\pi r\, dr \cdot r\, \sigma_{z\phi}\Big|_{z=0} = 2\pi\rho\sqrt{\Omega^3\nu}G'(0)\int_0^R r^3\, dr = \frac{\pi}{2}\rho R^4\sqrt{\Omega^3\nu}G'(0).$$

数値計算の結果を代入すると

$$M = -0.97\rho R^4\sqrt{\Omega^3\nu} \tag{23.4}$$

となる．

英語版 Wikipedia の “von Kármán swirling flow” の項には，この問題の拡張版として

- 無限遠でも流体が回転している場合（$z \to \infty$ で $v_\phi \to \Gamma r$）
- その角速度が円板のそれに近い場合（$\Gamma \simeq \Omega$）
- 非軸対称の場合
- Bödewadt 流れ（円板が静止し，無限遠で流体が一様速度で回転している場合．低気圧や竜巻の中心付近のモデル）
- 共通の軸を持つ 2 枚の円板が別々の角速度で回転している場合

が紹介されている．

わき出し水路・吸い込み水路の流れ（Jeffery-Hamel flow）

角度 α で交わる 2 平面の間の流れを求めよ．ただし，流体は 2 平面の交線から出入りするものとする（G. Hamel 1917）．

この問題に関しては巽の 13-2-1 も参照のこと．

2 平面の交線を z 軸とする円筒座標系 (r, z, ϕ) をとり，角度 ϕ は図 8 のように平面の中央から測るものとする $\left(-\frac{\alpha}{2} \leqq \phi \leqq \frac{\alpha}{2}\right)$．流れは z 方向に一様であるから，2 次元平面で考えてよい（$v_z = 0,\ \partial/\partial z = 0$）．また対称性から $v_\phi = 0$ であり $v_r = v(r, \phi)$ となる．円筒座標系での Navier-Stokes 方程式と連続の式から

$$v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right), \tag{23.5}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{2\nu}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \phi}, \tag{23.6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0.$$

最後の式を $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv) = 0$ と書き直すことで，rv は r に依存せず ϕ のみの関数であることが分かる（言いかえれば，速度は原点からの距離に反比例する）．そこで無次元の変数

$$u(\phi) = \frac{rv}{6\nu} \tag{23.7}$$

を導入しよう．(23.6) より

$$\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{p}{\phi}\right) = \frac{2\nu}{r}\frac{\partial v}{\partial \phi} = \frac{12\nu^2}{r^2}\frac{du}{d\phi} \qquad \therefore \quad \frac{p}{\rho} = \frac{12\nu^2}{r^2}u(\phi) + f(r).$$

(23.5) へ代入し

$$\frac{6\nu u}{r}\cdot\left(-\frac{6\nu u}{r^2}\right)=-\left(-\frac{24\nu^2}{r^3}u(\phi)+f'(r)\right)+\nu\left[\cancel{\frac{12\nu u}{r^3}}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{6\nu}{r}\frac{d^2u}{d\phi^2}+\cancel{\frac{1}{r}\left(-\frac{6\nu u}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{6\nu u}{r}}\right].$$

（両辺を $6\nu^2/r^3$ で割り）

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+4u+6u^2=\frac{1}{6\nu^2}r^3f'(r).$$

この式の左辺は ϕ のみに，右辺は r のみに依存するから，両辺は定数 $2C_1$ に等しくなければならない．
$f'(r)=\dfrac{12\nu^2C_1}{r^3}$ から $f(r)=-\dfrac{6\nu^2C_1}{r^2}+\text{const.}$ であり，圧力は

$$\frac{p}{\rho}=\frac{12\nu^2}{r^2}u+f(r)=\frac{6\nu^2}{r^2}(2u-C_1)+\text{const.} \tag{23.8}$$

また $u(\phi)$ については $\dfrac{d^2u}{d\phi^2}+4u+6u^2=2C_1$ であり，両辺に $\dfrac{du}{d\phi}$ をかけて 1 回積分すると

$$\frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2+2u^2+2u^3=2C_1u+2C_2$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2=-u^3-u^2+C_1u+C_2 \qquad ①$$

$$\therefore\quad 2\phi=\pm\int\frac{du}{\sqrt{-u^3-u^2+C_1u+C_2}}+C_3 \tag{23.9}$$

となり，角度 ϕ と u の関係が得られた．3 つの定数 C_1, C_2, C_3 は壁面での境界条件

$$u\left(\pm\frac{1}{2}\alpha\right)=0 \tag{23.10}$$

と，$r=\text{const.}$ の断面を単位時間に通過する質量 Q が一定であるという条件

$$Q=\rho\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}vr\,d\phi=6\nu\rho\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}u\,d\phi \tag{23.11}$$

から決まる．定数 Q は正負どちらの値もとりうる．$Q>0$ の場合，2 平面の交線はわき出しであり，頂点 O から流体が流れ出る（**わき出し水路の流れ**）．$Q<0$ の場合，2 平面の交線は吸い込みである（**吸い込み水路の流れ**）．無次元量 $\mathrm{R}\equiv\dfrac{|Q|}{\nu\rho}$ はこの問題における Reynolds 数の役割を果たす．

Landau では，解 (23.9)〜(23.11) の性質を定量的に調べているが，ここではその結果のみを簡潔に紹介する．

吸い込み（$Q<0$）の場合

任意の R と $0<\alpha<\pi$ に対して，対称な吸い込み流れが可能であることが知られている．また，R が大きい極限では

- 壁に近い，非常に薄い層（境界層）では速度が急激に（0 から最大値へ）変化するが，
- それ以外の領域では，理想流体のポテンシャル流に漸近する．

わき出し（$Q > 0$）の場合

吸い込みの場合とは異なり，（与えられた角度に対して）R の上限 $\mathrm{R}_{\max}$ が存在して，

- $\mathrm{R} < \mathrm{R}_{\max}$ では対称なわき出し流れが可能だが，
- $\mathrm{R} > \mathrm{R}_{\max}$ では平面 $\phi = 0$ について非対称となり，さらに $u > 0$ の領域と $u < 0$ の領域が混在する

ことが知られている．また，$\mathrm{R} \to \infty$ のとき，吸い込みの流れは Euler 方程式の解に収束したが，わき出しの流れは収束しない．

なお，実際には R が $\mathrm{R}_{\max}$ を超えた途端，定常なわき出し流れは不安定となり，非定常流または乱流が生じることに注意．

液中ジェット（Submerged Landau jet / Landau-Squire jet）

> 細い管の端から，流体で満たされた無限空間へ放出されるジェットが作る流れを求めよ（L. Landau 1943）．

流出点を原点とし，流出点でのジェットの方向を極軸とする球座標系 (r, θ, ϕ) をとる．流れは極軸に関して対称であるから $v_\phi = 0$ であり，v_r と v_θ は r と θ のみの関数である．

原点を取り囲む閉曲面を通る全運動量フラックスは一定であるから，速度は r に反比例しなければならない．

> $\mathit{\Pi}_{ij} dS_j = (\rho v_i v_j - \sigma_{ij}) dS_j$ において $dS = \mathcal{O}(r^2)$ より $v = \mathcal{O}(1/r)$ である．

よって

$$v_r = \frac{F(\theta)}{r}, \quad v_\theta = \frac{f(\theta)}{r} \tag{23.16}$$

と書くことができる（F, f は θ だけの関数である）．連続の式

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(v_\theta \sin\theta\right) = 0$$

へ代入して

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(rF(\theta)) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{f(\theta)}{r}\sin\theta\right) = 0$$

$$F(\theta) + \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\sin\theta + f(\theta)\cos\theta\right) = 0$$

$$\therefore \quad F(\theta) = -\frac{df}{d\theta} - f\cot\theta. \tag{23.17}$$

次に運動量フラックス密度テンソル $\mathit{\Pi}_{ij}$ について考えてみよう．

> $\mathit{\Pi}_{ij}$ は，x_j 軸に垂直な単位面積を単位時間に通過する運動量の i 成分であったことを思い出そう．

対称性より，$\mathit{\Pi}_{r\phi}, \mathit{\Pi}_{\theta\phi}$ は 0 になることは明らかである．これらに加えて，$\mathit{\Pi}_{\theta\theta}, \mathit{\Pi}_{\phi\phi}$ も 0 になると仮定する（必要な条件を全て満たす解が得られれば，この仮定は正当化される）．すると $\mathit{\Pi}_{r\theta}$ も 0 になることが示せる．

