第 5 章・流体中の熱伝導

2023-03-26 15:30

これは L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2nd English edition, Pergamon Press, 1987. の内容を補ったノートである．内容の正確性は保証できないが，改善点・誤植（内容，体裁のどちらでも構わない）を見つけた方は筆者まで知らせてほしい．図がほとんどないが，徐々に付け加えていく予定である．

なお，♠ は第 2 版で新たに加わった部分，♠ ♠ は筆者が勝手に付け加えた部分である．また，目次，式や問題の番号，各節末尾の「目次へ戻る」ボタンにはハイパーリンクを設定し，利便性を高めたつもりである．

本文中で頻繁に参照する文献の略称は以下の通りである．

- 今井→今井功『物理学選書⒁ 流体力学（前編）』裳華房，1974
- 巽→巽友正『新物理学シリーズ 21 流体力学』培風館，1982
- Lamb → H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6th ed., Cambridge, 1932（邦訳あり）
- 『力学』，『統計物理学』，『物理的運動学』→それぞれ，ランダウ＝リフシッツ理論物理学教程の第 1 巻，第 5 巻，第 10 巻．

目次

§ 49　熱輸送の一般式

§ 2 の終わりで，流体力学の完全な方程式系は 5 つの方程式を含まなければならないことを述べた．熱伝導や内部摩擦の過程を伴う流体であっても，連続の式と運動方程式（Navier-Stokes 方程式）は成り立つ．理想流体では，5 番目の方程式はエントロピー保存の式 (2.6) であった．粘性流体では，非可逆的なエネルギーの散逸が生じるから，この式は成り立たない．粘性流体の場合に成り立つ式を決めるために，エネルギー保存の式を考えよう．

理想流体でのエネルギー保存則は (6.1) で与えられる（ε は単位質量あたりの内部エネルギー，h は単位質量

あたりのエンタルピー)：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\varepsilon\right)=-\operatorname{div}\left[\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+h\right)\right].$$

左辺は，単位体積の流体のエネルギー変化率であるから，右辺の div の中は流体表面を通る全エネルギーフラックスを表している．粘性流体の場合，ここに

1. 内部摩擦によるフラックス
2. **熱伝導**によるフラックス $\boldsymbol{q}$

を加えなければならない．§ 16 によれば，(σ'_{ij} を粘性応力テンソルとして）1 は $v_i\sigma'_{ij}$ と書ける．2 は流体中の温度が一様でない場合に生じるエネルギーの輸送であり，マクロな運動の有無によらず存在する（すなわち，静止流体中でも生じる)．温度勾配が大きくない場合，$\boldsymbol{q}$ と温度変化の関係をただちに書き下すことができる．$\boldsymbol{q}$ を温度勾配の冪で展開して 1 次まで取れば

$$\boldsymbol{q}=-\kappa\cdot\operatorname{grad}T \tag{49.1}$$

となる（温度勾配がないとき熱伝導は生じないから定数は 0 である)．定数 κ は**熱伝導率**と呼ばれる．温度差があるとき，熱は温度の高い方から低い方へ流れるから，$\boldsymbol{q}$ と $\operatorname{grad}T$ は逆符号であり，$\kappa>0$ でなければならない．κ は一般には温度と圧力の関数である．

1,2 を加えると，エネルギー保存則は以下のようになる．

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\varepsilon\right)=-\operatorname{div}\left[\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+h\right)-v_i\sigma'_{ij}-\kappa\cdot\operatorname{grad}T\right] \tag{49.2}$$

この形でもよいが，運動方程式を用いて書き直しておくと便利である．

> Landau は一から考え直しているが，我々は既に § 6 で同様の議論を行なっているから，その結果を用いることにしよう．

連続の式，運動方程式，熱力学第 1 法則より，以下の式が成り立つ．

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\varepsilon\right)+\operatorname{div}\left[\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+h\right)\right]=\rho T\frac{Ds}{Dt}+v_i\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial x_j} \tag{①}$$

$\operatorname{div}(v_i\sigma'_{ij})=\dfrac{\partial}{\partial x_j}(v_i\sigma'_{ij})=\sigma'_{ij}\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}+v_i\dfrac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial x_j}$ に注意して (49.2) と①を見比べると

$$\rho T\frac{Ds}{Dt}=\sigma'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\operatorname{div}(\kappa\operatorname{grad}T). \tag{49.4}$$

こうして**熱輸送の一般式**が得られた．粘性と熱伝導がなければ右辺は 0 であり，理想流体に対するエントロピー保存の式 (2.6) に戻る．

(49.4) の左辺は，単位体積の流体が単位時間に獲得する熱量を表している．そしてそれは，粘性散逸によるものと，伝導により考えている体積に持ち込まれるものからなる．前者について，粘性応力テンソルの表式 (15.3) を代入して，速度の空間微分で表そう．

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}&=\underline{\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}}+\zeta\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\\&=\underline{\frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)^2}+\zeta(\operatorname{div}\boldsymbol{v})^2\\&\equiv\Phi\end{aligned}$$

2 番目の等号を確かめるためには，逆向きに計算する方が楽である．

$$
\begin{aligned}
(\text{波線部}) &= \frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\cdot 2+\frac{4}{9}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\cdot 3+2\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-2\cdot\frac{2}{3}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\cdot 2\right)\\
&= \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)\\
&= (\text{下線部})
\end{aligned}
$$

