第 5 章・流体中の熱伝導

2023-04-08 14:53

これは L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2nd English edition, Pergamon Press, 1987. の内容を補ったノートである．内容の正確性は保証できないが，改善点・誤植（内容，体裁のどちらでも構わない）を見つけた方は筆者まで知らせてほしい．図がほとんどないが，徐々に付け加えていく予定である．

なお，♠ は第 2 版で新たに加わった部分，♠ ♠ は筆者が勝手に付け加えた部分である．また，目次，式や問題の番号，各節末尾の「目次へ戻る」ボタンにはハイパーリンクを設定し，利便性を高めたつもりである．

本文中で頻繁に参照する文献の略称は以下の通りである．

- 今井→今井功『物理学選書⒁ 流体力学（前編）』裳華房，1974
- 巽→巽友正『新物理学シリーズ 21 流体力学』培風館，1982
- Lamb → H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6th ed., Cambridge, 1932（邦訳あり）
- 『力学』，『統計物理学』，『物理的運動学』→それぞれ，ランダウ＝リフシッツ理論物理学教程の第 1 巻，第 5 巻，第 10 巻．

目次

§ 49　熱輸送の一般式 **1**

§ 50　非圧縮性流体中の熱伝導 **4**

§ 51　無限媒質中の熱伝導 **8**

§ 52　有限媒質中の熱伝導 **15**

§ 53　熱輸送の相似則 **20**

§ 54　境界層中の熱輸送 **22**

§ 55　運動している流体中での物体の加熱 **22**

§ 56　自由対流 **24**

§ 57　静止流体の対流不安定性 **26**

§ 49　熱輸送の一般式

§ 2 の終わりで，流体力学の完全な方程式系は 5 つの方程式を含まなければならないことを述べた．熱伝導や内部摩擦の過程を伴う流体であっても，連続の式と運動方程式（Navier-Stokes 方程式）は成り立つ．理想流体では，5 番目の方程式はエントロピー保存の式 (2.6) であった．粘性流体では，非可逆的なエネルギーの散逸が生じるから，この式は成り立たない．粘性流体の場合に成り立つ式を決めるために，エネルギー保存の式を考えよう．

理想流体でのエネルギー保存則は (6.1) で与えられる（ε は単位質量あたりの内部エネルギー，h は単位質量あたりのエンタルピー）：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\varepsilon\right)=-\operatorname{div}\left[\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+h\right)\right].$$

左辺は，単位体積の流体のエネルギー変化率であるから，右辺の div の中は流体表面を通る全エネルギーフラックスを表している．粘性流体の場合，ここに

1. 内部摩擦によるフラックス
2. **熱伝導**によるフラックス $\boldsymbol{q}$

を加えなければならない．§ 16 によれば，（σ'_{ij} を粘性応力テンソルとして）1 は $v_i\sigma'_{ij}$ と書ける．2 は流体中の温度が一様でない場合に生じるエネルギーの輸送であり，マクロな運動の有無によらず存在する（すなわち，静止流体中でも生じる）．温度勾配が大きくない場合，$\boldsymbol{q}$ と温度変化の関係をただちに書き下すことができる．$\boldsymbol{q}$ を温度勾配の冪で展開して 1 次まで取れば

$$\boldsymbol{q}=-\kappa\cdot\operatorname{grad}T \tag{49.1}$$

となる（温度勾配がないとき熱伝導は生じないから定数は 0 である）．定数 κ は**熱伝導率**と呼ばれる．温度差があるとき，熱は温度の高い方から低い方へ流れるから，$\boldsymbol{q}$ と $\operatorname{grad}T$ は逆符号であり，$\kappa>0$ でなければならない．κ は一般には温度と圧力の関数である．

1,2 を加えると，エネルギー保存則は以下のようになる．

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\varepsilon\right)=-\operatorname{div}\left[\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+h\right)-v_i\sigma'_{ij}-\kappa\cdot\operatorname{grad}T\right] \tag{49.2}$$

この形でもよいが，運動方程式を用いて書き直しておくと便利である．

Landau は一から考え直しているが，我々は既に § 6 で同様の議論を行なっているから，その結果を用いることにしよう．

連続の式，運動方程式，熱力学第 1 法則より，以下の式が成り立つ．

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\varepsilon\right)+\operatorname{div}\left[\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+h\right)\right]=\rho T\frac{Ds}{Dt}+v_i\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial x_j} \tag{①}$$

$\operatorname{div}(v_i\sigma'_{ij})=\dfrac{\partial}{\partial x_j}(v_i\sigma'_{ij})=\sigma'_{ij}\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}+v_i\dfrac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial x_j}$ に注意して (49.2) と①を見比べると

$$\rho T\frac{Ds}{Dt}=\sigma'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\operatorname{div}(\kappa\operatorname{grad}T). \tag{49.4}$$

こうして**熱輸送の一般式**が得られた．粘性と熱伝導がなければ右辺は 0 であり，理想流体に対するエントロピー保存の式 (2.6) に戻る．

(49.4) の左辺は，単位体積の流体が単位時間に獲得する熱量を表している．そしてそれは，粘性散逸によるものと，伝導により考えている体積に持ち込まれるものからなる．前者について，粘性応力テンソルの表式 (15.3) を代入して，速度の空間微分で表そう．

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}&=\underline{\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}}+\zeta\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\\&=\underline{\frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)^2}+\zeta(\operatorname{div}\boldsymbol{v})^2\\&\equiv\Phi\end{aligned}$$

2 番目の等号を確かめるためには，逆向きに計算する方が楽である．

$$
\begin{aligned}
(\text{波線部}) &= \frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\cdot 2 + \frac{4}{9}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\cdot 3 + 2\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - 2\cdot\frac{2}{3}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\cdot 2\right) \\
&= \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) \\
&= (\text{下線部})
\end{aligned}
$$

Φ は**散逸関数**と呼ばれる．弾性理論における弾性自由エネルギー

$$F = \mu\left(u_{ij} - \frac{1}{3}u_{kk}\delta_{ij}\right)^2 + \frac{K}{2}{u_{kk}}^2$$

($u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ は歪みテンソル，μ は剛性率，K は体積弾性率）と比較せよ．

(49.4) の意味を明らかにするために，流体の全体積にわたってエントロピーの時間変化を計算しよう．

$$\frac{d}{dt}\int \rho s\, dV = \int \frac{\partial}{\partial t}(\rho s)\, dV$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) &= \frac{D}{Dt}(\rho s) - \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}(\rho s) \\
&= \rho\frac{Ds}{Dt} + s\frac{D\rho}{Dt} - \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}(\rho s) \\
&\qquad \text{連続の式から } s\frac{D\rho}{Dt} = -\rho s\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} \\
&= \rho\frac{Ds}{Dt} - \mathrm{div}(\rho s\boldsymbol{v}).
\end{aligned}
$$

$\mathrm{div}(\rho s\boldsymbol{v})$ は表面積分に変換され，無限に広がる流体を考えるとその寄与は 0 になる．よって

$$\frac{d}{dt}\int \rho s\, dV = \int \rho\frac{Ds}{Dt}\, dV \overset{(49.4)}{=} \int \frac{1}{T}\left(\mathrm{div}(\kappa\,\mathrm{grad}\,T) + \Phi\right)\, dV. \qquad ②$$

第 1 項は

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{T}\,\mathrm{div}(\kappa\,\mathrm{grad}\,T)\, dV &= \int\left\{\mathrm{div}\left(\frac{1}{T}\cdot\kappa\,\mathrm{grad}\,T\right) - \kappa\,\mathrm{grad}\,T\cdot\mathrm{grad}\left(\frac{1}{T}\right)\right\}\, dV \\
&= \int \frac{\kappa}{T}\,\mathrm{grad}\,T\cdot d\boldsymbol{S} + \int \frac{\kappa(\mathrm{grad}\,T)^2}{T^2}\, dV
\end{aligned}
$$

と書ける．無限に広がる流体を考え，無限遠で流体の温度が十分速く一定値に近づくと仮定すれば第 1 項は 0 となる．したがって

$$\frac{d}{dt}\int \rho s\, dV = \int \frac{\kappa(\mathrm{grad}\,T)^2}{T^2}\, dV + \int \frac{1}{T}\Phi\, dV. \qquad (49.6)$$

この式は，単位時間の全エントロピーの変化を熱伝導と内部摩擦の寄与で表した式である．熱力学第 2 法則によればエントロピーは増加しなければならないから，右辺は正である．$\kappa > 0$，$\eta > 0$ であるから，第 2 粘性率 ζ も正であることが導かれた．

(49.1) を導く際に，熱伝導フラックスは圧力勾配によらず温度勾配のみで書けることを仮定していた．これは次のように正当化できる；もし $\boldsymbol{q}$ に $-\alpha\,\mathrm{grad}\,p$（$\alpha$ は比例係数）が加わったとすると，②には

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{T}\,\mathrm{div}(\alpha\,\mathrm{grad}\,p)\,dV &= \int \left\{\mathrm{div}\left(\frac{1}{T}\alpha\,\mathrm{grad}\,p\right) - \alpha\,\mathrm{grad}\,p\cdot\mathrm{grad}\left(\frac{1}{T}\right)\right\} dV \\ &= \int \frac{\alpha}{T}\,\mathrm{grad}\,p\cdot d\boldsymbol{S} + \int \frac{\alpha\,\mathrm{grad}\,p\cdot\mathrm{grad}\,T}{T^2}\,dV\end{aligned}$$