> かなり厄介な計算であるが，追っておく．
>
> $$\mathit{\Pi}_{r\theta} = \rho v_r v_\theta - \sigma_{r\theta} = \rho v_r v_\theta - \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right) = \rho\frac{Ff}{r^2} - \eta\frac{1}{r^2}\left(\frac{dF}{d\theta} - 2f\right),$$

$$\Pi_{\theta\theta} = \rho {v_\theta}^2 - \sigma_{\theta\theta} = \rho\frac{f^2}{r^2} + p - 2\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_r}{r}\right) = \rho\frac{f^2}{r^2} + p - 2\eta\frac{1}{r^2}\left(\frac{df}{d\theta} + F\right),$$

$$\Pi_{\phi\phi} = \rho {v_\phi}^2 - \sigma_{\phi\phi} = p - 2\eta\left(\frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta\cot\theta}{r}\right) = p - 2\eta\frac{1}{r^2}\left(F + f\cot\theta\right)$$

であるから

$$\sin^2\theta(\Pi_{\phi\phi} - \Pi_{\theta\theta}) = \frac{\sin^2\theta}{r^2}\left[-\rho f^2 + 2\eta\left(\frac{df}{d\theta} - f\cot\theta\right)\right],$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin^2\theta(\Pi_{\phi\phi} - \Pi_{\theta\theta})\right] \\
&= \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\left[-\rho f^2 + 2\eta\left(\frac{df}{d\theta} - f\cot\theta\right)\right] + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\left[-\rho f\frac{df}{d\theta} + \eta\left(\frac{d^2f}{d\theta^2} - \frac{df}{d\theta}\cot\theta + (1+\cot^2\theta)f\right)\right] \\
&= \frac{\sin^2\theta}{r^2}\left[-\rho f^2\cot\theta + 2\eta\left(\frac{df}{d\theta}\cot\theta - f\cot^2\theta\right) - \rho f\frac{df}{d\theta} + \eta\left(\frac{d^2f}{d\theta^2} - \frac{df}{d\theta}\cot\theta + (1+\cot^2\theta)f\right)\right] \\
&= \frac{\sin^2\theta}{r^2}\left[-\rho f\left(f\cot\theta + \frac{df}{d\theta}\right) + \eta\left(\frac{d^2f}{d\theta^2} + \frac{df}{d\theta}\cot\theta + (1-\cot^2\theta)f\right)\right].
\end{aligned}$$

[ ] 内の第 1 項に (23.17) を，第 2 項に (23.17) を θ で微分した

$$\frac{dF}{d\theta} = -\frac{d^2f}{d\theta^2} - \frac{df}{d\theta}\cot\theta + (1+\cot^2\theta)f$$

を代入すると

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin^2\theta(\Pi_{\phi\phi} - \Pi_{\theta\theta})\right] = \frac{\sin^2\theta}{r^2}\left[\rho fF + \eta\left(2f - \frac{dF}{d\theta}\right)\right] = \sin^2\theta\,\Pi_{r\theta}$$

を得る．左辺は 0 であるから $\Pi_{r\theta} = 0$ となる．

以上より，Π_{ij} の 0 でない成分は

$$\Pi_{rr} = \rho {v_r}^2 - \sigma_{rr} = \rho\frac{F^2}{r^2} + p - 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r} = \rho\frac{F^2}{r^2} + p + 2\eta\frac{F}{r^2}$$

のみである．これは $\mathcal{O}\bigl(1/r^2\bigr)$ の依存性を持つ．

さて，未知関数 f を求めるために

$$0 = \Pi_{\phi\phi} - \Pi_{\theta\theta} = \frac{2\eta f^2}{r^2}\left(-\frac{1}{2\nu} + \frac{1}{f^2}\frac{df}{d\theta} - \frac{1}{f}\cot\theta\right)$$

より

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{f}\right) + \cot\theta\cdot\frac{1}{f} + \frac{1}{2\nu} = 0$$

という関係式が成り立つことに注目しよう．これは $1/f$ についての線形非斉次常微分方程式であり，斉次解 $\dfrac{1}{f} = \dfrac{C}{\sin\theta}$ と特解 $\dfrac{1}{f} = \dfrac{\cot\theta}{2\nu} = \dfrac{\cos\theta}{2\nu\sin\theta}$ を重ね合わせて $\dfrac{1}{f} = \dfrac{2\nu C + \cos\theta}{\sin\theta}$ を得る．定数をおき直して

$$f(\theta) = -2\nu\frac{\sin\theta}{A - \cos\theta}. \tag{23.18}$$

これを (23.17) へ代入して

$$
\begin{aligned}
F(\theta) &= -\frac{df}{d\theta} - f\cot\theta \\
&= 2\nu\left[\frac{\cos\theta(A-\cos\theta) - \sin\theta\cdot\sin\theta}{(A-\cos\theta)^2} + \frac{\cos\theta}{A-\cos\theta}\right] \\
&= 2\nu\frac{A\cos\theta - 1 + \cos\theta(A-\cos\theta)}{(A-\cos\theta)^2} \\
&= 2\nu\frac{2A\cos\theta - 1 - \cos^2\theta}{(A-\cos\theta)^2} = 2\nu\frac{A^2 - 1 - (A-\cos\theta)^2}{(A-\cos\theta)^2} \\
&= 2\nu\left[\frac{A^2-1}{(A-\cos\theta)^2} - 1\right] \qquad (23.19)
\end{aligned}
$$

が得られる．

圧力は，$\Pi_{\phi\phi} = p - 2\eta\dfrac{F + f\cot\theta}{r^2} = 0$ から

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{2\eta}{r^2}(F + f\cot\theta) \\
&= \frac{2\eta}{r^2}\cdot 2\nu\left[\frac{2A\cos\theta - 1 - \cos^2\theta}{(A-\cos\theta)^2} - \frac{\cos\theta}{A-\cos\theta}\right] \\
&= \frac{4\rho\nu^2}{r^2}\cdot\frac{2A\cos\theta - 1 - \cos^2\theta - \cos\theta(A-\cos\theta)}{(A-\cos\theta)^2} \\
&= \frac{4\rho\nu^2}{r^2}\cdot\frac{A\cos\theta - 1}{(A-\cos\theta)^2} \qquad (23.20)
\end{aligned}
$$

となる．

積分定数 A は，ジェットの運動量，すなわち r 方向の全運動量フラックス

$$
P = \int \Pi_{rr}\cos\theta\, dS = \int_0^\pi \Pi_{rr}\cos\theta\cdot 2\pi r^2\sin\theta\, d\theta
$$

と関係付けることができる．Π_{rr} は

$$
\begin{aligned}
\Pi_{rr} &= \rho\frac{F^2}{r^2} + p + 2\eta\frac{F}{r^2} \\
&= \frac{\rho}{r^2}\cdot 4\nu^2\left[\frac{A^2-1}{(A-\cos\theta)^2} - 1\right]^2 + \frac{4\rho\nu^2}{r^2}\cdot\frac{A\cos\theta - 1}{(A-\cos\theta)^2} + 2\rho\nu\cdot\frac{1}{r^2}\cdot 2\nu\left[\frac{A^2-1}{(A-\cos\theta)^2} - 1\right] \\
&= \frac{4\rho\nu^2}{r^2}\left[\frac{(A^2-1)^2}{(A-\cos\theta)^4} - 2\frac{A^2-1}{(A-\cos\theta)^2} + 1 + \frac{A\cos\theta - 1}{(A-\cos\theta)^2} + \frac{A^2-1}{(A-\cos\theta)^2} - 1\right] \\
&= \frac{4\rho\nu^2}{r^2}\left[\frac{(A^2-1)^2}{(A-\cos\theta)^4} - \frac{A(A-\cos\theta)}{(A-\cos\theta)^2}\right] \\
&= \frac{4\rho\nu^2}{r^2}\left[\frac{(A^2-1)^2}{(A-\cos\theta)^4} - \frac{A}{A-\cos\theta}\right]
\end{aligned}
$$