Φ は**散逸関数**と呼ばれる．弾性理論における弾性自由エネルギー

$$
F=\mu\left(u_{ij}-\frac{1}{3}u_{kk}\delta_{ij}\right)^2+\frac{K}{2}{u_{kk}}^2
$$

($u_{ij}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ は歪みテンソル，μ は剛性率，K は体積弾性率）と比較せよ．

(49.4) の意味を明らかにするために，流体の全体積にわたってエントロピーの時間変化を計算しよう．

$$
\frac{d}{dt}\int\rho s\,dV=\int\frac{\partial}{\partial t}(\rho s)\,dV
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) &= \frac{D}{Dt}(\rho s)-\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}(\rho s)\\
&= \rho\frac{Ds}{Dt}+s\frac{D\rho}{Dt}-\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}(\rho s)\\
&\qquad \text{連続の式から } s\frac{D\rho}{Dt}=-\rho s\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\\
&= \rho\frac{Ds}{Dt}-\mathrm{div}(\rho s\boldsymbol{v}).
\end{aligned}
$$

$\mathrm{div}(\rho s\boldsymbol{v})$ は表面積分に変換され，無限に広がる流体を考えるとその寄与は 0 になる．よって

$$
\frac{d}{dt}\int\rho s\,dV=\int\rho\frac{Ds}{Dt}\,dV\overset{(49.4)}{=}\int\frac{1}{T}\left(\mathrm{div}(\kappa\,\mathrm{grad}\,T)+\Phi\right)\,dV. \qquad ②
$$

第 1 項は

$$
\begin{aligned}
\int\frac{1}{T}\mathrm{div}(\kappa\,\mathrm{grad}\,T)\,dV &= \int\left\{\mathrm{div}\left(\frac{1}{T}\cdot\kappa\,\mathrm{grad}\,T\right)-\kappa\,\mathrm{grad}\,T\cdot\mathrm{grad}\left(\frac{1}{T}\right)\right\}\,dV\\
&= \int\frac{\kappa}{T}\mathrm{grad}\,T\cdot d\boldsymbol{S}+\int\frac{\kappa(\mathrm{grad}\,T)^2}{T^2}\,dV
\end{aligned}
$$

と書ける．無限に広がる流体を考え，無限遠で流体の温度が十分速く一定値に近づくと仮定すれば第 1 項は 0 となる．したがって

$$
\frac{d}{dt}\int\rho s\,dV=\int\frac{\kappa(\mathrm{grad}\,T)^2}{T^2}\,dV+\int\frac{1}{T}\Phi\,dV. \qquad (49.6)
$$

この式は，単位時間の全エントロピーの変化を熱伝導と内部摩擦の寄与で表した式である．熱力学第 2 法則によればエントロピーは増加しなければならないから，右辺は正である．$\kappa>0$，$\eta>0$ であるから，第 2 粘性率 ζ も正であることが導かれた．

(49.1) を導く際に，熱伝導フラックスは圧力勾配によらず温度勾配のみで書けることを仮定していた．これは次のように正当化できる；もし $\boldsymbol{q}$ に $-\alpha\,\mathrm{grad}\,p$（$\alpha$ は比例係数）が加わったとすると，②には

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{T}\,\mathrm{div}(\alpha\,\mathrm{grad}\,p)\,dV &= \int \left\{\mathrm{div}\left(\frac{1}{T}\alpha\,\mathrm{grad}\,p\right) - \alpha\,\mathrm{grad}\,p\cdot\mathrm{grad}\left(\frac{1}{T}\right)\right\} dV \\ &= \int \frac{\alpha}{T}\,\mathrm{grad}\,p\cdot d\boldsymbol{S} + \int \frac{\alpha\,\mathrm{grad}\,p\cdot\mathrm{grad}\,T}{T^2}\,dV\end{aligned}$$

という項が加わり，結果には $\mathrm{grad}\,p\cdot\mathrm{grad}\,T$ という項が現れる．これは正にも負にもなりうるから，エントロピーは増加するとは限らなくなり，矛盾が生じる．

最後に，これまでの議論は以下に述べる点においても厳密にされなければならないことに触れておこう；温度勾配や速度勾配が存在する流体は熱力学的な平衡状態にはなく，（平衡状態で成り立つ）熱力学量の関係式は厳密には成り立たなくなる．つまり，$\rho,\varepsilon,\boldsymbol{v}$ を適切に定義したとしても，平衡状態でのエントロピーの定義により定まる量 $s=s(\rho,\varepsilon)$ は真のエントロピーではなく，積分

$$\int \rho s\,dV$$

は時間と共に増加するとは限らない．しかし，温度勾配や速度勾配が小さい場合には，この s が近似的に真のエントロピーに等しいことが示せる：この s は平衡状態での値であるから，最大値である．よってエントロピーを微小な勾配で展開したとき，1 次の項は 0 であり，2 次以上の項のみが現れる．勾配が小さければ，これらの寄与は無視できる．