という項が加わり，結果には $\mathrm{grad}\,p\cdot\mathrm{grad}\,T$ という項が現れる．これは正にも負にもなりうるから，エントロピーは増加するとは限らなくなり，矛盾が生じる．

最後に，これまでの議論は以下に述べる点においても厳密にされなければならないことに触れておこう；温度勾配や速度勾配が存在する流体は熱力学的な平衡状態にはなく，（平衡状態で成り立つ）熱力学量の関係式は厳密には成り立たなくなる．つまり，$\rho, \varepsilon, \boldsymbol{v}$ を適切に定義したとしても，平衡状態でのエントロピーの定義により定まる量 $s = s(\rho, \varepsilon)$ は真のエントロピーではなく，積分

$$\int \rho s\,dV$$

は時間と共に増加するとは限らない．しかし，温度勾配や速度勾配が小さい場合には，この s が近似的に真のエントロピーに等しいことが示せる：この s は平衡状態での値であるから，最大値である．よってエントロピーを微小な勾配で展開したとき，1 次の項は 0 であり，2 次以上の項のみが現れる．勾配が小さければ，これらの寄与は無視できる．

⬆ 目次へ戻る

§50　非圧縮性流体中の熱伝導

熱伝導方程式

ある場合には，熱輸送の一般式 (49.4) を簡単な形に書くことができる：流体の速度が音速に比べて十分小さい場合，流体の運動によって生じる圧力変化を無視することができ，圧力変化による密度変化もまた無視することができる．一方，温度変化による密度変化は無視することができず，速度が遅い場合でも，非一様に加熱された流体の密度は一様とはみなせない．つまり，熱力学量の微分を計算する際，圧力は一定だが密度は一定でないと仮定する必要がある（Boussinesq **近似**）．

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p dT$$

定圧比熱は $c_p = T\left(\dfrac{\partial s}{\partial T}\right)_p$ と書けるから，

$$T\,ds = c_p\,dT \qquad \therefore\quad T\frac{Ds}{Dt} = c_p\frac{DT}{Dt}$$

となる．(49.4) は

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \mathrm{div}(\kappa\,\mathrm{grad}\,T) + \sigma'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \tag{50.1}$$

Boussinesq 近似では，密度変化は浮力の形でのみ考慮され，今考えている状況では ρ の変化をあらわに考える必要はない．この場合 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$ である．また，この近似は流体中の温度差が小さい場合にのみ成り立つから，η, κ, c_p などの温度依存性を無視して定数とみなしてよい．

§ 16 の結果から，非圧縮性流体では $\sigma'_{ij}\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}=\dfrac{\eta}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2$ であるから

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}T=\chi\triangle T+\frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 \tag{50.2}$$

となる．ここで $\nu=\eta/\rho$ は動粘性率であり，

$$\chi=\frac{\kappa}{\rho c_p} \tag{50.3}$$

は**温度伝導度（熱拡散率）**である．

流体が静止しているとき $\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ であり，エネルギーの輸送は熱伝導によってのみ生じる．この場合 (50.2) は

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\chi\triangle T \tag{50.4}$$

となる（**熱伝導方程式，Fourier の式**）．(50.4) は，運動する流体の熱輸送の一般式を経由することなく，もっと簡単に導くことができる．ある体積で単位時間に吸収される熱量は，境界から流入する熱フラックスに等しいことから

$$\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}=-\operatorname{div}\boldsymbol{q}=\kappa\triangle T$$

となる．

(50.4) は，実際には限られた場合にしか適用できない．というのは，重力場中では温度勾配が小さくても流体が運動しうるからである（**対流**，§ 56）．そのため，重力と温度勾配が逆向きであるか，粘性が非常に大きい流体の場合のみ，静止状態が可能である．しかし (50.4) は固体の熱伝導をも記述する重要な方程式であるから，§ 51-52 で詳しく調べることにしよう．

定常な場合の熱伝導方程式

静止している媒質が，外部の熱源によって時間的に一定な（しかし空間的には一様でない）温度分布を持つとき，熱伝導方程式は

$$\triangle T=0 \tag{50.5}$$

という Laplace 方程式になる．より一般の場合として，κ が一様でなければ

$$\operatorname{div}(\kappa\operatorname{grad}T)=0 \tag{50.6}$$

となる．

外部熱源がある場合の熱伝導方程式

媒質が（媒質内部の物理過程によって起こるのではない）外的な熱源を含んでいる場合，熱伝導方程式に項が加わる．単位時間・単位体積当たりの発熱量を Q とすると（一般には時間と座標の関数である）

$$\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}=\kappa\triangle T+Q \tag{50.7}$$

となる．

熱伝導方程式の境界条件

2 つの媒質の境界における条件を書き下そう．境界では 2 つの媒質の温度は等しいから

$$T_1 = T_2. \tag{50.8}$$

境界を通って一方から他方の媒質に流れる熱フラックスは等しいから，（境界が静止していれば）

$$\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}. \tag{50.9}$$

もし境界に，単位時間・単位面積当たり $Q^{(s)}$ の熱を発する外的な熱源があるなら

$$\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} - \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} = Q^{(s)}. \tag{50.10}$$

熱爆発

熱源が存在する場合に媒質の温度分布を求める問題では，熱源の強さは温度の関数として与えられるのが普通である．関数 $Q(T)$ が T とともに急激に大きくなる場合，固定境界条件のもとでは，媒質の温度分布が定常的になることはできない；媒質表面を通って外に逃げる熱量は，加熱の仕方に関係なく，媒質と外部の温度差 $T - T_0$（の平均値）に比例する．よって，T の増加によって大量の熱が生成されても，表面から熱が逃げるのが追いつかないのである．

定常状態が実現しないため，**熱爆発**が生じるかもしれない：発熱燃焼反応の速度が温度とともに急激に増加する場合，定常分布が実現できないために，物質の急速な発火と反応の加速が起こる（N. N. Semyonov 1923）．爆発的な燃焼反応の速度（つまり熱の生成速度）は，活性化エネルギー U が大きい場合，$e^{-U/T}$ のような温度依存性を持つ．熱爆発が起こる条件を調べるためには，着火が比較的遅い反応の経過を考えなければならない．外部の温度を T_0 とすると

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_0 + (T - T_0)} = \frac{1}{T_0}\left(1 + \frac{T - T_0}{T_0}\right)^{-1} \simeq \frac{1}{T_0}\left(1 - \frac{T - T_0}{T_0}\right) = \frac{1}{T_0} - \frac{T - T_0}{{T_0}^2}$$

であるから，結局

$$Q = Q_0 e^{\alpha(T - T_0)} \tag{50.11}$$

のような熱源を考えればよいことになる（D. A. Frank-Kamenetskii 1939）．問題 50.1 参照．

▍熱爆発に関する一連の理論は Frank-Kamenetskii 理論と呼ばれている．▍

問題 50.1

(50.11) で与えられる熱源が，2 つの平行な平面に挟まれた媒質中に分布しており，平面の温度は一定に保たれている．定常な温度分布が可能な条件を求めよ（D. A. Frank-Kamenetskii 1939）．

【解答】 定常状態での熱伝導方程式は

$$\kappa \frac{d^2 T}{dx^2} = -Q_0 e^{\alpha(T - T_0)}$$

であり，境界条件は $x = 0, 2l$ で $T = T_0$ である（$2l$ は 2 平面の距離とする）．無次元の変数 $\tau = \alpha(T - T_0)$，$\xi = x/l$ を導入すると

$$\frac{d^2 \tau}{d\xi^2} = -\lambda e^{\tau}, \quad \lambda = \frac{Q_0 \alpha l^2}{\kappa}$$

となる．両辺に $2\dfrac{d\tau}{d\xi}$ をかけて 1 回積分すると

$$\left(\frac{d\tau}{d\xi}\right)^2 = 2\lambda(\text{const.} - e^{\tau}).$$

対称性から，$\xi = 1$ で $\dfrac{d\tau}{d\xi} = 0$ となる．このときの τ を τ_0 とすると $\text{const.} = e^{\tau_0}$ であり，$e^{\tau_0} \geqq e^{\tau}$ よりこれは最大値である．$\xi = 0$ で $\tau = 0$，$\xi = 1$ で $\tau = \tau_0$ という条件に注意して上式を積分する．

$$\frac{d\tau}{d\xi} = \sqrt{2\lambda(e^{\tau_0} - e^{\tau})}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{\sqrt{e^{\tau_0} - e^{\tau}}} = \int_0^1 d\xi = 1$$

左辺の積分を実行するため $y = \sqrt{e^{\tau_0} - e^{\tau}}$ とおくと，$y^2 = e^{\tau_0} - e^{\tau}$ より $2y\,dy = -e^{\tau}\,d\tau$ であり

$$\frac{d\tau}{\sqrt{e^{\tau_0} - e^{\tau}}} = \frac{d\tau}{y} = -\frac{2dy}{e^{\tau}} = -\frac{2dy}{e^{\tau_0} - y^2}.$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{\sqrt{e^{\tau_0} - e^{\tau}}} &= \int_{\sqrt{e^{\tau_0}-1}}^{0} \frac{-2dy}{e^{\tau_0} - y^2} = 2\int_0^{\sqrt{e^{\tau_0}-1}} \frac{dy}{e^{\tau_0} - y^2} \\ &= 2\left[\frac{1}{e^{\tau_0/2}}\tanh^{-1}\left(\frac{y}{e^{\tau_0/2}}\right)\right]_0^{\sqrt{e^{\tau_0}-1}} = 2e^{-\tau_0/2}\tanh^{-1}\left(\sqrt{1 - e^{-\tau_0}}\right)\end{aligned}$$