で与えられるから，$t = \cos\theta$ とおいて積分を実行すると

$$
\begin{aligned}
P &= 8\pi\rho\nu^2 \int_1^{-1} \left\{ \frac{(A^2-1)^2}{(A-t)^4} - \frac{A}{A-t} \right\} t\,(-dt) \\
&= 8\pi\rho\nu^2 \int_{-1}^{1} \left\{ (A^2-1)^2 \frac{t}{(t-A)^4} + A\frac{t}{A-t} \right\}\, dt \\
&= 8\pi\rho\nu^2 \int_{-1}^{1} \left\{ (A^2-1)^2 \left(\frac{A}{(t-A)^4} + \frac{1}{(t-A)^3} \right) + A\left(1 + \frac{A}{t-A}\right) \right\}\, dt \\
&= 8\pi\rho\nu^2 \left[(A^2-1)^2 \left\{ -\frac{A}{3(t-A)^3} - \frac{1}{2(t-A)^2} \right\} + A(t + A\log|t-A|) \right]_{-1}^{1} \\
&= 8\pi\rho\nu^2 \left\{ (A^2-1)^2 \frac{A}{3} \left(\frac{1}{(A-1)^3} - \frac{1}{(A+1)^3} \right) - \frac{(A^2-1)^2}{2} \left(\frac{1}{(A-1)^2} - \frac{1}{(A+1)^2} \right) + 2A + A^2 \log\left|\frac{A-1}{A+1}\right| \right\} \\
&= 8\pi\rho\nu^2 \left\{ (A^2-1)^2 \frac{A}{3} \frac{6A^2+2}{(A^2-1)^3} - \cancel{\frac{(A^2-1)^2}{2} \frac{4A}{(A^2-1)^2}} + \cancel{2A} + A^2 \log\left|\frac{A-1}{A+1}\right| \right\} \\
&= 8\pi\rho\nu^2 \left\{ \frac{6A^3+2A}{3(A^2-1)} + A^2 \log\left|\frac{A-1}{A+1}\right| \right\} \\
&= 8\pi\rho\nu^2 \left\{ 2A + \frac{8A}{3(A^2-1)} + A^2 \log\left|\frac{A-1}{A+1}\right| \right\}.
\end{aligned}
$$

よって

$$
P = 16\pi\rho\nu^2 A \left\{ 1 + \frac{4}{3(A^2-1)} - \frac{A}{2}\log\left|\frac{A+1}{A-1}\right| \right\} \tag{23.21}
$$

を得る．式 (23.16)〜(23.21) はこの問題に対する解を与える．A が 1 から ∞ まで変わるとき，ジェットの運動量 P は ∞ から 0 まで全ての値をとる．

流線の形は，$\dfrac{dr}{v_r} = \dfrac{r\,d\theta}{v_\theta}$ すなわち

$$
\frac{dr}{r} = \frac{v_r}{v_\theta} d\theta = \frac{F(\theta)}{f(\theta)} d\theta
$$

によって決まる．式 (23.17) と $\dfrac{1}{f^2}\dfrac{df}{d\theta} = \dfrac{1}{f}\cot\theta + \dfrac{1}{2\nu}$ を用いると

$$
\begin{aligned}
\frac{dr}{r} &= \left(-\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial\theta} - \cot\theta \right) d\theta \\
&= \left(-2\cot\theta - \frac{f}{2\nu} \right) d\theta \\
&= \left(-2\cot\theta + \frac{\sin\theta}{A - \cos\theta} \right) d\theta \\
&= \left\{ -2\frac{(\sin\theta)'}{\sin\theta} + \frac{(A-\cos\theta)'}{A-\cos\theta} \right\} d\theta \\
\log|r| &= \log|A - \cos\theta| - 2\log|\sin\theta| + \text{const.}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{r\sin^2\theta}{A - \cos\theta} = \text{const.} \tag{23.22}
$$

図 12 は流線の概形を表している．この流れは，原点から流出して周囲の流体を引き寄せるようなジェットである．

次に，極限として P が小さい場合と大きい場合を考えよう．

弱いジェット（$P \to 0, A \to \infty$）の極限

A が大きいとき

$$\log\frac{A+1}{A-1} = \frac{2}{A} + \frac{2}{3A^3} + \mathcal{O}\bigl(A^{-5}\bigr)$$

であるから

$$P = 16\pi\rho\nu^2 \left\{A + \frac{4A}{3(A^2-1)} - \frac{A^2}{2}\left(\frac{2}{A} + \frac{2}{3A^3} + \mathcal{O}\bigl(A^{-5}\bigr)\right)\right\} \simeq 16\pi\rho\nu^2 \left\{\frac{4}{3A} - \frac{1}{3A} + \mathcal{O}\bigl(A^{-3}\bigr)\right\} \simeq \frac{16\pi\rho\nu^2}{A}$$

となる．このとき

$$f \simeq \frac{-2\nu\sin\theta}{A} \simeq -\frac{P\sin\theta}{8\pi\rho\nu},$$

$$F = 2\nu\frac{2A\cos\theta - 1 - \cos^2\theta}{(A-\cos\theta)^2} \simeq 2\nu\frac{2A\cos\theta}{A^2} = \frac{4\nu\cos\theta}{A} = \frac{P\cos\theta}{4\pi\rho\nu}$$

となり

$$v_r \simeq \frac{P\cos\theta}{4\pi\rho\nu r}, \quad v_\theta \simeq -\frac{P\sin\theta}{8\pi\rho\nu r} \tag{23.23}$$

を得る．

強いジェット（$P \to \infty, A \to 1$）の極限

▎十分強いジェットの場合，実際の流れは乱流となることに注意．▎

$A \simeq 1$ のとき，(23.21) の中では $\dfrac{4}{3(A^2-1)}$ の部分が卓越し

$$P \simeq 16\pi\rho\nu^2 \cdot 1 \cdot \frac{4}{3(A^2-1)} \qquad \therefore \quad A^2 = 1 + \frac{64\pi\rho\nu^2}{3P}.$$

${\theta_0}^2 \equiv \dfrac{64\pi\rho\nu^2}{3P}$ とおくと $A = \sqrt{1+{\theta_0}^2} \simeq 1 + \dfrac{1}{2}{\theta_0}^2$ を得る．

- θ が小さくないとき．$f \simeq -2\nu\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = -2\nu\cot\dfrac{\theta}{2}$，$F \simeq -2\nu$ であるから

$$v_r \simeq -\frac{2\nu}{r}, \quad v_\theta \simeq -\frac{2\nu\cot(\theta/2)}{r}. \tag{23.24}$$

- θ が小さいとき（$\theta \approx \theta_0 \ll 1$）．$A - \cos\theta \simeq 1 + \dfrac{1}{2}{\theta_0}^2 - \left(1 - \dfrac{1}{2}\theta^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(\theta^2 + {\theta_0}^2\right)$ であるから

$$f \simeq -2\nu\frac{\theta}{\left(\theta^2+{\theta_0}^2\right)/2} = -\frac{4\nu\theta}{\theta^2+{\theta_0}^2}, \quad F \simeq 2\nu\left\{\frac{{\theta_0}^2}{\left(\theta^2+{\theta_0}^2\right)^2/4}\cancel{-1}\right\} \simeq \frac{8\nu{\theta_0}^2}{\left(\theta^2+{\theta_0}^2\right)^2}.$$

$$v_r \simeq \frac{8\nu{\theta_0}^2}{\left(\theta^2+{\theta_0}^2\right)^2 r}, \quad v_\theta \simeq -\frac{4\nu\theta}{\left(\theta^2+{\theta_0}^2\right) r}. \tag{23.25}$$

最後に，ここで得られた解は点源から流出するジェットに対する厳密解であることを述べておこう．管の半径 R が有限である場合，解は (R/r) の冪で展開される．点源の解はもちろん，展開の第 1 項に対応する．

⬆ 目次へ戻る

§24　粘性流体中の振動

粘性流体中の物体が振動するとき，それによって起こる流れは多くの特徴を持つ．それらを調べるために，単純だが典型的な例から始めよう（G. G. Stokes 1851）．

振動する無限平面がつくる流れ

振動数 ω で調和振動している無限平面によって仕切られた非圧縮性流体を考え，その結果生じる流体の運動を調べる．固体表面を yz 平面にとり，流体は $x>0$ の部分を占めているとし，振動方向に y 軸をとる．振動している表面の速度 u は時間の関数で，$u(t)=A\cos(\omega t+\alpha)$ という形で表されるとする．これを，複素数の実部の形で書くと便利である：

$$u=\mathrm{Re}\{u_0e^{-i\omega t}\}$$

ここで，定数 $u_0=Ae^{-i\alpha}$ は一般には複素数だが，時間の原点を適当に選ぶことにより実数とすることができる．

速度 u に関する線形演算のみが含まれる計算に限り Re の記号を省略し，u が複素数であるかのように取り扱い，最後の結果で実部を取ることにしよう．すると

$$u_y=u=u_0e^{-i\omega t} \tag{24.1}$$

と書ける．流体の速度は，境界条件：$x=0$ で $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$ すなわち $v_x=v_z=0,\ v_y=u$ を満たさなければならない．

対称性から，全ての量が座標 x と時間 t にのみ依存することは明らかであり，連続の式 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=\dfrac{\partial v_x}{\partial x}=0$ から $v_x=\mathrm{const.}=0$ を得る（境界条件を用いた）．また，全ての量は座標 y,z によらないから $(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v}=v_x\dfrac{\partial v_x}{\partial x}$ であり，$v_x=0$ より自動的に $(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v}=0$ となる．よって運動方程式 (15.7) は

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p+\nu\triangle\boldsymbol{v} \tag{24.2}$$