⬆ 目次へ戻る

§50　非圧縮性流体中の熱伝導

熱伝導方程式

ある場合には，熱輸送の一般式 (49.4) を簡単な形に書くことができる：流体の速度が音速に比べて十分小さい場合，流体の運動によって生じる圧力変化を無視することができ，圧力変化による密度変化もまた無視することができる．一方，温度変化による密度変化は無視することができず，速度が遅い場合でも，非一様に加熱された流体の密度は一様とはみなせない．つまり，熱力学量の微分を計算する際，圧力は一定だが密度は一定でないと仮定する必要がある（Boussinesq **近似**）．

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p dT$$

定圧比熱は $c_p = T\left(\dfrac{\partial s}{\partial T}\right)_p$ と書けるから，

$$T\,ds = c_p\,dT \qquad \therefore \quad T\frac{Ds}{Dt} = c_p\frac{DT}{Dt}$$

となる．(49.4) は

$$\rho c_p\frac{DT}{Dt} = \mathrm{div}(\kappa\,\mathrm{grad}\,T) + \sigma'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \tag{50.1}$$

Boussinesq 近似では，密度変化は浮力の形でのみ考慮され，今考えている状況では ρ の変化をあらわに考える必要はない．この場合 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0$ である．また，この近似は流体中の温度差が小さい場合にのみ成り立つから，η,κ,c_p などの温度依存性を無視して定数とみなしてよい．

§ 16 の結果から，非圧縮性流体では $\sigma'_{ij}\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}=\dfrac{\eta}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2$ であるから

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}T=\chi\triangle T+\frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 \tag{50.2}$$

となる．ここで $\nu=\eta/\rho$ は動粘性率であり，

$$\chi=\frac{\kappa}{\rho c_p} \tag{50.3}$$

は**温度伝導度（熱拡散率）**である．

流体が静止しているとき $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ であり，エネルギーの輸送は熱伝導によってのみ生じる．この場合 (50.2) は

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\chi\triangle T \tag{50.4}$$

となる（**熱伝導方程式，Fourier の式**）．(50.4) は，運動する流体の熱輸送の一般式を経由することなく，もっと簡単に導くことができる．ある体積で単位時間に吸収される熱量は，境界から流入する熱フラックスに等しいことから

$$\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}=-\operatorname{div}\boldsymbol{q}=\kappa\triangle T$$

となる．

(50.4) は，実際には限られた場合にしか適用できない．というのは，重力場中では温度勾配が小さくても流体が運動しうるからである（**対流**，§ 56）．そのため，重力と温度勾配が逆向きであるか，粘性が非常に大きい流体の場合のみ，静止状態が可能である．しかし (50.4) は固体の熱伝導をも記述する重要な方程式であるから，§ 51-52 で詳しく調べることにしよう．

定常な場合の熱伝導方程式

静止している媒質が，外部の熱源によって時間的に一定な（しかし空間的には一様でない）温度分布を持つとき，熱伝導方程式は

$$\triangle T=0 \tag{50.5}$$

という Laplace 方程式になる．より一般の場合として，κ が一様でなければ

$$\operatorname{div}(\kappa\operatorname{grad}T)=0 \tag{50.6}$$

となる．

外部熱源がある場合の熱伝導方程式

媒質が（媒質内部の物理過程によって起こるのではない）外的な熱源を含んでいる場合，熱伝導方程式に項が加わる．単位時間・単位体積当たりの発熱量を Q とすると（一般には時間と座標の関数である）

$$\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}=\kappa\triangle T+Q \tag{50.7}$$

となる．

熱伝導方程式の境界条件

2 つの媒質の境界における条件を書き下そう．境界では 2 つの媒質の温度は等しいから

$$T_1 = T_2. \tag{50.8}$$

境界を通って一方から他方の媒質に流れる熱フラックスは等しいから，（境界が静止していれば）

$$\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}. \tag{50.9}$$

もし境界に，単位時間・単位面積当たり $Q^{(s)}$ の熱を発する外的な熱源があるなら

$$\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} - \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} = Q^{(s)}. \tag{50.10}$$

熱爆発

熱源が存在する場合に媒質の温度分布を求める問題では，熱源の強さは温度の関数として与えられるのが普通である．関数 $Q(T)$ が T とともに急激に大きくなる場合，固定境界条件のもとでは，媒質の温度分布が定常的になることはできない；媒質表面を通って外に逃げる熱量は，加熱の仕方に関係なく，媒質と外部の温度差 $T - T_0$（の平均値）に比例する．よって，T の増加によって大量の熱が生成されても，表面から熱が逃げるのが追いつかないのである．

定常状態が実現しないため，**熱爆発**が生じるかもしれない：発熱燃焼反応の速度が温度とともに急激に増加する場合，定常分布が実現できないために，物質の急速な発火と反応の加速が起こる（N. N. Semyonov 1923）．爆発的な燃焼反応の速度（つまり熱の生成速度）は，活性化エネルギー U が大きい場合，$e^{-U/T}$ のような温度依存性を持つ．熱爆発が起こる条件を調べるためには，着火が比較的遅い反応の経過を考えなければならない．外部の温度を T_0 とすると

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_0 + (T - T_0)} = \frac{1}{T_0}\left(1 + \frac{T - T_0}{T_0}\right)^{-1} \simeq \frac{1}{T_0}\left(1 - \frac{T - T_0}{T_0}\right) = \frac{1}{T_0} - \frac{T - T_0}{{T_0}^2}$$