$\tanh^{-1}(\sqrt{1-x}) = \cosh^{-1}(\sqrt{x})$ であるから結局

$$e^{-\tau_0/2}\cosh^{-1}(e^{\tau_0/2}) = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$$

を得る．この式は，与えられた λ に対して温度の最大値 τ_0 を求める方程式である．これを

$$\lambda = 2e^{-\tau_0}\left\{\cosh^{-1}(e^{\tau_0/2})\right\}^2.$$

と変形し，右辺を τ_0 の関数と見て $f(\tau_0)$ とおくと，$f(\tau_0)$ は $\tau_0 = 1.187$ で最大値 0.878 をとる．よって

- $\lambda > 0.878$ のときは境界条件を満たす解が存在しないから，定常な温度分布は不可能である．
- $\lambda \leqq 0.878$ のときは定常な温度分布が可能であり，2 つの解のうち小さい方が定常な温度分布に対応する．

問題 50.2

温度勾配が一定に保たれている静止流体中に球が浸されているとき，流体および球の定常温度分布を求めよ．

【解答】 球の内外で，温度分布は Laplace 方程式 $\triangle T = 0$ に従う．球と流体を添字 1/2 で区別し，球の半径を R とすると，境界条件は $r = R$ で

$$T_1 = T_2, \quad \kappa_1\frac{\partial T_1}{\partial r} = \kappa_2\frac{\partial T_2}{\partial r}$$

となることである．また，与えられた温度勾配を $\boldsymbol{A}$ とすると，無限遠で $\operatorname{grad} T_2 \to \boldsymbol{A}$ でなければならない．

問題の対称性から，解を決定づけるパラメータは $\boldsymbol{A}$ のみである．定ベクトル $\boldsymbol{A}$ を線形に含む，Laplace 方程式の解は $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}$ または $\boldsymbol{A}\cdot\operatorname{grad}\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$ である．球の温度は $r=0$ で有限でなければならないことに注意すると

$$T_1 = c_1\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}, \quad T_2 = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r} + c_2\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$$

と書ける．

1 つ目の境界条件から

$$c_1 = 1 + \frac{c_2}{R^3}. \tag{①}$$

また，

$$\frac{\partial T_1}{\partial r} = c_1 A_r, \quad \frac{\partial T_2}{\partial r} = A_r + c_2\left(\frac{A_r}{r^3} - \frac{3\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}}{r^4}\right) = \left(1 - \frac{2c_2}{r^3}\right)A_r$$

であるから 2 つ目の境界条件は

$$\kappa_1 c_1 = \kappa_2\left(1 - \frac{2c_2}{R^3}\right). \tag{②}$$

①を②に代入して

$$\kappa_1\left(1 + \frac{c_2}{R^3}\right) = \kappa_2\left(1 - \frac{2c_2}{R^3}\right)$$

$$c_2(\kappa_1 + 2\kappa_2) = (\kappa_2 - \kappa_1)R^3 \qquad \therefore \quad c_2 = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_1 + 2\kappa_2}R^3.$$

$$c_1 = 1 + \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_1 + 2\kappa_2} = \frac{3\kappa_2}{\kappa_1 + 2\kappa_2}$$

ゆえに，求める温度分布は

$$T_1 = \frac{3\kappa_2}{\kappa_1 + 2\kappa_2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}, \quad T_2 = \left[1 + \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_1 + 2\kappa_2}\left(\frac{R}{r}\right)^3\right]\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}$$

となる．もちろん，$\kappa_1 = \kappa_2$ なら $T_1 = T_2 = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}$ である．

⬆ 目次へ戻る

§51　無限媒質中の熱伝導

静止した無限媒質中の熱伝導を考える．$t=0$ における全空間の温度分布 $T_0(\boldsymbol{r})$ が与えられているとき，$t>0$ での温度分布を求める問題を考えよう．

T を座標に関して Fourier 変換しよう．

$$T_{\boldsymbol{k}}(t) = \int T(\boldsymbol{r},t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,d^3\boldsymbol{r}, \quad T(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int T_{\boldsymbol{k}}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,d^3\boldsymbol{k} \tag{51.1}$$

後者を (50.4) に代入し

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int\left(\frac{dT_{\boldsymbol{k}}}{dt} + \chi k^2 T_{\boldsymbol{k}}\right)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,d^3\boldsymbol{k} = 0$$

$$\frac{dT_{\boldsymbol{k}}}{dt} + \chi k^2 T_{\boldsymbol{k}} = 0 \qquad \therefore \quad T_{\boldsymbol{k}} = T_{0\boldsymbol{k}} \exp\bigl(-\chi k^2 t\bigr).$$

$t = 0$ で $T = T_0$ に戻らなければならないから，$T_{0\boldsymbol{k}}$ は T_0 の Fourier 変換である．

$$T_{0\boldsymbol{k}} = \int T_0(\boldsymbol{r}')e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}\, d^3\boldsymbol{r}'$$

したがって

$$T(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\boldsymbol{k}\int d^3\boldsymbol{r}'\, T_0(\boldsymbol{r}')e^{-\chi k^2 t}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}.$$

積分の順序を入れ替え，まず $\boldsymbol{k}$ についての積分を行おう．

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dk_x\, e^{-\chi {k_x}^2 t}e^{ik_x(x-x')} &= \int_{-\infty}^{\infty} dk_x\, e^{-\chi {k_x}^2 t}\left\{\cos k_x(x-x') + i\cancel{\sin k_x(x-x')}\right\} \\ &\qquad \leftarrow \text{積分公式} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\beta^2/4\alpha} \quad (\alpha > 0) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\chi t}}\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\chi t}\right]\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}T(\boldsymbol{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\boldsymbol{r}'\, T_0(\boldsymbol{r}')\sqrt{\frac{\pi}{\chi t}}^3 \exp\left[-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}{4\chi t}\right] \\ &= \frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}}\int d^3\boldsymbol{r}'\, T_0(\boldsymbol{r}')\exp\left[-\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2}{4\chi t}\right]. \end{aligned} \tag{51.2}$$

この式は問題に対する完全な解である．つまり，与えられた初期の温度分布から，任意の時刻における温度分布を求めることができる．

特に，初期の温度分布が x のみに依存する場合，y', z' についての積分を行えば

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dy'\, e^{-(y-y')^2/4\chi t} = 2\sqrt{\pi\chi t}$ より

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\chi t}}\int_{-\infty}^{\infty} dx'\, T_0(x')\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\chi t}\right] \tag{51.3}$$

となる．

時刻 $t = 0$ で，原点では $T_0 = \infty$ であるが，それ以外の場所では $T_0 = 0$ であるような状況を考えよう（但し，全熱量 $\propto \displaystyle\int d^3\boldsymbol{r}\, T_0(\boldsymbol{r})$ は有限とする）．そのような初期分布はデルタ関数で表される．

$$T_0(\boldsymbol{r}) = \text{const.} \times \delta(\boldsymbol{r}) \tag{51.4}$$

式 (51.2) は次のようになる．

$$T(\boldsymbol{r}, t) = \text{const.} \times \frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{r^2}{4\chi t}\right) \tag{51.5}$$

時間が経過すると，原点 $r = 0$ での温度は $t^{-3/2}$ で減少する．それに伴って周りの温度は上昇し，温度が 0 よりもかなり高い領域が広がっていく（図 39）．この広がり方は主に (51.5) の指数因子によって決まる．この領域の大きさのオーダーを l とすると

$$\frac{l^2}{4\chi t} \sim \text{const.} \qquad \therefore \quad l \sim \sqrt{\chi t}. \tag{51.6}$$

つまり，時間の平方根で増加する．

(51.5) は 3 次元の場合の式であるが，1 次元の場合にも同様の式が成り立つ．$t=0$ で，有限の熱が平面 $x=0$ に集中しているとき，その後の温度分布は

$$T(x,t)=\text{const.}\times\frac{1}{2\sqrt{\pi\chi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\chi t}\right) \tag{51.7}$$

で与えられる．

(51.6) を，やや異なった見方で解釈することができる．物体の大きさのオーダーを l としよう．すると，物体が非一様に加熱される場合，物体の温度がどこでもほぼ等しくなるのにかかる時間のオーダー τ は

$$\tau\sim\frac{l^2}{\chi} \tag{51.8}$$

となる．τ は熱伝導の**緩和時間**と呼ばれ，物体の長さの次元の 2 乗に比例し，温度伝導度に反比例する．

以上で得られた式によって記述される熱伝導の過程は，任意の摂動が瞬時に全空間に伝わるという特徴を持っている．(51.5) から明らかなように，点源から発せられた熱は次の瞬間には媒質に伝わり，無限遠でのみ $T=0$ である．この特徴は，χ が温度に依存しても（全空間で $\chi=0$ でない限り）成り立つ．しかし，$T=0$ で $\chi=0$ となるような温度依存性を持つ媒質の場合，熱の伝播は遅れ，摂動の効果は有限の領域にしか現れない（考えている領域の外では $T=0$ とする）．この結果，および，以下の問題の解は，Ya. B. Zel'dovich and A. S. Kompaneets (1950) による．