という線形の方程式になる．x 成分から $\dfrac{\partial p}{\partial x}=0$，すなわち $p=\mathrm{const.}$ を得る．さらに，対称性から速度 $\boldsymbol{v}$ はどこでも y 方向を向いている．$v_y=v$ を (24.2) へ代入し

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{24.3}$$

を得る．これは（1 次元）熱伝導方程式の形をしている．x と t に関して周期的で，かつ $x=0$ で $v=u$ となるような解

$$v=u_0e^{i(kx-\omega t)}$$

を求めよう．(24.3) へ代入し $i\omega=\nu k^2$ を得る．i の平方根 $\pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ のうちマイナスの方を取ると，流体の速度が $x\to\infty$ で発散するから不適である．よって

$$k=\sqrt{\frac{i\omega}{\nu}}=(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}=\frac{1+i}{\delta}\qquad\left(\delta\equiv\sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}\right). \tag{24.4}$$

速度は

$$v=u_0e^{i(\frac{1+i}{\delta}x-\omega t)}=u_0e^{-x/\delta}e^{i(x/\delta-\omega t)} \tag{24.5}$$

となる．よって，粘性流体中では，速度 $v_y = v$ が伝播方向に垂直な横波が生じうる．しかし，この波は，運動を引き起こしている固体表面から離れるにつれて指数的に減衰する．振幅が $1/e$ になる距離 δ は**表皮厚さ（表皮深さ）**と呼ばれる（1 波長離れると $1/e^{2\pi} \approx 1/540$ に減衰する）．この厚さは，波の振動数が高いほど薄いが，流体の動粘性率が大きいほど厚くなる．

固体表面に働く単位面積あたりの摩擦力（明らかに y 方向である）を計算してみよう．

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xy}\Big|_{x=0} &= \eta\,\frac{\partial v_y}{\partial x}\Big|_{x=0} = \eta\frac{i-1}{\delta}u_0\;e^{i(\frac{1+i}{\delta}x-\omega t)}\Big|_{x=0} = \eta\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(i-1)u \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}\rho\eta\omega}\,(i-1)u
\end{aligned}
\tag{24.6}
$$

$i-1 = -\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ に注意して (24.6) の実部をとると（u_0 は実とする）

$$
\sigma_{xy}\Big|_{x=0} = -\sqrt{\rho\eta\omega}\,u_0\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)
$$

となる．一方，振動している表面の速度は $u = u_0\cos\omega t$ である．よって，速度と摩擦力の間には位相差が生じている．

半平面がその縁（ふち）と平行に振動する場合，縁の影響による摩擦力も生じる．半平面の振動による粘性流体の運動の問題や，任意の角度のくさびの振動の問題は，くさびによる回折の理論で用いられる方程式：$\triangle f + \kappa^2 f = 0$ の解を用いて解くことができる．ここでは参考のため 1 つの結果だけを掲げておこう；半平面の振動の場合，縁によって生じる摩擦力は，半平面の長さが $\dfrac{\delta}{2} = \sqrt{\dfrac{\nu}{2\omega}}$ だけ増えた効果に等しい (L. D. Landau 1947)．

以上の問題で，エネルギー散逸の時間平均を簡単に計算することができる．もちろん一般形 (16.3) を用いてもよいが，この場合には，摩擦力のする仕事として直接計算する方が易しい．振動している平面の単位面積で単位時間に散逸するエネルギーは，摩擦力 σ_{xy} と速度 $u_y = u$ の積に等しい．

$$
\begin{aligned}
\overline{-\,\sigma_{xy}\Big|_{x=0}\cdot u} &= \sqrt{\rho\eta\omega}\,{u_0}^2\,\overline{\cos\omega t\cdot\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)} \\
&\qquad \text{時間平均部は}\ \overline{\cos\omega t\cdot\frac{\cos\omega t-\sin\omega t}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}\rho\eta\omega}\,\frac{{u_0}^2}{2}
\end{aligned}
\tag{24.7}
$$

これは振動数及び粘性率の平方根に比例する．

$u = u(t)$ で任意に運動する平面により生ずる流体の運動は，(24.3) を $x = 0$ で $v = u$ という境界条件のもとで解くことで得られる．(24.3) の形の熱伝導の問題は § 52 で論ずるから，ここでは詳しい計算を省き，結果のみ記す．流体の速度と，表面に働く単位面積あたりの摩擦力は

$$
v(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi\nu}}\int_{-\infty}^{t}\frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{x^2}{4\nu(t-\tau)}\right]\,d\tau
$$

$$
\sigma_{xy}\Big|_{x=0} = -\sqrt{\frac{\rho\eta}{\pi}}\int_{-\infty}^{t}\frac{du(\tau)}{d\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}
\tag{24.8}
$$

となる（それぞれ (52.13)(52.14) と比較せよ）．

任意の形の物体が振動する場合

次に，任意の形の物体が振動する，一般的な場合を考えよう．平面が振動する場合には，移流項 $(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v}$ は自動的に 0 となったが，任意の形の表面を持つ場合にはそうとは限らない．しかし，移流項は他の項に比べて小さく，無視できるとしよう（この仮定が成り立つ条件についてはのちに調べる）．よって，前と同様に線形の方程式 (24.2) を用いることができる．両辺の rot をとって $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}=0$ に注意すると

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})=\nu\triangle(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}) \tag{24.9}$$

となり，渦度 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$ は熱伝導型の方程式を満たす．すでに見たように，その解は指数的に減衰する．すなわち，渦度は流体内部に向かって急激に減少する．言い換えれば，物体の振動によって生じる流れは，物体に近い層内では回転的だが，物体から離れたところではポテンシャル流とみなせる．回転的な領域の厚さはもちろん δ のオーダーである．

重要な極限として，2 つの場合が考えられる：振動する物体の大きさ l に比べて，δ が大きい場合と小さい場合である．

$\delta\gg l$ の極限

$\delta\gg l$ つまり $l^2\omega\ll\nu$ という条件に加えて，Reynolds 数が小さいと仮定しよう．振動の振幅を a とすると，物体の速度は $a\omega$ のオーダーであるから，Reynolds 数は $\dfrac{a\omega\cdot l}{\nu}$ のオーダーである．よって

$$l^2\omega\ll\nu,\ \frac{a\omega l}{\nu}\ll 1 \tag{24.10}$$

を仮定することになる．これは振動数が小さい，つまり時間の経過に対して速度がゆっくりとしか変化しないことを意味する．よって運動方程式で $\partial\boldsymbol{v}/\partial t$ を無視することができる（もちろん Reynolds 数が小さいから移流項も無視できる）．これは，流れが定常であることを意味する．よって $\delta\gg l$ のとき，流れは常に定常とみなすことができ，ある瞬間の流れは，物体が（その時点での）速度で一様に運動している場合と同じになる．例えば，流体中の球の振動を考える場合（l は球の半径になる），振動数が条件 (24.10) を満たすなら，球に働く抗力は，Reynolds 数が小さい場合の球の一様運動に関する Stokes の法則 (20.14) で与えられるものになる．

$\delta\ll l$ の極限

$\delta\ll l$ に加え，移流項が無視できるためには，振動の振幅が物体の大きさに比べて小さくなければならない．

> 平面が振動する場合，$\boldsymbol{v}$ は物体から離れるにつれて δ 程度のオーダーで指数的に減少した．これは，振動する平面は流体に変位を与えず，平面から離れたところでは流体が静止状態にあったためである．別の形の物体では，流体は変位し，流体の速度は物体の大きさ l 程度の距離まで変化する．したがって $(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v}\sim\dfrac{v^2}{l}\sim\dfrac{(a\omega)^2}{l}$ であり，
>
> $$\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v}}{\partial\boldsymbol{v}/\partial t}\sim\frac{(a\omega)^2/l}{(a\omega)\cdot\omega}=\frac{a}{l}$$
>
> が無視できるとき $a\ll l$ である．

$$l^2\omega\gg\nu,\ a\ll l \tag{24.11}$$

この場合，Reynolds 数は小さいとは限らない．

さて，条件 (24.11) が成り立つ場合の，振動する物体のまわりの流れを考えよう．物体の表面近くの薄い層では流れは回転的だが，それ以外の領域ではポテンシャル流とみなせる．よって，物体に近接した層を除けば，流れは方程式

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0},\quad \operatorname{div}\boldsymbol{v}=0 \tag{24.12}$$

で与えられる．$\triangle\boldsymbol{v}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}-\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ となるから，Navier-Stokes 方程式は Euler 方程式に帰着する．つまり（物体表面に近い層を除けば）理想流体と同じである．この層は薄いから，(24.12) を解くときには，物体表面で満たすべき境界条件（流体の速度が物体の速度に等しい）を与えればよい．ところが，理想流体での境界条件は，速度の法線成分が等しいことしか要求しない．よって，(24.12) を解いて得られる解のうち

