第 3 章・乱流

2022-11-29 13:37

これは L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2nd English edition, Pergamon Press, 1987. の内容を補ったノートである．内容の正確性は保証できないが，改善点・誤植（内容，体裁のどちらでも構わない）を見つけた方は筆者まで知らせてほしい．図がほとんどないが，徐々に付け加えていく予定である．

なお，♠ は第 2 版で新たに加わった部分，♠ ♠ は筆者が勝手に付け加えた部分である．また，目次，式や問題の番号，各節末尾の「目次へ戻る」ボタンにはハイパーリンクを設定し，利便性を高めたつもりである．

本文中で頻繁に参照する文献の略称は以下の通りである．

- 今井→今井功『物理学選書⒁ 流体力学（前編）』裳華房，1974
- 巽→巽友正『新物理学シリーズ 21 流体力学』培風館，1982
- Lamb → H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6th ed., Cambridge, 1932（邦訳あり）
- 『力学』,『統計物理学』,『物理的運動学』→それぞれ，ランダウ＝リフシッツ理論物理学教程の第 1 巻，第 5 巻，第 10 巻.

目次

§26 ♠ 定常流の安定性（日本語訳）

与えられた定常条件下での粘性流のいかなる問題に対しても，原理的には流体力学の方程式の厳密な定常解が存在しなければならない．これらの解は，形式的にはすべての Reynolds 数に対して存在する．しかし，運動方程式の解は，たとえ厳密なものであっても，自然界で実際に起こりうるものばかりではない．そのような解は，流体力学の方程式に従うだけでなく，安定でなければならない．どんな小さな摂動が起きても，時間の経過とともに減少していかなければならない．逆に，流れに必然的に発生する小さな摂動が時間とともに大きくなるようであれば，その流れは不安定であり，実際には存在し得ない[*1].

[*1] 第 1 版では，無限小の摂動に対する不安定性を**絶対不安定**と呼んだ．この形容詞は現在の文脈では使われないが，（より慣習的な用語にしたがって）**対流**（§ 28）との対比としては機能する．

ある流れの無限小摂動に対する安定性を数学的に調べるには，次のようにする．定常解（その速度分布を $\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r})$ とする）に，非定常の小さな摂動 $\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{r}, t)$ を重ね，そうしてできた速度 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1$ が運動方程式を満足しなければならない．$\boldsymbol{v}_1$ に関する方程式は，

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad})\boldsymbol{v} = -\frac{\mathrm{grad}\, p}{\rho} + \nu \triangle \boldsymbol{v}, \quad \mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 0 \tag{26.1}$$

に速度および圧力

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1, \quad p = p_0 + p_1 \tag{26.2}$$

を代入して得られる．ここで，既知の関数 $\boldsymbol{v}_0$ と p_0 は，摂動のない方程式

$$(\boldsymbol{v}_0 \cdot \mathrm{grad})\boldsymbol{v}_0 = -\frac{\mathrm{grad}\, p_0}{\rho} + \nu \triangle \boldsymbol{v}_0, \quad \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}_0 = 0 \tag{26.3}$$

を満たしている．$\boldsymbol{v}_1$ の 1 次以上の項を省略すると次のようになる．

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_0 \cdot \mathrm{grad})\boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v}_1 \cdot \mathrm{grad})\boldsymbol{v}_0 = -\frac{\mathrm{grad}\, p_1}{\rho} + \nu \triangle \boldsymbol{v}_1, \quad \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}_1 = 0 \tag{26.4}$$

境界条件は，$\boldsymbol{v}_1$ が固定された固体表面で 0 となることである．

このように，$\boldsymbol{v}_1$ は斉次線形微分方程式系を満たし，係数は座標の関数だけで時間に依存しない．このような方程式の一般的な解は，$\boldsymbol{v}_1$ が時間に対して $e^{-i\omega t}$ のように依存する特解の和として表すことができる．摂動の振動数 ω は任意ではなく，方程式 (26.4) を適切な境界条件とともに解くことによって決定される．振動数は一般に複素数である．虚部が正である ω が存在すれば，$e^{-i\omega t}$ は時間とともに無限に増加する．つまり，このような摂動は一度生じると増大し，流れはこのような摂動に対して不安定である．流れが安定であるためには，あらゆる可能な振動数 ω の虚部が負であることが必要である．そうすれば，発生する摂動は時間とともに指数関数的に減少する．

しかし，このような安定性の数学的検討は非常に複雑である．有限の大きさを持つ物体のまわりの定常流の安定性に関する理論的な問題は，まだ解決されていない．Reynolds 数が十分に小さい場合には，定常流が安定であることは確かである．実験データによると，R が大きくなってある値 $\mathrm{R_{cr}}$（**臨界 Reynolds 数**）に達し，それを超えると無限小摂動に対して流れが不安定になるようである．したがって，Reynolds 数が十分に大きい場合（$\mathrm{R} > \mathrm{R_{cr}}$），固体まわりの定常流は不可能である．臨界 Reynolds 数はもちろん普遍的な定数ではなく，流れの種類によって異なる値をとり，10–100 程度のオーダーのようである．例えば円柱のまわりの流れでは，$\mathrm{R} = ud/\nu \simeq 30$（$d$ は円柱の直径）で減衰しない非定常流が観察されている．

ここで，大きな Reynolds 数で定常流が不安定になることによって生じる非定常流の性質について考えてみよう（L. D. Landau 1944）．まず，$\mathrm{R_{cr}}$ よりわずかに大きい Reynolds 数におけるこの流れの性質を調べることから始める．$\mathrm{R} < \mathrm{R_{cr}}$ の場合，すべての可能な小さな摂動に対する複素振動数 $\omega = \omega_1 + i\gamma_1$ の虚部は負（$\gamma_1 < 0$）である．$\mathrm{R} = \mathrm{R_{cr}}$ の場合，虚部が 0 となる振動数が 1 つ存在する．$\mathrm{R} > \mathrm{R_{cr}}$ の場合，この振動数の虚部は正だが，R が $\mathrm{R_{cr}}$ に近いと γ_1 は実部 ω_1 に比べて小さくなる[*2]．この振動数に対応する関数 $\boldsymbol{v}_1$ は次のような形をとる．

$$\boldsymbol{v}_1 = A(t)\boldsymbol{f}(x, y, z) \tag{26.5}$$

[*2] ある流れに対して起こりうる摂動振動数の集合（**スペクトル**）には，飛び飛びの値（**離散スペクトル**）と様々な振動数の領域全体（**連続スペクトル**）の両方が含まれる．有限の大きさの物体まわりの流れでは，$\gamma_1 > 0$ の振動数は離散スペクトルの中にしか存在しないように思われる．その理由は連続スペクトルの振動数に対応する摂動は一般に無限遠で 0 にならないからであるが，そこでの摂動のない流れは確かに安定で均質な平面平行流である．

ここで $\boldsymbol{f}$ は座標のある複素関数であり，複素振幅 $A(t)$ は[*3]

$$A(t) = \mathrm{const.} \times e^{\gamma_1 t} e^{-i\omega_1 t} \tag{26.6}$$

で与えられる．しかし，この $A(t)$ の式が成り立つのは，実は定常流が途絶えた後の短い時間だけで，因子 $e^{\gamma_1 t}$ は時間とともに急激に増加し，(26.5)，(26.6) のような式を導く上記の $\boldsymbol{v}_1$ の決定方法は $|\boldsymbol{v}_1|$ が小さいときだけ適用される．もちろん現実には，非定常流の振幅の絶対値 $|A|$ は際限なく増加するわけではなく，有限の値になる傾向がある．$\mathrm{R_{cr}}$ に近い R の場合（もちろん常に $\mathrm{R} > \mathrm{R_{cr}}$ を意味する），この有限の値は小さく，次のように決定することができる．

二乗振幅 $|A|^2$ の時間微分を求めよう．t が非常に小さく，(26.6) がまだ有効なとき，$\dfrac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma_1 |A|^2$ が得られる．この式は，実際には A と A^* の冪展開の第 1 項に過ぎない．絶対値 $|A|$ が（小さいながらも）大きくなると，展開の次の項を考慮する必要がある．次の項は A の 3 次の項である．しかし，微分 $\dfrac{d|A|^2}{dt}$ の正確な値に興味があるのではなく，因子 $e^{-i\omega_1 t}$ の周期 $2\pi/\omega_1$ に比べて十分長い時間での時間平均に興味がある．ところで $\omega_1 \gg \gamma_1$ であるから，この周期は $|A|$ が大きく変わる時間 $1/\gamma_1$ に比べて短い．しかし，3 次の項には周期的な項が含まれるため，平均化すると消滅してしまう[*4]．4 次の項には，$A^2 A^{*2} = |A|^4$ に比例し，平均化しても消滅しない項が含まれている．したがって，4 次の項まで含めれば

$$\overline{\frac{d|A|^2}{dt}} = 2\gamma_1 |A|^2 - \alpha |A|^4. \tag{26.7}$$

ここで，α（Landau **定数**）は，正または負である．

我々は，（元の流れに重なった）無限小の摂動が $\mathrm{R} > \mathrm{R_{cr}}$ で最初に不安定になるケースに興味がある．これは $\alpha > 0$ に対応する．平均操作は $1/\gamma_1$ に比べて短い時間間隔でしか行われないので，(26.7) の $|A|^2$ と $|A|^4$ の上には平均を表すバーを付けなかった．同じ理由で，微分の上のバーも省略されたものとして方程式を解く．式 (26.7) の解は

$$\frac{1}{|A|^2} = \frac{\alpha}{2\gamma_1} + \mathrm{const.} \times e^{-2\gamma_1 t}$$

である．従って，$|A|^2$ が漸近的に有限の極限値に近づくことは明らかである：

$$|A|_{\max}{}^2 = \frac{2\gamma_1}{\alpha} \tag{26.8}$$

量 γ_1 は Reynolds 数の関数である．$\mathrm{R_{cr}}$ の近傍では $\mathrm{R} - \mathrm{R_{cr}}$ の冪で展開することができる．しかし，臨界 Reynolds 数の定義から $\gamma_1(\mathrm{R_{cr}}) = 0$ であるから，1 次までとると

$$\gamma_1 = \mathrm{const.} \times (\mathrm{R} - \mathrm{R_{cr}}) \tag{26.9}$$

となる．これを (26.8) に代入すると，振幅の絶対値 A は $\mathrm{R} - \mathrm{R_{cr}}$ の平方根に比例することがわかる．

$$|A|_{\max} \propto \sqrt{\mathrm{R} - \mathrm{R_{cr}}} \tag{26.10}$$

ここで，(26.7) の $\alpha < 0$ の場合について簡単に議論しよう．この展開の 2 項は摂動の振幅の極限値を決定するには不十分であり，高次の負の項を入れる必要がある；これを $-\beta|A|^6$（ただし $\beta > 0$）とすると次のようになる．

$$|A|^2_{\max} = \frac{|\alpha|}{2\beta} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{2|\alpha|}{\beta}\gamma_1} \tag{26.11}$$

[*3] 例によって，振幅と言ったときには (26.6) の実部と理解する．

[*4] 厳密には，3 次の項は平均化すると 0 ではなく 4 次の項を与えるが，これは展開の 4 次の項の中に含まれていると考える．

γ_1 は (26.9) と同じものである．図 13b にその依存性を示す；図 13a は $\alpha > 0$，(26.10) に対応する．$\mathrm{R} > \mathrm{R}_{\mathrm{cr}}$ のときは定常流が存在せず，$\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\mathrm{cr}}$ のときは摂動が不連続にゼロでない振幅になるが，それでも $|A|^2$ の冪展開が成り立つほど小さいと仮定している[*5]．$\mathrm{R}'_{\mathrm{cr}} < \mathrm{R} < \mathrm{R}_{\mathrm{cr}}$ の範囲では，摂動のない流れは**準安定**で，無限小の摂動に対しては安定だが，有限振幅の摂動に対しては不安定である（連続な曲線；破線は不安定枝を示す）．

$\mathrm{R} > \mathrm{R}_{\mathrm{cr}}$ のときの，小さな摂動に対する不安定の結果起こる非定常流に話を戻そう．R_{cr} に近い R の場合，後者の流れは，定常流 $\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r})$ に，(26.10) のように R とともに増加する，小さいが有限の振幅を持つ周期流 $\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{r}, t)$ を重ねることによって表現できる．この流れの速度分布は次のような形になる．

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) e^{-i(\omega_1 t + \beta_1)} \tag{26.12}$$

ここで，$\boldsymbol{f}$ は座標の複素関数，β_1 は何らかの初期位相である．$\mathrm{R} - \mathrm{R}_{\mathrm{cr}}$ が大きいと，速度を $\boldsymbol{v}_0$ と $\boldsymbol{v}_1$ に分離することはもはや意味がない．この場合，振動数 ω_1 の周期的な流れが発生することになる．時間の代わりに位相 $\phi_1 \equiv \omega_1 t + \beta_1$ を独立変数として用いれば，関数 $\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{r}, \phi_1)$ は周期 2π の ϕ_1 に関する周期関数であると言える．しかし，この関数は，もはや単純な三角関数ではない．Fourier 級数で展開すると

$$\boldsymbol{v} = \sum_p \boldsymbol{A}_p(\boldsymbol{r}) e^{-i\phi_1 p} \tag{26.13}$$

（ここで，和は正負のすべての整数 p に対してとる）であり，基本振動数 ω_1 を持つ項だけでなく，振動数が ω_1 の整数倍の項も含む．

式 (26.7) は，時間因子 $A(t)$ の絶対値のみを決定し，その位相 ϕ_1 は決定せず本質的に不定のままで，流れが始まる瞬間にたまたま起こる特定の初期条件に依存する．初期位相 β_1 は，これらの条件によって，どのような値にもなりうる．このように周期的な流れは，その流れが起こる定常的な外部条件によって一義的に決まるものではない．速度の初期位相という 1 つの量が任意に残っているのである．流れが 1 つの自由度を持つのに対して，外部条件によって完全に決定される定常流は，自由度を持たないと言ってよいかもしれない．