問題 51.1

熱伝導度と比熱は温度の冪で変化するが，密度は一定の媒質がある．ある瞬間に任意の熱源から熱が伝播した領域の境界付近で，温度が 0 に近づく様子を調べよ（考えている領域の外では温度は 0 とする）．

【解答】 熱伝導度 κ と比熱 c_p が温度の冪で書けるなら，温度伝導度 $\chi=\dfrac{\kappa}{\rho c_p}$ やエンタルピー $h=\displaystyle\int c_p\,dT$ も温度の冪で変化する．よって，$H=\rho h$ を単位体積当たりのエンタルピーとして，$\chi=aH^n$ と書ける．熱伝導方程式 $\rho c_p\dfrac{\partial T}{\partial t}=\operatorname{div}(\kappa\operatorname{grad}T)$ は

$$\frac{\partial H}{\partial t}=a\operatorname{div}(H^n\operatorname{grad}H) \tag{①}$$

となる．

ある短い時間の間には，領域の境界の一部を平面とみなし，一定速度 v で動くと仮定することができる．よって①の解は $H=H(x-vt)$ とおけて（x は境界面に垂直な方向の座標）

$$-v\frac{dH}{dx}=a\frac{d}{dx}\left(H^n\frac{dH}{dx}\right) \tag{②}$$

となる．1 回積分して

$$-vH=aH^n\frac{dH}{dx}.$$

$\dfrac{dx}{dH}\sim H^{n-1}$ より $x\sim H^n$ となり

$$H\sim|x| \tag{③}$$

となる（$|x|$ は境界からの距離）．

もし $n>0$ なら，加熱された領域は $T=0$ の領域との境界を持つ．もし $n \leqq 0$ なら，$T=0$ となる有限な領域は存在しない．つまり熱は各瞬間に全空間に分布する．

問題 51.2

前問と同様の媒質において，$t=0$ で単位面積あたり Q の熱が平面 $x=0$ に集中している（この面以外では $T=0$ とする）．$t>0$ での温度分布を求めよ．

【解答】 1 次元の場合，方程式①は

$$\frac{\partial H}{\partial t}=a\frac{\partial}{\partial x}\left(H^n\frac{\partial H}{\partial x}\right) \tag{④}$$

となる．この問題に現れるパラメータは $Q[\mathrm{Jm^{-2}}]$，$a=\dfrac{\chi}{H^n}\left[\dfrac{\mathrm{m^2s^{-1}}}{(\mathrm{Jm^{-3}})^n}\right]$ である．相似な解を求めるため，これらと変数 $x[\mathrm{m}]$，$t[\mathrm{s}]$ から無次元の変数 ξ を作ろう．$\xi=Q^\alpha a^\beta x^\gamma t^\delta$ とすると

$$(\mathrm{Jm^{-2}})^\alpha\left(\frac{\mathrm{m^2s^{-1}}}{(\mathrm{Jm^{-3}})^n}\right)^\beta \mathrm{m}^\gamma\mathrm{s}^\delta=1 \qquad \therefore\quad \begin{cases}\alpha-n\beta=0\\ -2\alpha+(2+3n)\beta+\gamma=0\\ -\beta+\delta=0.\end{cases}$$

$\gamma=1$ と選ぶと $\alpha=-\dfrac{n}{2+n}$，$\beta=\delta=-\dfrac{1}{2+n}$ となり

$$\xi=\frac{x}{(Q^nat)^{\frac{1}{2+n}}} \tag{⑤}$$

を得る．

次に，$H[\mathrm{Jm^{-3}}]$ の次元をもつ量を作ろう．

$$(\mathrm{Jm^{-2}})^\alpha\left(\frac{\mathrm{m^2s^{-1}}}{(\mathrm{Jm^{-3}})^n}\right)^\beta \mathrm{m}^\gamma\mathrm{s}^\delta=\mathrm{Jm^{-3}} \qquad \therefore\quad \begin{cases}\alpha-n\beta=1\\ -2\alpha+(2+3n)\beta+\gamma=-3\\ -\beta+\delta=0.\end{cases}$$

$\gamma=0$ とすると $\alpha=\dfrac{2}{2+n}$，$\beta=\delta=-\dfrac{1}{2+n}$ となる．よって H の次元をもつ量として $H_0\equiv\left(\dfrac{Q^2}{at}\right)^{\frac{1}{2+n}}$ が取れるから，求める解を次のようにおくことができる．

$$H(x,t)=H_0f(\xi) \tag{⑥}$$

f は ξ のみの関数で，無次元である．以下，$'$（プライム）は ξ による微分とする．

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial t}&=\frac{dH_0}{dt}f+H_0f'\frac{\partial\xi}{\partial t}\\&=-\frac{1}{2+n}\frac{H_0}{t}f+H_0f'\left(-\frac{1}{2+n}\frac{\xi}{t}\right)\\&=-\frac{1}{2+n}\cdot\frac{H_0}{t}(f+\xi f').\end{aligned}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}=H_0f'\frac{\partial\xi}{\partial x}=H_0f'\frac{\xi}{x},\quad H^n\frac{\partial H}{\partial x}={H_0}^{n+1}f^nf'\frac{\xi}{x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(H^n\frac{\partial H}{\partial x}\right)=H_0{}^{n+1}(f^nf')'\left(\frac{\xi}{x}\right)^2$$

よって④は

$$-\frac{1}{2+n}\cdot\frac{H_0}{t}(f+\xi f')=aH_0{}^{n+1}(f^nf')'\left(\frac{\xi}{x}\right)^2$$

▍無次元化を行ったから，次元を持つ量は全て消える． ▍

$$-\frac{1}{2+n}(f+\xi f')=(f^nf')'$$

$$\therefore\quad (2+n)\frac{d}{d\xi}\left(f^n\frac{df}{d\xi}\right)+\xi\frac{df}{d\xi}+f=0. \tag{$\star$}$$

$(\star)$ を解くために $g=f^n$ とおく．$f=g^{\frac{1}{n}}$ であるから

$$f'=\frac{1}{n}g^{\frac{1}{n}-1}g',\quad f^nf'=\frac{1}{n}g^{\frac{1}{n}}g'$$

$$(f^nf')'=\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{n}g^{\frac{1}{n}-1}(g')^2+g^{\frac{1}{n}}g''\right\}.$$

よって $(\star)$ は

$$\frac{2+n}{n}\left\{\frac{1}{n}g^{\frac{1}{n}-1}(g')^2+g^{\frac{1}{n}}g''\right\}+\xi\frac{1}{n}g^{\frac{1}{n}-1}g'+g^{\frac{1}{n}}=0.$$

両辺を $\dfrac{1}{n}g^{\frac{1}{n}-1}$ で割り

$$\frac{2+n}{n}\left\{(g')^2+ngg''\right\}+\xi g'+ng=0$$

$$g'\left(\frac{2+n}{n}g'+\xi\right)+ng\left(\frac{2+n}{n}g''+1\right)=0.$$

両辺に $\left(\dfrac{2+n}{n}g'+\xi\right)^{n-1}$ をかけて

$$\left\{g\left(\frac{2+n}{n}g'+\xi\right)^n\right\}'=0\qquad\therefore\quad g\left(\frac{2+n}{n}g'+\xi\right)^n=\text{const.}$$

対称性より $\xi=0$ で $f'=0$（よって $g'=0$）であるから，右辺の定数は 0 となり

$$\frac{2+n}{n}g'+\xi=0\qquad\therefore\quad g=\frac{n}{2+n}\cdot\frac{\xi_0{}^2-\xi^2}{2}.$$

ここで ξ_0 は積分定数である．以上より

$$f(\xi)=\left[\frac{n}{2+n}\cdot\frac{\xi_0{}^2-\xi^2}{2}\right]^{\frac{1}{n}} \tag{⑦}$$

を得る．

$n > 0$ **のとき**

⑦は $-\xi_0 \leqq \xi \leqq \xi_0$ に対応する，2 つの平面 $x = \pm x_0$ に挟まれた領域内の温度分布を与える（その外側では $H = 0$ である）．⑤から，加熱された領域は $x_0 \sim t^{\frac{1}{2+n}}$ で広がる．

定数 ξ_0 は，全ての熱量が一定という条件から決まる．

$$\int_{-x_0}^{x_0} H\,dx = \int_{-\xi_0}^{\xi_0} H_0 f(\xi)(Q^n at)^{\frac{1}{2+n}}\,d\xi = Q\int_{-\xi_0}^{\xi_0} f(\xi)\,d\xi$$

が Q に等しいから，条件は

$$\int_{-\xi_0}^{\xi_0} \left[\frac{n}{2+n}\cdot\frac{{\xi_0}^2-\xi^2}{2}\right]^{\frac{1}{n}} d\xi = 1$$

と書ける．$\xi = \xi_0 y$ と置換し

$$\int_{-1}^{1} \left[\frac{n{\xi_0}^2}{2(2+n)}(1-y^2)\right]^{\frac{1}{n}} \xi_0\,dy = 1.$$

岩波数学公式 I（微分積分・平面曲線）第 V 篇・第 1 章 § 46(i) によれば

$$\int_0^1 x^{\alpha}(1-x^{\lambda})^{\beta}\,dx = \frac{1}{\lambda}B\left(\frac{\alpha+1}{\lambda}, \beta+1\right) \quad (\alpha, \beta > -1, \lambda > 0)$$

