第 1 章・理想流体

2022-10-06 22:34

これは L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2nd English edition, Pergamon Press, 1987. の内容を補ったノートである．内容の正確性は保証できないが，改善点・誤植（内容，体裁のどちらでも構わない）を見つけた方は筆者まで知らせてほしい．図がほとんどないが，徐々に付け加えていく予定である．

なお，♠ は第 2 版で新たに加わった部分，♠ ♠ は筆者が勝手に付け加えた部分である．また，目次，式や問題の番号，各節末尾の「目次へ戻る」ボタンにはハイパーリンクを設定し，利便性を高めたつもりである．

本文中で頻繁に参照する文献の略称は以下の通りである．

- 今井→今井功『物理学選書⒁ 流体力学（前編）』裳華房，1974
- 巽→巽友正『新物理学シリーズ 21 流体力学』培風館，1982
- Lamb → H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6th ed., Cambridge, 1932（邦訳あり）
- 『力学』，『統計物理学』，『物理的運動学』→それぞれ，ランダウ＝リフシッツ理論物理学教程の第 1 巻，第 5 巻，第 10 巻．

目次

§1　連続の式

流体力学の基礎的概念

流体力学は流体（液体と気体）のマクロな現象を扱う．流体は連続媒質とみなされる．よく流体の微小な体積要素を「流体粒子」というが，この中にも十分多くの分子が含まれている．

式で書けば，考えている流体の大きさを L，流体粒子の大きさを l，分子の平均自由行程を λ として

$$\lambda \ll l \ll L$$

となる（$\mathrm{Kn} \equiv \lambda/L \ll 1$ は Knudsen 数と呼ばれる）．「流体粒子の変位」と言ったときも，各分子の変位ではなく，微小な体積要素そのものの変位を意味している（体積要素内の分子たちの重心の変位，と言ってもよいかもしれない）．

流体を記述する変数

流体の運動は，速度 $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ を指定すれば決まる．また，熱力学的な状態は，2 つの変数を指定してしまえば，残りの変数は状態方程式から導くことができる．流体力学では，圧力 $p(x, y, z, t)$ と密度 $\rho(x, y, z, t)$ がよく用いられる．以上の 5 変数が指定されれば，流体が完全に記述される[*1]．

これらの変数は座標 (x, y, z) と時間 t の関数であるが，(x, y, z) は空間上に固定された点の座標を表す（Euler 的記述）のであって，特定の粒子に乗った座標（Lagrange 的記述）ではないことに注意．

> 流体力学で最大限に用いる平衡熱力学は，文字通り平衡状態を対象としている．流体は常に「流れて」いるので，平衡状態とは思えないが，熱力学を適用していいのだろうか？
>
> この疑問にマクロな視点から答えるとすれば，それは「流体全体としては平衡状態でなくても，各部分（流体粒子）は**局所的平衡**にあると考えられるので，熱力学を適用してよい」となるだろうか．流体力学でのあらゆる変数（速度，密度，圧力，温度など）は，各流体粒子に対して定義されたマクロな変数である．すなわち，流体粒子程度の距離ではこれらの変数はほとんど変化しないと考えて，各流体粒子に平衡熱力学を適用する．
>
> ミクロな視点で考えるなら，流体力学の方程式はいずれも Boltzmann 方程式のモーメント（Boltzmann 方程式に質量や運動量，エネルギーをかけて積分したもの）として得られることを思い出す必要がある．分布関数 f は一般には複雑な形をとるが，局所的平衡状態における関数 f_0 で近似して計算すれば，これは散逸過程を無視しているので理想流体に対応する．また，f_0 からのずれを 1 次まで考慮して計算すれば，これは線形の粘性流体に対応する（この場合の熱伝導率や粘性も分布関数から計算される）．これらの議論は『物理的運動学』§ 5–8 に詳しい．
>
> いずれにせよ，「理想流体の章では散逸過程のない局所的平衡状態を仮定し，粘性流体の章では散逸過程を 1 次近似している．それ以上の高次項（非線形効果）についてはこの巻の範囲外（運動学の範囲）である．」と考えておけば，見通しよく読み進められると思う．

連続の式

まず，物質の質量保存則を定式化しよう．空間内のある体積 V_0 を考える．この中の流体の質量は

$$\int_{V_0} \rho \, dV.$$

[*1] そのためには 5 本の支配方程式が必要であり，それは連続の式，運動方程式（3 成分），エネルギー方程式である．

次に，V_0 表面の面積要素（ベクトル）を $d\boldsymbol{S}$ とする（$d\boldsymbol{S}$ の向きは外向き法線ベクトルと一致し，大きさは要素の面積と等しい）．$d\boldsymbol{S}$ を通って，単位時間に流れ出る流体の質量は $\rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}$ であるから，流れ出る全質量は

$$\int_{S_0}\rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

これは，単位時間の質量の減少率に等しいから

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_0}\rho\,dV=-\int_{S_0}\rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}. \tag{1.1}$$

Gauss の発散定理を用いると

$$\int_{V_0}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})\right]dV=0.$$

これが任意の V_0 について成り立つから

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=0. \tag{1.2}$$

これが**連続の式**である．$\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\rho+\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ であるから，

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\rho+\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0, \tag{1.3}$$

または

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$$

とも書ける（D/Dt の定義は § 2 参照）[*2].