問題 26.1

摂動のない流れと摂動の間のエネルギーバランスの方程式を，摂動が弱いことを仮定せずに導け．

【解答】 (26.2) を (26.1) に代入し，$\boldsymbol{v}_1$ の 2 次の項を残すと

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_0 \cdot \mathrm{grad})\boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v}_1 \cdot \mathrm{grad})\boldsymbol{v}_0 + (\boldsymbol{v}_1 \cdot \mathrm{grad})\boldsymbol{v}_1 = -\,\mathrm{grad}\, p_1 + \frac{1}{\mathrm{R}} \triangle \boldsymbol{v}_1 \tag{①}$$

となる．ただし，§ 19 で述べたような無次元の形で考えるものとする．この式と $\boldsymbol{v}_1$ の内積をとり，$\mathrm{div}\, \boldsymbol{v}_0 = 0$, $\mathrm{div}\, \boldsymbol{v}_1 = 0$ を用いると，次のようになる．

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}{v_1}^2\right) = -v_{1i} v_{1k} \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} - \frac{1}{\mathrm{R}} \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k} \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[-\frac{1}{2}{v_1}^2 (v_{0k} + v_{1k}) - p_1 v_{1k} + \frac{1}{\mathrm{R}} v_{1i} \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k}\right]$$

右辺の最後の項は，流れの全領域で積分すると，その領域の境界面や無限遠では $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_1 = 0$ となるので，0 になる．このことから，必要な関係式として

$$\dot{E}_1 = T - \frac{D}{\mathrm{R}} \tag{②}$$

$$E_1 = \int \frac{1}{2}{v_1}^2 \, dV, \quad T = -\int v_{1i} v_{1k} \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} \, dV, \quad D = \int \left(\frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k}\right)^2 dV \tag{③}$$

[*5] このような系は**ハード**な自励振動と呼ばれ，**ソフト**な自励振動が無限小の摂動に対して不安定であるのと対照的である．

を得る．関数 T は，平均流と摂動流の間のエネルギー交換を表し，正負どちらの符号にもなり得る．関数 D は散逸エネルギー損失であり，常に $D > 0$ である．なお，①の $\boldsymbol{v}_1$ に非線形の項は②の関係式には寄与していないことに注意.

式②は R_{cr} の下限を与える（O. Reynolds 1894; W. M'F. Orr 1907）：微分 $\dfrac{dE_1}{dt}$ は $\mathrm{R} < \mathrm{R}_E$ ならば負，つまり摂動は時間とともに減少しなければならない．ここで

$$\mathrm{R}_E = \min\left(\frac{D}{T}\right) \qquad ④$$

は境界条件と方程式 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}_1 = 0$ を満たす関数 $\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{r})$ に対して取られる関数で，有限な最小値の存在は，T と D がともに 2 次の同次関数であるという事実から数学的に言える．このことは，準安定性の下限 R の存在を証明し，それ以下では摂動がない流れはいかなる摂動に対しても安定であることを示す．しかし，④で与えられる「エネルギーの推定値」は，ほとんどの場合において，低すぎる.

⬆ 目次へ戻る

§ 27 ♠ 回転流の安定性（日本語訳）

非常に大きな Reynolds 数の極限における，2 つの回転円筒間の定常流（§ 18）の安定性を調べるには，§ 4 で重力場中の静止流体の力学的安定条件（Rayleigh 1916）を導いたのと同様の手法を用いることができる．この方法の原理は，流体の任意の小さな要素を考え，この要素が当該流れの中でたどる経路から変位すると仮定することである．この変位の結果，変位した要素に作用する力が現れる．元の流れが安定していれば，これらの力はその要素を元の位置に戻そうとするはずである.

乱れのない流れの中の各流体要素は，円筒の軸を中心とする円 $r = \mathrm{const.}$ の中を移動する．$\mu(r) = mr^2\dot{\phi}$ を，質量 m，角速度 $\dot{\phi}$ の要素の角運動量とする．これに働く遠心力は μ^2/mr^3 であり，この力は回転する流体の半径方向の圧力勾配と釣り合う．ここで，軸から距離 r_0 にある流体要素がその軌道からわずかにずれて，軸から距離 $r > r_0$ に移動したとしよう．このとき，要素の角運動量は元の値 $\mu_0 = \mu(r_0)$ に等しいままである．従って，その新しい位置で要素に作用する遠心力は ${\mu_0}^2/mr^3$ である．要素がその初期位置に戻ろうとするためには，この力は距離 r での圧力勾配と釣り合う平衡値 μ^2/mr^3 より小さくなければならない．したがって，安定のための必要条件は $\mu^2 - {\mu_0}^2 > 0$ である．$\mu(r)$ を $r - r_0$ の冪で展開して

$$\mu\frac{d\mu}{dr} > 0 \tag{27.1}$$

式 (18.3) より，移動する流体粒子の角速度 $\dot{\phi}$ は

$$\dot{\phi} = \frac{\Omega_2 {R_2}^2 - \Omega_1 {R_1}^2}{{R_2}^2 - {R_1}^2} + \frac{(\Omega_2 - \Omega_1){R_1}^2{R_2}^2}{{R_2}^2 - {R_1}^2}\frac{1}{r^2}$$

となる．$\mu = mr^2\dot{\phi}$ を計算し，確実に正となる因子を省くと，条件 (27.1) は次のように書くことができる.

$$(\Omega_2 {R_2}^2 - \Omega_1 {R_1}^2)\dot{\phi} > 0 \tag{27.2}$$

角速度 $\dot{\phi}$ は内円筒の Ω_1 から外円筒の Ω_2 まで単調に変化する．2 つの円筒が反対方向に回転する場合，すなわち Ω_1 と Ω_2 が逆符号の場合，関数 $\dot{\phi}$ は円筒間で符号が変わり，定数 $\Omega_2 {R_2}^2 - \Omega_1 {R_1}^2$ との積はどこでも正になることはありえない．したがってこの場合，(27.2) は流体中のすべての点で成立せず，流れは不安定になる.

ここで，2 本の円柱を同じ方向に回転させ，この回転方向を正とすると，$\Omega_1 > 0, \Omega_2 > 0$ となる．このとき $\dot{\phi}$ はどこでも正であり，条件 (27.2) を満たすには，次のようにすればよい．

$$\Omega_2 {R_2}^2 > \Omega_1 {R_1}^2 \tag{27.3}$$

$\Omega_2 {R_2}^2 < \Omega_1 {R_1}^2$ ならば流れは不安定になる．たとえば，外側の円柱が静止していて（$\Omega/2 = 0$），内側の円柱が回転している場合，流れは不安定になる．一方，内側の円柱が静止している場合（$\Omega_1 = 0$），流れは安定である．

ここで強調したいのは，上記の議論では流体要素が変位するときの粘性力の影響が考慮されていないことである．したがって，この方法は粘性が小さい場合，すなわち R が大きい場合にのみ適用できる．

任意の R に対する流れの安定性を調べるには，(26.4) 式から始める一般的な方法が必要であり，回転円筒間の流れについては G. I. Taylor（1924）によって初めて行われた．この場合，乱れのない速度分布 $\boldsymbol{v}_0$ は（円筒）径方向座標 r にのみ依存し，角度 ϕ や軸方向座標 z には依存しない．したがって，式 (26.4) の独立解の完全セットは，以下のような形で求めることができる．

$$\boldsymbol{v}_1(r, \phi, z) = e^{i(n\phi + kz - \omega t)} \boldsymbol{f}(r) \tag{27.4}$$

ベクトル $\boldsymbol{f}(r)$ の方向は任意である．波数 k は連続的な値をとり，z 方向の摂動の周期性を決定する．数 n は整数値 $0, 1, 2, \ldots$ のみをとる．から導かれるように $n = 0$ は軸対称の摂動に対応する．周波数の許容値は，必要な境界条件（$r = R_1$ と $r = R_2$ では $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$）で方程式を解くことによって得られる．このようにして定式化された問題は，与えられた n と k に対して，一般に固有振動数 $\omega = \omega_n^{(j)}(k)$ の不連続系列をもたらすが，ここでは関数 $\omega = \omega_n(k)$ の分岐を表し，これらの振動数は一般に複素数となる．

この場合の Reynolds 数は，流れの種類を決定する比 R_1/R_2 と Ω_1/Ω_2 が与えられた値に対して $\Omega_1 {R_1}^2/\nu$ または $\Omega_2 {R_2}^2/\nu$ で表される．Reynolds 数の増加に伴う固有振動数 $\omega = \omega_n^{(j)}(k)$ の変化を追ってみよう．$\mathrm{R} < \mathrm{R}_{\mathrm{cr}}$ では関数 $\gamma(k)$ は常に負であるが，$\mathrm{R} > \mathrm{R}_{\mathrm{cr}}$ では k のある範囲で $\gamma > 0$ となる．$\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\mathrm{cr}}$ のとき $\gamma(k) = 0$ となる k の値を k_{cr} とする．これに対応する関数 (27.4) は，元の流れが安定でなくなった瞬間に流体中に生じる（元の流れに重なる）流れの性質を与えており，それは円柱の軸に沿って周期 $2\pi/k_{\mathrm{cr}}$ を持つ．実際の安定性の限界は，もちろん摂動の形，すなわち R_{cr} が最小となる関数 $\omega_n^{(j)}(k)$ によって決定され，ここで注目すべきはこれらの「最も危険な」摂動である．原則として（下記参照），これらは軸対称である．計算が非常に複雑になるため，円柱と円柱の間の空間が狭い場合のみ，かなり完全な研究がなされてきた．$h \equiv R_2 - R_1 \ll R = (R_1 + R_2)/2$ のように，円筒の間隔が狭い場合のみ，かなり完全な研究がなされている．その結果は次のようなものである[*6]．

純虚数関数 $\omega(k)$ が最小の R_{cr} を与える解に対応することがわかった．したがって，$k = k_{\mathrm{cr}}$ のとき，$\mathrm{Im}(\omega)$ だけでなく ω 自体もゼロになる．これは，定常回転流の最初の不安定性が，同じく定常である別の流の出現につながることを意味する[*7]．円筒に沿って規則正しく並んだトロイダルな **Taylor 渦**からなる．2 本の円柱が同じ方向に回転する場合，図 14 はこれらの渦の流線を円柱の子午面断面上に投影したものであり，速度 $\boldsymbol{v}_1$ は実際には方位角成分をも持っている．各周期の長さ $2\pi/k_{\mathrm{cr}}$ には，回転方向が反対の 2 つの渦が存在する．

R_{cr} より少し大きい R では，k の値は 1 つではなく，$\mathrm{Im}(\omega) > 0$ となるような範囲が存在する．ただし，得られる流れは，さまざまな周期性を持つ流れの重ね合わせになるとは考えない方がよい．実際には，それぞれ

[*6] 詳しい説明は

- N. E. Kochin, I. A. Kibel' and N. V. Roze, *Theoretical Hydromechanics*, Part 2, Moscow 1963
- S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford 1961
- P. G. Drazin and W. H. Reid, *Hydrodynamic Stability*, Cambridge 1981

にある．

[*7] このような場合，**安定性の交換**と呼ばれる．いくつかの特殊なケースについての実験と数値計算の結果は，この性質が考慮された流れに対して一般的なものであり，h が小さいことに依存しないことを示唆している．

の R に対して，ある一定の周期性を持った流れが発生し，全体の流れが安定化する．しかし，この周期性は線形化された式 (26.4) からは求めることができない．

図 15 は，R_1/R_2 が与えられたときの不安定領域（斜線）と安定領域を分ける曲線の概形である．曲線の右側の枝は，2 つの円柱が同じ方向に回転した場合に対応し，直線 $\Omega_2 {R_2}^2 = \Omega_1 {R_1}^2$ に漸近する．この性質は，実際には h の小ささに依存しない一般的なものである．Reynolds 数が増加すると，与えられたタイプの流れに対して，与えられた Ω_1/Ω_2 の値に対応する原点を通る直線に沿って上方へと移動していく．図の右側では，$\Omega_2 {R_2}^2/\Omega_1 {R_1}^2 > 1$ となるような線は，不安定領域の境界である曲線に合致せず，不安定領域の境界となる．一方，$\Omega_2 {R_2}^2/\Omega_1 {R_1}^2 < 1$ ならば，(27.3) の条件に従って，十分大きな Reynolds 数で不安定領域に入っていくことになる．図の左側（Ω_1 と Ω_2 が逆符号）では，原点を通る任意の線が斜線領域の境界を通る．つまり，Reynolds 数が十分に大きいときには，どのような比率 $|\Omega_2/\Omega_1|$ でも結局は定常流が不安定になることがわかり，やはりこれまでの結果と一致している．$\Omega_2 = 0$ の場合（内筒だけが回転する場合），$\mathrm{R} = h\Omega_1 R_1/\nu$ で定義される Reynolds 数が次のようになると不安定となる．

$$\mathrm{R}_{\mathrm{cr}} = 41.2\sqrt{R/h} \tag{27.5}$$

考察している流れでは，粘性は安定化効果を持ち，$\nu = 0$ で安定な流れは粘性を考慮すると安定なままであり，不安定なものが粘性流体に対して安定になることもある．

回転円筒間の流れにおける軸対称性のない摂動については，これまで体系的な研究がなされていない．特定のケースについて計算した結果，図 15 の右側では，軸対称の摂動が常に最も危険であることに変わりはないことが示唆された．しかし，左側では，$|\Omega_2/\Omega_1|$ が十分に大きい場合，境界曲線の形はが十分に大きい場合，軸対称性のない摂動を考慮すると境界曲線の形が多少変化することがある．その場合，摂動周波数の実部がゼロにならないので，結果として流れが定常でなくなり，不安定性の性質がかなり変わってくる．

回転する円筒間の流れの極限的な場合（$h \to 0$）は，相対運動する 2 つの平行な平面の間の流れである（§ 17 参照）．この流れは，$\mathrm{R} = uh/\nu$（u は平面の相対速度）のいかなる値に対しても，無限に小さな摂動に対して安定である．