- 速度の法線成分は理想流体の場合と同様であり，改めて調べる必要はない．
- 速度の接線成分は境界条件を満たしておらず，実際には，物体から少し離れたところでの値と，物体表面での値は異なる．つまり，表面付近の層で，接線速度は急激に変化しなければならない．

この変化の様子は，簡単に調べることができる．物体表面のうち，δ に比べれば大きいが，l に比べれば小さいような部分を考えよう．この部分は近似的に平面とみなせるから，平面について既に得られた解を使うことができる．x 軸をこの部分の法線方向に，y 軸を接線速度の方向にとり，v_y を物体に対する流体の相対的な接線速度としよう．v_y は表面で 0 である．一方で，(24.12) を解いて得られた，（物体表面の層の外側での）v_y を $v_0e^{-i\omega t}$ としよう[*9]．求める解は，$x=0$ で 0 だが，x が大きくなるにつれ指数的に $v_0e^{-i\omega t}$ に漸近するようなもので

$$v_y=v_0e^{-i\omega t}\left[1-e^{-(1-i)x/\delta}\right]=v_0e^{-i\omega t}\left(1-e^{-x/\delta}e^{ix/\delta}\right) \tag{24.13}$$

（ただし $\delta=\sqrt{2\nu/\omega}$）となる．

また，単位時間に散逸する全エネルギーは，(24.7) の代わりに，物体の表面全体にわたる面積分

$$\dot{E}_{\mathrm{kin}}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho\eta\omega}{2}}\int|v_0|^2\,dS \tag{24.14}$$

で与えられる．

粘性流体中で振動する物体に働く抗力

ここでは，抗力について一般的な記述をしておこう．物体の速度を複素表示で $u=u_0e^{-i\omega t}$ と書くと，速度 u に比例する抗力 F を複素表示で $F=\beta u$ と書くことができる（$\beta=\beta_1+i\beta_2$ は複素定数）．この式は，実係数を持つ 2 つの項の和としても表せる．

$$F=(\beta_1+i\beta_2)u=\beta_1u-\frac{\beta_2}{\omega}\dot{u}\quad\leftarrow iu=-\frac{1}{\omega}\dot{u}\ \text{に注意} \tag{24.15}$$

第 1 項は速度 u に，第 2 項は加速度 $\dot{u}$ に比例する．

エネルギー散逸の時間平均は，抗力と速度の積を平均したものである．これは u に関する線形演算ではないから，初めから実数で書いておく必要がある．

$$u=\frac{1}{2}(u_0e^{-i\omega t}+u_0^*e^{i\omega t}),$$

$$F=\frac{1}{2}(\beta u+\beta^*u^*)=\frac{1}{2}(u_0\beta e^{-i\omega t}+u_0^*\beta^*e^{i\omega t})$$

[*9] ここでは，物体表面が静止している（$x=0$ で $v_y=0$）ような座標系で書かれている．よって v_0 は，静止している物体のまわりに生じるポテンシャル流の解と考える必要がある．

より

$$Fu=\frac{1}{4}(u_0e^{-i\omega t}+u_0^*e^{i\omega t})(u_0\beta e^{-i\omega t}+u_0^*\beta^*e^{i\omega t})=\frac{1}{4}[{u_0}^2\beta e^{-2i\omega t}+u_0u_0^*\beta+u_0u_0^*\beta^*+(u_0^*)^2\beta^*e^{2i\omega t}].$$

$\overline{e^{\pm 2i\omega t}}=0$ であるから結局

$$\overline{Fu}=\frac{1}{4}(\beta+\beta^*)|u_0|^2=\frac{1}{2}\beta_1|u_0|^2 \tag{24.16}$$

となる．エネルギー散逸は β の実部，(24.15) で言えば速度に比例する項のみから生じる．この項は**散逸項**と呼ばれる．一方，β の虚部すなわち加速度に比例する項はエネルギー散逸に寄与せず，**慣性項**と呼ばれる．

粘性流体中で回転振動する物体に働く力のモーメントに対しても，同様の議論が成り立つ．

以下の問題の解答で，

$$k=\frac{1+i}{\delta},\quad \delta=\sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

は共通とする．

問題 24.1

平行な 2 枚の固体平面が距離 h 離れて置かれており，間を粘性流体が満たしている．一方の平面がその面内で振動するとき，それぞれの面に働く摩擦力を求めよ．

【解答】 座標系は本文と同じとする．(24.3)$\dfrac{\partial v}{\partial t}=\nu\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ の解は

$$v=(A\cos kx+B\sin kx)e^{-i\omega t}$$

と書ける．$x=0$ で $v=u=u_0e^{-i\omega t}$，$x=h$ で $v=0$ という境界条件から A,B を決めると $A=u_0$，$B=-\dfrac{\cos kh}{\sin kh}u_0$ となるから

$$v=u_0\left(\cos kx-\frac{\cos kh}{\sin kh}\sin kx\right)e^{-i\omega t}=u\frac{\sin k(h-x)}{\sin kh}$$

を得る．

振動している方の平面に働く単位面積あたりの摩擦力は

$$P_{1y}=\eta\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0}=\eta u\left.\frac{-k\cos k(h-x)}{\sin kh}\right|_{x=0}=-\eta ku\cdot\cot kh,$$

静止している方の平面では

$$P_{2y}=-\eta\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=h}=-\eta u\left.\frac{-k\cos k(h-x)}{\sin kh}\right|_{x=h}=\frac{\eta ku}{\sin kh}.$$

もちろん，考えている全ての量の実部をとるものとする．

問題 24.2

振動している平面が厚さ h の流体層に覆われ，流体の表面が自由表面のとき，平面に働く摩擦力を求めよ．

【解答】 問題 24.1 の A, B を，$x=0$ で $v=u$，$x=h$ で $\sigma_{xy}=\eta\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$ という境界条件から決めると $A=u_0$，$B=\dfrac{\sin kh}{\cos kh}u_0$ となるから

$$v=u_0\left(\cos kx+\frac{\sin kh}{\cos kh}\sin kx\right)e^{-i\omega t}=u\frac{\cos k(h-x)}{\cos kh}$$

を得る．摩擦力は

$$P_y=\eta\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0}=\eta u\left.\frac{k\sin k(h-x)}{\cos kh}\right|_{x=0}=\eta ku\cdot\tan kh.$$

問題 24.3

大きな半径 R の平面平板が，軸を中心に微小な回転振動をしている (回転角は $\theta(t)=\theta_0\cos\omega t$，$\theta_0\ll 1$ とする)．円板に働く摩擦力のモーメントを求めよ．

【解答】 円板は非常に大きいから，端の影響はないとしてよい．回転軸を z 軸とする円筒座標系をとると $v_r=v_z=0$ である．$v_\phi=r\Omega(z,t)$ という形の解を求めよう．微小振幅であるから，移流項は（ω によらず）無視することができる．運動方程式の ϕ 成分は

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t}=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\phi}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial r}-\frac{v_\phi}{r^2}\right).$$

対称性から $\partial/\partial\phi=0$ であり，$v_\phi=r\Omega$ を代入すると

$$r\frac{\partial\Omega}{\partial t}=\nu\left(r\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\Omega-\frac{r\Omega}{r^2}\right)\qquad\therefore\quad\frac{\partial\Omega}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}.$$

よって角速度 Ω は熱伝導型の方程式を満たす．回転角を $\theta(t)=\theta_0e^{-i\omega t}$ と書く（もちろん実部をとる）と，表面 $z=0$ での境界条件は

$$\Omega\ \left(=\frac{d\theta}{dt}\right)=-i\omega\theta_0e^{-i\omega t}$$

であり，$z\to\infty$ での境界条件は $\Omega=0$ である．

z と t について周期的な解で，$z=0$ での境界条件を満たすようなもの $\Omega=-i\omega\theta_0e^{i(kz-\omega t)}$ を考えると，本文と同様にして $k=\dfrac{1+i}{\delta}$ を得る．よって

$$\Omega=-i\omega\theta_0e^{-z/\delta}e^{i(z/\delta-\omega t)}$$

となり，実部をとれば

$$\Omega=\omega\theta_0e^{-z/\delta}\sin(z/\delta-\omega t)$$

となる．

平板表面に働く単位面積あたりの摩擦力は

$$\begin{aligned}\left.\sigma_{z\phi}\right|_{z=0}&=\eta r\left.\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right|_{z=0}\\&=\eta r\omega\theta_0\left[-\frac{1}{\delta}e^{-z/\delta}\sin(z/\delta-\omega t)+e^{-z/\delta}\frac{1}{\delta}\cos(z/\delta-\omega t)\right]_{z=0}\\&=\frac{\eta r\omega\theta_0}{\delta}(\sin\omega t+\cos\omega t)=\omega\theta_0r\sqrt{\frac{\rho\eta\omega}{2}}\cdot\sqrt{2}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