ベクトル

$$\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v} \tag{1.4}$$

は**質量フラックス密度**と呼ばれ，大きさは，$\boldsymbol{v}$ に垂直な単位面積を単位時間に通過する流体の質量に等しい．

⬆ 目次へ戻る

§ 2　Euler 方程式

Euler 方程式

流体中の体積に働く力は，（エネルギーの散逸過程，つまり粘性や熱伝導が無視できる**理想流体**の場合には）境界面上の圧力の積分

$$-\int p\,d\boldsymbol{S}=-\int\operatorname{grad}p\,dV$$

に等しい．

[*2] 流体中の微小体積 δV の相対的な時間変化は $\dfrac{1}{\delta V}\dfrac{D\delta V}{Dt}=\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ であるから，連続の式は

$$\frac{D}{Dt}(\rho\delta V)=0$$

とも書ける．これが Lagrange 的記述での質量保存則を表していることは明らかである．

$\because$ 発散定理 $\int \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \int \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\,dV$ で $\boldsymbol{A} = p\boldsymbol{c}$（$\boldsymbol{c}$ は定ベクトル）とおけば

$$\int p\boldsymbol{c}\cdot d\boldsymbol{S} = \int \boldsymbol{c}\cdot \mathrm{grad}\,p\,dV \qquad \therefore \quad \boldsymbol{c}\cdot\left(\int p\,d\boldsymbol{S} - \int \mathrm{grad}\,p\,dV\right) = 0.$$

任意の $\boldsymbol{c}$ についてこの式が成り立つためには，() 内は $\mathbf{0}$ でなければならない．

つまり，単位体積の流体は周囲の流体から $-\,\mathrm{grad}\,p$ の力（圧力傾度力）を受ける．この単位体積の運動方程式は

$$\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = -\,\mathrm{grad}\,p. \tag{2.1}$$

ここで微分 $\dfrac{D\boldsymbol{v}}{Dt}$ は，固定点での流速変化ではなく，流体粒子の速度変化を表している（D/Dt を Lagrange 微分，物質微分などという）．これを固定点での微分に書き直そう．時間 Δt の間の流体粒子の速度変化 $\Delta\boldsymbol{v}$ は，

- 固定点における変化
- Δt の間に位置が $\Delta\boldsymbol{r}$ ずれたことによる変化

の和であるから，

$$\Delta\boldsymbol{v} = \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}\Delta t + \left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z}\Delta z\right) = \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}\Delta t + (\Delta\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v}.$$

よって，

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v}. \tag{2.2}$$

一般に

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}$$

となる．右辺第 1 項は固定点での時間変化，第 2 項は「移流項」である．

(2.2) を (2.1) へ代入し

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p. \tag{2.3}$$

これが求める運動方程式で，**Euler 方程式**と呼ばれる．もし流体が一様重力場中にあるなら，単位体積では力 $\rho\boldsymbol{g}$ が働くから，(2.3) は

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \boldsymbol{g} \tag{2.4}$$

となる．ここで $\boldsymbol{g}$ は重力加速度ベクトルで，一般には単位質量あたりの外力 $\boldsymbol{K}$ である．

エネルギー方程式（断熱の式）

理想流体では流体内の熱輸送がなく，断熱的である．つまり，流体粒子の（単位質量あたり[*3]の）エントロピー s は

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \tag{2.5}$$

または

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,s = 0 \tag{2.6}$$

[*3] 日本語版では「単位体積あたり」となっているが，誤植だろう．日本語版には，他にも同様のミスがある．

を満たす．(1.2) と (2.6) より

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho s \boldsymbol{v}) = s\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial s}{\partial t} + \rho\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\, s + s\,\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})$$
$$= s\left(\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})}\right) + \rho\left(\cancel{\frac{\partial s}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\, s}\right) = 0 \tag{2.7}$$

となり，エントロピーに対する連続の式が得られる．$\rho s\boldsymbol{v}$ は「エントロピーフラックス密度」とでも呼ぶべき量である．

もし，ある時刻に流体の全体積にわたってエントロピーが一様なら，その後もエントロピーは一定・一様である．この場合の断熱の式は

$$s = \mathrm{const.} \tag{2.8}$$

という簡単な形になる．以下では，このような運動（**等エントロピー運動**）を扱う．

等エントロピー運動では，(2.3) を違った形に書くことができる．$h = \varepsilon + pV = \varepsilon + \dfrac{p}{\rho}$ を，単位質量あたりの**エンタルピー**とすると（ε は単位質量あたりの内部エネルギー，$V = 1/\rho$ は比体積）

$$dh = Tds + Vdp = \frac{1}{\rho}dp.$$

よって $\dfrac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\, p = \mathrm{grad}\, h$ となり，(2.3) は