⬆ 目次へ戻る

§ 28 ♠ パイプ内の流れの安定性（日本語訳）

§ 17 で議論したパイプ内の定常流は，異常な形で安定性を失う．流れは x 方向（パイプに沿った方向）に一様なので，乱れのない速度分布 $\boldsymbol{v}_0$ は x に依存しない．したがって，§ 27 の手順と同様に，式 (26.4) の解を求めることができる．

$$\boldsymbol{v}_1 = e^{i(kx-\omega t)}\boldsymbol{f}(y, z) \tag{28.1}$$

ここでも，ある k の値で $\gamma = \mathrm{Im}(\omega)$ が最初にゼロになる値 $\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\mathrm{cr}}$ が存在する．しかし，関数 $\omega(k)$ の実部がゼロにならないことが重要である．

R_{cr} をわずかに超える R の値では，$\gamma(k) > 0$ となる k の値の範囲は小さく，$\omega(k)$ が最大となる点，すなわち $\dfrac{d\gamma}{dk} = 0$ の近くにある（図 16 からわかるように）．流れの一部にわずかな摂動が生じたとすると，それは (28.1) の形の成分を重ね合わせた波束となる．時間の経過とともに，$\gamma(k) > 0$ となる成分は増幅され，それ以外の成分は減衰する．このようにして増幅された波束は，波束の群速度 $\dfrac{d\omega}{dk}$ に等しい速度で下流に運ばれる（§ 67）が，ここでは波数が $\dfrac{d\gamma}{dk} = 0$ となる点付近の小さな範囲にある波を考えているので，量

$$\frac{d\omega}{dk} \simeq \frac{d\,\mathrm{Re}(\omega)}{dk} \tag{28.2}$$

は実数であり，したがってパケットの実際の伝搬速度である．

この摂動の下流への変位は非常に重要で，§ 27 で説明したものとは全く異なる安定性の喪失を引き起こす．

Im(ω) の正値は今，下流に向かう摂動の増幅のみを意味するので，2 つの可能性がある．一つは，波束の移動にもかかわらず，空間のどの点でも時間の経過とともに摂動が際限なく大きくなるケースで，このような無限小の摂動に対する不安定性は**絶対不安定**と呼ばれる．一方，パケットは非常に速く流され，空間のどの点でも $t \to \infty$ で摂動がゼロになる．これは**対流不安定**と呼ばれる[*8]．Poiseuille 流の場合は，2 番目の種類が発生するようである；次の脚注を参照．

ある座標系で対流した不安定はパケットとともに運動する別の座標系では絶対的な不安定となり，絶対的な不安定はパケットから十分な速度で遠ざかる座標系では対流するようになる，という意味で，両者の違いは，不安定を考慮する参照座標系の選択によって決まる相対的なものである．しかし，今回のケースでは，不安定性を見るべき好ましい参照座標系，すなわち管壁が静止している参照座標系が存在することによって，その違いに物理的な意味が与えられているのである．また，実際のパイプは長さが有限であるため，どこかで発生した摂動は，原理的には実際に層流を乱す前に配管の外に持ち出される可能性がある．

擾乱は，ある点での時間ではなく，座標 x（下流側）に対して増加するので，この種の不安定性を調べるには，次のようにするのが合理的である．ある地点で，与えられた周波数 ω の連続的に働く摂動が流れに加えられたと仮定して，この摂動が下流に運ばれるときにどうなるかを調べてみる．関数 $\omega(k)$ を反転させると，与えられた (実) 周波数 ω に対応する波数 k がわかる．$\mathrm{Im}(k) < 0$ ならば，係数 e^{ikx} は x とともに増加し，つまり摂動は下流に増幅される．方程式 $\mathrm{Im}\, k(\omega, \mathrm{R}) = 0$ で与えられる $\omega\mathrm{R}$ 平面上の曲線は，**中立安定曲線**または**中立曲線**と呼ばれ，安定領域を定義し，各 R について，下流で増幅される摂動と減衰される摂動の周波数を分離するものである．

実際の計算は非常に複雑である．完全な解析的検討は，平面 Poiseuille 流（2 つの平行な平面の間；C. C. Lin 1945）に対してのみ行われている．ここではその結果を示すことにする[*9]．

平面間の（乱れのない）流れは，流れの方向（x 軸に沿って）だけでなく，xz 平面全体（y 軸は平面に垂直）において一様である．したがって，(26.4) 式の解は次のような形で求めることができる．

$$\boldsymbol{v}_1 = e^{i(k_x x + k/_z z - \omega t)} \boldsymbol{f}(y) \tag{28.3}$$

という形の解を求めることができる．波動ベクトル $\boldsymbol{k}$ は xz 平面上の任意の方向である．しかし，R が大きくなるにつれて最初に現れる成長する摂動にのみ興味がある．なぜなら，これが安定性の限界を支配しているからである．ある波数において，減衰しない最初の摂動は x 方向に $\boldsymbol{k}$ を持ち，$f_x = 0$ であることが示される．したがって，xy 平面上の摂動のみを考えればよく，z に依存しない 2 次元の摂動（無摂動流と同じ）を考えればよい[*10]．

図 17 に面間の流れの中立曲線を模式的に示す．曲線内の斜線部分が不安定領域である[*11]．減衰しない摂動が可能な R の最小値は，S. A. Orszag（1971）による後のより正確な計算によれば，$\mathrm{R_{cr}} = 5772$ であることが判明した；Reynolds 数はここで次のように定義される．

$$\mathrm{R} = U_{\max} h / 2\nu, \tag{28.4}$$

[*8] 不安定性の種類を決定する一般的な方法は，『物理的運動学』§ 62 で説明されている．

[*9] C. C. Lin, *The Theory of Hydrodynamic Stability*, Cambridge 1955 参照．これらとその後の研究については，前の脚注で触れた Drazin と Reid の本に記載がある．

[*10] このことの証明（H. B. Squire 1933）として，(28.3) のような摂動を持つ方程式 (26.4) は，2 次元摂動の方程式と R を $\mathrm{R}\cos\phi$ に置き換えるだけで異なる形になり，xz 平面での $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{v}_0$ 間の角度を ϕ とすることができる，ということがある．したがって，与えられた k を持つ 3 次元摂動の臨界数 $\tilde{\mathrm{R}}_{\mathrm{cr}}$ は，$\tilde{\mathrm{R}}_{\mathrm{cr}} = \mathrm{R_{cr}} \sec\phi > \mathrm{R_{cr}}$ であり，ここで $\mathrm{R_{cr}}$ は 2 次元摂動に対して計算されたものである．

[*11] $k\mathrm{R}$ 平面での中立曲線も同様の形をしている．中立曲線上では ω も k も実数なので，2 つの平面の曲線は同じ依存性を異なる変数で表現したものである．

ここで $U_{\max}$ は最大流速，$\frac{1}{2}h$ は平面間の距離の半分，すなわち流速がゼロから最大値まで増加する距離である[*12]．$\mathrm{R}=\mathrm{R}_{\mathrm{cr}}$ は擾乱波数 $k_{\mathrm{cr}}=2.04/h$ に相当する．$\mathrm{R}\to\infty$ として，中立曲線の 2 つの枝は R 軸に漸近し，上下の枝はそれぞれ $\omega h/U_{\max}\simeq \mathrm{R}^{-3/11}$ と $\mathrm{R}^{-3/7}$ で，各枝において ω と k は $\omega h/U\simeq (kh)^3$ により関係づけられる．

したがって，ある最大値（$\sim U/h$）を超えないゼロでない周波数 ω に対して，摂動が増幅される有限の R の範囲が存在することになる[*13]．この場合，流体の粘性が小さくても有限であることは，ある意味で，厳密に理想的な流体の状況に比べて不安定にする効果があることは注目される[*14]．$\mathrm{R}\to\infty$ のとき，任意の有限な周波数の摂動は減衰するが，有限の粘性を導入するとやがて不安定領域に達し，さらに粘性を増加させる（R を減少させる）とようやくこの領域から抜け出ることができるからである．

円形断面を持つ管内流れの安定性に関する完全な理論的研究はまだなされていないが，利用可能な結果から，流れは任意の Reynolds 数における無限小の摂動に対して安定性（絶対および対流）を持つと仮定する十分な根拠を与えてくれる．擾乱のない流れが軸対称であるとき，擾乱は次のような形で求めることができる．

$$\boldsymbol{v}_1=e^{i(n\phi+kz-\omega t)}\boldsymbol{f}(r) \tag{28.5}$$

(27.4)．軸対称の摂動（$n=0$）は常に減衰することが証明されたと考えてよい．これまで研究されてきた軸対称でない摂動（特定の n の値，特定の Reynolds 数の範囲）の中にも，減衰しない摂動は見つかっていない．パイプ内の流れの安定性は，パイプの入り口での擾乱を注意深く防げば，非常に大きな R の値，実際には $\mathrm{R}\simeq 10^5$ まで層流を維持できるという事実によっても示唆されている．この場合

$$\mathrm{R}=U_{\max}d/2\nu=\overline{U}d/\nu \tag{28.6}$$

d はパイプの直径，$U_{\max}$ はパイプ軸上の流体速度である．

平面間の流れと円管内の流れは，半径 R_1 と R_2（$R_2>R_1$）をもつ 2 つの同軸円筒面間の環状管内の流れの限定例とみなすことができる．$R_1=0$ では円管となり，極限 $R_1\to R_2$ が平面間の流れに対応することになる．$R_1/R_2<1$ のすべての非ゼロ値に対して，$R_1/R_2\to 0, \mathrm{R}_{\mathrm{cr}}\to\infty$ のとき，臨界値 R_{cr} が存在するようである．

これらの Poiseuille 流にはそれぞれ，有限振幅の摂動に対する安定性の限界を決める臨界数 $\mathrm{R}'_{\mathrm{cr}}$ も存在する．$\mathrm{R}<\mathrm{R}'_{\mathrm{cr}}$ のとき，配管内の非減衰非定常流は不可能である．もし乱流が発生した場合，$\mathrm{R}<\mathrm{R}'_{\mathrm{cr}}$ では乱流領域は下流に運ばれて小さくなり，完全に消滅するが，$\mathrm{R}>\mathrm{R}'_{\mathrm{cr}}$ では乱流領域は時間の経過とともに大きくなり，より多くの流れを含むようになる．流れの擾乱がパイプの入り口で絶えず起こる場合，$\mathrm{R}<\mathrm{R}'_{\mathrm{cr}}$ であれば，最初はどんなに強くても，パイプの下方のある距離で減衰することになる．一方，$\mathrm{R}>\mathrm{R}'_{\mathrm{cr}}$ であれば，流れはパイプ全体で乱流となり，R が大きければ，より弱い摂動で実現できる．$\mathrm{R}'_{\mathrm{cr}}$ と R_{cr} の間の範囲では，層流は準安定的である．円形断面の管では，$\mathrm{R}\simeq 1800$ で減衰しない乱流が観測され，$\mathrm{R}\simeq 1000$ 以上では平行な平面間の流れが観測されている．

パイプ内の層流の崩壊は「ハード」であるため，抗力の不連続な変化を伴う．$\mathrm{R}>\mathrm{R}'_{\mathrm{cr}}$ の管内流れの場合，抗力の R に対する依存性は，層流の場合と乱流の場合の本質的に 2 つある（§ 43 参照）．抗力は，どのような R の値であっても，不連続性を持っており，一方から他方への変化が発生する．

[*12] 2 次元の Poiseuille 流に対する R の定義も文献にある．$\mathrm{R}=\overline{U}h/\nu$，ここで $\overline{U}$ は断面上で平均化された流体速度である．$\overline{U}=\frac{2}{3}U_{\max}$ なので，(28.4) に従って R を定義すると $\overline{U}h/\nu=\frac{4}{3}\mathrm{R}$ となる．

[*13] 2 次元 Poiseuille 流の不安定性が対流であることの証明は，S. V. Iordanski***vi*** and A. G. Kulikovski***vi***, *Soviet Physics JETP* **22**, 915, 1966 にある．しかし，この証明は，中性曲線の 2 つの枝が横軸に近い，つまり，それぞれの枝で $kh\ll 1$ である，非常に大きな R の範囲にのみ関連している．この問題は，中性曲線上で $kh\sim 1$ となるような R の値では未解決のままである．

[*14] この性質は Heisenberg（1924）によって発見された．

この節を終えるにあたって，もう一つ述べておくことがある．無限に長いパイプの流れに対して得られた安定限界（中立曲線）には，もう一つ意味がある．長さは幅に比べて非常に大きいが，有限であるパイプの中の流れを考えてみよう．両端に速度分布の指定による境界条件を与える（たとえば，パイプの両端を多孔質シールで閉じて一様な分布にする）と，パイプの両端付近以外の場所では，乱れのない速度分布は x に依存しない Poiseuille 形式をとると考えることができる．このように定義された有限系に対して，無限小の摂動に対する安定性の問題を提案することができる．このような大域的安定性の条件を確立するための一般的な手順は，『物理的運動学』§ 65 で述べられている．無限パイプに対する前述の中立曲線は，その両端の特定の境界条件がどうであれ，有限パイプの大域的安定性の限界でもあることが示せる*15．

⬆ 目次へ戻る

§ 30–32 は，第 2 版で新たに書き加えられた節で，M. I. Rabinovich との共著である．

§ 30 ♠ 準周期流と周波数ロッキング（日本語訳）

以下の議論（§ 30–32）では，ある種の幾何学的表現を用いると便利である．そのために，我々は流体の**状態空間**という数学的概念を定義する；空間中の各点は流体の特定の速度分布（速度場）に対応する．そして，隣接する瞬間の状態は，隣接する点に対応する*16．

状態空間において，定常流は点，周期流は閉曲線で表現され，それぞれ**極限点**（または**臨界点**），**リミットサイクル**と呼ばれる．流れが安定の場合，流れの発展を表す隣接する曲線は，$t \to \infty$ で極限点またはリミットサイクルに向かう傾向がある．

