第 8 章・音

2023-06-23 13:44

これは L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2nd English edition, Pergamon Press, 1987. の内容を補ったノートである．内容の正確性は保証できないが，改善点・誤植（内容，体裁のどちらでも構わない）を見つけた方は筆者まで知らせてほしい．図がほとんどないが，徐々に付け加えていく予定である．

なお，♠ は第 2 版で新たに加わった部分，♠♠ は筆者が勝手に付け加えた部分である．また，目次，式や問題の番号，各節末尾の「目次へ戻る」ボタンにはハイパーリンクを設定し，利便性を高めたつもりである．

本文中で頻繁に参照する文献の略称は以下の通りである．

- 今井→今井功『物理学選書⒁ 流体力学（前編）』裳華房，1974
- 巽→巽友正『新物理学シリーズ 21 流体力学』培風館，1982
- Lamb → H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6th ed., Cambridge, 1932（邦訳あり）
- 『力学』，『統計物理学』，『物理的運動学』→それぞれ，ランダウ＝リフシッツ理論物理学教程の第 1 巻，第 5 巻，第 10 巻．

目次

§64　音波

ここでは圧縮性流体の流れを調べよう．まず微小振動を考える．圧縮性流体の微小振幅の振動は**音波**と呼ばれる．音波により，流体の各点で濃縮と希薄が交互に起こる．

振幅が小さいから速度 $\boldsymbol{v}$ も小さく，Euler 方程式で移流項 $(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v}$ を無視することができる．また，流体の圧力や密度の相対的な変化も小さい．よって

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho' \tag{64.1}$$

と書くことができる．ここで p_0, ρ_0 は定数で，平衡状態での圧力と密度を表す．p', ρ' は音波中での圧力と密度の変化で，$p' \ll p_0, \rho' \ll \rho_0$ である．連続の式に (64.1) を代入して，2 次の微小量を無視すると

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0 \tag{64.2}$$

となる．Euler 方程式は，同程度の近似で

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\,\mathrm{grad}\,p' = 0 \tag{64.3}$$

となる．

線形化された方程式 (64.2)(64.3) が音波の伝播に適用できるための条件は，流体粒子の速度が音速に比べて十分小さいこと（$v \ll c$）である．この条件は例えば $\rho' \ll \rho_0$ から導くことができる（以下の (64.12) を見よ）．

方程式 (64.2)(64.3) は未知数 $\boldsymbol{v}, p', \rho'$ を含んでいる．ここから 1 つを消去するためには，理想流体中の音波は断熱的であるということに注目すればよい．すなわち p', ρ' は

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \rho' \tag{64.4}$$

という関係にある（これ以降，p, ρ の添字 0 を省く）．式 (64.2) に代入し

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0. \tag{64.5}$$

未知数 $\boldsymbol{v}, p'$ についての方程式 (64.3)(64.5) が，音波を完全に記述する．

全ての未知数を 1 つの未知数で表すためには，$\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\,\phi$ により速度ポテンシャルを導入するのが便利である．(64.3) より

$$p' = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{64.6}$$

となる（もちろん定数の任意性があるが，ϕ を定義し直すことによりその影響を消すことができる）．よって (64.5) から

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \triangle \phi = 0 \tag{64.7}$$

となる．ここで

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \tag{64.8}$$

である．(64.7) の形の方程式は**波動方程式**と呼ばれる．(64.7) に grad や $\partial/\partial t$ を作用させることにより，$\boldsymbol{v}$ の各成分や p', ρ' も波動方程式を満たすことが分かる．

全ての量が 1 つの座標（例えば x）のみに依存するような音波を考えよう．つまり，流れは yz 平面内で完全に一様とする．そのような波は**平面波**と呼ばれる．波動方程式 (64.7) は

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \tag{64.9}$$

となる．この方程式を解くために，新しい変数 $\xi = x - ct, \eta = x + ct$ を導入しよう．このとき (64.9) は $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial\eta\partial\xi} = 0$ となる．ξ について積分し $\dfrac{\partial\phi}{\partial\eta} = F(\eta)$ となり，次に η で積分して $\phi = f_1(\xi) + f_2(\eta)$ となる．ここで f_1, f_2 は ξ,η の任意関数である．したがって

$$\phi = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \tag{64.10}$$

となる（**d'Alembert の解**）．平面波における他の諸量（$p', \rho', \boldsymbol{v}$）の分布も，同じ形の関数で与えられる．

話を明確にするために，密度 $\rho' = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$ について考えよう．例えば $f_2 = 0$ とすると，$\rho' = f_1(x - ct)$ となる．この解の意味は明らかである；$x = \text{const.}$ という任意の平面では，密度は時間とともに変化する．また，ある瞬間（$t = \text{const.}$）の密度は x によって異なる．しかし，$x - ct = \text{const.}$（あるいは $x = ct + \text{const.}$）を満たす組 (x, t) に対しては，密度は同じ値をとる．このことは，$t = 0$ にある点で密度がある値をとるとき，時刻 t にはこの点から x 軸方向に ct だけ離れた点で，密度は同じ値をとることを意味する．このことは密度以外の諸量に対しても成り立つ．よって運動のパターンは x 軸に沿って速さ c で媒質中を伝播する．c は**音速**と呼ばれる．

以上より，$f_1(x - ct)$ は x 軸の正の方向に伝播する**進行平面波**と呼ばれるものを表している．$f_2(x + ct)$ が逆向きに伝播する波を表すことは明らかである．