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v} = -\,\mathrm{grad}\, h. \tag{2.9}$$

ここからさらに，h を消去することができる．

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\, v^2 = \boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v}$$

であるから

$\because$ ε_{ijk} を Eddington のイプシロン（Levi-Civita の記号）とする．すなわち，(ijk) が (123) の偶置換ならば $+1$，奇置換ならば -1，それ以外なら 0 となる量で，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ の i 成分は $\varepsilon_{ijk}A_jB_k$ を表される．恒等式 $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ に注意すると

$$(\boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_i = \varepsilon_{ijk}v_j\left(\varepsilon_{klm}\frac{\partial v_m}{\partial x_l}\right) = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})v_j\frac{\partial v_m}{\partial x_l}$$
$$= v_j\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(v_jv_j) - v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\, v^2 - (\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v}\right)_i$$

となる．

(2.9) は

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} - \mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}v^2 + h\right). \tag{2.10}$$

両辺の rot を取ると，$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f = 0$ であるから

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}) = \mathrm{rot}(\boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}). \tag{2.11}$$

これは速度だけを含んでいる．$\boldsymbol{\omega} \equiv \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$ で**渦度**を定義すると

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \mathrm{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}).$$

これは**渦度方程式**と呼ばれる．

運動方程式の境界条件

理想流体の境界条件は，流体が固体の表面を通り抜けないことである．固体表面に垂直な速度成分を v_n とすると，

- 固体表面が静止しているとき
$$v_n = 0. \tag{2.12}$$
- 固体表面が動くときは，v_n は固体表面の速度の垂直成分に等しい．

混じり合わない 2 つの流体の境界では，圧力が等しく（$p^{(1)} = p^{(2)}$），境界面に垂直な流速が境界面の速度の垂直成分に等しい（${v_n}^{(1)} = {v_n}^{(2)} = {v_n}^{(\mathrm{boundary})}$）．

問題 2.1

ある時刻 $t = t_0$ での流体粒子の座標を a とする（これは Lagrange 座標と呼ばれる）．a, t を用いて，理想流体の 1 次元運動の方程式を書け．

【解答】このような Lagrange 的記述のもとでは，任意の流体粒子の座標 x は a, t の関数とみなされる；$x = x(a, t)$. $t = t_0$ での密度分布を $\rho_0(a)$ とすると，連続の式は

$$\rho dx = \rho_0 da \qquad \therefore \quad \rho\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_t = \rho_0.$$

流体粒子の速度は $v = \left(\dfrac{\partial x}{\partial t}\right)_a$ であり，その偏微分 $\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}\right)_a$ は加速度を表す．粒子に働く力を考え，Euler 方程式は

$$\rho_0\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_a = -\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)_t.$$

断熱の式は

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_a = 0.$$

⬆ 目次へ戻る

§3　静水力学

一様重力場中の静止流体（$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$）に対しては，Euler 方程式 (2.4) は

$$\mathrm{grad}\, p = \rho \boldsymbol{g}. \tag{3.1}$$

これは静水圧平衡を表しており，特に外力がないときは $p = \mathrm{const.}$，つまり圧力は一様となる．

まず初めに，流体の圧縮性が無視でき，ρ が一様と仮定しよう．z 軸を鉛直上向きにとると，(3.1) は

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \qquad \therefore \quad p = -\rho g z + \mathrm{const.}$$

静止流体が高さ h の自由表面をもち，その表面上で圧力が外圧 p_0 に等しいなら，表面は $z = h$ という水平面で $p_0 = -\rho g h + \mathrm{const.}$ となる．2 式を辺々引いて

$$p = p_0 - \rho g(z - h). \tag{3.2}$$

流体の体積が大きい等，ρ が一様と仮定できない場合を考える（大気など)．系が力学的に平衡であるだけでなく，熱力学的にも平衡だと仮定しよう．$\mathcal{G} = \varepsilon - Ts + \dfrac{p}{\rho}$ を単位質量あたりの Gibbs の自由エネルギーとすると，熱力学的平衡であれば温度が一定であるから

$$d\mathcal{G} = -s dT + \frac{1}{\rho} dp = \frac{1}{\rho} dp \qquad \therefore \quad \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \operatorname{grad} \mathcal{G}.$$

また，定ベクトル $\boldsymbol{g}$ は $-z$ 方向を向いているから $\boldsymbol{g} = -\operatorname{grad}(gz)$ となる．よって (3.1) は $\operatorname{grad}(\mathcal{G} + gz) = 0$ となり，流体全体にわたって

$$\mathcal{G} + gz = \mathrm{const.} \tag{3.3}$$

この「(Gibbs の自由エネルギー) ＋（外力のポテンシャルエネルギー）＝（一定)」という式は，統計力学において，外力場中にある系が熱力学的に平衡である条件として知られている（『統計物理学』§ 25 参照)．