であるから，摩擦力のモーメントは（流体は円板の片側にのみ存在するとする）

$$M = \int_0^R \int_0^{2\pi} r \cdot \sigma_{z\phi}\Big|_{z=0} r\, dr d\phi = \omega\theta_0\sqrt{\rho\eta\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)\cdot 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi\omega\theta_0}{2}\sqrt{\rho\eta\omega}R^4\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

問題 24.4

平行な 2 平面の間に流体があり，（平面に平行な）圧力勾配が時間について調和振動している．この場合の流れを求めよ．

【解答】 2 平面の中間に xz 平面をとり，x 軸は圧力勾配に平行とする．そして圧力勾配は

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = ae^{-i\omega t}$$

のように表されるとする．

対称性から，速度は x 方向を向いており，y のみに依存するから，Navier-Stokes 方程式から

$$\frac{\partial v}{\partial t} = ae^{-i\omega t} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

$v = f(y)e^{-i\omega t}$ という形の解を求めよう．

$$-i\omega f = a + \nu\frac{d^2 f}{dy^2} \qquad \therefore \quad \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{i\omega}{\nu}f = -\frac{a}{\nu}.$$

特解 $f = \dfrac{ia}{\omega}$ と斉次方程式の一般解 $f = A\cos ky + B\sin ky$ $\left(k^2 = \dfrac{i\omega}{\nu}\right)$ を重ね合わせて，方程式の解は

$$v = \left(\frac{ia}{\omega} + A\cos ky + B\sin ky\right)e^{-i\omega t}$$

となる．$y = \pm\dfrac{h}{2}$ であるから $B = 0,\ A = -\dfrac{ia/\omega}{\cos(kh/2)}$ となり

$$v = \frac{iae^{-i\omega t}}{\omega}\left(1 - \frac{\cos ky}{\cos(kh/2)}\right)$$

を得る．

速度の断面全体にわたる平均は

$$\begin{aligned}
\overline{v} &\equiv \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} v\, dy \\
&= \frac{iae^{-i\omega t}}{\omega}\frac{2}{h}\left[y - \frac{\sin ky}{k\cos(kh/2)}\right]_0^{h/2} \\
&= \frac{iae^{-i\omega t}}{\omega}\left\{1 - \frac{2}{kh}\tan\left(\frac{kh}{2}\right)\right\}
\end{aligned}$$

となる．

最後に，2 つの極限の場合を考えよう．

- $h/\delta \ll 1$ ($kh \ll 1$) の場合．$\dfrac{\tan x}{x} = 1 + \dfrac{x^2}{3} + \mathcal{O}\bigl(x^4\bigr)$ であるから

$$\overline{v} \simeq \frac{iae^{-i\omega t}}{\omega}\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{kh}{2}\right)^2 = \frac{iae^{-i\omega t}}{\omega}\left(-\frac{h^2}{12}\right)\cdot\frac{i\omega}{\nu} = \frac{h^2}{12\nu}ae^{-i\omega t}$$

  となり (17.5) に戻る．

- $h/\delta \gg 1$ ($kh \gg 1$) の場合．$\overline{v} \simeq \dfrac{iae^{-i\omega t}}{\omega}$ となる．これは $\nu \to 0$ の極限に対応し，（平面に近いところを除けば）速度が一様であるという事実に一致する．

問題 24.5

流体中で前後に振動している半径 R の球に働く抗力を求めよ．

【解答】 球の速度を $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 e^{-i\omega t}$ と書くことにする（$\boldsymbol{u}_0$ は実ベクトル）．§ 20 と同様に，$\boldsymbol{v} = e^{-i\omega t}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}(f\boldsymbol{u}_0)$ の形の解を求めよう．f は r のみの関数とし，原点はある瞬間の球の中心にとるものとする．

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} &= e^{-i\omega t}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}(f\boldsymbol{u}_0) = e^{-i\omega t}\left\{-\triangle\,\mathrm{rot}(f\boldsymbol{u}_0)\right\}\\ &= -e^{-i\omega t}\triangle\,(\mathrm{grad}\,f \times \boldsymbol{u}_0) = -e^{-i\omega t}\triangle\,(\mathrm{grad}\,f) \times \boldsymbol{u}_0\end{aligned}$$

となるから，(24.9) へ代入して

$$i\omega e^{-i\omega t}\triangle\,(\mathrm{grad}\,f) \times \boldsymbol{u}_0 = -\nu e^{-i\omega t}\triangle^2\,(\mathrm{grad}\,f) \times \boldsymbol{u}_0.$$

$\boldsymbol{u}_0 \neq \boldsymbol{0}$ であるから

$$\triangle^2\,(\mathrm{grad}\,f) + \frac{i\omega}{\nu}\triangle\,(\mathrm{grad}\,f) = \boldsymbol{0}.$$

$$\mathrm{grad}\left(\triangle^2 f + \frac{i\omega}{\nu}\triangle f\right) = \boldsymbol{0}$$

$$\triangle^2 f + \frac{i\omega}{\nu}\triangle f = \mathrm{const.}$$

$\triangle f$ が無限遠で 0 となることを要求すれば，右辺は 0 とすることができる．

$$\triangle^2 f + \frac{i\omega}{\nu}\triangle f = 0$$

球座標系では $\triangle g = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dg}{dr}\right) = \dfrac{1}{r}\dfrac{d^2(rg)}{dr^2}$ が成り立つから（$g = \triangle f$ とすれば）

$$\frac{1}{r}\frac{d^2(r\triangle f)}{dr^2} + \frac{i\omega}{\nu}\triangle f = 0 \qquad \therefore \quad \frac{d^2(r\triangle f)}{dr^2} + k^2(r\triangle f) = 0.$$

よって $r\triangle f \propto e^{\pm ikr}$ となるが，マイナスを選ぶと $e^{-ikr} = e^{-i\frac{1+i}{\delta}r}$ は無限遠で発散するからプラスが適する．ゆえに，a を実数として

$$\triangle f = ika\frac{e^{ikr}}{r}$$

となる．左辺に再び $\triangle = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)$ を用いれば

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df}{dr}\right) &= ikare^{ikr} \\
&\qquad \leftarrow \int xe^{px}\,dx = \frac{(px-1)e^{px}}{p^2} \\
r^2\frac{df}{dr} &= ika\cdot\frac{(ikr-1)e^{ikr}}{(ik)^2} + b = a\left(r - \frac{1}{ik}\right)e^{ikr} + b \\
\therefore \quad \frac{df}{dr} &= \frac{a\left(r-\frac{1}{ik}\right)e^{ikr} + b}{r^2}.
\end{aligned}
$$

(速度は f の微分で与えられるから，これ以上積分する必要はない)

このとき

$$
\operatorname{grad} f = \frac{df}{dr}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{a(r-\frac{1}{ik})e^{ikr}+b}{r^3}\boldsymbol{r},
$$

$$
\frac{d}{dr}\left[a\left(r-\frac{1}{ik}\right)e^{ikr}+b\right] = aikre^{ikr}
$$

$$
\operatorname{grad}\left[\frac{a(r-\frac{1}{ik})e^{ikr}+b}{r^3}\right] = \frac{1}{r^3}aik\boldsymbol{r}e^{ikr} + \left\{a\left(r-\frac{1}{ik}\right)e^{ikr}+b\right\}\frac{-3\boldsymbol{r}}{r^5}
$$

などに注意すると

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}\operatorname{rot}(f\boldsymbol{u}_0) &= \operatorname{grad}(\boldsymbol{u}_0\cdot\operatorname{grad} f) - \boldsymbol{u}_0(\triangle f) \\
&= \operatorname{grad}\left[(\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{r})\frac{a(r-\frac{1}{ik})e^{ikr}+b}{r^3}\right] - \boldsymbol{u}_0\frac{ikae^{ikr}}{r} \\
&= \boldsymbol{u}_0\frac{a(r-\frac{1}{ik})e^{ikr}+b}{r^3} + (\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{r})\operatorname{grad}\left[\frac{a(r-\frac{1}{ik})e^{ikr}+b}{r^3}\right] - \boldsymbol{u}_0\frac{ikae^{ikr}}{r} \\
&= \boldsymbol{u}_0\left\{ae^{ikr}\left(-\frac{ik}{r}+\frac{1}{r^2}-\frac{1}{ikr^3}\right)+\frac{b}{r^3}\right\} + (\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\left\{ae^{ikr}\left(\frac{ik}{r}-\frac{3}{r^2}+\frac{3}{ikr^3}\right)-\frac{3b}{r^3}\right\}
\end{aligned}
$$