平面波では，速度 $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\phi$ の 3 つの成分のうち，$v_x = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}$ のみが 0 でない．よって音波中の流体の速度は伝播方向に平行である．このため流体中の音波は**縦波**であるという．

進行平面波では，速度 $v_x = v$ は圧力 p' や密度 ρ' と簡単な式で結ばれている．$\phi = f(x - ct)$ とおくと，$v = \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = f'(x - ct)$，$p' = -\rho\dfrac{\partial\phi}{\partial t} = \rho c f'(x - ct)$ であり，両者を比べて

$$v = \frac{p'}{\rho c} \tag{64.11}$$

となる．あるいは，(64.4) を $p' = c^2\rho'$ と書いて代入すれば

$$v = \frac{c\rho'}{\rho}. \tag{64.12}$$

音波中の温度変化と速度の関係について触れておこう．$T' = \left(\dfrac{\partial T}{\partial p}\right)_s p'$ であり，よく知られた熱力学の公式 $\left(\dfrac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \dfrac{T}{c_p}\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ [*1]を用いると

$$T' = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \rho c v = \frac{c\beta T}{c_p} v \tag{64.13}$$

となる（$\beta = \dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \rho\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ は熱膨張係数）．

[*1] 証明は § 4 を見よ．

(64.8) は，流体の断熱圧縮率を用いて音速を表した式である．これは等温圧縮率とは熱力学の公式

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{c_p}{c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \tag{64.14}$$

で結ばれている．

証明にはヤコビアンを用いるのがよい（参照：久保統計 3 章問題 11）：

$$\frac{(\partial p/\partial \rho)_s}{(\partial p/\partial \rho)_T} = \frac{\frac{\partial(p,s)}{\partial(\rho,s)}}{\frac{\partial(p,T)}{\partial(\rho,T)}} = \frac{\frac{\partial(p,s)}{\partial(p,T)}}{\frac{\partial(\rho,s)}{\partial(\rho,T)}} = \frac{(\partial s/\partial T)_p}{(\partial s/\partial T)_\rho} = \frac{c_p}{c_v}$$

理想気体の音速を計算してみよう．気体定数を R，分子量を μ とすると，状態方程式は $pV = \dfrac{p}{\rho} = \dfrac{RT}{\mu}$ である．比熱比を $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v}$ と書けば

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}} \tag{64.15}$$

となる[*2]．γ は温度にわずかにしか依存しないから，気体の音速は $\sqrt{T}$ に比例すると考えてよい[*3]．そして，温度一定のとき音速は圧力に依存しない．

単色波と呼ばれる波は非常に重要である．この場合には，全ての量は時間の周期関数（調和振動）である．このような関数を，複素数の実部として書くのが便利である（§ 24 冒頭を見よ）．例として，速度ポテンシャルを

$$\phi = \mathrm{Re}\{\phi_0(x,y,z)e^{-i\omega t}\} \tag{64.16}$$

と書こう（ω は波の振動数）．これを (64.7) へ代入することにより，関数 ϕ_0 は Helmholtz 方程式

$$\triangle\phi_0 + \frac{\omega^2}{c^2}\phi_0 = 0 \tag{64.17}$$

を満たすことが分かる．

x 軸の正の方向に伝播する単色進行平面波を考えよう．この場合，全ての量は $x - ct$ のみの関数であるから，ポテンシャルは

$$\phi = \mathrm{Re}\{Ae^{-i\omega(t-x/c)}\} \tag{64.18}$$

と書ける（定数 A は**複素振幅**と呼ばれる）．実定数 a, α を用いて $A = ae^{i\alpha}$ と書けば

$$\phi = a\cos\left(\frac{\omega x}{c} - \omega t + \alpha\right) \tag{64.19}$$

を得る．a は波の**振幅**，cos の引数は**位相**と呼ばれる．$\boldsymbol{n}$ を伝播方向の単位ベクトルとするとき，ベクトル

$$\boldsymbol{k} = \frac{\omega}{c}\boldsymbol{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\boldsymbol{n} \tag{64.20}$$

は**波数ベクトル**，その大きさ k は**波数**と呼ばれる．$\boldsymbol{k}$ を用いると，(64.18) は一般に

$$\phi = \mathrm{Re}\{Ae^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}\} \tag{64.21}$$

となる．

[*2] 気体の音速が $c^2 = \dfrac{p}{\rho}$ と書けることを最初に示したのは Newton（1687）である．γ が必要であることは Laplace が指摘した．

[*3] 気体の音速は分子の平均熱速度と同じオーダーであることは，知っておくとよい．

単色波が重要な理由は，どのような波も様々な波数と振動数をもつ単色平面波の重ね合わせで表現できるからである．波を単色波に分解するには，単に Fourier 級数または Fourier 積分に展開すればよい（スペクトル分解）．展開の各項は波の**単色成分**や Fourier **成分**と呼ばれる．

問題は省略する．

⬆ 目次へ戻る

§65　音波のエネルギーと運動量

音波のエネルギーの表式を導こう．一般に，単位体積当たりの流体のエネルギーは $\rho\varepsilon + \dfrac{1}{2}\rho v^2$ である．これを 2 次のオーダーまで取ることにすると

$$\rho_0\varepsilon_0 + \rho' \left.\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_0} + \frac{1}{2}\rho'^2 \left.\frac{\partial^2(\rho\varepsilon)}{\partial\rho^2}\right|_{\rho=\rho_0} + \frac{1}{2}\rho_0 v^2$$