であるから，$\alpha = 0, \beta = \dfrac{1}{n}, \lambda = 2$ として

$$\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{n}}\,dx = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{n}+1\right)$$

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{1}{n}}\,dx = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{n}+1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{(2+n)\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)}$$

となる．規格化の積分は

$$\left[\frac{n{\xi_0}^2}{2(2+n)}\right]^{\frac{1}{n}} \xi_0 \cdot \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{(2+n)\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)} = 1.$$

$${\xi_0}^{\frac{2}{n}+1} = \frac{2^{\frac{1}{n}-1}(2+n)^{\frac{1}{n}+1}}{n^{\frac{1}{n}}\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}$$

両辺 n 乗して

$${\xi_0}^{2+n} = \frac{2^{1-n}(2+n)^{1+n}}{n\pi^{\frac{n}{2}}}\cdot\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^n. \qquad ⑨$$

こうして定数 ξ_0 が決まった．

$n = -\nu < 0$ **のとき**

$-{\xi_0}^2$ を改めて ${\xi_0}^2$ とおくと

$$f(\xi) = \left[\frac{\nu}{2(2-\nu)}({\xi_0}^2+\xi^2)\right]^{-\frac{1}{\nu}} \qquad ⑩$$

となる．この場合，熱は全空間に分布しており，原点から十分離れたところでは，H は $x^{-\frac{2}{\nu}}$ で減少する．但し解⑩は $\nu \geqq 2$ のときは意味がない（物理的には，熱が一瞬で無限遠に到達することを意味する）．

$\nu < 2$ のとき，規格化条件は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\nu}{2(2-\nu)} ({\xi_0}^2 + \xi^2) \right]^{-\frac{1}{\nu}} d\xi = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\nu {\xi_0}^2}{2(2-\nu)} (1 + y^2) \right]^{-\frac{1}{\nu}} \xi_0 \, dy = 1.$$

再び岩波数学公式 § 46(ii) によれば

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(1+x^{\lambda})^{\beta}} = \frac{1}{\lambda} B \left(\beta - \frac{1-\alpha}{\lambda}, \frac{1-\alpha}{\lambda} \right) \quad (\alpha < 1, \beta, \lambda > 0, \lambda\beta > 1 - \alpha)$$

であるから，$\alpha = 0, \beta = \dfrac{1}{\nu}, \lambda = 2$ として

$$\int_0^{\infty} (1+x^2)^{-\frac{1}{\nu}} \, dx = \frac{1}{2} B \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-\frac{1}{\nu}} \, dx = B \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}$$

となる．規格化の積分は

$$\left[\frac{\nu {\xi_0}^2}{2(2-\nu)} \right]^{-\frac{1}{\nu}} \xi_0 \cdot \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)} = 1.$$

$${\xi_0}^{\frac{2}{\nu} - 1} = \frac{\sqrt{\pi}\nu^{-\frac{1}{\nu}}}{\{2(2-\nu)\}^{-\frac{1}{\nu}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}$$

両辺 ν 乗して

$${\xi_0}^{2-\nu} = \frac{2(2-\nu)\pi^{\frac{\nu}{2}}}{\nu} \cdot \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)} \right)^{\nu} \qquad ⑪$$

を得る．

$n \to 0$ のとき

$\xi \to \dfrac{x}{\sqrt{at}}$，⑨と

$$\lim_{n \to 0} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)} \right)^{n} = 1$$

より ${\xi_0}^2 \to \dfrac{2 \cdot 2}{n}$ である．また⑦より

$$f(\xi) \to \lim_{n=0} \left[\frac{n}{4} \left(\frac{4}{n} - \frac{x^2}{at} \right) \right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n=0} \left(1 - \frac{nx^2}{4at} \right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(-\frac{x^2}{4at} \right).$$

$H = H_0 e^{-x^2/4at}$ として規格化条件は

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} H_0 e^{-x^2/4at} \, dx = H_0 \cdot \sqrt{\pi \cdot 4at} \qquad \therefore \quad H_0 = \frac{Q}{2\sqrt{\pi at}}.$$

したがって

$$H \to \frac{Q}{2\sqrt{\pi at}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at} \right)$$

となり (51.7) と一致する．

⬆ 目次へ戻る

§52　有限媒質中の熱伝導

有限媒質中の熱伝導の問題では，初期の温度分布だけでは解が一意的に定まらず，媒質表面での境界条件が与えられなければならない．

境界面が一定の温度に保たれている場合

半無限媒質（$x>0$）において，境界面 $x=0$ が一定の温度に保たれている場合を考えよう．この温度を 0 としても一般性を失わない（つまり，$x=0$ での温度を基準として測る）．§51 と同様に，$t=0$ での温度分布が与えられているとすると，境界条件および初期条件は

$$T=0 \quad (x=0), \qquad T=T_0(x,y,z) \quad (t=0, x>0). \tag{52.1}$$

このような条件下での熱伝導方程式の解は，鏡像法により，無限媒質中の解に帰着させることができる．媒質が $x<0$ にも（仮想的に）続いているとし，$x<0$ での初期温度分布が $-T_0$ で与えられているとしよう．すなわち，全空間では初期分布が x の奇関数で与えられるとする．

$$T_0(-x,y,z)=-T_0(x,y,z) \tag{52.2}$$

このとき $T_0(0,y,z)=0$ となり，境界条件は $t=0$ で自動的に満たされている．熱伝導方程式は変換 $x\to -x$ に対して不変であるから，対称性より，$t>0$ でも T が奇関数である（そして境界条件も満たされる）ことは明らかである．

よってこの問題は，(52.2) を満たす初期分布を持つ無限媒質中の熱伝導の問題になる．一般解 (51.2) で，x' の積分区間を $(-\infty,0)$ と $(0,\infty)$ の 2 つに分け，

$$\begin{aligned}
T(x,y,z,t) &= \frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}dy'\int_{-\infty}^{\infty}dz'\left(\int_{-\infty}^{0}dx'\,T_0(x',y',z')e^{-(x-x')^2/4\chi t}\right.\\
&\qquad\left.+\int_0^{\infty}dx'\,T_0(x',y',z')e^{-(x-x')^2/4\chi t}\right)e^{-\frac{(y-y')^2+(z-z')^2}{4\chi t}}\\
&=\frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}}\int_0^{\infty}dx'\int_{-\infty}^{\infty}dy'\int_{-\infty}^{\infty}dz'\\
&\qquad\times T_0(x',y',z')\left\{e^{-(x-x')^2/4\chi t}-e^{-(x+x')^2/4\chi t}\right\}e^{-\frac{(y-y')^2+(z-z')^2}{4\chi t}}
\end{aligned} \tag{52.3}$$

を得る．この式は媒質全体での温度分布を与える式であるが，もちろん $x>0$ での解でもある．

もし初期の温度分布が x のみの関数なら，(52.3) で y',z' の積分を実行し

$$T(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\chi t}}\int_0^{\infty}dx'\,T_0(x')\left\{e^{-(x-x')^2/4\chi t}-e^{-(x+x')^2/4\chi t}\right\} \tag{52.4}$$

となる．

一例として，$x=0$ を除いて初期の温度が一定である場合を考えよう．一般性を失うことなく，この一定値を -1 とすることができる（つまり，$x>0$ と $x=0$ の温度差が 1 になるよう温度計の目盛を変更する）．

(52.4) に $T_0(x)=-1$ を代入し，第 1 項で $\xi=\dfrac{x'-x}{2\sqrt{\chi t}}$，第 2 項で $\xi=\dfrac{x'+x}{2\sqrt{\chi t}}$ とおくと

$$\begin{aligned}
T(x,t) &= \frac{-1}{2\sqrt{\pi\chi t}}\int_0^\infty dx'\,\left\{e^{-(x-x')^2/4\chi t}-e^{-(x+x')^2/4\chi t}\right\} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{-x/2\sqrt{\chi t}}^\infty d\xi\,e^{-\xi^2}-\int_{x/2\sqrt{\chi t}}^\infty d\xi\,e^{-\xi^2}\right) \\
&= \frac{-1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/2\sqrt{\chi t}}^{x/2\sqrt{\chi t}} d\xi\,e^{-\xi^2} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{\chi t}} d\xi\,e^{-\xi^2}
\end{aligned}$$

となる．ここで**誤差関数**を

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\xi^2}\,d\xi \tag{52.5}$$

で定義すれば

$$T(x,t)=-\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\chi t}}\right) \tag{52.6}$$

となる．時間の経過とともに，温度分布は空間的に一様になっていく．(52.6) の形は，次元解析からも予想できたことである；温度差 T_0（ここでは 1），温度伝導度 χ，x,t から作られる無次元量は $\dfrac{x}{\sqrt{\chi t}}$ のみであるから，求める温度分布は $T=T_0 f\left(\dfrac{x}{\sqrt{\chi t}}\right)$ の形をしていなければならない．

境界面が断熱されている場合

この場合，$x=0$ を通り抜ける熱フラックスがないから，境界条件と初期条件は

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0 \quad (x=0), \qquad T=T_0(x,y,z) \quad (t=0,x>0). \tag{52.7}$$

となる．今度は，全空間の初期温度分布が x の偶関数であるとすればよい．

$$T_0(-x,y,z)=T_0(x,y,z) \tag{52.8}$$

そうすれば $x=0$ で $\dfrac{\partial T}{\partial x}=0$ であり，$t>0$ でも境界条件は満たされる．積分を行えば，(52.3) や (52.4) で 2 つの指数関数の差を和に変えた式が得られる．