リミットサイクル（または極限点）は，状態空間においてある**吸引領域**を持ち，その領域から出発した経路は最終的にリミットサイクルに到達する．このことから，リミットサイクルは**アトラクター**と呼ばれる．ここで強調したいのは，体積と境界条件（と R の値）が与えられた流れに対して，複数のアトラクターが存在しうるということである．状態空間が様々なアトラクターを含み，それぞれが独自の吸引領域を持つケースが起こり得る．つまり，$\mathrm{R} > \mathrm{R}_{\mathrm{cr}}$ のとき，複数の安定な流れの領域が存在し，R の値への到達の仕方によって異なる領域が発生することがある．これらの安定領域は，非線形の運動方程式の解であることを強調しておきたい*17．

ここで，§ 26 で述べた周期流が確立する臨界値よりもさらに Reynolds 数を大きくしたときに起こる現象について考えてみよう．R が大きくなると，やがてこの流れが不安定になる地点に到達する．この不安定性は，原則として § 26 で述べた元の定常流の不安定性の判定と同様の手順で調べる必要がある．乱れのない流れは周波数 ω_1 の周期流 $\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}, t)$ であり，運動方程式に $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_2$（$\boldsymbol{v}_2$ は小さな補正項）を代入しなければならない．すると，$\boldsymbol{v}_2$ については再び線形方程式が得られるが，係数は座標と時間の関数となり，時間に対しては周期的になる（周期 $T_1 = 2\pi/\omega_1$）．このような方程式の解は，次のような形で求められる．

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r}, t)e^{-i\omega t} \tag{30.1}$$

ここで，$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r}, t)$ は時間の周期関数で，周期は同じく T_1 である．虚部 $\gamma_2 > 0$ の周波数 $\omega = \omega_2 + i\gamma_2$ が存在すると再び不安定になる（実部 ω_2 は新たに現れる周波数となる）．

周期 T_1 の間，摂動 (30.1) は因子 $\mu \equiv e^{-i\omega T_1}$ だけ変化する．この因子は周期流の**乗数**と呼ばれ，流れにおける摂動の増幅または減衰を表す便利な量である．連続媒質（流体）の周期流は，乗数が無限大になり，かつ独

*15 参照．

*16 数学の文献では，この無限次元の関数空間（場合によってはそれに代わる有限次元の空間もある；下記参照）を**位相空間**と呼ぶこともある．ここでは，物理学における通常の意味との混同を避けるため，この用語は使わないことにする．

*17 例えば，Couette 流が安定でなくなったとき，新たに生じる流れのパターンは，実は円柱を特定の角速度で回転させる過程の履歴に依存する．

立した摂動も無限大になることに対応する．この流れは，Reynolds 数がある値 $\mathrm{R}_{\mathrm{cr},2}$ になり，1 つ以上の乗数の絶対値が 1 となる，すなわち μ が複素平面上で単位円を横切る時，安定でなくなる．方程式は実数であるから，乗数は複素共役のペアでこの円を横切るか，実数値 $+1$ または -1 で単独に横切らなければならない．周期流で安定性が失われるとき，状態空間内の不安定なリミットサイクル近傍において，経路パターンの定性的な変化を伴う；この変化は局所的な**分岐**と呼ばれる．分岐の性質は，乗数が単位円を横切る点によってほぼ決定される[*18]．

α を無理数として，$\mu = \exp(\mp 2\pi\alpha i)$ という形の複素共役な乗数の組が単位円を横切るときの分岐を考えてみよう．これにより，新たな独立した周波数 $\omega_2 = \alpha\omega_1$ を持つ二次的な流れが発生し，2 つの非整合な（比が無理数である）周波数を持つ準周期流になる．状態空間でこの流れに対応するのは，2 次元トーラス上の開いた巻線の形をした経路であり[*19]，現在不安定なリミットサイクルはトーラスを生成する；周波数 ω_1 は「生成器」の周りの回転に，ω_2 はトーラスの周りの回転に対応している（図 18）．最初の周期流が現れたとき，自由度は 1 つだったように，今は任意の 2 つの量（位相）があり，流れは 2 つの自由度を持つことになる．周期的な運動の安定性が失われ，2 次元のトーラスが形成されることは，流体力学では典型的な現象である．

Reynolds 数がさらに増加したとき（$\mathrm{R} > \mathrm{R}_{\mathrm{cr},2}$），このような分岐によって生じる流れの複雑化を考えてみよう．R が増加するにつれて，新しい周期が次々と現れると考えるのが妥当であろう．幾何学的な表現で言えば，これは 2 次元トーラスの安定性が失われ，その近くに 3 次元トーラスが形成され，さらに分岐して 4 次元トーラスに置き換わり…といったようなことを意味する．次々と現れる新しい周波数に対応する Reynolds 数の間隔は急速に短くなり，流れのスケールはますます小さくなる．このように，流れは急速に複雑で混乱した形になり，規則正しい**層流**（流体が層ごとに異なる速度で動く）とは対照的に，**乱流**と呼ばれるようになる．

このような乱流の発達の仕方やシナリオが実際に可能であると仮定して[*20]，関数 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$ の一般形を書こう．その時間依存性は，N 個の異なる周波数 ω_i によって支配され，周期 2π でそれぞれ周期的な N 個の位相 $\phi_i = \omega_i t + \beta_i$（と座標）の関数として見なすことができる．このような関数は次のような和で表される．

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t) = \sum \boldsymbol{A}_{p_1 p_2 \cdots p_N}(\boldsymbol{r}) \exp\left[-i\sum_{i=1}^{n} p_i\phi_i\right] \tag{30.2}$$

これは (26.13) の一般化であり，和はすべての整数 $p_1, p_2, \ldots, p_N$ についてとる．この式で記述される流れは N 個の任意の初期位相 β_i を含み，N 個の自由度を持つ[*21]．

位相が 2π の整数倍しか違わない状態は，物理的に同一である．したがって，各位相の本質的に異なる値は $0 \le \phi_i \le 2\pi$ の範囲にある．ここで一組の位相，$\phi_1 = \omega_1 t + \beta_1$ と $\phi_2 = \omega_2 t + \beta_2$ を考えてみよう．ある瞬間に $\phi_1 = \alpha$ とすると，ϕ_1 はすべての時刻

$$t = \frac{\alpha - \beta_1}{\omega_1} + 2\pi s\frac{1}{\omega_1}$$

において α と「同じ」値を持つことになる（s は任意の整数）．これらの時刻において

$$\phi_2 = \beta_2 + \frac{\omega_2}{\omega_1}(\alpha - \beta_1 + 2\pi s)$$

となる．異なる周波数は非整合である（比が無理数である？）ため，ω_2/ω_1 は無理数である．ϕ_2 の各値を，2π の適当な整数倍を引いて 0 から 2π までの範囲の値にすると，s が 0 から ∞ まで変化するとき，ϕ_2 はその範

*18 摂動は有限時間（1 周期 T_1）では消えないので，乗数が 0 になることはありえない．

*19 数学用語では，**トーラス**は囲まれた体積を持たない表面を表す．したがって，2 次元トーラスは 3 次元の「ドーナツ」の 2 次元表面である．

*20 以下のシナリオは，L. D. Landau（1944）と E. Hopf（1948）が独立に提案した．

*21 位相 ϕ_i を N 次元トーラス上の経路を表す座標とすると，対応する速度は定数 $\dot{\phi}_i = \omega_i$ となる．このため，準周期流はトーラス上の等速運動として記述することができる．

囲内の任意の数に無限に近い値をとることがわかる．つまり，十分長い時間の間に，ϕ_1, ϕ_2 は任意の指定された組に無限に近い値を同時にとる．これはどの位相でも同じである．したがってこの乱流モデルでは，十分長い時間の間に，位相 ϕ_i の同時値の可能なセットで定義される，任意の指定された状態に無限に近い状態を流体は通過する．しかし，その時間は N とともに急速に増加し，実際には周期性の痕跡が残らないほど大きくなる[*22]．

ここで強調しておきたいのは，上述した乱流の発達の道筋は，基本的に線形化に基づくものだということである．実際には，二次的な不安定性の発展により新たな周期解が出現しても，既に存在する周期解は消滅せず，逆にほとんど変化しないことが仮定されている．このモデルでは，乱流はそのような多数の不変な解の重ね合わせに過ぎない．しかし，一般に Reynolds 数が大きくなると解の性質が変化し，安定でなくなる．摂動は相互作用し，流れを単純化することもあれば，複雑化することもある．ここでは，最初の可能性について説明する．

簡単なケースとして，摂動が加わった解が 2 つの独立した振動数だけを含むと仮定しよう．すでに述べたように，このような流れの幾何学的な表現は，2 次元トーラス上の開いた巻線である．$\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\mathrm{cr},1}$ で生じる周波数 ω_1 の摂動は，当然，$\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\mathrm{cr},2}$（周波数 ω_2 の摂動が生じる）付近で強くなると仮定し，したがって，その近傍で R が比較的小さく変化しても変化しないと見なすことができる．そこで，周波数 ω_1 の周期流を背景とした周波数 ω_2 の摂動の時間発展を記述するために，新たな変数

$$a_2(t) = |a_2(t)|e^{-i\phi_2(t)} \tag{30.3}$$

を用いる．$|a_2|$ はトーラス生成器までの最短距離（周波数 ω_1 の不安定なリミットサイクル），つまり二次的な周期流の相対振幅であり，ϕ_2 は後者の位相である．ここで，周期 $T_1 = 2\pi/\omega_1$ の倍数である離散的な瞬間における $a_2(t)$ の振る舞いを考えてみよう．1 周期の間，周波数 ω_2 の摂動は乗数

$$\mu = |\mu| \exp(-2\pi i\omega_2/\omega_1)$$

で変化する．そのような周期の整数倍（τ 倍とする）経った後，a_2 は μ^τ 倍される．$\mathrm{R} - \mathrm{R}_{\mathrm{cr}}$ は小さいと仮定しているので，摂動の成長因子も小さく，$|\mu| - 1$ は正だが小さい．よって，a_2 は期間 T_1 の間にわずかに変化するだけで，位相 ϕ_2 は単に τ に比例して変化する．したがって，離散変数 τ を連続的であるかのように扱い，$a_2(\tau)$ の変化を τ に関する微分方程式で表すことができる．

乗数という概念は，不安定性の発生から非常に短い時間間隔，すなわち摂動がまだ線形方程式で記述可能な時期に関係している．この範囲では，$a_2(\tau)$ は上記の議論に従って μ^τ で変化し

$$\frac{da_2}{d\tau} = a_2(\tau) \log \mu$$

となり，臨界 Reynolds 数の直上で

$$\log \mu = \log |\mu| - 2\pi i\omega_2/\omega_1 \simeq |\mu| - 1 - 2\pi i\omega_2/\omega_1 \tag{30.4}$$

となる．これは $\dfrac{da_2}{d\tau}$ を a_2 と $a_2{}^*$ の累で展開したときの最初の項であり，$|a_2|$ が（まだ小さいながらも）増加すると次の項を考慮する必要がある．同じ振動因子を含む項は，3 次の $\propto a_2|a_2|^2$ である．したがって，次のようになる．

$$\frac{da_2}{d\tau} = a_2 \log \mu - \beta_2 a_2 |a_2|^2 \tag{30.5}$$

[*22] このタイプの発達した乱流では，系（流体）が位相空間 $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N$ における選ばれた点の近くの与えられた微小体積に存在する確率は，全体の体積 $(2\pi)^N$ に対するこの微小体積 $(\delta\phi)^N$ の比である．したがって，十分長い時間の間に，系は与えられた点の近傍に，全時間のうち $e^{-\kappa N}$（ここで $\kappa = \log(2\pi/\delta\phi)$）だけいる，と言うことができる．

ここで，β_2 は μ と同様に R に依存する複素パラメータであり，$\mathrm{Re}\,\beta_2 > 0$ である；(26.7) に関する対応した議論と比較しよう．この式の実部はすぐに絶対値の定常値を与える．

$$\left|{a_2}^{(0)}\right|^2 = \frac{|\mu| - 1}{\mathrm{Re}\,\beta_2}$$

虚部は位相 $\phi_2(\tau)$ についての方程式を与える．上記の絶対値の定常値で

$$\frac{d\phi_2}{d\tau} = \frac{2\pi\omega_2}{\omega_1} + \left|{a_2}^{(0)}\right|^2 \mathrm{Im}\,\beta_2. \tag{30.6}$$

これによると ϕ_2 は一定の速度で回転することになるが，この性質は，しかし，考えている近似においてのみ有効である：$\mathrm{R} - \mathrm{R_{cr}}$ が大きくなると，回転はもはや一様ではなく，トーラス上の回転の速度はそれ自体 ϕ_2 の関数である．これを考慮し，(30.6) の右辺に小さな摂動 $\Phi(\phi_2)$ を加える．ϕ_2 の物理的に異なる値はすべて 0 から 2π の範囲にあるので，$\Phi(\phi_2)$ は周期 2π で周期的である．次に，無理数の比 ω_2/ω_1 を有理小数で近似する（これは任意の精度で行える）：$\omega_2/\omega_1 = m_2/m_1 + \Delta/2\pi$（$m_1, m_2$ は整数）．このとき，方程式は次のようになる．

$$\frac{d\phi_2}{d\tau} = \frac{2\pi m_2}{m_1} + \Delta + \left|{a_2}^{(0)}\right|^2 \mathrm{Im}\,\beta_2 + \Phi(\phi_2) \tag{30.7}$$

ここで，m_1T_1 の倍数の時間，すなわち $\tau = m_1\tilde{\tau}$ の値（$\tilde{\tau}$ は整数）についてのみ位相値を考えることにする．(30.7) の右辺第 1 項は，時間 m_1T_1 において位相が $2\pi m_2$ だけ，つまり 2π の整数倍だけ変化するが，この変化は無視することができる．このとき，右辺全体は小さな量になるので，関数 $\phi_2(\tilde{\tau})$ の変化は連続変数 $\tilde{\tau}$ の微分方程式で記述することができる．

$$\frac{1}{m_1}\frac{d\phi_2}{d\tilde{\tau}} = \Delta + \left|{a_2}^{(0)}\right|^2 \mathrm{Im}\,\beta_2 + \Phi(\phi_2) \tag{30.8}$$