となる（音波は断熱的であるから，偏微分はエントロピー一定のもとで行うことにする．なお $\dfrac{1}{2}\rho' v^2$ は 3 次のオーダーである）．

$$d(\rho\varepsilon) = \varepsilon d\rho + \rho d\varepsilon = \varepsilon d\rho + \rho\left(Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho\right) = \left(\varepsilon + \frac{p}{\rho}\right)d\rho + \rho T ds = h d\rho + \rho T ds$$

より

$$\left.\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_0} = h_0, \quad \left.\frac{\partial^2(\rho\varepsilon)}{\partial\rho^2}\right|_{\rho=\rho_0} = \left.\frac{\partial h}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_0} = \left.\frac{\partial h}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_0} = \frac{c^2}{\rho_0}$$

であるから，単位体積当たりのエネルギーは

$$\rho_0\varepsilon_0 + h_0\rho' + \frac{c^2\rho'^2}{2\rho_0} + \frac{1}{2}\rho_0 v^2$$

となる．第 1 項 $\rho_0\varepsilon_0$ は，流体が静止しているときのエネルギーであり，音波に関係しない．第 2 項 $h_0\rho'$ は，流体の質量変化に伴うエネルギーの変化である．この項は，全体積で積分すると消える（$\because \int \rho' dV = 0$）．よって音波による流体のエネルギー変化量は積分

$$\int \left(\frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{c^2\rho'^2}{2\rho_0}\right) dV$$

で与えられる．被積分関数

$$E = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{c^2\rho'^2}{2\rho_0} \tag{65.1}$$

は音のエネルギー密度とみなすことができる．

進行平面波の場合，上式は簡単になる．$\rho' = \dfrac{v\rho_0}{c}$ を代入して

$$E = \rho_0 v^2 \tag{65.2}$$

となる．一般にはこの式は成り立たないが，全エネルギーの時間平均については同様の式を得ることができる．よく知られた力学の一般理論により，微小振動を行っている系の全平均ポテンシャルエネルギーは，全平均運動エネルギーに等しい．よって

$$\int \overline{E}\, dV = \int \rho_0 \overline{v^2}\, dV \tag{65.3}$$

が成り立つ．

次に，音波が伝播している流体のある体積を考え，この体積を囲む閉曲面を通るエネルギーフラックスを求めよう．流体のエネルギーフラックス密度は，式 (6.3) より $\rho \boldsymbol{v}\left(\dfrac{1}{2}v^2 + h\right)$ である．今の場合，v^2 の項は 3 次のオーダーであるから無視することができる．よって $\rho(h_0 + h')\boldsymbol{v}$ となる．エンタルピーの微小変化は $h' = \left(\dfrac{\partial h}{\partial p}\right)_s p' = \dfrac{p'}{\rho}$ であるから $\rho h_0 \boldsymbol{v} + p'\boldsymbol{v}$ となり，表面を通る全エネルギーフラックスは

$$\int (\rho h_0 \boldsymbol{v} + p'\boldsymbol{v}) \cdot d\boldsymbol{S}$$

となる．第 1 項は，考えている体積中の流体の質量が変化したことによるエネルギーフラックスである．我々はエネルギー密度を求める際，対応する項 $h_0\rho'$ を省いたから，ここでも省くことにする．よって全エネルギーフラックスは単に

$$\int p'\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}$$

となる．音波のエネルギーフラックス密度は，ベクトル

$$\boldsymbol{q} = p'\boldsymbol{v} \tag{65.4}$$

により表される．エネルギー密度とフラックス密度は，エネルギー保存則

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{q} = 0 \tag{65.5}$$

により結ばれている．

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{c^2\rho'^2}{2\rho_0}\right) + \mathrm{div}(p'\boldsymbol{v}) \\
&= \rho_0 \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{c^2}{\rho_0}\rho' \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad}\, p' + p'\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} \\
&\quad (p' = c^2\rho' \text{ に注意する}) \\
&= \boldsymbol{v} \cdot \left(\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}\, p'\right) + \frac{p'}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\right) = 0
\end{aligned}$$

進行平面波では，圧力変化は速度と $p' = c\rho_0 v$ の関係にある（v の符号は適当に決める）．波の伝播方向の単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を導入すれば

$$\boldsymbol{q} = \rho_0 c v^2 \boldsymbol{n} = cE\boldsymbol{n} \tag{65.6}$$

となる．よって，期待されるように，平面音波のエネルギーフラックス密度は，エネルギー密度に音速をかけたものに等しい．

⬆ 目次へ戻る

§66　音波の反射と屈折

音波が異なる 2 つの流体の境界に入射すると，反射や屈折を起こす．1 つ目の媒質中の運動は，入射波と**反射波**の組み合わせであるが，2 つ目の媒質には**屈折波**しか存在しない．これら 3 つの関係は，境界条件により決定される．

2 つの媒質の平面境界（yz 平面とする）における，単色の縦波の反射と屈折について考えよう．3 つの波は同じ振動数 ω と同じ波数ベクトルの成分 k_y, k_z を持つが，境界に垂直な波数 k_x は異なる値を持つ．その理由は以下の通りである．均質な無限媒質の場合，一定の $\boldsymbol{k}, \omega$ を持つ単色波は運動方程式を満たす．境界面の存在は，単に境界条件を加えるに過ぎない．この場合の境界は $x = 0$ であり，t, y, z には依存しない．よって，t, y, z に対する解の依存性は全ての時間や座標に対して等しい．よって ω, k_y, k_z は入射波と同じ値をとる．