重力場中で力学的平衡にある流体では，圧力 p は高度 z のみの関数としてよい（もし同じ高度で圧力が異なるならば，運動が生じる)．(3.1) より，ρ も z のみの関数となり

$$\rho = -\frac{1}{g} \frac{dp}{dz}. \tag{3.4}$$

ρ, p から決まる T もまた，z のみの関数となる（もし同じ高度で温度が異なるならば，平衡ではない)．

最後に，自己重力によって形を保っている流体（例えば恒星）の平衡の式を導こう．万有引力のポテンシャル ϕ は次の微分方程式を満たす；

$$\triangle \phi = 4\pi G \rho. \tag{3.5}$$

$\boldsymbol{g} = -\operatorname{grad} \phi$ であるから，(3.1) は

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = -\operatorname{grad} \phi.$$

両辺の div を取り

$$\therefore \quad \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \right) = -\triangle \phi = -4\pi G \rho. \tag{3.6}$$

なお，ここでは力学的平衡のみを考えているのであって，熱力学的平衡の成立を仮定していないことに注意．

もし天体が自転していなければ，平衡状態では球形となり，ρ, p は球対称となるだろう．球座標系での (3.6) は

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi G \rho. \tag{3.7}$$

$\because$ 球座標系での grad, div の表現

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\bigl(r^2 A_r\bigr) + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)$$

で $\partial/\partial\theta = \partial/\partial\varphi = 0$ とした式から明らかである．なお ˆ は単位ベクトルを表すものとする．

♠ ♠ Lane-Emden 方程式

圧力が密度だけの関数で $p = K\rho^{1+1/n}$ と与えられているとする（このような流体はポリトロープであるという．n はポリトロピック指数と呼ばれる）．このとき，(3.7) は ρ だけの微分方程式になり，Lane-Emden 方程式と呼ばれる；

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^n. \qquad ①$$

ここで，$\xi \equiv r/a$ は無次元化した半径で $a^2 = \dfrac{(n+1)p_c}{4\pi G{\rho_c}^2}$，$\theta$ は $\rho = \rho_c\theta^n$ により無次元化した密度，p_c, ρ_c は中心での圧力と密度である．ふつう，

- $\theta(0) = 1$（中心で $\rho = \rho_c$）
- $\left.\dfrac{d\theta}{d\xi}\right|_{\xi=0} = 0$（中心で圧力・密度勾配がない）

という境界条件を付ける．

①の導出は次の通り．(3.7) の両辺を $4\pi G\rho_c$ で割り

$$\begin{aligned}
-\theta^n &= \frac{1}{4\pi G\rho_c}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi G\rho_c}\frac{1}{(a\xi)^2}\frac{d}{d(a\xi)}\left[\frac{(a\xi)^2}{\rho_c\theta^n}\frac{d}{d(a\xi)}K(\rho_c\theta^n)^{1+1/n}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi G\rho_c}\cdot\frac{K{\rho_c}^{1+1/n}}{a^2\rho_c}\cdot\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi^2}{\theta^n}\frac{d\theta^{n+1}}{d\xi}\right) \\
&= \frac{K{\rho_c}^{1/n}}{4\pi G\rho_c}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi^2}{\cancel{\theta^n}}(n+1)\cancel{\theta^n}\frac{d\theta}{d\xi}\right) \\
&= \underline{\frac{(n+1)K{\rho_c}^{1/n}}{4\pi G\rho_c}}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right).
\end{aligned}$$

$p_c = K{\rho_c}^{1+1/n}$ より $K{\rho_c}^{1/n} = p_c/\rho_c$ であるから，下線部は a^2 に等しい．よって①が成り立つ．

⬆ 目次へ戻る

§4　対流が起こらない条件

流体は，熱力学的には平衡でなくても，力学的には平衡（マクロな運動がない）でありうる（例えば (3.1) は，温度が一様でなくても成立する力学的平衡の条件である）．このような平衡は，ある特定の条件下でのみ安定である．不安定の場合，流体中の温度を一様にするような流れ（**対流**）が生じる．よって，安定の条件は対流がないことであり，以下のように定式化される．

回りくどい言い方だが，対偶論法を使っていると思えばよい．つまり，「不安定 $\Longrightarrow$ 対流がある」の対偶を取ると「対流がない $\Longrightarrow$ 安定」となるから，安定の条件は対流がないことだ，というわけである．

高さ z にある，比体積 $V(p,s)$ の流体部分を考える（p, s は高さ z における平衡状態での圧力とエントロピー）．この流体が断熱的に ζ だけ上昇し，比体積が $V(p',s)$ になったとする（p' は高さ $z+\zeta$ での圧力）．平

衡が安定であるためには，元の位置へ戻そうとす力が働かなければならない．

これは必要条件だが十分条件とは限らない，というが，その意味が今ひとつわからない．中立安定のように，平衡点へ収束はしないがその周りに留まり続ける例があるため，「復元力が働く $\Longrightarrow$ 安定」とは限らない，ということだろうか？

つまり，変位した流体が，そこに元からあった流体よりも重い（比体積で比べると小さい）から

$$V(p', s') > V(p', s)$$

でなければならない（s' は高さ $z+\zeta$ における平衡状態でのエントロピー）．$\Delta s \equiv s' - s \simeq \dfrac{ds}{dz}\zeta$ とおくと

$$V(p', s') - V(p', s) = V(p', s + \Delta s) - V(p', s) \simeq \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p \Delta s = \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dz}\zeta$$