であるから，結局

$$Q = Q_0 e^{\alpha(T - T_0)} \tag{50.11}$$

のような熱源を考えればよいことになる（D. A. Frank-Kamenetskii 1939）．問題 50.1 参照．

▎熱爆発に関する一連の理論は Frank-Kamenetskii 理論と呼ばれている． ▎

問題 50.1

(50.11) で与えられる熱源が，2 つの平行な平面に挟まれた媒質中に分布しており，平面の温度は一定に保たれている．定常な温度分布が可能な条件を求めよ（D. A. Frank-Kamenetskii 1939）．

【解答】 定常状態での熱伝導方程式は

$$\kappa \frac{d^2 T}{dx^2} = -Q_0 e^{\alpha(T - T_0)}$$

であり，境界条件は $x = 0, 2l$ で $T = T_0$ である（$2l$ は 2 平面の距離とする）．無次元の変数 $\tau = \alpha(T - T_0)$，$\xi = x/l$ を導入すると

$$\frac{d^2 \tau}{d\xi^2} = -\lambda e^{\tau}, \quad \lambda = \frac{Q_0 \alpha l^2}{\kappa}$$

となる．両辺に $2\dfrac{d\tau}{d\xi}$ をかけて 1 回積分すると

$$\left(\frac{d\tau}{d\xi}\right)^2 = 2\lambda(\mathrm{const.} - e^{\tau}).$$

対称性から，$\xi = 1$ で $\dfrac{d\tau}{d\xi} = 0$ となる．このときの τ を τ_0 とすると const. $= e^{\tau_0}$ であり，$e^{\tau_0} \geqq e^{\tau}$ よりこれは最大値である．$\xi = 0$ で $\tau = 0$，$\xi = 1$ で $\tau = \tau_0$ という条件に注意して上式を積分する．

$$\frac{d\tau}{d\xi} = \sqrt{2\lambda(e^{\tau_0} - e^{\tau})}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{\sqrt{e^{\tau_0} - e^{\tau}}} = \int_0^1 d\xi = 1$$

左辺の積分を実行するため $y = \sqrt{e^{\tau_0} - e^{\tau}}$ とおくと，$y^2 = e^{\tau_0} - e^{\tau}$ より $2y\,dy = -e^{\tau}\,d\tau$ であり

$$\frac{d\tau}{\sqrt{e^{\tau_0} - e^{\tau}}} = \frac{d\tau}{y} = -\frac{2dy}{e^{\tau}} = -\frac{2dy}{e^{\tau_0} - y^2}.$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{\sqrt{e^{\tau_0} - e^{\tau}}} &= \int_{\sqrt{e^{\tau_0}-1}}^{0} \frac{-2dy}{e^{\tau_0} - y^2} = 2\int_0^{\sqrt{e^{\tau_0}-1}} \frac{dy}{e^{\tau_0} - y^2} \\ &= 2\left[\frac{1}{e^{\tau_0/2}} \tanh^{-1}\left(\frac{y}{e^{\tau_0/2}}\right)\right]_0^{\sqrt{e^{\tau_0}-1}} = 2e^{-\tau_0/2} \tanh^{-1}\left(\sqrt{1 - e^{-\tau_0}}\right)\end{aligned}$$

$\tanh^{-1}(\sqrt{1-x}) = \cosh^{-1}(\sqrt{x})$ であるから結局

$$e^{-\tau_0/2} \cosh^{-1}(e^{\tau_0/2}) = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$$

を得る．この式は，与えられた λ に対して温度の最大値 τ_0 を求める方程式である．これを

$$\lambda = 2e^{-\tau_0}\left\{\cosh^{-1}(e^{\tau_0/2})\right\}^2.$$

と変形し，右辺を τ_0 の関数と見て $f(\tau_0)$ とおくと，$f(\tau_0)$ は $\tau_0 = 1.187$ で最大値 0.878 をとる．よって

- $\lambda > 0.878$ のときは境界条件を満たす解が存在しないから，定常な温度分布は不可能である．
- $\lambda \leqq 0.878$ のときは定常な温度分布が可能であり，2 つの解のうち小さい方が定常な温度分布に対応する．

問題 50.2

温度勾配が一定に保たれている静止流体中に球が浸されているとき，流体および球の定常温度分布を求めよ．

【解答】 球の内外で，温度分布は Laplace 方程式 $\triangle T = 0$ に従う．球と流体を添字 1/2 で区別し，球の半径を R とすると，境界条件は $r = R$ で

$$T_1 = T_2, \quad \kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}$$

となることである．また，与えられた温度勾配を $\boldsymbol{A}$ とすると，無限遠で $\operatorname{grad} T_2 \to \boldsymbol{A}$ でなければならない．

問題の対称性から，解を決定づけるパラメータは $\boldsymbol{A}$ のみである．定ベクトル $\boldsymbol{A}$ を線形に含む，Laplace 方程式の解は $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}$ または $\boldsymbol{A}\cdot\operatorname{grad}\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$ である．球の温度は $r=0$ で有限でなければならないことに注意すると

$$T_1 = c_1\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}, \quad T_2 = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r} + c_2\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$$