この結果からただちに，反射波と屈折波の伝播方向を与える関係式を導くことができる．入射波を含む平面を xy 平面とすると，入射波では $k_z = 0$ であり，反射波と屈折波でも同様のことが成り立つ必要がある．ゆえに，3 つの波の伝播方向は同一平面上にある．

さて，波の伝播方向が x 軸となす角を θ としよう．$k_y = \dfrac{\omega}{c}\sin\theta$ であり，これが入射波と反射波で等しいことから

$$\theta_1 = \theta_1' \tag{66.1}$$

となる．つまり入射角 θ_1 と反射角 θ_1' は等しい．次に入射波と屈折波で k_y が等しいことから

$$\frac{\omega}{c_1}\sin\theta_1 = \frac{\omega}{c_2}\sin\theta_2 \qquad \therefore \quad \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{c_1}{c_2} \tag{66.2}$$

を得る（c_1, c_2は2つの媒質の音速）．これは Snell **の法則**と呼ばれる．

3 つの波の強さの間に成り立つ定量的な関係を得るために，入射波，反射波，屈折波の速度ポテンシャルを次のように書く．

$$\phi_1 = A_1 \exp\left[i\omega\left(\frac{x}{c_1}\cos\theta_1 + \frac{y}{c_1}\sin\theta_1 - t\right)\right]$$
$$\phi_1' = A_1' \exp\left[i\omega\left(-\frac{x}{c_1}\cos\theta_1 + \frac{y}{c_1}\sin\theta_1 - t\right)\right]$$
$$\phi_2 = A_2 \exp\left[i\omega\left(\frac{x}{c_2}\cos\theta_2 + \frac{y}{c_2}\sin\theta_2 - t\right)\right]$$

境界では圧力 $p' = -\rho\dfrac{\partial\phi}{\partial t}$ と法線速度 $v_x = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}$ が等しいから

$$\rho_1(A_1 + A_1') = \rho_2 A_2, \tag{①}$$

$$\frac{\cos\theta_1}{c_1}(A_1 - A_1') = \frac{\cos\theta_2}{c_2}A_2. \tag{②}$$

音波の**反射係数** R は，反射波と入射波のエネルギーフラックス密度の（時間）平均の比として定義される．平面波のエネルギーフラックスは $c\rho v^2$ であるから，$R = \dfrac{c_1\rho_1\overline{v_1'^2}}{c_1\rho_1\overline{v_1^2}} = \dfrac{|A_1'|^2}{|A_1|^2}$ となる．

① ÷ ② より

$$\frac{\rho_1 c_1}{\cos\theta_1}\cdot\frac{A_1 + A_1'}{A_1 - A_1} = \frac{\rho_2 c_2}{\cos\theta_2}$$

$$\frac{A_1 + A_1'}{A_1 - A_1'} = \frac{1 + \frac{A_1'}{A_1}}{1 - \frac{A_1'}{A_1}} = \frac{\rho_2 c_2 \cos\theta_1}{\rho_1 c_1 \cos\theta_2} \overset{(66.2)}{=} \frac{\rho_2 \tan\theta_2}{\rho_1 \tan\theta_1}$$

$$1 + \frac{A_1'}{A_1} = \frac{\rho_2\tan\theta_2}{\rho_1\tan\theta_1}\left(1 - \frac{A_1'}{A_1}\right)$$

$$\left(1 + \frac{\rho_2\tan\theta_2}{\rho_1\tan\theta_1}\right)\frac{A_1'}{A_1} = \frac{\rho_2\tan\theta_2}{\rho_1\tan\theta_1} - 1$$

$$\frac{A_1'}{A_1} = \frac{\rho_2 \tan\theta_2 - \rho_1 \tan\theta_1}{\rho_2 \tan\theta_2 + \rho_1 \tan\theta_1}$$

よって

$$R = \left(\frac{\rho_2 \tan\theta_2 - \rho_1 \tan\theta_1}{\rho_2 \tan\theta_2 + \rho_1 \tan\theta_1} \right)^2 \tag{66.3}$$

となる．(66.2) を用いて，θ_2 を θ_1 で表そう．

$$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} = \frac{c_2}{c_1}\frac{\cos\theta_1}{\sqrt{1-\sin^2\theta_2}} = \frac{c_2}{c_1}\frac{\cos\theta_1}{\sqrt{1-\left(\frac{c_2}{c_1}\sin\theta_1\right)^2}} = \frac{c_2\cos\theta_1}{\sqrt{{c_1}^2 - {c_2}^2\sin^2\theta_1}}$$

であるから

$$R = \left(\frac{\rho_2 c_2 \cos\theta_1 - \rho_1\sqrt{{c_1}^2 - {c_2}^2\sin^2\theta_1}}{\rho_2 c_2 \cos\theta_1 + \rho_1\sqrt{{c_1}^2 - {c_2}^2\sin^2\theta_1}} \right)^2 \tag{66.4}$$

となる．

特に垂直入射（$\theta_1 = 0$）のときは

$$R = \left(\frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} \right)^2 \tag{66.5}$$