であるから

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dz} > 0. \tag{4.1}$$

熱力学の公式

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

を用いると

Gibbs の自由エネルギー，エンタルピーの全微分から導かれる Maxwell 関係式

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p$$

を用いると，定圧比熱は

$$c_p = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = -T\frac{\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T}{\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s} = T\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p}.$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{ds}{dz} > 0. \tag{4.2}$$

多くの物体は加熱により膨張するから $\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p > 0$ であり

$$\frac{ds}{dz} > 0. \tag{4.3}$$

つまり，エントロピーは高さとともに増加しなければならない．

ここから，温度勾配の満たすべき条件を導こう．s を T, p の関数とみて

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dz} &= \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dz} \\ &= \frac{c_p}{T}\frac{dT}{dz} - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{dp}{dz} \\ &\qquad \text{(3.4) より } dp/dz = -\rho g = -g/V \\ &= \frac{c_p}{T}\frac{dT}{dz} + \frac{g}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p > 0.\end{aligned}$$

♠ $\beta \equiv \dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ を（体積）熱膨張率として

$$-\frac{dT}{dz} < \frac{gT}{c_p V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{g\beta T}{c_p}. \tag{4.4}$$

理想気体の場合 $\beta T = \dfrac{1}{V}\cdot\dfrac{nR}{p}T = 1$ であるから

$$-\frac{dT}{dz} < \frac{g}{c_p} \equiv \Gamma_d \,(\text{乾燥断熱減率}). \tag{4.5}$$

(4.4),(4.5) の右辺は（普通の物質では）正である．よって，高さとともに温度が上がるなら安定である．また，高さとともに温度が下がる場合でも，温度減率がある程度小さく $-\dfrac{dT}{dz} < \dfrac{g\beta T}{c_p}$ ならば安定だが，温度減率が大きく $-\dfrac{dT}{dz} > \dfrac{g\beta T}{c_p}$ ならば不安定であり，対流が発生する．20℃ の水の場合 $\dfrac{g\beta T}{c_p} \simeq 1$℃/6.7 km，大気の場合 $\Gamma_d \simeq 1$℃/100 m である．

⬆ 目次へ戻る

§5　Bernoulli の定理

流体中のどの点でも，速度が時間によらず一定である流れを**定常流**という（つまり $\boldsymbol{v}$ が座標だけの関数で $\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = 0$）．この場合，運動方程式を簡単に積分することができる．(2.10) は

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}\times \operatorname{rot}\boldsymbol{v} - \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}v^2 + h\right). \tag{5.1}$$

ここで，**流線**の概念を導入しよう．流線とは，その線上の任意の点における接ベクトルがその点での速度ベクトルと平行であるような曲線で，以下の微分方程式系により決められる．

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \tag{5.2}$$

定常流では，流線は時間とともに変化せず，流体粒子の道筋（流跡線）と一致する．非定常流では両者は一致しない．この場合，流線の接線は各瞬間・各点での流体粒子の速度の方向を表し，流跡線は様々な時刻における特定の粒子の速度の方向を表している．

（空間に固定された）1 点を通過した流体粒子を連ねてできる曲線を，流脈線という（非定常流では流脈線は流線とも流跡線とも一致しないが，定常流ではこれらと一致する）．流跡線は川の流れに乗った枯れ葉の動き，流脈線は煙突から出る煙の動きに相当する．

さて，各点での流線の単位接ベクトルを $\boldsymbol{l}$ として，$\boldsymbol{l}$ と (5.1) の内積を取ろう．ある方向へ勾配を射影したものはその方向の微分であるから $\boldsymbol{l}\cdot\operatorname{grad} f = \dfrac{\partial f}{\partial l}$，$\boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{v}$ より $\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v}) = 0$ であるから

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{2}v^2 + h\right) = 0 \qquad \therefore\quad \frac{1}{2}v^2 + h = \text{const.}\quad（\text{各流線に沿って}） \tag{5.3}$$

となる（右辺の値は流線ごとに異なる）．(5.3) は Bernoulli **の定理**と呼ばれる．

流れが一様重力場中にあるときは，(5.1) の右辺に $\boldsymbol{g}$ を付け加えて

$$-\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{2}v^2+h\right)+\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{l}=0.$$

鉛直上向きに z 軸を取ると $\boldsymbol{g}=-g\hat{\boldsymbol{z}}$，$\hat{\boldsymbol{z}}$ と $\boldsymbol{l}$ のなす角を θ とすると $\cos\theta=\dfrac{dz}{dl}$ であるから $\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{l}=-g\dfrac{dz}{dl}$ となり

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{2}v^2+h+gz\right)=0.$$

よって各流線に沿って

$$\frac{1}{2}v^2+h+gz=\mathrm{const.} \tag{5.4}$$

一般に，流体に働いている外力 $\boldsymbol{K}$ が保存力であればよい．単位質量あたりのポテンシャルエネルギーを u とすると $\boldsymbol{K}=-\operatorname{grad}u$ であるから，運動方程式は