離散変数 $\tilde{\tau}$ の 1 ステップにおいて，ϕ_2/m_1 はわずかに変化するだけである．

一般に，(30.8) は右辺が 0 となる定常解 $\phi_2 = {\phi_2}^{(0)}$ を持つ．ϕ_2 が m_1T_1 の倍数の時間で一定であることは，トーラス上にリミットサイクルが存在することを意味し，m_1 ターン後に経路が閉じることを意味する．$\Phi(\phi_2)$ は周期的なので，このような解は $\Phi(\phi_2)$ の上昇部分と下降部分に一組ずつ（最も簡単な場合は一組）発生する．これらの 2 つのうち，後者だけが安定で，(30.8) は $\phi_2 = {\phi_2}^{(0)}$ 付近で次のような形になる．

$$\frac{d\phi_2}{d\tilde{\tau}} = -\mathrm{const.} \times (\phi_2 - {\phi_2}^{(0)})$$

定数は正で，$\phi_2 = {\phi_2}^{(0)}$ に近づく解が実際に存在する．第二解は不安定で，定数は負である．

トーラス上の安定なリミットサイクルの形成は，準周期流の消滅と新たな周期流の確立という**周波数ロッキング**と等価である．この現象は，自由度の高い系では様々な形で起こりうるもので，非整合な周波数を多数持つ流れの重ね合わせのような流れの発生を防ぐことができる．この意味で，Landau-Hopf シナリオが実際に発生する確率は非常に小さいと言える．もちろん，特定のケースでロッキングが発生する前にいくつかの非整合周波数が現れないとは限らない．

⬆ 目次へ戻る

§ 31 ♠ ストレンジアトラクター（日本語訳）

様々な流体力学的流れにおける乱流の起源について，完全な理論はまだ存在しない．しかし，流れが乱れる過程については，主に微分方程式のモデル系の計算機による研究と，実験による裏付けに基づいて，様々なシ

ナリオが提案されている．§ 31 と § 32 では，このような研究結果には触れず，これらの考え方の一端を説明するのが目的である．実験結果は制限された体積内の流体力学的な流れに関するものであり，以下ではこのような流れを考えるということだけ言っておこう*23．

まず，一般論として以下のような重要な指摘がある；周期流の安定性解析では，絶対値が 1 に近く，R がわずかに変化した時単位円を横切ることができる乗数だけが注目される．粘性流では，このような「危険な」乗数は，次の理由から常に有限個である．運動方程式で許される摂動の様々なタイプ（モード）は，異なる空間スケール（$\boldsymbol{v}_2$ が大きく変化する距離）を持つ．運動のスケールが小さくなると，その中の速度勾配が大きくなり，粘性によってより大きく遅らされることになる．許容されるモードをスケールの小さい順に並べた場合，危険なものは最初の有限個だけであり，十分に離れたところにあるものは強く減衰し，小さな絶対値を持つ乗数に対応することが確実である．このことから，周期的粘性流の不安定性のタイプは，有限個の変数によって記述される散逸性の離散力学系と本質的に同じ方法で分析できると考えられる；この変数とは，流体力学的に言えば，速度場の座標に関するフーリエ成分の振幅かもしれない．それに応じて，状態空間は有限の次元を持つ．

数学的には，次のような方程式で表される系の時間変化を考えなければならない．

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \tag{31.1}$$

ここで，$\boldsymbol{x}(t)$ は系を記述する n 個の量 $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ の空間におけるベクトルである．関数 $\boldsymbol{F}$ はパラメータに依存し，その変化は流れの性質を変えうる*24．散逸系では，$\boldsymbol{x}$ 空間での $\dot{\boldsymbol{x}}$ の発散は負であり，これは運動中にその空間での体積が収縮することを表している*25．

$$\operatorname{div} \dot{\boldsymbol{x}} = \operatorname{div} \boldsymbol{F} \equiv \frac{\partial F^{(i)}}{\partial x^{(i)}} < 0. \tag{31.2}$$

ここで，異なる周期流の間で起こりうる相互作用の結果に戻ろう．周波数ロッキングは流れを単純化するが，相互作用によって準周期性が排除され，描像が著しく複雑になることがある．これまで，周期流が不安定になると，さらに周期流が発生することが暗黙の了解となっていた．しかし，これは論理的には必要ない．速度揺らぎの振幅が制限されるということは，定常粘性流に対応する経路を含む状態空間が限定的に存在することを意味するだけで，その空間の経路のパターンがどうなるかはあらかじめ分からない．リミットサイクルやトーラス上の開いた巻線（周期流，準周期流に相当）になることもあれば，全く異なる挙動を示し，複雑で混乱した形になることもある．この可能性は，乱流形成の数学的性質の理解とそのメカニズムの解明に極めて重要である．

限られた体積の中のすべての経路が不安定であると仮定すれば，体積内の複雑で混乱した経路の形を知ることができる．その中には，不安定なサイクルだけでなく，限られた領域を離れることなく無限に曲がりくねっているオープンパスも含まれるかもしれない．不安定であるということは，状態空間で隣接している 2 点が，それぞれの経路を進むにつれて離れていくことを意味する．体積が限られていて，開いた経路は自分自身に限りなく近づくことができるので，最初は隣接していた点が同じ経路に属することもある．このような複雑で不規則な経路の振る舞いは，乱流と関連している．

この描像にはさらに，初期条件のわずかな変化に対して流れが敏感に反応するという特徴がある．流れが安定ならば，初期条件の設定にわずかな不確実性があっても，最終的な状態の決定には同程度の不確実性しか生じない．流れが不安定な場合，初期の不確実性は時間とともに増大し，系の最終的な状態を予測することができなくなる（N. S. Krylov 1944；M. Born 1952）．

---

*23 実際には，制限された体積内の熱対流と，有限な長さの同軸円筒間の Couette 流を扱うことになる．有限な大きさの物体まわりの流れにおける境界層および伴流の乱流形成のメカニズムに関する理論的な考えは，かなりの量の実験結果が存在するにもかかわらず，これまであまり発展していない．

*24 数学の用語では，$\boldsymbol{F}$ は系の**ベクトル場**である．(31.1) のように時間に陽に依存しない場合，系は**自律的**であるという．

*25 Hamilton 力学系では，Liouville の定理により発散は 0 であり，その場合の $\boldsymbol{x}$ の成分は系の一般化座標 q と運動量 p である．

散逸系の状態空間において，不安定な経路を吸引する集合が実際に存在することがあり（E. N. Lorenz 1963），それは通常，確率論的アトラクターあるいは**ストレンジアトラクター**と呼ばれている[*26]．

一見すると，アトラクターに属するすべての経路が不安定であるという条件は，隣接するすべての経路が $t \to \infty$ でアトラクターに近づくという条件と矛盾しているように見える（不安定であるということは経路が離れていくことを意味するため）．この矛盾は，経路が状態空間のある方向には不安定で，他の方向には安定（つまり吸引的）であることに注目すれば解消される．n 次元の状態空間において，ストレンジアトラクターに属する経路が $n-1$ 方向（経路に沿った方向が 1 つある）すべてで不安定になることはありえない．なぜなら，これは状態空間における初期体積が連続的に増加することを意味し，散逸系ではありえないからである．その結果，ある方向では隣接する経路がアトラクター経路に近づき，他の（不安定な）方向ではアトラクター経路から遠ざかる傾向がある（図 19 参照）．これを**サドルパス**（鞍点経路）と呼び，サドルパスの集合がストレンジアトラクターを形成する．

ストレンジアトラクターは，わずか数回の分岐で新しい周期を形成して現れることがある；無限小の非線形性でも，準周期領域（トーラス上の開いた巻線）を排除し，トーラス上にストレンジアトラクターを形成することがある（D. Ruelle and F. Takens 1971）．しかし，これは第二の分岐（定常領域の終わりから）では起こりえない．この場合，2 次元トーラス上に開いた巻線が形成される．小さな非線形性を考慮すると，トーラスは存在し続けるので，ストレンジアトラクターはトーラス上に収容される可能性がある．しかし，2 次元の表面には，不安定なパスの集合を引き寄せることはできない．なぜなら，状態空間内の経路は互いに（あるいはそれ自身と）交差することができない（古典系の振る舞いにおける因果律「ある瞬間の系の状態が，その後の瞬間の振る舞いを一意に決定する」に反する）からである．2 次元の表面では，交差が不可能であるため，経路は非常に整然としており，十分にランダムになることはない．

しかし，3 回目の分岐でもストレンジアトラクターが形成されることはある（必ずというわけではない）．このアトラクターは，3 周波数の準周期領域に代わって，3 次元のトーラス上に存在する（S. Newhouse, D. Ruelle and F. Takens 1978）．

ストレンジアトラクターの複雑で混乱した経路は，状態空間の中の限られた体積内に存在する．実際の流体力学の問題で起こりうるストレンジアトラクターの分類はまだ知られておらず，そのような分類の基準となるものさえもない．ストレンジアトラクターの構造に関する情報は，基本的に，実際の流体力学の方程式とは全く異なる常微分方程式のモデル系をコンピュータで解いた事例から得られたものだけである．しかし，経路の鞍型不安定性と系の散逸性から，ストレンジアトラクターの構造について一般的な結論を導き出すことが可能である．

ここではわかりやすくするために，3 次元の状態空間を対象に，2 次元トーラス内のアトラクターを考えることにする．アトラクターに至る経路のうち，「定常」乱流の確立に至る過渡的な流れの領域を記述するものを考えてみよう．横断面において，経路（というよりその跡）はある面積を占める．この面積が経路に沿ってどのように大きさと形を変えるかを見てみよう．鞍点経路付近の体積要素は一方向に膨張し，他方には収縮することがわかるが，系が散逸しているので後者の効果が強く，体積は減少せざるを得ない．これらの方向は経路に沿って変化しなければならない．さもなければ，後者が遠くなりすぎて，流体速度が大きく変化してしまうからである．その結果，断面が小さくなり，平坦になり，湾曲する．これは断面全体だけでなく，断面内の各面積要素にも適用されるはずである．こうして，断面は空洞で区切られた入れ子状のゾーンに分離される．時間の経過とともに（つまり経路に沿って），ゾーンの数は急速に増え，幅も狭くなる．$t \to \infty$ で形成されるアトラクターは，接触していない層の無数の多様体であり，その表面は鞍点経路（その吸引方向は「外側」）を

[*26] 通常のアトラクター（安定なリミットサイクルや極限点など）とは異なり，「ストレンジ」という言葉は，後述するその構造の複雑さを表している．物理学の文献では，安定経路と不安定経路を含むが，物理実験でも数値実験でも検出できないほど誘引領域の小さい，より複雑な誘引多様体も「ストレンジアトラクター」と呼ぶ．

担っている．これらの層はその側面と両端で複雑に結合している；アトラクターに属する各経路はすべての層を通り抜け，十分長い時間の間にアトラクターの任意の点に無限に近づくという**エルゴード的**性質を持つ．層の総体積と総断面積はゼロである．

このような一方向の多様体は，数学用語では Cantor 集合と呼ぶ．Cantor 構造は，アトラクターの最も特徴的な性質であり，より一般的には $n\ (>3)$ 次元の状態空間の性質である．

状態空間におけるストレンジアトラクターの体積は常にゼロである．しかし，より次元の小さば別の空間ではゼロでないこともある．この値は以下のように求められる．n 次元空間全体を，辺 ε，体積 ε^n の小さな立方体に分割する．アトラクターを完全に覆う立方体の最小個数を $N(\varepsilon)$ とする．アトラクターの次元 D は極限

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} \tag{31.3}$$

で定義される[*27]．この極限の存在は，D 次元空間におけるアトラクターの体積が有限であることを意味する；ε が小さいとき，$N(\varepsilon) \simeq V\varepsilon^{-D}$ であるから（V は定数），$N(\varepsilon)$ は D 次元空間の体積 V を覆う D 次元立方体の数と見なすことができる．(31.3) に従って定義すると，その次元は明らかに状態空間の全次元 n を超えることはできないが，それより小さくてもよく，通常の次元と違って（Cantor 集合のように）非整数であってもよい[*28]．

次の点が重要である．乱流が既に確立している（ストレンジアトラクターに到達している）場合，散逸系（粘性流体）の流れは，状態空間の次元が小さい非散逸系の確率的流れと原理的に同じである．なぜなら，定常流では，エネルギーの粘性散逸は，平均流（あるいは他の非平衡なソース）から来るエネルギーによって，長い時間の平均で埋め合わされるからである．したがって，アトラクターに属する「体積」要素の時間発展を（アトラクターの次元で決まるある空間で）追跡すると，ある方向への圧縮が，他の方向への隣接経路の発散による拡張によって補われ，平均的に保存されることになる．この性質を利用して，アトラクターの次元を別の方法から推定することができる．

前述のようにストレンジアトラクター上の運動はエルゴード的であるため，状態空間においてアトラクターに属する 1 つの不安定な経路に沿った運動を分析することで，その平均特性を確立することができる．つまり，個々の経路に沿った運動が十分な時間続くと，アトラクターの性質を再現すると仮定する．

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0(t)$ を，このような経路の方程式，(31.1) の解としよう．そして，この経路に沿って動くときの「球状」体積要素の変形を考えてみよう．この変形は，差分 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0(t)$（つまり，考えている経路と隣接する経路とのずれ）に関して線形化された方程式 (31.1) によって与えられる．これらの方程式を成分で書けば

$$\dot{\xi}^{(i)} = A_{ik}(t)\xi^{(k)}, \quad A_{ik}(t) = \left.\frac{\partial F^{(i)}}{\partial x^{(k)}}\right|_{x=x_0(t)}. \tag{31.4}$$

経路に沿った移動で，体積要素はある方向には圧縮され，ある方向には引き伸ばされ，球は楕円体となる．半軸の方向と長さはともに変化する．後者を $l_s(t)$ とすると（s は方向を表わす）**Lyapunov 指数**は

$$L_s = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \frac{l_s(t)}{l(0)} \tag{31.5}$$

で定義される．ここで，$l(0)$ は任意に選んだ時刻 $t = 0$ における元の球の半径である．こうして決定された量は実数であり，空間の次元 n に等しい数である．そのうちの 1 つ（経路に沿った方向に対応する）は 0 で

[*27] これは数学では多様体の極限容量として知られている．その定義は Hausdorff 次元やフラクタル次元の定義と似ている．

[*28] 集合を覆う n 次元の立方体は「ほとんど空」であってもよく，このため $D < n$ とすることができる．通常の集合に対しては，(31.3) の定義は明白な結果を与える；例えば，N 個の孤立点の集合では $N(\varepsilon) = N, D = 0$，長さ L の線分では $N(\varepsilon) = L/\varepsilon, D = 1$，二次元の表面積 A では $N(\varepsilon) = A/\varepsilon^2, D = 2$，などとなる．

ある[*29].