であり，$\boldsymbol{v}$ はこれに $e^{-i\omega t}$ をかけたものである．

境界条件は，$r=R$ で $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0e^{-i\omega t}$ となることで

$$
\begin{cases}
ae^{ikR}\left(-\dfrac{ik}{R}+\dfrac{1}{R^2}-\dfrac{1}{ikR^3}\right)+\dfrac{b}{R^3} = 1 \\
ae^{ikR}\left(\dfrac{ik}{R}-\dfrac{3}{R^2}+\dfrac{3}{ikR^3}\right)-\dfrac{3b}{R^3} = 0.
\end{cases}
$$

これを解いて

$$
\begin{cases}
a = -\dfrac{3R}{2ik}e^{-ikR} \\
b = -\dfrac{R^3}{2}\left(1-\dfrac{3}{ikR}-\dfrac{3}{k^2R^2}\right)
\end{cases}
$$

となる．

抗力 F の導出は諦めて結果のみ記すと

$$
F = 6\pi\eta R\left(1+\frac{R}{\delta}\right)u + 3\pi R^2\sqrt{\frac{2\rho\eta}{\omega}}\left(1+\frac{2R}{9\delta}\right)\frac{du}{dt} \qquad \left(\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}\right).
$$

- $\omega \to 0$ ($\delta \to \infty$) のとき，第 1 項は Stokes の法則になる．
- $\omega \to \infty$ ($\delta \to 0$) のときの漸近形は

$$F \simeq 6\pi\eta R \cdot \frac{R}{\sqrt{2\nu/\omega}} u + 3\pi R^2 \sqrt{\frac{2\rho\eta}{\omega}} \cdot \frac{2R}{9\sqrt{2\nu/\omega}} \frac{du}{dt} = 3\pi R^2 \sqrt{2\rho\eta\omega}\, u + \frac{2}{3}\pi R^3 \rho \frac{du}{dt}$$

で与えられる．第 1 項は散逸項の極限であり，(24.14) を用いてエネルギー散逸を計算することでも得られる．第 2 項は球のまわりのポテンシャル流での慣性項と一致する（問題 11.1）．

問題 24.6

高周波数の極限（$\delta \ll R$）で，半径 R の無限に長い円柱が軸と垂直に振動する場合の，散逸抗力を求めよ．

【解答】 省略する．

問題 24.7

任意の速度 $u(t)$ で動く球に働く抗力を求めよ．

【解答】 $u(t)$ を Fourier 積分の形で表そう．

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_\omega e^{-i\omega t}\, d\omega, \quad u_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) e^{i\omega\tau}\, d\tau.$$

方程式が線形であるから，ある Fourier 成分 $u_\omega e^{-i\omega t}$ がもたらす抗力を求めて，全ての ω について積分すればよい．$u_\omega e^{-i\omega t}$ による抗力は問題 24.5 から

$$6\pi\eta R \left(1 + \frac{R}{\sqrt{2\nu/\omega}}\right) u_\omega e^{-i\omega t} + 3\pi R^2 \sqrt{\frac{2\rho\eta}{\omega}} \left(1 + \frac{2R}{9\sqrt{2\nu/\omega}}\right) (-i\omega u_\omega e^{-i\omega t})$$

$$= \pi\rho R^3 \left[\frac{6\nu}{R^2}\left(1 + R\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right) - i\omega \frac{3}{R}\sqrt{\frac{2\eta}{\rho\omega}} \left(1 + \frac{2R}{9}\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right)\right] u_\omega e^{-i\omega t}$$

$$= \pi\rho R^3 \left[\frac{6\nu}{R^2} - \frac{2}{3} i\omega + \frac{3\sqrt{2\nu}}{R}(1-i)\sqrt{\omega}\right] u_\omega e^{-i\omega t}$$

$\dot{u}$ の Fourier 成分を $(\dot{u})_\omega$ と書くと（u_ω の時間微分ではない）$(\dot{u})_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{d\tau} e^{i\omega\tau}\, d\tau = -i\omega u_\omega$

$$= \pi\rho R^3 \left[\frac{6\nu}{R^2} u_\omega + \frac{2}{3}(\dot{u})_\omega + \frac{3\sqrt{2\nu}}{R} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{\omega}} (\dot{u})_\omega\right] e^{-i\omega t}.$$

これに $1/2\pi$ をかけて ω で積分すれば，第 1 項と第 2 項は

$$2\pi\rho R^3 \left[\frac{3\nu}{R^2} u + \frac{1}{3}\frac{du}{dt}\right]$$

を与える．また $\frac{1+i}{\sqrt{\omega}}(\dot{u})_\omega e^{-i\omega t}$ を $(-\infty, \infty)$ で積分したものは，$(0, \infty)$ で積分したものを 2 倍すればよい（そ

の後実部をとる）から

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+i}{\sqrt{\omega}}(\dot{u})_\omega e^{-i\omega t}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot 2\,\mathrm{Re}\left[(1+i)\int_0^\infty \frac{(\dot{u})_\omega}{\sqrt{\omega}}e^{-i\omega t}\,d\omega\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\left[(1+i)\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty}\dot{u}(\tau)e^{i\omega\tau}\,d\tau\,\frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{\omega}}\,d\omega\right]
\end{aligned}
$$

$\leftarrow \tau$ の積分区間を $(-\infty, t)$ と (t, ∞) に分け，τ と ω の積分を交換する．

$$
= \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\left[(1+i)\int_{-\infty}^{t}\dot{u}(\tau)\int_0^\infty\frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{\sqrt{\omega}}\,d\omega d\tau + (1+i)\int_t^\infty \dot{u}(\tau)\int_0^\infty\frac{e^{i\omega(\tau-t)}}{\sqrt{\omega}}\,d\omega d\tau\right]
$$

$a>0$ として，積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ia\omega}}{\sqrt{\omega}}\,d\omega$ を計算しなければならない．$\sqrt{\omega}=x$ とおくと

$$
\int_0^\infty \frac{e^{-ia\omega}}{\sqrt{\omega}}\,d\omega = \int_0^\infty \frac{e^{-iax^2}}{x}2x\,dx = 2\int_0^\infty e^{-iax^2}\,dx = 2\int_0^\infty \cos\bigl(ax^2\bigr)\,dx - 2i\int_0^\infty \sin\bigl(ax^2\bigr)\,dx
$$

Fresnel 積分より，この 2 つの積分はどちらも $\displaystyle\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}$ に等しいから

$$
\int_0^\infty \frac{e^{-ia\omega}}{\sqrt{\omega}}\,d\omega = (1-i)\sqrt{\frac{\pi}{2a}}
$$

であり，同様に

$$
\int_0^\infty \frac{e^{ia\omega}}{\sqrt{\omega}}\,d\omega = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2a}}
$$

となる．

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\left[(1+i)\int_{-\infty}^{t}\dot{u}(\tau)(1-i)\sqrt{\frac{\pi}{2(t-\tau)}}\,d\tau + (1+i)\int_t^\infty \dot{u}(\tau)(1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2(\tau-t)}}\,d\tau\right] \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\,\mathrm{Re}\left[(1+1)\int_{-\infty}^{t}\frac{\dot{u}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau + \cancel{2i\int_t^\infty\frac{\dot{u}(\tau)}{\sqrt{\tau-t}}\,d\tau}\right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{t}\frac{\dot{u}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau
\end{aligned}
$$

以上より，求める抗力は

$$
F = 2\pi\rho R^3\left[\frac{3\nu}{R^2}u + \frac{1}{3}\frac{du}{dt} + \frac{3}{R}\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\int_{-\infty}^{t}\frac{du/d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau\right].
$$

問題 24.8

時刻 $t=0$ で一様な加速度で動き始めた（$u=\alpha t$）球に働く抗力を求めよ．

【解答】 $t \leqq 0$ では $u=0$ より $F=0$ である．以下 $t \geqq 0$ とする．

$$
\int_{-\infty}^{t}\frac{du/d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau = \int_0^t \frac{\alpha\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \alpha\Bigl[-2\sqrt{t-\tau}\Bigr]_{\tau=0}^{\tau=t} = 2\alpha\sqrt{t}
$$

であるから結局

$$F = 2\pi\rho R^3 \alpha \left(\frac{3\nu t}{R^2} + \frac{1}{3} + \frac{6}{R}\sqrt{\frac{\nu t}{\pi}} \right).$$

問題 24.9

前問で，$t = 0$ で瞬間的に等速度運動を始めた場合はどうか．

【解答】 $t < 0$ で $u = 0$，$t > 0$ で $u = u_0$ であり，$\dfrac{du}{dt} = u_0 \delta(t)$ である．