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=\boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v}-\operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}v^2+h+u\right).$$

ここから直ちに

$$\frac{1}{2}v^2+h+u=\mathrm{const.}$$

が得られる．特に一様重力場では $u=gz$ であるから，(5.4) が得られる（このようにすれば，$\boldsymbol{g}$ と $\boldsymbol{l}$ のなす角を考える必要はない）．

⬆ 目次へ戻る

§6　エネルギーフラックス

空間に固定された体積要素に含まれるエネルギーの収支は，以下の式で表される．

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\varepsilon\right)+\operatorname{div}\left[\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+h\right)\right]=0 \tag{6.1}$$

あるいは，$h=\varepsilon+\dfrac{p}{\rho}$ より

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\varepsilon\right)+\operatorname{div}\left[\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right)\right]=0. \tag{①}$$

以下①を証明しよう．

連続の式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=0$$

と Euler 方程式

$$\rho\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\operatorname{grad}\frac{v^2}{2}-\boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\right)=-\operatorname{grad}p \tag{②}$$

に注意する．

$$
\begin{aligned}
(\text{①の左辺}) &= \frac{v^2}{2}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{v^2}{2}\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) + \rho\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\frac{v^2}{2} \\
&\quad + \varepsilon\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) + \rho\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\varepsilon + p\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}p \\
&= \frac{v^2}{2}\cancel{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})\right)} + \underbrace{\boldsymbol{v}\cdot\left(\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho\operatorname{grad}\frac{v^2}{2} + \operatorname{grad}p\right)}_{(\,)=\rho\boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\text{，これと }\boldsymbol{v}\text{ の内積}=0} \\
&\quad + \varepsilon\cancel{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})\right)} + \rho\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\varepsilon + p\operatorname{div}\boldsymbol{v}
\end{aligned}
$$

残った項を消すために，熱力学第 1 法則を用いる．

$$
d\varepsilon = Tds - pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho
$$

より

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t} = T\dfrac{\partial s}{\partial t} + \dfrac{p}{\rho^2}\dfrac{\partial \rho}{\partial t} \\
\operatorname{grad}\varepsilon = T\operatorname{grad}s + \dfrac{p}{\rho^2}\operatorname{grad}\rho
\end{cases}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
(\text{①の左辺}) &= \rho\left(T\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{p}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) + \rho\boldsymbol{v}\cdot\left(T\operatorname{grad}s + \frac{p}{\rho^2}\operatorname{grad}\rho\right) + p\operatorname{div}\boldsymbol{v} \\
&= \frac{p}{\rho}\cancel{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\rho + \rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right)} + \rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}s\right) \\
&= \rho T\frac{Ds}{Dt} = 0.
\end{aligned}
$$

後の都合上，結果を一般の形に書き直しておく．粘性流体の運動方程式は，②の右辺に粘性応力テンソル σ'_{ij} の微分を加えた

$$
\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\frac{v^2}{2} - \boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\right) = -\operatorname{grad}p + \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j}
$$

である．よって下線部は 0 ではなく $v_i\dfrac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j}$ となり，

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varepsilon\right) + \operatorname{div}\left[\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + h\right)\right] = \rho T\frac{Ds}{Dt} + v_i\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} \qquad ③
$$

を得る．③は § 49 で参照する．

さて，(6.1) を体積積分して Gauss の発散定理を用いると

$$
\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varepsilon\right)dV = -\int_V\operatorname{div}\left[\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + h\right)\right]dV = -\int_S\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + h\right)\cdot d\boldsymbol{S}. \qquad (6.2)
$$

左辺は体積中の全エネルギーの時間変化率を表しているから，右辺は，単位時間にこの体積から流れ出すエネルギーである．ベクトル

$$
\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + h\right) \qquad (6.3)
$$

は**エネルギーフラックス密度**と呼ぶことができる．その大きさは，$\boldsymbol{v}$ に垂直な単位面積を単位時間に通過するエネルギーに等しい．

(6.2) の物理的意味を考えるために，次のように変形する；

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\varepsilon\right)dV = -\int_S \rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+\varepsilon\right)\cdot d\boldsymbol{S} - \int_S p\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

右辺第 1 項は，流体の運ぶ全エネルギー（運動エネルギーと内部エネルギー）を表す．第 2 項は，体積内の流体が周囲からされた仕事を表す．

⬆ 目次へ戻る

§7　運動量フラックス

§6 と同様に，$\rho\boldsymbol{v}$ の時間変化を発散の形で書こう．連続の式と Euler 方程式を用いると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) &= v_i\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}\\
&= v_i\left[-\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j)\right]-\rho v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial p}{\partial x_i}\\
&= -\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j)-\frac{\partial p}{\partial x_i}\\
&= -\frac{\partial}{\partial x_j}(p\delta_{ij}+\rho v_i v_j).
\end{aligned}$$