Lyapunov 指数の和は，経路に沿った，状態空間における体積要素の平均変化を与える．経路上の任意の点における体積の相対的な局所変化は，発散 $\operatorname{div}\boldsymbol{x} = \operatorname{div}\boldsymbol{\xi} = A_{ii}(t)$ によって与えられる．経路に沿った平均発散は次のようになる[*30].

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \operatorname{div}\boldsymbol{\xi}\,dt = \sum_{s=1}^{n} L_s \tag{31.6}$$

散逸系では，この和は負である；n 次元の状態空間での体積は圧縮される．ストレンジアトラクターの次元は，「その」空間において平均的に体積が保存されるように定義される．そのために，Lyapunov 指数を $L_1 \geq L_2 \geq \cdots \geq L_n$ の順に並べ，伸縮を補償するのに必要なだけの安定な方向を，圧縮という手段で考慮する．このようにして定義されたアトラクターの次元 D_L は m から $m+1$ の間にある（m は，L_{m+1} を含むとき，その和がまだ正であるが負となるインデックスの数である）[*31]．$D_L = m + d$ $(d < 1)$ の分数部は，以下の式で求められる（F. Ledrappier 1981）.

$$\sum_{s=1}^{m} L_s + L_{m+1}d = 0 \tag{31.7}$$

d の計算では，最も安定でない方向のみを考慮する（数列の最後にある，絶対値が最も大きい負の L_s を省く）ため，次元の推定値 D_L は一般に高すぎる．この推定値は，原理的には，乱流の速度揺らぎの時間依存性の測定からアトラクターの次元を決定する方法を提供するものである．

⬆ 目次へ戻る

§32　♠ 周期倍分岐による乱流への遷移（日本語訳）

ここで，乗数が -1 または $+1$ を通過するときの，周期流の安定性の喪失について考えてみよう．

n 次元の状態空間において，$n-1$ 個の乗数は，考えている周期的経路に近い $n-1$ 個の異なる方向（その経路の各点での接線の方向と同じではない）の経路の振る舞いを決定する．± 1 付近の乗数が l 番目の方向だとしよう．他の $n-2$ 個の乗数は絶対値が小さいので，対応する $n-2$ 方向のすべての経路は，時間の経過とともに l 番目の方向と接線の方向を含む二次元表面 Σ に近づいていくことになる．リミットサイクルの近くでは，状態空間は $t \to \infty$ でほぼ 2 次元になると言える（経路は Σ のどちらの側にもあり，一方の側から他方の側に行くこともあるので，厳密には 2 次元にはなり得ない）．Σ 付近の経路のフラックスを面 σ で切るとする．各経路が σ を繰り返し通過するとき，最初の交点 $\boldsymbol{x}_j$ に従って，次の交点 $\boldsymbol{x}_{j+1}$ を決定する．関係式 $\boldsymbol{x}_{j+1} = f(\boldsymbol{x}_j; \mathrm{R})$ は **Poincaré 写像**または**シーケンス写像**と呼ばれ，R，この場合は Reynolds 数[*32]に依存する．その値は，周期流が安定でなくなる分岐点に近いかどうかを決める．すべての経路は Σ に近いので，σ に出会う点の集合はほぼ一次元で直線で近似できるすると Poincaré 写像は一次元変換

$$x_{j+1} = f(x_j; \mathrm{R}) \tag{32.1}$$

となり，x は単に直線に沿った座標となる[*33]．離散変数 j は，周期を単位として測った時間の役割を担う．

[*29] もちろん，$t = 0$ の初期条件を指定した (31.4) の解は，すべての距離 $l_s(t)$ が小さいままであれば，実際には隣接した経路を表している．しかし，このことは無限に長い時間を含む (31.5) の定義を無意味なものにするものではない；任意の大きな t に対して，線形化された方程式が考えている時間を通して有効であるように $l(0)$ を小さく選ぶことができる．

[*30] V. I. Oseledets, *Transactions of the Moscow Mathematical Society* **19**, 197, 1969. 参照.

[*31] ゼロである Lyapunov 指数を含むと，経路に沿った次元 D_L が 1 増える．

[*32] 熱対流の場合は Rayleigh 数である（§ 56）．

[*33] この節ではもちろん x は物理空間での座標とは関係ない．

写像 (32.1) は，分岐点付近の流れの性質を決定する別の方法を提供する．周期流そのものは，写像 (32.1) の**固定点**，つまり写像によって変化しない値 $x_j = x_*$，すなわち，$x_{j+1} = x_j$ に対応するものである．乗数は $x_j = x_*$ における微分 $\mu = \dfrac{dx_{j+1}}{dx_j}$ で，x_* 付近の点 $x_j = x_* + \xi$ は $x_{j+1} \simeq x_* + \mu\xi$ に写像される．$|\mu| < 1$ の場合，固定点は安定であり，写像のアトラクターである；x_* 付近のいくつかの点から始めて写像を反復することにより，$|\mu|^r$ の形で漸近的に後者に近づく（r は反復の数）．しかし，$|\mu| > 1$ の場合，固定点は不安定になる．

ここで，乗数が -1 を通過するときの周期流の安定性の喪失について考えてみよう．式 $\mu = -1$ は，初期の摂動が時間 T_0 後に同じ大きさのまま符号を変え，さらに時間 T_0 の後に元の値に戻ることを意味する．したがって，周期 T_0 のリミットサイクルの近くで μ が -1 を通過すると，周期 $2T_0$ の新しいリミットサイクルが発生する（**周期倍分岐**）[*34]．図 20 は，このような 2 つの連続した分岐を従来の方法で表したもので，図 a，b の連続した曲線は安定リミットサイクル $2T_0$ と $4T_0$ を，破線の曲線は不安定になったリミットサイクルを示している．

Poincaré 写像の固定点を任意に $x = 0$ とすると，その近傍で周期倍分岐を記述する写像は次の展開で表される．

$$x_{j+1} = -[1 + (\mathrm{R} - \mathrm{R}_1)]x_j + {x_j}^2 + \beta {x_j}^3 \tag{32.2}$$

ここで $\beta > 0$ である[*35]．$\mathrm{R} < \mathrm{R}_1$ では固定点 $x_* = 0$ は安定で，$\mathrm{R} > \mathrm{R}_1$ では不安定である．周期倍分岐がどのように起こるかを見るためには，写像 (32.2) を 2 回反復しなければならない．つまり，2 ステップ（2 単位時間）後を考え，再形成された写像の固定点を決定する必要がある；もしこれらが存在し安定なら，それらは周期倍分岐サイクルに対応する．

写像 (32.2) を 2 回反復すると，（小さな量 x_j と $\mathrm{R} - \mathrm{R}_1$ に関して必要な精度で）写像

$$x_{j+2} = x_j + 2(\mathrm{R} - \mathrm{R}_1)x_j - 2(1 + \beta){x_j}^3 \tag{32.3}$$

が得られる．これは常に固定点 $x_* = 0$ を持つ．$\mathrm{R} < \mathrm{R}_1$ のとき，この点以外に固定点はなく，安定で，乗数は $\left|\dfrac{dx_{j+2}}{dx_j}\right| < 1$ である；周期 1（T_0 を単位とする）の流れに対して，時間間隔 2 も 1 周期である．$\mathrm{R} = \mathrm{R}_1$ のとき乗数は $+1$ であり，$\mathrm{R} > \mathrm{R}_1$ のとき点 $x_* = 0$ は不安定になる．その段階で一組の安定固定点が形成される；

$${x_*}^{(1),(2)} = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{R} - \mathrm{R}_1}{1 + \beta}} \tag{32.4}$$

これは 2 倍周期の安定リミットサイクルに相当する[*36]．写像 (32.3) は各点をそのまま残すが，(32.2) は一方を他方に変える．ここで強調しておかなければならないのは，1 周期サイクルはこの分岐で消滅するのではなく，運動方程式の（不安定な）解として残るということである．

分岐点付近では，運動はまだ周期 1 の「ほぼ周期的」なもので，経路が戻る点 ${x_*}^{(1)}$ と ${x_*}^{(2)}$ は接近している．その間の間隔 ${x_*}^{(1)} - {x_*}^{(2)}$ は，周期 2 の振動の振幅の指標であり，定常流が不安定になる地点で周期流が始まった後の振幅の増加 (26.10) と同様に，$\sqrt{\mathrm{R} - \mathrm{R}_1}$ で増加する．

周期倍分岐の繰り返しは，乱流の形成に至る一つのルートである．このシナリオでは分岐の数は無限であり，分岐は（R が大きくなるにつれて）どんどん間隔を狭めて続いていく．臨界値の列 $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \ldots$ は有限の極限値に近づき，それを超えると周期性が完全に消失し，複雑な非周期的アトラクターが空間内に形成され，このシ

[*34] 本節では，基本周期（最初の周期流の周期）を T_1 ではなく T_0 と表す．連続する周期倍分岐に対応する臨界 Reynolds 数は，ここでは $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \ldots$ と表し，添字 cr は付けない（R_1 は以前の $\mathrm{R}_{\mathrm{cr},2}$ を置き換える）．

[*35] $\mathrm{R} - \mathrm{R}_1$ の係数は R を適切に再定義することで 1 に，${x_j}^2$ の係数は x_j を再定義することで $+1$ にできるので，(32.2) ではそれが行われたものとする．

[*36] 単に 2 サイクルと呼ぶ．関連する固定点は**サイクル要素**と呼ぶ．

ナリオでの乱流形成に関係している．このシナリオは，普遍性とスケール不変性という注目すべき性質を持っていることがわかるだろう（M. J. Feigenbaum 1978）*37．

以下に示す定量的な理論は，分岐が（R の増加とともに）非常に速く互いに続くため，分岐と分岐の間でも，状態空間の経路の集合が占める領域はほぼ 2 次元のままであり，一連の分岐は単一のパラメータに依存する 1 次元 Poincaré 写像で記述できるという仮説から出発するものである．

以下で用いる写像の選択は次のように正当化される．x の変動範囲のかなりの部分で，写像は $\left|\dfrac{df(x,\lambda)}{dx}\right| > 1$ の伸長写像でなければならず，これによって不安定性が発生する．また，写像は，ある範囲から出た経路をある範囲に戻すものでなければならず，そうでなければ速度変動が際限なく増大することになり，これは不可能である．この 2 つの要求を同時に満たすことができるのは，非単調関数 $f(x;\lambda)$，つまり一対一ではない写像 (32.1) のみであり，x_{j+1} の値は前の x_j によって一意に決まるがその逆はありえない．このような関数の最も単純なものは，一つの最大値を持ち，その近くで

$$x_{j+1} = f(x_j;\lambda) = 1 - \lambda {x_j}^2 \tag{32.5}$$

と書ける．ここで λ は正のパラメータで，（流体力学的に）R の増加関数とみなされる*38．ここでは，x の変動範囲を任意に $[-1,+1]$ にとることにする．λ が 0 と 2 の間にあるとき，写像 (32.5) のすべての反復は x をその範囲に残す．

写像 (32.5) の固定点は $x_* = 1 - \lambda {x_*}^2$ の解である．これは $\lambda > \Lambda_1$ のときに不安定になる．ここで，Λ_1 は乗数が $\mu = -2\lambda x_* = -1$ となる λ の値で，2 つの方程式から $\Lambda_1 = 3/4$ を得る．これが λ の最初の臨界値であり，最初の周期倍分岐の位置と 2 サイクルの出現を決定する．ここでは，プロセスのいくつかの定性的な特徴を決定する近似的な手法によって，その後の分岐の出現を追跡してみよう．この方法では特性定数の正確な値は得られないが，正確な記述はその後に行う．

写像 (32.5) を繰り返すと次のようになる．

$$x_{j+2} = 1 - \lambda + 2\lambda^2 {x_j}^2 - \lambda^3 {x_j}^4 \tag{32.6}$$

ここでは，${x_j}^4$ の項を無視することにする．残りの式は，スケール変換

$$x_j \to \frac{x_j}{\alpha_0}, \quad \alpha_0 = \frac{1}{1-\lambda}$$

によって*39

$$x_{j+2} = 1 - \lambda_1 {x_j}^2$$

という形になる．(32.5) と異なる点は，λ が

$$\lambda_1 = \phi(\lambda) \equiv 2\lambda^2(\lambda - 1) \tag{32.7}$$

のように置き換わっただけである．この操作をスケールファクター $\alpha_1 = \dfrac{1}{1-\lambda_1}$ 等を用いて繰り返すと，同じ形の写像の列が得られる．

$$x_{j+2^m} = 1 - \lambda_m {x_j}^2, \quad \lambda_m = \phi(\lambda_{m-1}) \tag{32.8}$$

---

*37 周期倍分岐の列（以下，$1, 2, \ldots$ と番号をつける）は，周期流の最初の分岐から始まる必要はない．原理的には，最初の数回の分岐の後，§ 30 で述べたメカニズムによって非整合周波数がロックされたときに始まるかもしれない．