と書ける．

1 つ目の境界条件から

$$c_1 = 1 + \frac{c_2}{R^3}. \tag*{①}$$

また，

$$\frac{\partial T_1}{\partial r} = c_1 A_r, \quad \frac{\partial T_2}{\partial r} = A_r + c_2\left(\frac{A_r}{r^3} - \frac{3\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}}{r^4}\right) = \left(1 - \frac{2c_2}{r^3}\right)A_r$$

であるから 2 つ目の境界条件は

$$\kappa_1 c_1 = \kappa_2\left(1 - \frac{2c_2}{R^3}\right). \tag*{②}$$

①を②に代入して

$$\kappa_1\left(1 + \frac{c_2}{R^3}\right) = \kappa_2\left(1 - \frac{2c_2}{R^3}\right)$$

$$c_2(\kappa_1 + 2\kappa_2) = (\kappa_2 - \kappa_1)R^3 \qquad \therefore \quad c_2 = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_1 + 2\kappa_2}R^3.$$

$$c_1 = 1 + \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_1 + 2\kappa_2} = \frac{3\kappa_2}{\kappa_1 + 2\kappa_2}$$

ゆえに，求める温度分布は

$$T_1 = \frac{3\kappa_2}{\kappa_1 + 2\kappa_2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}, \quad T_2 = \left[1 + \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_1 + 2\kappa_2}\left(\frac{R}{r}\right)^3\right]\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}$$

となる．もちろん，$\kappa_1 = \kappa_2$ なら $T_1 = T_2 = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}$ である．

⬆ 目次へ戻る

§ 51　無限媒質中の熱伝導

静止した無限媒質中の熱伝導を考える．$t=0$ における全空間の温度分布 $T_0(\boldsymbol{r})$ が与えられているとき，$t>0$ での温度分布を求める問題を考えよう．

T を座標に関して Fourier 変換しよう．

$$T_{\boldsymbol{k}}(t) = \int T(\boldsymbol{r},t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,d^3\boldsymbol{r}, \quad T(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int T_{\boldsymbol{k}}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,d^3\boldsymbol{k} \tag{51.1}$$

後者を (50.4) に代入し

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int\left(\frac{dT_{\boldsymbol{k}}}{dt} + \chi k^2 T_{\boldsymbol{k}}\right)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,d^3\boldsymbol{k} = 0$$

$$\frac{dT_{\boldsymbol{k}}}{dt} + \chi k^2 T_{\boldsymbol{k}} = 0 \qquad \therefore \quad T_{\boldsymbol{k}} = T_{0\boldsymbol{k}} \exp\bigl(-\chi k^2 t\bigr).$$

$t=0$ で $T=T_0$ に戻らなければならないから，$T_{0\boldsymbol{k}}$ は T_0 の Fourier 変換である．

$$T_{0\boldsymbol{k}} = \int T_0(\boldsymbol{r}') e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}\, d^3\boldsymbol{r}'$$

したがって

$$T(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\boldsymbol{k} \int d^3\boldsymbol{r}'\, T_0(\boldsymbol{r}') e^{-\chi k^2 t} e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}.$$

積分の順序を入れ替え，まず $\boldsymbol{k}$ についての積分を行おう．

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dk_x\, e^{-\chi {k_x}^2 t} e^{ik_x(x-x')} &= \int_{-\infty}^{\infty} dk_x\, e^{-\chi {k_x}^2 t} \left\{\cos k_x(x-x') + i\,\cancel{\sin k_x(x-x')}\right\} \\
&\qquad \leftarrow \text{積分公式}\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} \cos\beta x\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\beta^2/4\alpha} \quad (\alpha > 0) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{\chi t}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\chi t}\right]
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
T(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\boldsymbol{r}'\, T_0(\boldsymbol{r}') \sqrt{\frac{\pi}{\chi t}}^3 \exp\left[-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4\chi t}\right] \\
&= \frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}} \int d^3\boldsymbol{r}'\, T_0(\boldsymbol{r}') \exp\left[-\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2}{4\chi t}\right].
\end{aligned} \tag{51.2}$$

この式は問題に対する完全な解である．つまり，与えられた初期の温度分布から，任意の時刻における温度分布を求めることができる．

特に，初期の温度分布が x のみに依存する場合，y', z' についての積分を行えば

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dy'\, e^{-(y-y')^2/4\chi t} = 2\sqrt{\pi\chi t}$ より

$$T(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\chi t}} \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, T_0(x') \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\chi t}\right] \tag{51.3}$$

となる．

時刻 $t=0$ で，原点では $T_0 = \infty$ であるが，それ以外の場所では $T_0 = 0$ であるような状況を考えよう（但し，全熱量 $\propto \displaystyle\int d^3\boldsymbol{r}\, T_0(\boldsymbol{r})$ は有限とする）．そのような初期分布はデルタ関数で表される．

$$T_0(\boldsymbol{r}) = \text{const.} \times \delta(\boldsymbol{r}) \tag{51.4}$$

式 (51.2) は次のようになる．

$$T(\boldsymbol{r},t) = \text{const.} \times \frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\chi t}\right) \tag{51.5}$$