よって，**運動量フラックス密度テンソル**を

$$\Pi_{ij} \equiv p\delta_{ij}+\rho v_i v_j \tag{7.2}$$

で定義すれば[*4]，

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} \tag{7.1}$$

となる．

Π_{ij} の意味を明らかにするため (7.1) を体積積分する．

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho v_i\, dV = -\int_V \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j}dV = -\int_S \Pi_{ij}dS_j \tag{7.3}$$

2 つ目の等号は Gauss の発散定理を用いているだけである．明示的に書けば，例えば $i=1$ の成分は

$$\int_V \frac{\partial \Pi_{1j}}{\partial x_j}dV = \int_V\left(\frac{\partial \Pi_{11}}{\partial x}+\frac{\partial \Pi_{12}}{\partial y}+\frac{\partial \Pi_{13}}{\partial z}\right)dV = \int_S(\Pi_{11}dS_x+\Pi_{12}dS_y+\Pi_{13}dS_z) = \int_S \Pi_{1j}dS_j$$

左辺は，考えている体積に含まれる運動量の i 成分の時間変化率を表している．よって右辺は，単位時間に表面から流れ出す運動量である．$\boldsymbol{n}$ を外向き法線ベクトルとすると $\Pi_{ij}dS_j = \Pi_{ij}n_j dS$ であるから，単位表面積を通る運動量フラックスは $\Pi_{ij}n_j$ であることがわかる．ベクトルで書けば

$$p\boldsymbol{n}+\rho\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}) \tag{7.4}$$

[*4] これは 2 階テンソルであり，$\boldsymbol{\Pi} = \begin{pmatrix} p+\rho {v_x}^2 & \rho v_x v_y & \rho v_x v_z \\ \rho v_x v_y & p+\rho {v_y}^2 & \rho v_y v_z \\ \rho v_x v_z & \rho v_y v_z & p+\rho {v_z}^2 \end{pmatrix}$ と書けば明らかなように対称である．

となる．

このように Π_{ij} は，x_j 軸に垂直な単位面積を単位時間に流れる運動量の j 成分を表す．また (7.4) は，$\boldsymbol{n}$ 方向の運動量フラックスを与える．$\boldsymbol{n}$ を $\boldsymbol{v}$ の方向にとることにより，運動と同じ（縦）方向に輸送される運動量は $p+\rho v^2$ であることがわかる．また $\boldsymbol{n}$ を $\boldsymbol{v}$ と垂直な方向にとることにより，垂直（横）方向に輸送される運動量は p であることがわかる．

⬆ 目次へ戻る

§8　循環の保存

Kelvin の循環定理

ある閉曲線 C に沿った線積分

$$\varGamma = \oint_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l}$$

を**循環**という．C が流体粒子から成り立っている（空間中に固定されていない）とすると，C は流れに乗って動いていく．それに伴う循環の時間変化 $\dfrac{D}{Dt}\displaystyle\oint_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l}$ を計算しよう．

混乱を避けるため，時間微分を D，空間微分を δ で表すことにすると，$d\boldsymbol{l}=\delta\boldsymbol{r}$ である．

$$\frac{D}{Dt}\oint_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l} = \frac{D}{Dt}\oint_C \boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{r} = \oint_C \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\cdot\delta\boldsymbol{r} + \oint_C \boldsymbol{v}\cdot\frac{D(\delta\boldsymbol{r})}{Dt}$$

(2.9) より $\dfrac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = -\operatorname{grad} h$ である．また，

$$\boldsymbol{v}\cdot\frac{D(\delta\boldsymbol{r})}{Dt} = \boldsymbol{v}\cdot\delta\left(\frac{D\boldsymbol{r}}{Dt}\right) = \boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{v} = \delta\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

は 1 周積分すると 0 になる．よって

$$\frac{D}{Dt}\oint_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l} = -\oint_C \operatorname{grad} h\cdot\delta\boldsymbol{r} + 0 = -\int_S \operatorname{rot}(\operatorname{grad} h)\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

となるから

$$\varGamma = \oint_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l} = \text{const.}\ (\text{流体の運動にしたがって}). \tag{8.1}$$

つまり，理想流体では流れとともに動く閉曲線についての循環は時間によらず一定である（**Kelvin の循環定理，循環の保存則**）[*5]．

ここで，循環の保存則は (2.9) から導かれたことに注意せよ．(2.9) で用いている等エントロピーの仮定が破れると，循環は保存しない（数学的には，$\dfrac{1}{\rho}\operatorname{grad} p$ がスカラー関数の grad の形に書ければよい．つまり，p と ρ が 1 対 1 対応であればよい）．

♠ ♠ さまざまな渦定理

渦に関しては色々な定理があるので，ここで整理しておく．

[*5] 結果は一様重力場（さらにいえばポテンシャル外力場）中でも成り立つ．なぜなら，(2.9) で h が $h+gz$ に変わるだけで，rot を取ると結局 0 になるからである．