*38 一対一でない写像の許容性は，一次元の処理の近似性に依存する．もし，すべての経路が一つの曲面 Σ 上に正確に存在し，Poincaré 写像が厳密に一次元なら，異なる x_j を持つ二つの経路が x_{j+1} で交差することになり，この非一意性は不可能になる．同じ意味で，写像の固定点が写像関数の極限にある場合，乗数が 0 になる可能性は近似性に起因する．そのような点は「超安定」と表現され，上記の関係によるよりも速く接近することができる．

*39 $\lambda = 1$ のときは不可能である（写像 (32.6) の固定点が中心極値と一致する：$x_* = 0$）．しかし，$\lambda = 1$ は，ここで必要とされる次の臨界値 λ_2 ではないことは確かである．

写像 (32.8) の固定点は 2^m サイクルに対応する[*40]．これらはすべて (32.5) と同じ形なので，$\lambda_m = \Lambda_1 = 3/4$ のとき，2^m サイクル（$m = 1, 2, 3, \ldots$）は不安定になることがすぐに推測できる．初期パラメータ λ の臨界値 Λ_m は，以下の連立方程式を解くことで得られる．

$$\Lambda_1 = \phi(\Lambda_2),\ \Lambda_2 = \phi(\Lambda_3),\ \ldots, \Lambda_{m-1} = \phi(\Lambda_m)$$

これらは, 図 21 のような構成でグラフィカルに得られたものである. 明らかに, $m \to \infty$ で数列は $\Lambda_\infty = \phi(\Lambda_\infty)$ の解である有限の極限 Λ_∞ に収束し，値は $\Lambda_\infty = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} = 1.37$ である．スケールファクターも有限の極限に近づく：$\alpha_m \to \alpha = \dfrac{1}{1-\Lambda_\infty} = -2.8$.

m が大きいとき，Λ_m が Λ_∞ にどのように近づくかは簡単にわかる．$\Lambda_\infty - \Lambda_m$ が小さいとき，式 $\Lambda_m = \phi(\Lambda_{m+1})$ から

$$\Lambda_\infty - \Lambda_{m+1} = \frac{\Lambda_\infty - \Lambda_m}{\delta}. \tag{32.9}$$

ここで $\delta = \phi'(\Lambda_\infty) = 4 + \sqrt{3} = 5.73$ である．したがって，$\Lambda_\infty - \Lambda_m \propto \delta^m$，すなわち，$\Lambda_m$ は幾何級数的に極限値に近づく．連続する臨界数の間隔についても同じ関係が成り立つ．式 (32.9) は等価な形式で書くことができる．

$$\Lambda_{m+2} - \Lambda_{m+1} = \frac{\Lambda_{m+1} - \Lambda_m}{\delta} \tag{32.10}$$

流体力学に関しては，λ が Reynolds 数の関数とみなされることは既に述べたとおりであり，したがって，R には連続した周期倍分岐に対応する臨界値があり，有限の極限値 R_∞ に至る傾向がある．これらの値に対しては，Λ_m の場合と同じ定数 δ の極限関係 (32.9)，(32.10) が成り立つことは明らかである．

以上の議論から，この過程の基本的な特徴，すなわち，分岐の無限性，その出現時刻が (32.9)，(32.10) に従って極限 Λ_∞ に収束すること，およびスケールファクター α の存在が説明できる．しかし，このようにして求めた特性定数の値は厳密なものではない．収束係数（**Feigenbaum 数**）δ とスケールファクター α の正確な値（写像 (32.5) をコンピュータで反復して求めたもの）は

$$\delta = 4.6692\cdots, \quad \alpha = -2.5029\cdots \tag{32.11}$$

であり，極限値は $\Lambda_\infty = 1.401$ となる[*41]．δ の値は比較的大きく，収束が早いため，わずかな周期の倍増で極限関係がほぼ満たされる結果となる．

上記の導出の欠点は，${x_j}^2$ の 1 乗以上を無視した場合，写像 (32.8) は次の分岐が起こるという事実だけをもたらし，この写像が記述する 2^m サイクルのすべての要素を決定することができない点である[*42]．実際には，反復写像 (32.5) は ${x_j}^2$ の多項式で，その次数は反復ごとに 2 倍となる．これは，$x_j = 0$（これも常に極値である）を中心に対称に存在する極値の数が急激に増加する x_j の複雑な関数である．

注目すべきは, δ, α の値だけでなく, 無限に反復される写像の極限形も, ある意味で, 初期写像 $x_{j+1} = f(x_j; \lambda)$ の形に依存しないことである；1 つのパラメータを持つ関数 $f(x;\lambda)$ が，滑らかで，2 次の最大値（その位置を $x = 0$ とする）を持つというだけで十分である．最大値から大きく離れたところで，最大値に対して対称であ

[*40] 誤解を避けるために強調しておくと，スケール変換後の写像 (32.8) は $|x| \leq |\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_{m-1}|$ の拡張範囲に定義されなければならず，(32.5)，(32.6) のように $|x| \leq 1$ ではない．しかし，無視された項を考慮すると，(32.8) は実際には写像関数の中心極値付近の範囲の記述しか与えることができない．

[*41] Λ_∞ の値は，初期写像でのパラメータの使い方，つまり関数 $f(x;\lambda)$ に依存するので多少任意だが，δ, α の値はこれに依存しない．

[*42] すなわち，写像 (32.5) を反復したとき，2^m 個の点 ${x_*}^{(1)}, {x_*}^{(2)}, \ldots$ は連続して互いに変化し（周期的で），2^m 倍の反復写像に対して固定（安定化）されている．疑惑を避けるために，導関数 $\dfrac{dx_{j+2^m}}{dx_j}$ はすべての点 ${x_*}^{(1)}, {x_*}^{(2)}, \ldots$ で必ず同じであることに注意する必要がある（したがって次の分岐では同時に -1 を通る）．この性質の証明はここではしないが，明らかに必要である．

る必要はない．この**普遍性**は，説明した理論の一般性をかなり高めてくれる．この性質を厳密に定式化すると次のようになる．

ここで，$f(x)$ で指定された写像を考えよう．すなわち，λ を特別に選ぶことにより（後述），$f(x;\lambda)$ を $f(0)=1$ という条件で正規化したものを考えよう．この関数を 2 回適用すると，関数 $f[f(x)]$ を得る．この関数と x のスケールをファクター $\alpha_0 = 1/f(1)$ だけ変えて，新しい関数

$$f_1(x) = \alpha_0 f[f(x/\alpha_0)]$$

が得られ，やはり $f_1(0)=1$ となる．この操作を繰り返すと，次の漸化式で結ばれた関数列が得られる[*43]．

$$f_{m+1}(x) = \alpha_m f_m[f_m(x/\alpha_m)] \equiv \hat{T} f_m, \quad \alpha_m = 1/f_m(1) \tag{32.12}$$

この数列が $m \to \infty$ で一定の極限関数 $f_\infty(x) \equiv g(x)$ に近づくならば，g は (32.12) で定義される演算子 $\hat{T}$ の「固定関数」，すなわち関数関係

$$g(x) = \hat{T} g \equiv \alpha g[g(x/\alpha)], \quad \alpha = 1/g(1), \quad g(0) = 1 \tag{32.13}$$

を満足しなければならない．許容関数 $f(x)$ の性質から，$g(x)$ は滑らかで，$x=0$ で二次の極値を持つ必要がある．$f(x)$ の形式は式 (32.13) やその解に課される条件に影響しない．導出で用いたスケール変換（$|\alpha_m| > 1$）の後，方程式の解は変数 x のすべての値，（$-1 \le x \le 1$ ではなく）$-\infty$ から $+\infty$ の間で決定されることを強調しなければならない．また，関数 $g(x)$ は必然的に偶関数である．なぜなら，許容関数 $f(x)$ には偶関数が含まれ，偶関数写像は何度反復しても確実に偶関数のままだからである．

式 (32.13) のそのような解は，解析的な形では導けないが，実際に存在し，一意である．それは極値を無限に持ち，大きさが無限の関数で，定数 α は $g(x)$ と共に決定される．実用上は，この関数は $[-1,1]$ の範囲で導けば十分であり，その後は $\hat{T}$ の演算を繰り返すことによって範囲外でも続けることができる．(32.12) の $\hat{T}$ の反復の各段階で，範囲 $[-1,1]$ における $f_{m+1}(x)$ の値は，この範囲の一部を係数 $|\alpha_m| \simeq |\alpha|$ で短縮した $f_m(x)$ の値で決定されていることに注意されたい．これは，多くの反復の極限において，範囲 $[-1,1]$（したがって x 軸全体）における $g(x)$ の決定は，初期関数のその最大値の近くのより小さい部分によって支配されており，ここに普遍性の究極の原因がある[*44]．

関数 $g(x)$ は無限回の周期倍分岐によって形成される非周期的なアトラクターの構造を決定する．無限回の分岐は，関数 $f(x;\lambda)$ に対して非常に明確なパラメータ値 $\lambda = \Lambda_\infty$ で発生する．したがって，写像 (32.12) の反復によって $f(x;\lambda)$ から形成される関数は，実際にはこの孤立した λ の値に対してのみ $g(x)$ に収束することは明らかである．このことから，演算子 $\hat{T}$ の固定関数は，λ の Λ_∞ からの小さなずれに対応する小さな変化に関して不安定であることがわかる．この不安定性を研究することによって，やはり $f(x)$ の特定の形式に依存しない普遍定数 δ を決定することができる[*45]．

スケールファクター α は，周期が 2 倍になる際のアトラクターの（状態空間における）幾何学的特性の変化（減少）を決めるもので，この特性は x 軸上のリミットサイクル要素間の距離である．ただし，倍増のたびにサイクル要素の数はさらに増えるので，この記述はより具体的かつ正確なものにしなければならない．すべての点間の距離について，スケールが同じように変化することができないことは，先験的に明らかである[*46]．例え

[*43] この手順は，前に (32.8) の導出に用いた方法と明らかに類似している．

[*44] 方程式 (32.13) の一意解が存在するという主張は，コンピュータシミュレーションによって成り立っている．解は $[-1,1]$ の範囲では x^2 の高次の多項式として求められ，シミュレーションの精度は $\hat{T}$ の反復によって関数を継続したい x 値の範囲（その外）の幅とともに高くなるはずである．$[-1,1]$ の範囲では $g(x)$ には極値があり，その付近では $g(x) = 1 - 1.528x^2$ となる．もしこれが最大なら，これは g の符号を変えても式 (32.13) が不変なことから任意に選択できる．

[*45] 原論文 M. J. Feigenbaum, *Journal of Statistical Physics* **19**, 25, 1978; **21**, 669, 1979 参照．

[*46] これらは伸縮しない範囲 $[-1,1]$ の距離であり，最初からすべてのサイクル要素を含む x の範囲として任意に設定されたものである．α は負であるから，分岐は $x=0$ に対する要素の位置の反転を伴う．

ば，隣接する 2 点が写像関数のほぼ直線的な部分によって変換される場合，2 点間の距離は係数 $|\alpha|$ だけ減少するが，写像関数の極値付近の部分によって変換される場合，その距離は係数 α^2 だけ減少する．

分岐点（$\lambda = \Lambda_m$）で 2^m 周期の各要素（点）は隣接する 2 点に分裂し，その距離は徐々に長くなるが，次の分岐点までの λ の変動範囲では各点は接近したままである．時間の経過とともに，つまり連続した写像 $x_{j+1} = f(x_j; \lambda)$ において，サイクルの要素が互いに変換されるのを追うと，ペアの各成分は 2^m 単位時間後に他の成分に変化する．このことは，ペアになった点間の距離が，新しく形成される 2 倍周期の振動振幅の指標となることを意味し，この意味で特に物理的な興味がある．

2^{m+1} サイクルのすべての要素を，時間の経過とともに通過する順に並べ，$x_{m+1}(t)$ で表すと，基本周期 T_0 を単位とする時間 t は，$t/T_0 = 1, 2, \ldots, 2^{m+1}$ の整数値をとる．これらの要素は 2^m 周期の要素がペアに分かれて形成される．各ペアの点間の間隔は

$$\xi_{m+1}(t) = x_{m+1}(t) - x_{m+1}(t + T_m) \tag{32.14}$$

であり，ここで $T_m = 2^m T_0 = \dfrac{1}{2} T_{m+1}$ は 2^m サイクルの周期，つまり 2^{m+1} サイクルの周期の半分である．(32.14) の区間が 1 サイクルから次のサイクルへ移るときの変化を決めるスケールファクターとして関数 $\sigma_m(t)$ を用いよう[*47]：

$$\frac{\xi_{m+1}(t)}{\xi_m(t)} = \sigma_m(t) \tag{32.15}$$

明らかに

$$\xi_{m+1}(t + T_m) = -\xi_{m+1}(t) \tag{32.16}$$

となり，したがって

$$\sigma_m(t + T_m) = -\sigma_m(t) \tag{32.17}$$

である．

関数 $\sigma_m(t)$ は複雑な性質を持つが，m が大きいときの極限形は次の簡単な式で非常によく近似される．

$$\sigma_m(t) = \begin{cases} 1/\alpha & \left(0 < t < \frac{1}{2} T_m\right) \\ 1/\alpha^2 & \left(\frac{1}{2} T_m < t < T_m\right) \end{cases} \tag{32.18}$$

ただし t の原点は適切に選ぶものとする[*48]．

これらの式から，周期倍分岐が起こったときの流れの周波数スペクトルの変化について，いくつかの結論が得られる．流体力学的には，$x_m(t)$ は流体速度の特性としてとらえることができる．周期 T の流れの場合，連続時間 t の関数 $x_m(t)$ のスペクトルは，周波数 $k\omega_m$（$k = 1, 2, 3, \ldots$），すなわち基本周波数 $\omega_m = 2\pi/T_m$ とその高調波を含んでいる．周期倍分岐のあとは，流れは周期 $T_{m+1} = 2T_m$ の関数 $x_{m+1}(t)$ によって記述される．そのスペクトルには，同じ周波数 $k\omega_m$ だけでなく，ω_m の低調波である周波数 $\dfrac{1}{2} l\omega_m$（$l = 1, 3, 5, \ldots$）が含まれる．