境界面から熱の流出入がある場合

境界面 $x=0$ における熱フラックスが，時間の関数として与えられているとしよう．境界条件と初期条件は

$$-\kappa\frac{\partial T}{\partial x}=q(t) \quad (x=0), \qquad T=0 \quad (t=-\infty,x>0). \tag{52.9}$$

とする．

まず $q(t)=\delta(t)$ という補助的な問題を解いておこう．これは物理的には，$t=0$ の瞬間に平面 $x=0$ の単位面積を通って単位熱量が流入することを意味している．そしてこの問題は，無限媒質中に置かれた点（正確には面）熱源からの熱の伝播と同等である．よって (51.7) から

$$T(x,t)=\frac{A}{2\sqrt{\pi\chi t}}e^{-x^2/4\chi t}$$

となる．定数 A を決めるために，両辺に ρc_p をかけて $0 \leqq x < \infty$ で積分すると

$$\int_0^\infty \rho c_p T \, dx = \frac{1}{2} \rho c_p A$$

となる．左辺の積分は，$x > 0$ に流れ込んだ全熱量であり，この場合は 1 である．よって $A = \dfrac{2}{\rho c_p} = \dfrac{2\chi}{\kappa}$ となり

$$\kappa T(x,t) = \sqrt{\frac{\chi}{\pi t}} e^{-x^2/4\chi t} \quad (t > 0) \qquad ①$$

を得る．①はこの問題に対する Green 関数であるから，一般の $q(t)$ に対する解は，畳み込み $G * q = \displaystyle\int_{-\infty}^t G(t-\tau) q(\tau) \, d\tau$ を計算し

$$\kappa T(x,t) = \int_{-\infty}^t \sqrt{\frac{\chi}{\pi(t-\tau)}} q(\tau) e^{-x^2/4\chi(t-\tau)} \, d\tau \qquad (52.10)$$

となる．特に平面 $x = 0$ での温度は

$$\kappa T(0,t) = \int_{-\infty}^t \sqrt{\frac{\chi}{\pi(t-\tau)}} q(\tau) \, d\tau \qquad (52.11)$$

となる．

境界面の温度が与えられている場合

以上の結果から，平面 $x = 0$ での温度が時間の関数として与えられている場合の解を得ることができる．境界条件と初期条件は

$$T = T_0(t) \quad (x = 0), \qquad T = 0 \quad (t = -\infty, x > 0). \qquad (52.12)$$

とする．問題を解くために，関数 $T(x,t)$ が熱伝導方程式を満たすなら，その微分 $\dfrac{\partial T}{\partial x}$ も満たすということに注目しよう．(52.10) を x について微分し

$$-\kappa \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \int_{-\infty}^t \sqrt{\frac{\chi}{\pi(t-\tau)}} q(\tau) \frac{x}{2\chi(t-\tau)} e^{-x^2/4\chi(t-\tau)} \, d\tau = \int_{-\infty}^t \frac{x q(\tau)}{2\sqrt{\pi\chi(t-\tau)^3}} e^{-x^2/4\chi(t-\tau)} \, d\tau \qquad ②$$

となる．(52.9) より，$x = 0$ のとき右辺は $q(t)$ になるから，これは (52.9) を満たす熱伝導方程式の解である．(52.9) と (52.12) を見比べることにより，$-\kappa \dfrac{\partial T}{\partial x}$ を T に，$q(t)$ を $T_0(t)$ に置き換えれば解が得られることが分かる；

$$T(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi\chi}} \int_{-\infty}^t \frac{T_0(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-x^2/4\chi(t-\tau)} \, d\tau \qquad (52.13)$$

境界面 $x=0$ を通る熱フラックスは

$$
\begin{aligned}
q(t) &= -\kappa \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} \\
&= \frac{-\kappa}{2\sqrt{\pi\chi}} \int_{-\infty}^{t} \frac{T_0(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\, d\tau + 0 \\
&\quad \leftarrow \text{部分積分} \\
&= \frac{-\kappa}{2\sqrt{\pi\chi}} \left(\left[T_0(\tau) \frac{2}{\sqrt{t-\tau}} \right]_{\tau=-\infty}^{\tau=t} - \int_{-\infty}^{t} \frac{dT_0}{d\tau} \frac{2}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau \right) \\
&\quad \leftarrow \text{第 1 項が 0 になる理由が判然としない.} \\
&= \frac{\kappa}{2\sqrt{\pi\chi}} \int_{-\infty}^{t} \frac{dT_0}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}
\end{aligned} \tag{52.14}
$$

である．これは (52.11) の逆になっている．

境界 $x=0$ での温度が $T=T_0 e^{-i\omega t}$ のように周期的に変化する重要な場合についても，簡単に解を得ることができる．全空間の温度分布も $e^{-i\omega t}$ 的に変化することは明らかである．1 次元熱伝導方程式と § 24 の粘性流体中の振動の類似から，解は

$$
T(x,t) = T_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}x} e^{i\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}x - \omega t\right)} \tag{52.15}
$$

となる（式 (24.5) と比較せよ）．よって，境界面における温度の振動は，境界から**熱の波**として伝播することが分かる．この波は，媒質内部を進むにつれて急速に減衰する．

非一様に加熱された物体の緩和時間の問題

最後に，表面で与えられた条件のもと，非一様に加熱された有限物体の内部で，温度がどのように等しくなっていくか，という問題を考えよう．一般的な方法でこの問題を解くために，$T=T_n(x,y,z)e^{-\lambda_n t}$ という形の解を求めよう（λ_n は定数）．熱伝導方程式に代入し，T_n に関する次の方程式を得る．

$$
\chi \triangle T_n = -\lambda_n T_n \tag{52.16}
$$

与えられた境界条件のもとでは，この方程式は特定の λ_n（**固有値**）に対してのみ 0 でない解を持つ．固有値 λ_n は全て実かつ正であり，対応する固有関数 $T_n(x,y,z)$ は完全直交関数系をなす．$t=0$ での温度分布 $T_0(x,y,z)$ が与えられたとして，これを T_n の級数で展開しよう．

$$
T_0(x,y,z) = \sum_n c_n T_n(x,y,z)
$$

このとき求める解は

$$
T(x,y,z,t) = \sum_n c_n T_n(x,y,z) e^{-\lambda_n t} \tag{52.17}
$$

となる．温度が一様になるのにかかる時間（緩和時間）は，最小の n に対応する項によって決まる．つまり緩和時間は $\tau = 1/\lambda_1$ である．

問題 52.1

媒質中に半径 R の球が置かれ，その表面の温度が時間の関数 $T_0(t)$ で与えられている．球のまわりの温度分布を求めよ．

【解答】球対称性から，熱伝導方程式は

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\chi\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rT)$$

であり，$rT=F$ とおくと

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\chi\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$$

となって 1 次元の熱伝導方程式に帰着する．境界条件は $r=R$ で $F=RT_0(t)$ である．(52.13) で x の代わりに $r-R$ として

$$F(r,t)=\frac{r-R}{2\sqrt{\pi\chi}}\int_{-\infty}^{t}\frac{RT_0(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-(r-R)^2/4\chi(t-\tau)}\,d\tau$$

$$\therefore\quad T(r,t)=\frac{R(r-R)}{2\sqrt{\pi\chi}r}\int_{-\infty}^{t}\frac{T_0(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-(r-R)^2/4\chi(t-\tau)}\,d\tau.$$

問題 52.2

前問で $T_0(t)=T_0e^{-i\omega t}$ の場合はどうか．

【解答】(52.15) で T_0 の代わりに RT_0，x の代わりに $r-R$ として

$$F(r,t)=RT_0e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}(r-R)}e^{i\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}(r-R)-\omega t\right)}$$

$$\therefore\quad T(r,t)=T_0e^{-i\omega t}\frac{R}{r}e^{-(1-i)\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}(r-R)}.$$

問題 52.3

1 辺 a の立方体の緩和時間を，(a) 表面の温度が $T=0$ に保たれている場合，(b) 表面が断熱されている場合，のそれぞれについて求めよ．

【解答】立方体の 1 つの頂点を原点に取る．

(a) 表面で $T=0$ になる固有関数のうち，最小（$n=1$）のモードは

$$T_1\propto\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)$$

である．これを (52.16) に代入し

$$\chi\left(-3\frac{\pi^2}{a^2}\right)=\lambda_1\qquad\therefore\quad\tau_1=\frac{1}{\lambda_1}=\frac{a^2}{3\pi^2\chi}$$

となる．

(b) 境界で $\dfrac{\partial T}{\partial n}=0$ となる最小のモードは $T_1\propto\cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)$ である．よって $\tau_1=\dfrac{a^2}{\pi^2\chi}$ となる．

問題 52.4

前問で半径 R の球の場合はどうか．

【解答】(52.16) の中心対称解のうち最小のモードは $T_1 \propto \dfrac{\sin(kr)}{r}$ である．

(a) $r = R$ で $T_1 = 0$ より $kR = \pi$ であり，

$$\chi k^2 = \lambda_1 \qquad \therefore \quad \tau_1 = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{R^2}{\pi^2 \chi}.$$