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{du/d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau = u_0 \int_{-\infty}^{t} \frac{\delta(\tau)\, dt}{\sqrt{t-\tau}} = \frac{u_0}{\sqrt{t}}\ (t > 0)$$

となるから，$t > 0$ での抗力は

$$F = 2\pi\rho R^3 \left(\frac{3\nu}{R^2} u_0 + \frac{1}{3} u_0 \delta(t) + \frac{3u_0}{R}\sqrt{\frac{\nu}{\pi t}} \right) = 6\pi\eta R u_0 \left(1 + \frac{R}{\sqrt{\pi\nu t}} \right) + \frac{2}{3}\pi\rho R^3 u_0 \delta(t).$$

$t \to \infty$ では $F \to 6\pi\eta R u_0$ で Stokes の法則に漸近する．また，$t = 0$ で働いた撃力の力積は，最後の項を積分した $\dfrac{2}{3}\pi\rho R^3 u_0$ で与えられる．

問題 24.10

粘性流体中で，直径のまわりに回転振動を行っている球に働く力のモーメントを求めよ．

【解答】 回転軸を極軸とする球座標系をとると，極軸に垂直な断面内では，流体の速度は ϕ 成分のみが 0 でない．また対称性から $\dfrac{\partial p}{\partial \phi} = 0$ である．よって $\dfrac{\partial v_\phi}{\partial t} = \nu \triangle v_\phi$ となる．$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_0 e^{-i\omega t}$ を球の回転角速度ベクトルとして，$\boldsymbol{v} = \mathrm{rot}(f\boldsymbol{\Omega}_0)e^{-i\omega t} = (\mathrm{grad}\, f \times \boldsymbol{\Omega}_0)\, e^{-i\omega t}$ の形の解を求めよう．$\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \nu \triangle \boldsymbol{v}$ より

$$-i\omega\, (\mathrm{grad}\, f \times \boldsymbol{\Omega}_0)\, e^{-i\omega t} = \nu \triangle\, (\mathrm{grad}\, f \times \boldsymbol{\Omega}_0)\, e^{-i\omega t}$$

$$\mathrm{grad}\, (\nu \triangle f + i\omega f) \times \boldsymbol{\Omega}_0 e^{-i\omega t} = 0 \qquad \therefore \quad \triangle f + k^2 f = \mathrm{const.}$$

f が無限遠で 0 となることを要求すれば右辺は 0 となり，問題 24.5 と同様にして $f = a\dfrac{e^{ikr}}{r}$ となる．このとき

$$\mathrm{grad}\, f = \frac{df}{dr} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r} = a\frac{ike^{ikr} r - e^{ikr}}{r^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{a(ikr - 1)e^{ikr}}{r^3}\boldsymbol{r},$$

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) \frac{a(1 - ikr)e^{ikr}}{r^3}$$

となる．境界条件：$r = R$（R は球の半径）で $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})$ から定数を決めると

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{r}) \left(\frac{R}{r} \right)^3 \frac{1 - ikr}{1 - ikR} e^{i[k(r-R) - \omega t]}$$

を得る．力のモーメントの計算は省略する．

問題 24.11

粘性流体の入った球形の容器が直径のまわりに回転振動を行っているとき，力のモーメントを求めよ．

【解答】 $\triangle f + k^2 f = \mathrm{const.}$ までは前問と同じである．const. を 0 と選び，$r=0$ で有限な解 $f = a\dfrac{\sin kr}{r}$ を用いよう．

$$\operatorname{grad} f = \frac{df}{dr}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{a(kr\cdot\cos kr - \sin kr)}{r^3}\boldsymbol{r},$$

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\frac{a(kr\cdot\cos kr - \sin kr)}{r^3}$$

となる．境界条件：$r=R$ で $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})$ より a が決まり

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\left(\frac{R}{r}\right)^3\frac{kr\cdot\cos kr - \sin kr}{kR\cdot\cos kR - \sin kR}$$

となる．力のモーメントの計算は省略する．

⬆ 目次へ戻る

§ 25　重力波の減衰

前節と同様の議論は，流体の自由表面付近の速度分布についても当てはまる．重力波のような，表面付近での振動現象について考えよう．長さスケール l の代わりに波長 λ をとった場合，条件 (24.11) が成り立つと仮定する；

$$\lambda^2\omega \gg \nu, \quad a \ll \lambda. \tag{25.1}$$

a は波の振幅，ω はその振動数である．前節と同様に，(24.11) が成り立つ場合には，表面の薄い層でのみ流れは回転的であり，残りの領域では（理想流体と同様）ポテンシャル流とみなすことができる．

粘性流体の運動は，自由表面での境界条件 (15.16)（$\sigma_{ij}n_j = 0$）を満たさなければならない．これは，速度の空間微分を組み合わせたものが 0 となることを要求するが，理想流体の運動方程式の解はこれを満足しない（表面で $p = p_0$ という条件のみのため）．よって前節で v_y について議論したのと同様に，表面の薄い層では，速度微分が急速に 0 に近づくと言うことができる（固体表面付近でそうであったように，大きな速度勾配が生じるわけではないことに注意しよう）．

さて，重力波のエネルギー散逸を計算しよう．散逸は，運動エネルギーだけでなく，重力のポテンシャルエネルギーを合わせた力学的エネルギー E_{mech} について考えなければならない．しかし重力場が存在するかどうかは，流体の内部摩擦によるエネルギー散逸とは明らかに無関係である．よって $\dot{E}_{\mathrm{mech}}$ は (16.3) で与えられる：

$$\dot{E}_{\mathrm{mech}} = -\frac{1}{2}\eta\int\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 dV.$$

この積分を計算する際，表面付近の回転的流れの領域は小さく，そこでの速度勾配も大きくないために，（固体が振動していたときとは異なり）この領域の寄与を無視してよいことに注意しよう．言いかえれば，全流体が理想流体のポテンシャル流であるとみなして積分を行うことができる．理想流体中の重力波については § 12 で述べた．ポテンシャル流と仮定しているから $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x_j\partial x_i} = \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}$ であり

$$\dot{E}_{\mathrm{mech}} = -2\eta\int\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}\right)^2 dV$$

となる．鉛直上向きに z 軸をとれば，§ 12 よりポテンシャルの形は

$$\phi = \phi_0 \cos(kx - \omega t + \alpha) e^{kz}$$

であり，0 でない（空間）2 階微分は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -k^2 \phi_0 \cos(\ ) e^{kz}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = k^2 \phi_0 \cos(\ ) e^{kz}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} = -k^2 \phi_0 \sin(\ ) e^{kz}$$

である．

我々が興味があるのは，各瞬間でのエネルギー散逸ではなく，その時間平均である．$\sin^2$ と $\cos^2$ の時間平均が等しいことに注意すると

$$\begin{aligned}
\overline{\dot{E}_{\mathrm{mech}}} &= -2\eta \int \overline{\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2}\, dV \\
&= -2\eta \int \left\{ \overline{\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)^2} + 2\overline{\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right)^2} \right\} dV \\
&= -2\eta \int 4k^4 {\phi_0}^2 \overline{\cos^2(\ )} e^{2kz}\, dV \\
&= -8\eta k^4 \int \overline{\phi^2}\, dV
\end{aligned} \tag{25.2}$$

となる．

次に，力学的エネルギー E_{mech} 自身を計算しよう．そのために，微小振動を行っている系では，運動エネルギーの平均とポテンシャルエネルギーの平均が等しいという，力学の原理を用いよう：

$$\begin{aligned}
\overline{E_{\mathrm{mech}}} &= 2 \cdot \frac{1}{2} \rho \int \overline{v^2}\, dV \\
&= \rho \int \overline{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)^2}\, dV \\
&= 2\rho k^2 \int \overline{\phi^2}\, dV
\end{aligned} \tag{25.3}$$

波動が時間とともにどのように減衰するかは，**減衰係数** γ で表される．波の振幅が $e^{-\gamma t}$ で減衰するとすれば，エネルギーは $\overline{E_{\mathrm{mech}}} = Ae^{-2\gamma t}$ で減衰する（A は定数）．両辺を時間微分し（平均操作と入れ替えれば）$-\overline{\dot{E}_{\mathrm{mech}}} = 2\gamma A e^{-2\gamma t}$，よって

$$\gamma \equiv \frac{\left|\overline{\dot{E}_{\mathrm{mech}}}\right|}{2\overline{E_{\mathrm{mech}}}} \tag{25.4}$$

で定義すればよい．

重力波の場合には，(25.2),(25.3) から

$$\gamma = 2\nu k^2 \tag{25.5}$$

を得る．あるいは分散関係 (12.7) から

$$\gamma = \frac{2\nu\omega^4}{g^2} \tag{25.6}$$

となる．

⬆ 目次へ戻る