となる．

最後に，$R = 0$ となるのはどのような場合か調べよう．

$${\rho_2}^2{c_2}^2\cos^2\theta_1 = {\rho_1}^2({c_1}^2 - {c_2}^2\sin^2\theta_1) = {\rho_1}^2({c_1}^2 - {c_2}^2) + {\rho_1}^2{c_2}^2\cos^2\theta_1$$

$$({\rho_2}^2 - {\rho_1}^2){c_2}^2\cos^2\theta_1 = {\rho_1}^2({c_1}^2 - {c_2}^2)$$

$$\tan^2\theta_1 = \frac{1}{\cos^2\theta_1} - 1 = \frac{({\rho_2}^2 - {\rho_1}^2){c_2}^2}{{\rho_1}^2({c_1}^2 - {c_2}^2)} - 1 = \frac{{\rho_2}^2{c_2}^2 - {\rho_1}^2{c_1}^2}{{\rho_1}^2({c_1}^2 - {c_2}^2)} \tag{66.6}$$

のときである．つまり，(66.6) が成り立つとき，波は全て屈折する．これが起こるのは，$c_1 > c_2$ かつ $\rho_2 c_2 > \rho_1 c_1$ が成り立つとき，または $c_1 < c_2$ かつ $\rho_2 c_2 < \rho_1 c_1$ が成り立つときである．

問題は省略する．

⬆ 目次へ戻る

§67　幾何音響学

⬆ 目次へ戻る

§68　運動する媒質中の音の伝播

省略する．

⬆ 目次へ戻る

§69　固有振動

これまで，我々は無限媒質中の振動のみを議論してきた．そして，そのような媒質中では任意の振動数を持った波が伝播できることを学んだ．

しかし，有限の大きさを持つ容器内の流体を考える場合，状況はかなり異なる．運動方程式（波動方程式）自体は変わらないが，固体壁や自由表面で満たされるべき境界条件を加えなければならない[*4]．

有限の流体に対する運動方程式は，全ての周波数に対して境界条件を満たす解を持つわけではなく，限られた振動数でのみ振動が起こる．このような振動数は，考えている容器内の流体の**固有振動数**と呼ばれる．

固有振動数の実際の値は，容器の大きさや形状に依存する．そしてどのような場合にも，固有振動数は無限個存在する．これらを求めるためには，適切な境界条件のもとで運動方程式を調べる必要がある．

最小の固有振動数 ω_1 のオーダーは，次元解析から直ちに得ることができる．問題に現れる，長さの次元を持つパラメータは物体（容器）の大きさ l のみである．よって最小の固有振動数に対応する波長 λ_1 は l のオーダーであり，ω_1 は音速をこの波長で割ることにより得られる．すなわち

$$\lambda_1 \sim l, \quad \omega_1 \sim \frac{c}{l}. \tag{69.1}$$

固有振動の性質を調べよう．時間について周期的な速度ポテンシャル $\phi = \phi_0(x,y,z)e^{-i\omega t}$ を仮定すると，ϕ_0 に関する Helmholtz 方程式

$$\triangle\phi_0 + \frac{\omega^2}{c^2}\phi_0 = 0 \tag{69.2}$$

が得られる．

境界条件のない無限媒質では，この方程式は実数と虚数両方の解を持つ．特に $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ に比例する解をもち，この場合の速度ポテンシャルは

$$\phi \propto \exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)]$$

となり，ある速度で伝播する進行波を表す．

しかし，有限の体積を持つ媒質では，複素数の解は一般に存在しない．これは以下のようにして示すことができる．ϕ_0 の満たすべき方程式は実であり，境界条件も実である．よって ϕ_0 が解ならその複素共役 ϕ_0^* も解である．一方，与えられた境界条件を満たす解は，定数係数を除いて一意に定まるから，$\phi_0^* = A\phi_0$ でなければならない．両辺の複素共役を取ると $\phi_0 = A^*\phi_0^*$ となり，$AA^* = 1$ すなわち $|A| = 1$ を得る．よって ϕ_0 は，実数 f, α を用いて $\phi_0 = f(x,y,z)e^{-i\alpha}$ と書ける．$\phi = fe^{-i(\omega t+\alpha)}$ の実部を取れば

$$\phi = f(x,y,z)\cos(\omega t + \alpha) \tag{69.3}$$

を得る．よって速度ポテンシャルは，座標のある関数と，時間の周期関数の積である．

この解は，進行波とは完全に異なる性質を持つ．進行波では，波長の整数倍離れた点を除けば，異なる点での位相 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \alpha$ は各時刻で異なる値をとる．一方，(69.3) で表されるような波では，全ての点が任意の時刻において同じ位相 $\omega t + \alpha$ で振動している．このような波は明らかに“伝播”しておらず，**定在波**と呼ばれる．よって固有振動は定在波である．

全ての量が 1 つの座標（例えば x）と時間の関数であるような，定常平面波を考えよう．Helmholtz 方程式 $\dfrac{\partial^2\phi_0}{\partial x^2} + \dfrac{\omega^2}{c^2}\phi_0 = 0$ の解を $\phi_0 = a\cos\left(\dfrac{\omega x}{c} + \beta\right)$ の形に書くと $\phi = a\cos(\omega t + \alpha)\cos\left(\dfrac{\omega x}{c} + \beta\right)$ となる．x, t の原点を適当に選ぶことにより，α, β は 0 にすることができる．よって

$$\phi = a\cos\omega t\cos\frac{\omega x}{c} \tag{69.4}$$

[*4] 以下では**自由振動**，つまり変動する外力なしに生じる振動について考える．外力の結果生じる振動は**強制振動**と呼ばれる．

となる．速度と圧力は

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\omega a}{c}\cos\omega t \sin\frac{\omega x}{c}, \quad p' = -\rho\frac{\partial \phi}{\partial t} = \rho\omega a \sin\omega t \sin\frac{\omega x}{c}.$$