(b) $\dfrac{\partial T_1}{\partial r} \propto k\cos(kr) \cdot r - \sin(kr)$ より，k は $kR = \tan(kR)$ の最小（$\neq 0$）の解であり，$kR = 4.493$ となる．よって $\tau_1 = \dfrac{0.050R^2}{\chi}$ となる．

⬆ 目次へ戻る

§53　熱輸送の相似則

流体中の熱輸送の過程は，流体が運動するために，固体中の問題よりも複雑である．非一様に加熱された流体の運動は**対流**と呼ばれる．

ここでは，流体の物性値が（温度によらず）一定と仮定できるほど，流体中の温度差が小さいと仮定する．一方で，粘性散逸によって生じる温度差を無視できるほど，温度差が大きいとしよう．このとき (50.2) で粘性項を除くことができるから

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} T = \chi \triangle T \tag{53.1}$$

となる．これと連続の式，Navier-Stokes 方程式により，今考えている対流が完全に決定する．

以下では定常な対流のみを扱う（そのような対流が維持されるためには，流体に接している熱源が必要である）．時間微分項を落として

$$\boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} T = \chi \triangle T \tag{53.2}$$

$$(\boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad})\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu \triangle \boldsymbol{v}, \ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{53.3}$$

この方程式系は 3 つの未知数 $\boldsymbol{v}, T, \dfrac{p}{\rho}$ および 2 つのパラメータ χ, ν を含んでいる．よって方程式の解は，境界条件を通して，物体の長さスケール l，主流の速度 U，流体と物体の温度差 $T_1 - T_0$ に依存する．

これらのパラメータから無次元量を作る際，温度の次元をどのように決めるかという問題が生じる．これを解決するために，温度が (53.2) のみに現れることに注目しよう．(53.2) は T について線形であるから，温度に任意定数をかけても方程式を満たす．したがって温度自身に（他の次元に依存しない）次元を与えることができる．ここでは温度の単位を K（ケルビン）とする．

よって，この対流は 5 つのパラメータ $\nu = \chi[\mathrm{m^2s^{-1}}]$，$U[\mathrm{ms^{-1}}]$，$l[\mathrm{m}]$，$T_1 - T_0[\mathrm{K}]$ で特徴付けられる．これらの量から，2 つの独立な無次元パラメータを作ることができる．1 つは Reynolds 数 $\mathrm{R} = lU/\nu$ であり，もう 1 つは **Prandtl 数**

$$\mathrm{P} = \frac{\nu}{\chi} \tag{53.4}$$

である．Prandtl 数は熱拡散に対する粘性拡散の比である．

他の無次元量は R, P の組み合わせとして表現される．例えば **Péclet 数**

$$\mathrm{Pe} = \mathrm{R} \cdot \mathrm{P} = \frac{lU}{\chi}$$

である．Péclet 数は熱拡散に対する移流拡散の比である．

Prandtl 数は物性値であり，流れの性質にはよらない．気体の場合は 1 のオーダーであるが，液体の場合は様々である．

§ 19 と同様に，このような定常対流では，温度と速度の分布は

$$\frac{T-T_0}{T_1-T_0}=f\left(\frac{\boldsymbol{r}}{l},\mathrm{R},\mathrm{P}\right),\quad \frac{\boldsymbol{v}}{U}=\boldsymbol{f}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{l},\mathrm{R}\right) \tag{53.5}$$

の形になると結論づけることができる．温度分布を与える無次元関数 f は 2 つのパラメータ R,P に依存する．しかし，温度を決める方程式には χ が現れないから，$\boldsymbol{f}$ は R のみに依存する．そして，Reynolds 数と Prandtl 数が等しい 2 つの対流は相似である．

さて，物体（固体）と流体の間の熱輸送は，**熱伝達係数**

$$\alpha=\frac{q}{T_1-T_0} \tag{53.6}$$

により特徴付けられる．ここで q は表面を通る熱フラックス密度であり，T_1-T_0 は固体と流体の間の特徴的な温度差である．流体の温度差が分かれば，境界で $q=-\kappa\dfrac{\partial T}{\partial n}$ を計算することにより α を求めることができる．

熱伝達係数は無次元ではない．熱輸送を特徴付ける無次元量は **Nusselt 数**

$$\mathrm{N}=\frac{\alpha l}{\kappa} \tag{53.7}$$

である．Nusselt 数は，静止した流体での熱伝導に対する，対流による熱輸送の比であり，対流がなければ $\mathrm{N}=1$ である．相似則の議論から，どのような対流に対しても，Nusselt 数は Reynolds 数と Prandtl 数のみの関数として表される．

$$\mathrm{N}=f(\mathrm{R},\mathrm{P}) \tag{53.8}$$

問題 53.1

円形断面の管において，壁の温度が軸方向に線形に増加するものとする．管内の Poiseuille 流中の温度分布を求めよ．

【解答】 管の軸を z 軸とする円筒座標系を用いる．Az を管の温度として，解を $T=Az+f(r)$ の形に求めよう．速度分布は，(17.9) より $v_z=2\overline{v}(1-r^2/R^2)$ となる（$\overline{v}$ は平均速度）．(53.2) に代入し

$$Av_z=\chi\triangle T=\chi\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)&=\frac{2\overline{v}A}{\chi}\left(r-\frac{r^3}{R^2}\right)\\
r\frac{df}{dr}&=\frac{2\overline{v}A}{\chi}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4R^2}\right)+C_1\\
\frac{df}{dr}&=\frac{2\overline{v}A}{\chi}\left(\frac{r}{2}-\frac{r^3}{4R^2}\right)+\frac{C_1}{r}\\
f&=\frac{2\overline{v}A}{\chi}\left(\frac{r^2}{4}-\frac{r^4}{16R^2}\right)+C_1\log r+C_2.
\end{aligned}$$

解は $r=0$ で有限でなければならないから $C_1=0$ となる．また $r=R$ で $T=0$ とすれば

$$C_2=-\frac{2\overline{v}A}{\chi}\left(\frac{R^2}{4}-\frac{R^2}{16}\right)=-\frac{3\overline{v}AR^2}{8\chi}$$

$$\therefore \quad f(r) = -\frac{\overline{v}AR^2}{2\chi}\left[\frac{3}{4} - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^4\right]$$

となる．熱フラックス密度は

$$q = \kappa \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R} = \kappa \cdot \frac{2\overline{v}A}{\chi}\left(\frac{R}{2} - \frac{R}{4}\right) = \frac{1}{2}\rho c_p \overline{v} AR$$

であり，温度伝導度 χ に依存しない．

⬆ 目次へ戻る

§54　境界層中の熱輸送

省略する．

⬆ 目次へ戻る

§55　運動している流体中での物体の加熱

静止流体中に浸された温度計は，流体の温度に等しい温度を示す．しかし，流体が運動している場合，温度計はやや高い温度を示す．これは，温度計の表面で流体が静止しなければならないために，内部摩擦による加熱が起こるからである．

一般的な問題は以下のようになる：「任意の形の物体が，運動している流体中に置かれている．十分長い時間ののち熱平衡状態になったとして，物体と流体の間に存在する温度差 $T_1 - T_0$ を求めよ．」

この問題の解は方程式 (50.2) により与えられるが，この場合 (53.1) で行ったように粘性項を無視することはできない；今考えている効果はこの項によるものだからである．定常状態での方程式は

$$\boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} T = \chi \triangle T + \frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 \tag{55.1}$$

である．この式には流体自身の運動方程式 (53.3) を加えなければならない．厳密に言えば，物体の熱伝導を表す方程式も必要であるが，物体の熱伝導度が十分小さい極限では無視することができる．そして，物体の表面を通る熱フラックスがないという条件 $\dfrac{\partial T}{\partial n} = 0$ のもとで方程式 (55.1) を解き，得られた物体表面での流体の温度が物体の温度に等しいとすればよい．物体の熱伝導度が十分大きいという逆の極限では，物体表面の温度がどこでも等しいという近似的な条件を用いることができる．この場合，微分 $\dfrac{\partial T}{\partial n}$ は表面で 0 とはならないが，表面を通る全熱フラックス（つまり $\dfrac{\partial T}{\partial n}$ の積分）が 0 とすればよい．どちらの極限でも，物体の熱伝導度は陽には現れない．以下では，これらのどちらかの場合が成り立っていると仮定する．

方程式 (55.1)，(53.3) はパラメータとして χ, ν, c_p を含み，解には物体の大きさ l と主流の速度 U も関係する（温度差 $T_1 - T_0$ はこの場合任意のパラメータではなく，方程式を解くことで決められなければならない）．これらの量から，2 つの独立な無次元量を作ることができる．ここでは R と P とする．すると，求める温度差 $T_1 - T_0$ は，温度の次元を持つ量（ここでは U^2/c_p とする）に R と P の関数をかけたものに等しい．

$$T_1 - T_0 = \frac{U^2}{c_p} f(\mathrm{R}, \mathrm{P}) \tag{55.2}$$

Reynolds 数と Prandtl 数の積 $\mathrm{RP} = \dfrac{Ul}{\chi}$ が十分小さい，つまり U が十分小さい場合には，関数 f の形を簡単に求めることができる．この場合，(55.1) で $\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad}\, T$ を $\chi \triangle T$ に比べて無視することができるから

$$\chi \triangle T = -\frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 \tag{55.3}$$