時間が経過すると，原点 $r=0$ での温度は $t^{-3/2}$ で減少する．それに伴って周りの温度は上昇し，温度が 0 よりもかなり高い領域が広がっていく（図 39）．この広がり方は主に (51.5) の指数因子によって決まる．この領域の大きさのオーダーを l とすると

$$\frac{l^2}{4\chi t} \sim \text{const.} \qquad \therefore \quad l \sim \sqrt{\chi t}. \tag{51.6}$$

つまり，時間の平方根で増加する．

(51.5) は 3 次元の場合の式であるが，1 次元の場合にも同様の式が成り立つ．$t = 0$ で，有限の熱が平面 $x = 0$ に集中しているとき，その後の温度分布は

$$T(x,t) = \mathrm{const.} \times \frac{1}{2\sqrt{\pi\chi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\chi t}\right) \tag{51.7}$$

で与えられる．

(51.6) を，やや異なった見方で解釈することができる．物体の大きさのオーダーを l としよう．すると，物体が非一様に加熱される場合，物体の温度がどこでもほぼ等しくなるのにかかる時間のオーダー τ は

$$\tau \sim \frac{l^2}{\chi} \tag{51.8}$$

となる．τ は熱伝導の**緩和時間**と呼ばれ，物体の長さの次元の 2 乗に比例し，温度伝導度に反比例する．

以上で得られた式によって記述される熱伝導の過程は，任意の摂動が瞬時に全空間に伝わるという特徴を持っている．(51.5) から明らかなように，点源から発せられた熱は次の瞬間には媒質に伝わり，無限遠でのみ $T = 0$ である．この特徴は，χ が温度に依存しても（全空間で $\chi = 0$ でない限り）成り立つ．しかし，$T = 0$ で $\chi = 0$ となるような温度依存性を持つ媒質の場合，熱の伝播は遅れ，摂動の効果は有限の領域にしか現れない（考えている領域の外では $T = 0$ とする）．この結果，および，以下の問題の解は，Ya. B. Zel'dovich and A. S. Kompaneets (1950) による．

問題 51.1

熱伝導度と比熱は温度の冪で変化するが，密度は一定の媒質がある．ある瞬間に任意の熱源から熱が伝播した領域の境界付近で，温度が 0 に近づく様子を調べよ（考えている領域の外では温度は 0 とする）．

【解答】 熱伝導度 κ と比熱 c_p が温度の冪で書けるなら，温度伝導度 $\chi = \dfrac{\kappa}{\rho c_p}$ やエンタルピー $h = \displaystyle\int c_p\, dT$ も温度の冪で変化する．よって，$H = \rho h$ を単位体積当たりのエンタルピーとして，$\chi = aH^n$ と書ける．熱伝導方程式 $\rho c_p \dfrac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}(\kappa\, \mathrm{grad}\, T)$ は

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a\, \mathrm{div}(H^n\, \mathrm{grad}\, H) \tag{①}$$

となる．

ある短い時間の間には，領域の境界の一部を平面とみなし，一定速度 v で動くと仮定することができる．よって①の解は $H = H(x - vt)$ とおけて（x は境界面に垂直な方向の座標）

$$-v\frac{dH}{dx} = a\frac{d}{dx}\left(H^n \frac{dH}{dx}\right) \tag{②}$$

となる．1 回積分して

$$-vH = aH^n \frac{dH}{dx}.$$

$\dfrac{dx}{dH} \sim H^{n-1}$ より $x \sim H^n$ となり

$$H \sim |x| \tag{③}$$

となる（$|x|$ は境界からの距離）．

もし $n>0$ なら，加熱された領域は $T=0$ の領域との境界を持つ．もし $n \leqq 0$ なら，$T=0$ となる有限な領域は存在しない．つまり熱は各瞬間に全空間に分布する．

問題 51.2

前問と同様の媒質において，$t=0$ で単位面積あたり Q の熱が平面 $x=0$ に集中している（この面以外では $T=0$ とする）．$t>0$ での温度分布を求めよ．

【解答】 1 次元の場合，方程式①は

$$\frac{\partial H}{\partial t}=a\frac{\partial}{\partial x}\left(H^n\frac{\partial H}{\partial x}\right) \tag{④}$$

となる．この問題に現れるパラメータは $Q[\mathrm{Jm^{-2}}]$，$a=\dfrac{\chi}{H^n}\left[\dfrac{\mathrm{m^2s^{-1}}}{(\mathrm{Jm^{-3}})^n}\right]$ である．相似な解を求めるため，これらと変数 $x[\mathrm{m}]$，$t[\mathrm{s}]$ から無次元の変数 ξ を作ろう．$\xi=Q^\alpha a^\beta x^\gamma t^\delta$ とすると

$$(\mathrm{Jm^{-2}})^\alpha\left(\frac{\mathrm{m^2s^{-1}}}{(\mathrm{Jm^{-3}})^n}\right)^\beta \mathrm{m}^\gamma\mathrm{s}^\delta=1 \qquad \therefore \quad \begin{cases}\alpha-n\beta=0\\ -2\alpha+(2+3n)\beta+\gamma=0\\ -\beta+\delta=0.\end{cases}$$