距離 $\frac{\pi c}{\omega} = \frac{1}{2}\lambda$ ずつ離れた点 $x = 0, \frac{\pi c}{\omega}, \frac{2\pi c}{\omega}, \ldots$ では，速度は常に 0 である．これらの点は速度の**節**であるという．これらの中間の点 $x = \frac{\pi c}{2\omega}, \frac{3\pi c}{2\omega}, \ldots$ では，速度の振幅が最大となり，**腹**と呼ばれる．圧力の節と腹は，速度とは逆の位置にある．すなわち，圧力の節は速度の腹であり，圧力の腹は速度の節である．

固有振動の興味深い例は，小さな開口部をもつ容器（共鳴器）内の気体の振動である．l を容器の長さとすると，閉じた容器の最小の固有振動数は c/l のオーダーである．しかし，小さな開口部があると，かなり小さな振動数をもつ，新しい固有振動が現れる．その原因は以下の通りである：容器の中と外で気体に圧力差があると，差をなくすために気体は容器を出入りする．開口部が小さいため，気体の出入りはゆっくりと起こり，振動の周期は長く，対応する振動数は短くなる．

問題は省略する．

⬆ 目次へ戻る

§ 70　球面波

密度，速度などの分布が，ある点からの距離のみに依存する（つまり球対称な）音波を考えよう．そのような波は**球面波**と呼ばれる．

球面波を表す，波動方程式の一般解を求めよう．波動方程式を速度ポテンシャルで表し $\triangle\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$ とする．ϕ は原点からの距離 r および時間 t の関数であるから，球座標でのラプラシアンを用いて

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) \tag{70.1}$$

となる．$\phi = \frac{f(r,t)}{r}$ とおいて代入すると

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}r - f\right) = c^2\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}r + \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}.$$

よって，r を座標と考えたときの 1 次元波動方程式になる．その解は，f_1, f_2 を任意関数として $f = f_1(ct - r) + f_2(ct + r)$ であるから，(70.1) の一般解は

$$\phi = \frac{f_1(ct-r)}{r} + \frac{f_2(ct+r)}{r} \tag{70.2}$$

となる．第 1 項は，原点から全ての方向へ伝播する「外向き」の波であり，第 2 項は原点に集まる波である．振幅が一定の平面波とは異なり，球面波の振幅は原点からの距離に反比例して減少する．波の強度は振幅の 2 乗で与えられるから，球面波では $\mathcal{O}(1/r^2)$ で減少する．これは，全エネルギーが表面積 $4\pi r^2$ の球面上に分布しているというエネルギー保存則から期待される通りである．

圧力と密度の変化は，速度ポテンシャルと $p' = -\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}$, $\rho' = -\frac{\rho}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}$ で関係付けられる．一方，（半径方向の）速度は

$$v = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{f_1(ct-r)}{r} + \frac{f_2(ct+r)}{r}\right\} \tag{70.3}$$

で与えられる．

原点に音源がない場合には，ポテンシャル (70.2) は $r=0$ で有限でなければならない．そうなるためには $f_1(ct)=-f_2(ct)$ でなければならず

$$\phi = \frac{f(ct-r)-f(ct+r)}{r} \tag{70.4}$$

となる．一方，原点に音源がある場合には，外へ向かう波のポテンシャルは $\phi = \dfrac{f(ct-r)}{r}$ である．解は音源以外の領域で成り立つものであるから，$r=0$ で有限になる必要はない．

単色波の場合，(70.4) は

$$\phi = Ae^{-i\omega t}\frac{\sin(kr)}{r},\ k=\frac{\omega}{c} \tag{70.5}$$

となる．また，外へ向かう球面波は

$$\phi = A\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \tag{70.6}$$

である．(70.6) は，以下の微分方程式を満たすことに注目しよう．

$$\triangle\phi + k^2\phi = -4\pi Ae^{-i\omega t}\delta(\boldsymbol{r}) \tag{70.7}$$

原点を除く領域では，解は Helmholtz 方程式 $\triangle\phi + k^2\phi = 0$ を満たす．次に，原点を取り囲む半径 ε の球で (70.7) を体積積分すると，左辺は

$$\begin{aligned}\int_{r=\varepsilon}\mathrm{grad}\,\phi\cdot d\boldsymbol{S}+0 &= A\frac{ike^{i(kr-\omega t)}\cdot r - e^{i(kr-\omega t)}}{\cancel{r^2}}4\pi\cancel{r^2}\Big|_{r=\varepsilon} \\ &= 4\pi A(ik\varepsilon-1)e^{i(k\varepsilon-\omega t)} \\ &\to -4\pi Ae^{-i\omega t}\ (\varepsilon\to 0)\end{aligned}$$

さて，外へ向かう球面波を考えよう．球面波が占める球殻の外側では，媒質は静止しているか，それに近い状態であるとする．そのような波は，有限の時間だけ音を発する音源か，または音の擾乱が存在するある領域から生じる．音波が到達する前は，$\phi=0$ である．音波が通過し終わると，運動は止まる．これは ϕ が定数であることを意味する．しかし，外へ向かう球面波では $\phi = \dfrac{f(ct-r)}{r}$ であるから，この定数は 0 しかあり得ない．したがって，音波の到達前と通過後では，ポテンシャルは 0 でなければならない．この事実から，球面波での疎密の分布について重要な結論を引き出すことができる．