次のように書くことにしよう．

$$x_{m+1}(t) = \frac{1}{2}[\xi_{m+1}(t) + \eta_{m+1}(t)]$$

[*47] 2 サイクルは，λ の値の異なる範囲 $(\Lambda_{m-1}, \Lambda_m)$ と $(\Lambda_m, \Lambda_{m+1})$ に存在し，これらの範囲で量 (32.14) はかなり変化するので，定義 (32.15) におけるその意味をより正確にする必要がある．ここでは，サイクルが超安定となる λ の値（(32.5) の脚注参照）をとることとし，そのような値は，各サイクルが存在する範囲に一つ存在する．

[*48] $\sigma_m(t)$ の性質の研究については，原理的には簡単だが手間がかかるので，ここでは触れない．M. J. Feigenbaum, *Los Alamos Science* **1**, 4, 1980. 参照．

ここで，ξ_{m+1} は差分 (32.14) であり，

$$\eta_{m+1}(t) = x_{m+1}(t) + x_{m+1}(t+T_m)$$

である．$\eta_{m+1}(t)$ のスペクトルは周波数 $k\omega_m$ のみを含み，低調波に対する Fourier 成分

$$\frac{1}{T_{m+1}}\int_0^{T_{m+1}} \eta_{m+1}(t)e^{i\pi lt/T_m}\,dt = \frac{1}{2T_m}\int_0^{T_m}[\eta_{m+1}(t) - \eta_{m+1}(t+T_m)]e^{i\pi lt/T_m}\,dt$$

は 0 である（$\eta_{m+1}(t+T_m) = \eta_{m+1}(t)$ を用いた）．一方，第一近似では，分岐において量 $\eta_m(t)$ は変化しない：$\eta_{m+1}(t) \simeq \eta_m(t)$. これは，周波数 $k\omega_m$ の振動の強さも変化しないことを意味している．

一方，$\xi_{m+1}(t)$ のスペクトルは，低調波 $\frac{1}{2}l\omega_m$ のみを含み，倍増段階 $m+1$ で現れる新しい周波数となる．これらの成分の合計強度は積分値

$$I_{m+1} = \frac{1}{T_{m+1}}\int_0^{T_{m+1}} {\xi_{m+1}}^2(t)\,dt \tag{32.19}$$

で与えられる．$\xi_{m+1}(t)$ を $\xi_m(t)$ で表すと，次のようになる．

$$I_{m+1} = \frac{1}{2T_m}\cdot 2\int_0^{T_m} {\sigma_m}^2(t){\xi_m}^2(t)\,dt$$

(32.16)〜(32.18) より

$$I_{m+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^4}\right)\frac{1}{T_m}\int_0^{T_m} {\xi_m}^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^4}\right)I_m$$

であり，最終的に

$$\frac{I_m}{I_{m+1}} = 10.8 \tag{32.20}$$

となる．このように，周期倍分岐の後に現れる新しい成分の強さは，分岐数に依存しない明確な因子によって，次の分岐のためのものを上回る（M. J. Feigenbaum 1979）[*49]．

ここで，λ が Λ_∞ よりもさらに大きくなったとき（Reynolds 数 $\mathrm{R} > \mathrm{R}_\infty$），乱流域での流れの特性の発達を考えてみよう．非周期的なアトラクターは，その形成の瞬間（$\lambda = \Lambda_\infty$）には 1 次元の Poincaré 写像で記述されるので，λ が Λ_∞ より少し大きくても，その性質をこの写像で扱うことが許されると考えることができる．

周期倍分岐の無限列が形成するアトラクターは，その外観は § 31 で定義したストレンジアトラクターではない；$m \to \infty$ のときに安定な 2^m サイクルの極限として生じる 2^∞ サイクルも安定である．このアトラクターの点は，区間 $[-1, 1]$ において，無数の Cantor 集合を形成している．この間隔の測定値，すなわち要素全体の「長さ」はゼロである；その次元は 0 から 1 の間であり，0.54 であることがわかっている[*50]．

$\lambda > \Lambda_\infty$ のとき，アトラクターはストレンジアトラクター，すなわち不安定な経路の集合を吸引するものとなる．区間 $[-1, 1]$ において，これに属する点は全長が 0 でない範囲を占める．これらの範囲は，連続した 2 次元の帯の断面平面 σ 上の軌跡であり，その帯は多くのターンを持ち，閉じている．この場合，一次元的な扱いは近似的なものであることを忘れてはならない．実際には，帯は小さいがゼロではない厚みを持つ．したがっ

[*49] これは低調波の強さの合計だけでなく，それぞれの低調波にも当てはまる．分岐 m の後に現れる各低調波に対して，分岐 $m+1$ の後には 2 つ（右に 1 つ，左に 1 つ）の低調波が存在する．したがって，連続する 2 つの分岐の後に現れる個々のピークの強さの比は (32.20) の 2 倍である．この量のより正確な値は 10.48 である．これは，普遍関数 $g(x)$ によって点 $\lambda = \Lambda_\infty$ 自体の状態を分析することによって得られる．この点では，すべての周波数がすでに存在しており，1 つ前の脚注で提起した問題に対応する問題は生じないが，1 つの問題がある．M. Nauenberg and J. Rudnick, *Physical Review* B **24**, 493, 1981 参照．

[*50] P. Grassberger, *Journal of Statistical Physics* **26**, 173, 1981 参照．

て，その断面を形成する線分は，実際には幅がゼロでない短冊状である．この幅の向こう側には，§ 31 で述べたような層状の Cantor 構造がある[*51]．この構造には興味がないので，1 次元の Poincaré 写像の議論に戻ろう．

λ が Λ_∞ を超えて大きくなったときの，ストレンジアトラクターの発達は，一般に次のようになる．ある $\lambda > \Lambda_\infty$ に対して，アトラクターは区間 $[-1, 1]$ 内のいくつかの範囲を占める．これらの範囲の間の空間は吸引領域であり，2^m を超えない周期を持つ不安定サイクルの要素を含む．λ が増加すると，ストレンジアトラクター上の経路の発散率が増加し，周期 $2^m, 2^{m+1}, \ldots$ のサイクルを次々と吸収し，「拡大」する．アトラクターが占める範囲の数は減少し，その長さは増加する．したがって，上記のバンドのターンは半分になり，その幅は広がる．このように，アトラクターは逆カスケード的に単純化されていく．不安定な 2^m サイクルがアトラクターに吸収されることを，**逆倍分岐**と呼ぶ．図 22 は，この過程を 2 つの連続した逆分岐について示したものである．図 22a では，バンドは 4 ターンしているが，逆分岐によって 2 ターンのバンドになり（図 22b），最後の分岐では，1 ターンだけしてねじれた後閉じたバンドになる（図 22c）．

連続する逆倍分岐に対応する λ の値を $\overline{\Lambda}_{m+1}$ と書こう（ただし $\overline{\Lambda}_m > \overline{\Lambda}_{m+1}$ の順に並んでいるとする）．これらは，順方向の分岐と同じ普遍因子 δ で幾何級数的に収束していくことがわかる．

最後の（λ が増加する）逆分岐の前に，アトラクターは写像 (32.5) の固定点 x_* を含むギャップによって分けられた 2 つの範囲を占め，これは周期 1 の不安定サイクルに対応する：

$$x_* = \frac{\sqrt{1+4\lambda} - 1}{2\lambda}$$

この点が膨張アトラクターの境界に達したとき，値 $\lambda = \overline{\Lambda}_1$ で分岐が起こる．図 22b より，アトラクターバンドの外側の境界は 1 ループ後に内側の境界となり，別のループ後にはターン間のギャップの境界となることがわかる．このことから，$\lambda = \overline{\Lambda}_1$ は $x_{j+2} = x_*$ という条件によって与えられることがわかる．ここで

$$x_{j+2} = 1 - \lambda(1-\lambda)^2$$

は，アトラクターの境界である点 $x_j = 1$ 上で写像を 2 回繰り返した結果であり，$\overline{\Lambda}_1 = 1.543$ である．先の逆分岐 $\overline{\Lambda}_2, \overline{\Lambda}_3, \ldots$ は，$\overline{\Lambda}_{m+1}$ と $\overline{\Lambda}_m$ の間の漸化式により，次々と近似的に求めることができる．この近似的な関係は，前述の順倍分岐と同じ方法で導かれ，(32.7) の関数 $\phi(\Lambda)$ と同じ $\overline{\Lambda}_m = \phi(\overline{\Lambda}_{m+1})$ の形となる．対応するグラフの構成は図 21 の上段に示す通りである．$\phi(\Lambda)$ は順分枝列と逆分枝列で同じなので，数 Λ_m と $\overline{\Lambda}_m$ の列（それぞれ下からと上から）の共通極限 $\Lambda_\infty \equiv \overline{\Lambda}_\infty$ への収束を支配する式も同じである．

$$\overline{\Lambda}_{m+1} - \Lambda_\infty = \frac{1}{\delta}(\overline{\Lambda}_m - \Lambda_\infty) \tag{32.21}$$

$\lambda > \Lambda_\infty$ の場合のストレンジアトラクター特性の発達は，それに対応した周波数スペクトルの変化を伴っている．流れのランダムさは，アトラクターの幅とともに強くなる「ノイズ」成分の存在によって表現される．この背景には，不安定サイクルの基本周波数とその高調波，低調波に対応する離散的なピークが存在する；連続する逆分岐では，関連する低調波が順次，順方向の分岐で出現したのとは逆の順序で消失する．これらの周波数を作り出すサイクルが不安定であることは，ピークの幅が広くなることで示される．

交互流による乱流への遷移

最後に，乗数が $\mu = +1$ を通過するときに，周期流がなくなることを考えよう．

[*51] この方向のアトラクターの次元は 1 よりずっと小さいが，これは普遍的な性質ではなく，特定の写像に依存する．

このタイプの分岐は（1 次元の Poincaré 写像で）関数 $x_{j+1} = f(x_j; \mathrm{R})$ で記述され，Reynolds 数のある値 $\mathrm{R} = \mathrm{R_{cr}}$ で直線 $x_{j+1} = x_j$ に接する．接点を $x_j = 0$ とすると，その付近での写像関数は

$$x_{j+1} = (\mathrm{R} - \mathrm{R_{cr}}) + x_j + {x_j}^2 \tag{32.22}$$

と展開される[*52]．$\mathrm{R} < \mathrm{R_{cr}}$ のとき（図 23 参照），2 つの固定点

$${x_*}^{(1),(2)} = \mp\sqrt{\mathrm{R_{cr}} - \mathrm{R}}$$

が存在し，${x_*}^{(1)}$ が安定，${x_*}^{(2)}$ が不安定な周期流に相当する．$\mathrm{R} = \mathrm{R_{cr}}$ のとき，両点での乗数は $+1$ であり，2 つの周期流は合体する．$\mathrm{R} > \mathrm{R_{cr}}$ のとき，固定点は複素領域に入り込み消滅する．

$\mathrm{R} - \mathrm{R_{cr}}$ が小さいと，曲線 (32.22) と直線 $x_{j+1} = x_j$ が接近する（$x_j = 0$ 付近）．したがって，この x の範囲では，写像 (32.22) の各反復は経路のトレースをわずかに動かすだけであり，全範囲をカバーするには多くのステップが必要である．つまり，比較的長い時間間隔では，経路は状態空間において規則的で，ほぼ周期的である．このような経路は，物理空間における規則正しい層流に相当する．このことは，乱流の発生について理論的に可能なもう一つのシナリオをもたらす（P. Manneville and Y. Pomeau 1980）．

写像関数の特定の領域は，経路をランダム化する領域と隣接しており，状態空間において局所的に不安定な経路の集合に対応することが想像される．しかし，この集合自体はアトラクターではなく，時間の経過とともに系を表す点は集合から外れていく．$\mathrm{R} < \mathrm{R_{cr}}$ のとき，経路は安定なサイクルに達し，物理空間には周期的な層流が確立される．$\mathrm{R} > \mathrm{R_{cr}}$ のとき，安定なサイクルはなく，乱流と層流が交互に現れる運動が生じ，このシナリオは交互流による乱流への遷移と呼ばれている．

乱流周期の長さについては，一般的な結論は得られない．しかし，層流の持続時間の $\mathrm{R} - \mathrm{R_{cr}}$ に対する依存性は簡単に知ることができる．そのためには，差分方程式 (32.22) を微分方程式として書き下せばよい．x_j は 1 写像ステップでわずかに変化するだけであるから，$x_{j+1} - x_j$ を連続変数 t に関する微分 $\dfrac{dx}{dt}$ に置き換える．

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{R} - \mathrm{R_{cr}} + x^2 \tag{32.23}$$

$x = 0$ の両側にある点 x_1 と x_2 の間の区間を，$\mathrm{R} - \mathrm{R_{cr}}$ よりずっと大きな距離で，しかしまだ展開 (32.22) が有効な範囲内で，横断するのに必要な時間 τ を求めよう．このとき

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{R} - \mathrm{R_{cr}}}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{\mathrm{R} - \mathrm{R_{cr}}}}\right)\right]_{x_1}^{x_2}$$

であるから

$$\tau \propto \frac{1}{\sqrt{\mathrm{R} - \mathrm{R_{cr}}}} \tag{32.24}$$

となり，必要な依存性が得られる．したがって，$\mathrm{R} - \mathrm{R_{cr}}$ が大きくなるにつれて層流の持続時間は短くなる．

このシナリオでは，始点への近づき方と発生する乱流の性質が未解決のままである．

⬆ 目次へ戻る

[*52] $\mathrm{R} - \mathrm{R_{cr}}$ の係数と ${x_j}^2$ の正の係数は，R と x_j の適切な定義によって 1 とすることができ，(32.22) でも仮定されている．