$\gamma=1$ と選ぶと $\alpha=-\dfrac{n}{2+n}$，$\beta=\delta=-\dfrac{1}{2+n}$ となり

$$\xi=\frac{x}{(Q^n at)^{\frac{1}{2+n}}} \tag{⑤}$$

を得る．

次に，$H[\mathrm{Jm^{-3}}]$ の次元をもつ量を作ろう．

$$(\mathrm{Jm^{-2}})^\alpha\left(\frac{\mathrm{m^2s^{-1}}}{(\mathrm{Jm^{-3}})^n}\right)^\beta \mathrm{m}^\gamma\mathrm{s}^\delta=\mathrm{Jm^{-3}} \qquad \therefore \quad \begin{cases}\alpha-n\beta=1\\ -2\alpha+(2+3n)\beta+\gamma=-3\\ -\beta+\delta=0.\end{cases}$$

$\gamma=0$ とすると $\alpha=\dfrac{2}{2+n}$，$\beta=\delta=-\dfrac{1}{2+n}$ となる．よって H の次元をもつ量として $H_0\equiv\left(\dfrac{Q^2}{at}\right)^{\frac{1}{2+n}}$ が取れるから，求める解を次のようにおくことができる．

$$H(x,t)=H_0 f(\xi) \tag{⑥}$$

f は ξ のみの関数で，無次元である．以下，$'$（プライム）は ξ による微分とする．

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial t}&=\frac{dH_0}{dt}f+H_0 f'\frac{\partial \xi}{\partial t}\\ &=-\frac{1}{2+n}\frac{H_0}{t}f+H_0 f'\left(-\frac{1}{2+n}\frac{\xi}{t}\right)\\ &=-\frac{1}{2+n}\cdot\frac{H_0}{t}(f+\xi f').\end{aligned}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}=H_0 f'\frac{\partial \xi}{\partial x}=H_0 f'\frac{\xi}{x}, \quad H^n\frac{\partial H}{\partial x}={H_0}^{n+1}f^n f'\frac{\xi}{x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(H^n\frac{\partial H}{\partial x}\right) = {H_0}^{n+1}(f^nf')'\left(\frac{\xi}{x}\right)^2$$

よって④は

$$-\frac{1}{2+n}\cdot\frac{H_0}{t}(f+\xi f') = a{H_0}^{n+1}(f^nf')'\left(\frac{\xi}{x}\right)^2$$

無次元化を行ったから，次元を持つ量は全て消える．

$$-\frac{1}{2+n}(f+\xi f') = (f^nf')'$$

$$\therefore\quad (2+n)\frac{d}{d\xi}\left(f^n\frac{df}{d\xi}\right)+\xi\frac{df}{d\xi}+f=0. \tag{$\star$}$$

$(\star)$ を解くために $g=f^n$ とおく．$f=g^{\frac{1}{n}}$ であるから

$$f' = \frac{1}{n}g^{\frac{1}{n}-1}g',\quad f^nf' = \frac{1}{n}g^{\frac{1}{n}}g'$$

$$(f^nf')' = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{n}g^{\frac{1}{n}-1}(g')^2+g^{\frac{1}{n}}g''\right\}.$$

よって $(\star)$ は

$$\frac{2+n}{n}\left\{\frac{1}{n}g^{\frac{1}{n}-1}(g')^2+g^{\frac{1}{n}}g''\right\}+\xi\frac{1}{n}g^{\frac{1}{n}-1}g'+g^{\frac{1}{n}}=0.$$

両辺を $\frac{1}{n}g^{\frac{1}{n}-1}$ で割り

$$\frac{2+n}{n}\left\{(g')^2+ngg''\right\}+\xi g'+ng=0$$

$$g'\left(\frac{2+n}{n}g'+\xi\right)+ng\left(\frac{2+n}{n}g''+1\right)=0.$$

両辺に $\left(\frac{2+n}{n}g'+\xi\right)^{n-1}$ をかけて

$$\left\{g\left(\frac{2+n}{n}g'+\xi\right)^n\right\}'=0\qquad\therefore\quad g\left(\frac{2+n}{n}g'+\xi\right)^n=\text{const.}$$

対称性より $\xi=0$ で $f'=0$（よって $g'=0$）であるから，右辺の定数は 0 となり

$$\frac{2+n}{n}g'+\xi=0\qquad\therefore\quad g=\frac{n}{2+n}\cdot\frac{{\xi_0}^2-\xi^2}{2}.$$

ここで ξ_0 は積分定数である．以上より

$$f(\xi)=\left[\frac{n}{2+n}\cdot\frac{{\xi_0}^2-\xi^2}{2}\right]^{\frac{1}{n}} \tag{⑦}$$

を得る．

$n > 0$ **のとき**

⑦は $-\xi_0 \leqq \xi \leqq \xi_0$ に対応する，2 つの平面 $x = \pm x_0$ に挟まれた領域内の温度分布を与える（その外側では $H = 0$ である）．⑤から，加熱された領域は $x_0 \sim t^{\frac{1}{2+n}}$ で広がる．

定数 ξ_0 は，全ての熱量が一定という条件から決まる．

$$\int_{-x_0}^{x_0} H\,dx = \int_{-\xi_0}^{\xi_0} H_0 f(\xi)(Q^n at)^{\frac{1}{2+n}}\,d\xi = Q\int_{-\xi_0}^{\xi_0} f(\xi)\,d\xi$$