となる．温度と速度は，l 程度の距離で大きく変化する．(55.3) の両辺のオーダーを見積もれば

$$\chi \frac{T_1 - T_0}{l^2} \sim \frac{\nu}{c_p}\left(\frac{U}{l}\right)^2$$

$$\therefore \quad T_1 - T_0 \sim \frac{\nu U^2}{\chi c_p} = \mathrm{P}\frac{U^2}{c_p} \tag{55.4}$$

となる．比例定数は物体の形に依存する．温度差が U^2 に比例することに注目しよう．

R が十分大きいという逆の極限の場合にも，関数 $f(\mathrm{R}, \mathrm{P})$ の形について一般的な結論を得ることができる．この場合，速度と温度は狭い境界層内でのみ大きく変化する．速度境界層，温度境界層の厚さのオーダーをそれぞれ δ, δ' とする（両者は P に依存する定数因子の分だけ異なる）．流体の粘性により単位時間に境界層で発生する熱量は (16.3) で与えられる．この積分は物体表面の単位面積当たりでは $\rho\nu(U/\delta)^2\delta \sim \rho\nu U^2/\delta$ のオーダーである．同量の熱が物体に流れなければならず，そのオーダーは $q = -\kappa \partial T/\partial n \sim \rho c_p \chi (T_1 - T_0)/\delta'$ である．両者を比べ

$$\rho c_p \chi \frac{T_1 - T_0}{\delta'} \sim \frac{\rho \nu U^2}{\delta} \qquad \therefore \quad T_1 - T_0 \sim \frac{U^2}{c_p} \cdot \frac{\nu}{\chi}\frac{\delta'}{\delta}.$$

よって

$$T_1 - T_0 = \frac{U^2}{c_p} f(\mathrm{P}). \tag{55.5}$$

この場合関数 f は R に依存せず，P への依存性は決まらないまま残る．

問題 55.1

円形断面の管中の Poiseuille 流中の温度分布を求めよ．壁面の温度は一定値 T_0 に保たれているとする．

【解答】 速度分布は $v_z = 2\overline{v}(1 - r^2/R^2)$ で与えられる．(55.3) は

$$\chi \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{\nu}{2c_p} \cdot 2\left(\frac{dv_z}{dr}\right)^2 = -\frac{\nu}{2c_p} \cdot 2\left(2\overline{v}\frac{2r}{R^2}\right)^2$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{16\overline{v}^2\nu}{\chi c_p} \cdot \frac{r^2}{R^4}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{16\mathrm{P}\overline{v}^2}{c_p} \cdot \frac{r^3}{R^4}$$

$$r\frac{dT}{dr} = -\frac{4\mathrm{P}\overline{v}^2}{c_p} \cdot \frac{r^4}{R^4} + \mathrm{const.}$$

解は $r = 0$ で有限であるから $\mathrm{const.} = 0$ である．

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{4\mathrm{P}\overline{v}^2}{c_p} \cdot \frac{r^3}{R^4}$$

$$T = -\frac{\mathrm{P}\overline{v}^2}{c_p} \cdot \frac{r^4}{R^4} + \mathrm{const.}$$

$r = R$ で $T = T_0$ より const. の値が決まり

$$T - T_0 = \frac{\mathrm{P}\overline{v}^2}{c_p}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right]$$

問題 55.2

固体球のまわりに Reynolds 数の小さな流れがあるとき，球と流体間の温度差を求めよ．球の熱伝導率は大きいと仮定する．

【解答】 省略する．

⬆ 目次へ戻る

§ 56　自由対流

§ 3 で見たように，重力場中の流体が力学的平衡状態にあるなら，温度は高度のみに依存する：$T = T(z)$．温度分布がこの条件を満たさず，他の座標の関数でもある場合には，流体は力学的平衡になることはできない．さらに，もし $T = T(z)$ であっても，温度が上空ほど低く，温度勾配がある値（断熱減率）を超える場合は，やはり力学的平衡にはならない（§ 4）．

力学的平衡にならない場合には，流体を混合して温度を一様にしようとする流れが生じる．重力場中でのこのような運動は**自由対流**と呼ばれる．

この対流を記述する方程式を導こう．流体は非圧縮であると仮定する．このことは，流体中で圧力がほんのわずかしか変化せず，圧力による密度変化が無視できることを意味する．例えば，気圧が高度によって変化する大気の場合，この仮定は高い大気柱を考えないことに相当する（高い大気柱では，密度が高度によって大きく変化してしまう）．もちろん，流体が非一様に加熱されることで生じる密度変化は無視できない．これが対流を駆動するからである．

温度を $T = T_0 + T'$ と書く．T_0 はある一定の平均温度，T' はそこからのずれであり，$T' \ll T_0$ と仮定する．同様に密度も $\rho = \rho_0 + \rho'$ と書く（ρ_0 は定数）．T' が微小量であるから，ρ' も微小量であり

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial T}\right)_p T' = -\rho_0 \beta T'. \tag{56.1}$$

ここで $\beta = -\dfrac{1}{\rho_0}\left(\dfrac{\partial \rho_0}{\partial T}\right)_p > 0$ は流体の熱膨張率である．

次に圧力も $p = p_0 + p'$ を書けるが，p_0 は定数でなく，温度と密度が T_0, ρ_0 である静水圧平衡での値である．

$$p_0 = \rho_0 \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r} + \mathrm{const.} = -\rho_0 g z + \mathrm{const.} \tag{56.2}$$

ここで z は鉛直上向きに取られている．

♠ 高さ h の気体柱では，静水圧の変化は $\rho_0 g h$ であり，これによる密度変化は $\rho_0 g h / c^2$ のオーダーである（c は音速．(64.4) 参照）．上述の条件によれば，この変化は密度自身に比べて無視できるだけでなく，熱的変

化 (56.1) に比べても無視できなければならない．よって

$$\frac{gh}{c^2} \ll \beta\Theta \tag{56.3}$$

でなければならない．ここで Θ は温度差の特徴的な値である．

さて，方程式を得るために，Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \nu\triangle\boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}$$

を書きかえることから始めよう．$p = p_0 + p'$，$\rho = \rho_0 + \rho'$ を代入して微小量の 1 次まで取れば，圧力項は

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p &= -\frac{1}{\rho_0(1+\rho'/\rho_0)}\,\mathrm{grad}(p_0+p') \\
&\simeq -\frac{1}{\rho_0}\left(1-\frac{\rho'}{\rho_0}\right)\mathrm{grad}(p_0+p') \\
&\simeq -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p_0 - \frac{1}{\rho_0}\,\mathrm{grad}\,p' + \frac{\rho'}{{\rho_0}^2}\,\mathrm{grad}\,p_0 \\
&= \boldsymbol{g} - \frac{1}{\rho_0}\,\mathrm{grad}\,p' - \beta T'\boldsymbol{g}
\end{aligned}$$

となるから，Navier-Stokes 方程式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p' + \nu\triangle\boldsymbol{v} - \beta T'\boldsymbol{g} \tag{56.4}$$

となる（以下 ρ_0 の添字を省く）．自由対流では，熱伝導方程式 (50.2) で粘性項が小さいから落とすことができ

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,T' = \chi\triangle T' \tag{56.5}$$

となる．式 (56.4) と (56.5) 及び連続の式 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$ が，自由対流を記述する方程式系をなす（A. Oberbeck 1879, J. Boussinesq 1903）．

定常流では，対流の方程式は次のようになる．

$$(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v} = -\,\mathrm{grad}\left(\frac{p'}{\rho}\right) - \beta T'\boldsymbol{g} + \nu\triangle\boldsymbol{v} \tag{56.6}$$

$$\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,T' = \chi\triangle T' \tag{56.7}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0 \tag{56.8}$$

未知数 $\boldsymbol{v}, p'/\rho, T'$ を含むこの方程式系は，3 つのパラメータ $\nu, \chi, \beta g$ を含む．さらに，解は特徴的な長さ h と温度差 Θ も含むだろう（特徴的な速度は存在しない．というのは，流れは外力によるものではなく，非一様に加熱されたことで生じるからである）．これらの量から 2 つの無次元量を作ることができる．普通使われる量は Prandtl 数 $\mathrm{P} = \dfrac{\nu}{\chi}$ と Rayleigh **数**

$$\mathscr{R} = \frac{\beta g\Theta h^3}{\nu\chi} \tag{56.9}$$

である．Grashof **数**

$$\mathrm{G} = \frac{\beta g\Theta h^3}{\nu^2} = \frac{\mathscr{R}}{\mathrm{P}}$$

もよく使われる．

Prandtl 数は流体の物性のみで決まったが，Rayleigh 数は対流そのものの性質を決める．

自由対流での相似則は

$$\boldsymbol{v} = \frac{\nu}{h}\boldsymbol{f}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{h}, \mathscr{R}, \mathrm{P}\right), T' = \Theta f\left(\frac{\boldsymbol{r}}{h}, \mathscr{R}, \mathrm{P}\right) \tag{56.10}$$

となる．Rayleigh 数と Prandtl 数が等しい 2 つの流れは相似である．また，重力下における対流熱輸送はやはり Nusselt 数で記述されるが，この場合 N は $\mathscr{R}, \mathrm{P}$ のみの関数である．

対流は層流／乱流のどちらのタイプもありうる．乱流の開始は Rayleigh 数により決まり，$\mathscr{R}$ が十分大きいとき対流は乱流になる．

問題は省略する．

⬆ 目次へ戻る

§ 57　静止流体の対流不安定性

省略する．

⬆ 目次へ戻る