音波中の圧力変化は $p' = -\rho\dfrac{\partial\phi}{\partial t}$ と書けるから，r を固定して全時間で積分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty}p'\,dt = -\rho(\phi(\infty)-\phi(-\infty)) = 0 \tag{70.8}$$

となる．このことは，球面波が通過するとき，任意の点で必ず濃縮（$p'>0$）と希薄（$p'<0$）の両方が観察されることを意味する．

問題 70.1

$t=0$ で，半径 a の球の内部の気体が $\rho'=\Delta$（定数）となるように圧縮されている（球の外では $\rho'=0$ とする）．また，$t=0$ ではどこでも速度は 0 とする．その後の運動を求めよ．

【解答】

$\rho' = -\dfrac{\rho}{c^2}\dfrac{\partial \phi}{\partial t}$ に注意して，ポテンシャル $\phi(r,t)$ の初期条件を書き下すと

$$\phi(r,0)=0, \quad \dot{\phi}(r,0)=F(r)\equiv\begin{cases}0 & (r>a)\\ -\dfrac{c^2\Delta}{\rho} & (r<a)\end{cases}$$

となる．$\phi = \dfrac{f(ct-r)-f(ct+r)}{r}$ の形に解を求めよう．初期条件から

$$f(-r)-f(r)=0, \quad \frac{c}{r}\left(f'(-r)-f'(r)\right)=F(r).$$

第 1 式を微分し

$$f'(r)+f'(-r)=0,$$

第 2 式から

$$f'(r)-f'(-r)=-\frac{r}{c}F(r).$$

よって

$$f'(r)=-f'(-r)=-\frac{r}{2c}F(r)$$

となる．混乱を避けるため f の引数を ξ と書くことにすると

$$f'(\xi)=-\frac{\xi}{2c}F(\xi)=\begin{cases}0 & (|\xi|>a)\\ \dfrac{c\Delta}{2\rho}\xi & (|\xi|<a)\end{cases}.$$

これを ξ で積分し

$$f(\xi)=\begin{cases}A & (|\xi|>a)\\ \dfrac{c\Delta}{4\rho}\xi^2+B & (|\xi|<a)\end{cases}$$

となり，$|\xi|=a$ での連続性から $A=\dfrac{c\Delta}{4\rho}a^2+B$ となるから結局

$$f(\xi)=\begin{cases}A & (|\xi|>a)\\ \dfrac{c\Delta}{4\rho}(\xi^2-a^2)+A & (|\xi|<a)\end{cases}.$$

これが求める解を与える．

特に $r>a$ での解を調べよう．この場合 $|ct+r|>a$ より常に $f(ct+r)=A$ となるから，$|ct-r|$ と a の大小関係を調べればよいことがわかる．

- $0<t<\dfrac{r-a}{c}$ のとき．$f(ct-r)=A$ より $\phi=0$, $\rho'=0$ となる．
- $\dfrac{r-a}{c}<t<\dfrac{r+a}{c}$ のとき．$f(ct-r)=\dfrac{c\Delta}{4\rho}\left\{(ct-r)^2-a^2\right\}+A$ より

$$\phi=\frac{c\Delta}{4\rho r}\left\{(ct-r)^2-a^2\right\},$$

$$\rho'=-\frac{\rho}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=-\frac{\rho}{c^2}\frac{c\Delta}{4\rho r}2c(ct-r)=\frac{\Delta}{2}\left(1-\frac{ct}{r}\right).$$

- $t > \dfrac{r+a}{c}$ のとき．やはり $\phi = 0,\ \rho' = 0$ となる．

音波は，考えている点を時間 $\dfrac{2a}{c}$ だけ通過する．いいかえると，音波は $ct - a < r < ct + a$ で表される球殻内にのみ存在する．この球殻内では，密度は線形に変化し，まず圧縮（$\rho' > 0$）が，次に希薄（$\rho' < 0$）が到達する．

問題 70.2

半径 a の球状容器における球対称な固有振動の固有振動数を求めよ．

【解答】

境界条件は $r = a$ で $v = \dfrac{\partial \phi}{\partial r} = 0$ となることで，(70.5) より

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sin(kr)}{r}\right)_{r=a} = \left.\frac{kr\cos(kr) - \sin(kr)}{r^2}\right|_{r=a} = 0$$

$$\therefore \quad \tan(ka) = ka.$$

この式が固有振動数を決める．特に基準振動数は，$\tan x = x\ (x > 0)$ の最小解から

$$ka \simeq 4.49 \qquad \therefore \quad \omega = 4.49\frac{c}{a}.$$

⬆ 目次へ戻る

§71　円筒波

全ての量の分布がある方向（z 軸方向とする）に一様で，この方向について完全に軸対称な波を考えよう．このような波は**円筒波**と呼ばれる．z 軸からの距離を R とすると，$\phi = \phi(R, t)$ となる．波動方程式の軸対称な解は，球対称の解 (70.2) から求めることができる．R と r の関係は $r^2 = R^2 + z^2$ であるから，(70.2) で与えられる ϕ は R と t が与えられたとき z に依存する．よって R と t のみに依存する解は，(70.2) を $-\infty < z < \infty$ または $0 < z < \infty$ で積分することで得られる．z の積分を r の積分に置き換えよう．$z = \sqrt{r^2 - R^2}$ より $dz = \dfrac{r dr}{\sqrt{r^2 - R^2}}$ で，$z : 0 \to \infty$ のとき $r : R \to \infty$ であるから，求める解は

$$\phi = \int_R^\infty \frac{f_1(ct - r)}{\sqrt{r^2 - R^2}}\, dr + \int_R^\infty \frac{f_2(ct + r)}{\sqrt{r^2 - R^2}}\, dr \tag{71.1}$$