が Q に等しいから，条件は

$$\int_{-\xi_0}^{\xi_0}\left[\frac{n}{2+n}\cdot\frac{{\xi_0}^2-\xi^2}{2}\right]^{\frac{1}{n}}\,d\xi = 1$$

と書ける．$\xi = \xi_0 y$ と置換し

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{n{\xi_0}^2}{2(2+n)}(1-y^2)\right]^{\frac{1}{n}}\xi_0\,dy = 1.$$

岩波数学公式 I（微分積分・平面曲線）第 V 篇・第 1 章 § 46(i) によれば

$$\int_0^1 x^\alpha(1-x^\lambda)^\beta\,dx = \frac{1}{\lambda}B\left(\frac{\alpha+1}{\lambda},\beta+1\right)\quad(\alpha,\beta>-1,\lambda>0)$$

であるから，$\alpha = 0, \beta = \dfrac{1}{n}, \lambda = 2$ として

$$\int_0^1(1-x^2)^{\frac{1}{n}}\,dx = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{n}+1\right)$$

$$\int_{-1}^1(1-x^2)^{\frac{1}{n}}\,dx = B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{n}+1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{(2+n)\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)}$$

となる．規格化の積分は

$$\left[\frac{n{\xi_0}^2}{2(2+n)}\right]^{\frac{1}{n}}\xi_0\cdot\frac{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{(2+n)\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)} = 1.$$

$${\xi_0}^{\frac{2}{n}+1} = \frac{2^{\frac{1}{n}-1}(2+n)^{\frac{1}{n}+1}}{n^{\frac{1}{n}}\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}$$

両辺 n 乗して

$${\xi_0}^{2+n} = \frac{2^{1-n}(2+n)^{1+n}}{n\pi^{\frac{n}{2}}}\cdot\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^n. \qquad ⑨$$

こうして定数 ξ_0 が決まった．

$n = -\nu < 0$ **のとき**

$-{\xi_0}^2$ を改めて ${\xi_0}^2$ とおくと

$$f(\xi) = \left[\frac{\nu}{2(2-\nu)}({\xi_0}^2+\xi^2)\right]^{-\frac{1}{\nu}} \qquad ⑩$$

となる．この場合，熱は全空間に分布しており，原点から十分離れたところでは，H は $x^{-\frac{2}{\nu}}$ で減少する．但し解⑩は $\nu \geqq 2$ のときは意味がない（物理的には，熱が一瞬で無限遠に到達することを意味する）．

$\nu < 2$ のとき，規格化条件は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\nu}{2(2-\nu)}({\xi_0}^2 + \xi^2)\right]^{-\frac{1}{\nu}} \, d\xi = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\nu{\xi_0}^2}{2(2-\nu)}(1 + y^2)\right]^{-\frac{1}{\nu}} \xi_0 \, dy = 1.$$

再び岩波数学公式 § 46(ii) によれば

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(1+x^{\lambda})^{\beta}} = \frac{1}{\lambda} B\left(\beta - \frac{1-\alpha}{\lambda}, \frac{1-\alpha}{\lambda}\right) \quad (\alpha < 1, \beta, \lambda > 0, \lambda\beta > 1-\alpha)$$

であるから，$\alpha = 0, \beta = \dfrac{1}{\nu}, \lambda = 2$ として

$$\int_0^{\infty} (1+x^2)^{-\frac{1}{\nu}} \, dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-\frac{1}{\nu}} \, dx = B\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}$$

となる．規格化の積分は

$$\left[\frac{\nu{\xi_0}^2}{2(2-\nu)}\right]^{-\frac{1}{\nu}} \xi_0 \cdot \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)} = 1.$$

$${\xi_0}^{\frac{2}{\nu}-1} = \frac{\sqrt{\pi}\nu^{-\frac{1}{\nu}}}{\{2(2-\nu)\}^{-\frac{1}{\nu}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}$$

両辺 ν 乗して

$${\xi_0}^{2-\nu} = \frac{2(2-\nu)\pi^{\frac{\nu}{2}}}{\nu} \cdot \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}\right)^{\nu} \tag{11}$$

を得る．

$n \to 0$ のとき

$\xi \to \dfrac{x}{\sqrt{at}}$，⑨と

$$\lim_{n\to 0} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^{n} = 1$$

より ${\xi_0}^2 \to \dfrac{2 \cdot 2}{n}$ である．また⑦より

$$f(\xi) \to \lim_{n=0} \left[\frac{n}{4}\left(\frac{4}{n} - \frac{x^2}{at}\right)\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n=0} \left(1 - \frac{nx^2}{4at}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right).$$

$H = H_0 e^{-x^2/4at}$ として規格化条件は

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} H_0 e^{-x^2/4at} \, dx = H_0 \cdot \sqrt{\pi \cdot 4at} \qquad \therefore \quad H_0 = \frac{Q}{2\sqrt{\pi at}}.$$

したがって

$$H \to \frac{Q}{2\sqrt{\pi at}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right)$$

となり (51.7) と一致する．

⬆ 目次へ戻る

§52　有限媒質中の熱伝導

⬆ 目次へ戻る

§53　熱輸送の相似則

⬆ 目次へ戻る

§54　境界層中の熱輸送

⬆ 目次へ戻る

§55　運動している流体中での物体の加熱

⬆ 目次へ戻る

§56　自由対流

⬆ 目次へ戻る