となる（f_1, f_2 は任意関数）．第 1 項は外へ向かう円筒波，第 2 項は内側へ向かう円筒波である．

この積分で $ct \mp r = \xi$ と置き換えると

$$\phi = \int_{-\infty}^{ct-R} \frac{f_1(\xi)\, d\xi}{\sqrt{(ct - \xi)^2 - R^2}} + \int_{ct+R}^{\infty} \frac{f_2(\xi)\, d\xi}{\sqrt{(\xi - ct)^2 - R^2}} \tag{71.2}$$

となる．外へ向かう円筒波の時刻 t でのポテンシャルの値は，$-\infty$ から $t - R/c$ までの f_1 の値で決まる．同様に，内側へ向かう円筒波は $t + R/c$ から ∞ までの f_2 の値で決まる．

単色円筒波のポテンシャルを導こう．円筒座標においてポテンシャル $\phi(R,t)$ が満たす波動方程式は

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\phi}{\partial R}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0.$$

単色波では $\phi=f(R)e^{-i\omega t}$ と書けるから

$$\frac{1}{R}\left(\frac{df}{dR}+R\frac{d^2f}{dR^2}\right)+\frac{\omega^2}{c^2}f=0,$$

$$\frac{d^2f}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{df}{dR}+k^2f=0.$$

これは 0 次の Bessel の微分方程式であり，$R=0$ で有限な解は $J_0(kR)$ である（J_0 は 0 次の Bessel 関数)．よって単色円筒波では

$$\phi=AJ_0(kR)e^{-i\omega t} \tag{71.4}$$

となる．$R=0$ で $J_0=1$ であるから，原点で振幅は有限値 A をとる．一方，R が大きいところでは，J_0 を漸近展開して

$$\phi\to A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\cos\left(kR-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{kR}}e^{-i\omega t}\quad(R\to\infty) \tag{71.5}$$

となる．

外へ向かう単色円筒波のポテンシャルも同様にして得ることができる．0 次の Bessel 方程式の一般解は，第 1 種／第 2 種 Hankel 関数 $H_0^{(1)},H_0^{(2)}$ で表される．その漸近形は

$$H_0^{(1)}(kR)\to\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{e^{i(kR-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{kR}},\quad H_0^{(2)}(kR)\to\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{e^{-i(kR-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{kR}}\quad(R\to\infty)$$

であり，$e^{-i\omega t}$ との積を取ったとき $kR-\omega t$ のような依存性を持つのは前者である．したがって，外向きの単色円筒波のポテンシャルは

$$\phi=AH_0^{(1)}(kR)e^{-i\omega t} \tag{71.6}$$

である．$R\to 0$ では，次のような対数的な特異性を持つ．

$$\phi\to A\cdot\frac{2i}{\pi}\log(kR)e^{-i\omega t} \tag{71.7}$$

$R\to\infty$ での漸近式は

$$\phi\to A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{e^{i(kR-\omega t-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{kR}}. \tag{71.8}$$

円筒波の振幅は，R が十分大きいとき $\dfrac{1}{\sqrt{R}}$ で減少する．よって音波の強度は $\dfrac{1}{R}$ で減少する．これもエネルギー保存則から期待される通りである．

外へ向かう円筒波には，前面のフロントはあるが後面のフロントはないという，球面波や平面波とは決定的に異なる特徴がある．つまり，ある点に音の擾乱が到達すると，それは有限の時間では消えず，$t\to\infty$ でゆっくりと 0 に近づくのである．式 (71.2) の関数 $f_1(\xi)$ が，ある有限の期間 $\xi_1\leqq\xi\leqq\xi_2$ でのみ 0 でない値をもつとしよう．十分大きい t を考えることにすれば，$ct-R>\xi_2$（または $t>\dfrac{R+\xi_2}{c}$）としてよく，このとき積分を $\xi_1\leqq\xi\leqq\xi_2$ での積分に置き換えることができる：

$$\phi=\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{f_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(ct-\xi)^2-R^2}}\quad\left(t>\frac{R+\xi_2}{c}\right)$$

特に $t \to \infty$ のとき，これは次の式に漸近する．

$$\phi \to \frac{1}{ct}\int_{\xi_1}^{\xi_2} f_1(\xi)\,d\xi \quad (t \to \infty)$$

すなわち，有限の時間だけ作用するような音源が作る，外へ向かう円筒波のポテンシャルは，$t \to \infty$ でゆっくりと 0 に近づく．したがって球面波のときと同様に

$$\int_{-\infty}^{\infty} p'\,dt = 0 \tag{71.9}$$

である．円筒波の場合にも，濃縮と希薄の両方が観察される．

⬆ 目次へ戻る

§ 72　波動方程式の一般解

⬆ 目次へ戻る

§ 73　側方波

⬆ 目次へ戻る

§ 74　音の放射

⬆ 目次へ戻る

§ 75　乱流による音の励起

省略する．

⬆ 目次へ戻る

§ 76　相反定理

⬆ 目次へ戻る

§ 77　管の中の音の伝播

⬆ 目次へ戻る

§ 78　音の散乱

⬆ 目次へ戻る

§79　音の吸収

⬆ 目次へ戻る

§80　音響流

⬆ 目次へ戻る

§81　第 2 粘性

省略する．

⬆ 目次へ戻る