まず，必要な用語を導入する．速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して流線を考えたのと同様に，渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ に対して渦線を考えることができる．つまり，その線上の任意の点における接ベクトルがその点での渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ と平行であるような曲線を**渦線**という．また，流体中にとった曲線上の各点を通る渦線が作る曲面を**渦面**といい，特に閉曲線 C 上の各点を通る渦線が作る曲面を**渦管**という．C の断面積が微小の渦管を**渦糸**という．

循環・渦管（渦糸）の強さが渦管（渦糸）に固有の量であること

ある時刻における渦管を考え，渦管を一周する 2 つの閉曲線を C, C' とする．また，C 上の点 A と C' 上の点 A$'$ を線で結び，閉曲線「$C \to \mathrm{AA}' \to -C'$（$C'$ を C とは逆向きに回ることを意味する）$\to \mathrm{A}'\mathrm{A}$」にストークスの定理を適用すると

$$\oint_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_{\mathrm{AA}'} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l} + \oint_{-C'} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_{\mathrm{A}'\mathrm{A}} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

曲面 S として渦管の壁面をとることにすれば，渦管の定義から $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} \perp d\boldsymbol{S}$ であるから右辺は 0 である．また，AA' の線積分と $\mathrm{A}'\mathrm{A}$ の線積分は互いに打ち消しあい，$\displaystyle\oint_{-C'} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l} = -\oint_{C'} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l}$ に注意すると

$$\oint_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l} = \oint_{C'} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l}.$$

よって，循環は（ある時刻の）渦管上の任意の閉曲線について同じ値をとる．

特に，微小な閉曲線 δC を通る渦糸を考え，δC で囲まれる閉曲面を $\delta\boldsymbol{S}$ とする．断面積 δS が微小であるから，断面内で渦度の大きさ ω は一定とみなすことができ，

$$\oint_{\delta C} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{\delta\boldsymbol{S}} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S} \simeq \omega\delta S$$

は渦糸上の任意の点で同じ値をとる．渦度の大きさと断面積の積 $\omega\delta S$ は「渦糸の強さ」と呼ばれる．したがって，

渦糸の強さはその渦糸に固有の量である．　①

$\omega\delta S = \mathrm{const.}$ より，渦糸の細いところでは渦度が大きく，渦糸の太いところでは渦度が小さいことがわかる．

断面積が有限の渦管についても，沢山の渦糸の集合とみなせば，同様の結果が成り立つ．

Helmholtz の渦定理

次に渦面について考えよう．ある時刻において，渦面 S と，渦面上の閉曲線 C を考える．渦面上では $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} \perp d\boldsymbol{S}$ であるから

$$\oint_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

C が流れに乗って C' になったとし，C' の乗っている平面を S' とすれば，Kelvin の循環定理より

$$0 = \oint_{C'} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{S'} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}$$

を得る．C' したがって C は任意にとれるから，S' 上の任意の点で $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$ となる．よって，S' も渦面であり，渦面は常に渦面のままであることがわかる．定義より，渦管は渦面の一種であるから，

流体が動いても，渦管（渦糸）は渦管（渦糸）であり続ける　②

（ある瞬間の渦管（渦糸）を構成する流体粒子は，その後の時刻も渦管（渦糸）を構成する）ということがわかる．これと①を合わせると，

渦管（渦糸）の強さは時間的に変化しない　③

という結論が導かれる．あるいは

渦度は，各渦管（渦糸）に乗って移動していく　④

と解釈してもよい．②〜④を総称して Helmholtz **の渦定理**と呼ぶ．

Lagrange **の渦定理（渦の不生不滅の定理）**

Helmholtz の渦定理から，ある時刻に $\omega = 0$ であった流体はその後も $\omega = 0$ であり，逆にある時刻に $\omega \neq 0$ の流体はその後も $\omega \neq 0$ であることがわかる．これを Lagrange **の渦定理**（**渦の不生不滅の定理**）という[*6]．ただし，この定理は渦あり／渦なしを区別する定性的なものと受け止めるべきである．また，§ 9 で見るように，物体表面で「はがれ」が起こる場合には，渦のないところから渦が生成される．

最後に，これらの渦定理の適用条件について考えよう．Kelvin の循環定理と，そこから導かれる Helmholtz の渦定理，Lagrange の渦定理は，いずれも理想流体・等エントロピー過程・ポテンシャル外力場という条件下で成り立つ（当然ながら，粘性流体では成り立たないことに注意）．一方，①は，Kelvin の循環定理が成り立つかどうかによらない一般的な結果である．

♠ 問題 8.1

等エントロピーではない（傾圧的）流れにおいて，移動する流体粒子とともに $\dfrac{\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,s}{\rho}$ という量が保存されることを示せ（H. Ertel 1942）．
（この結果は，Ertel の渦位保存則と呼ばれている．例えば総観気象学入門（小倉）の 4.1.2 節を見よ．なお，気象学で用いられる温位 θ とエントロピー s の間には $s = c_p \log\theta + \mathrm{const.}$ という関係がある.）

【解答】 等エントロピーではないから，Euler 方程式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} - \mathrm{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p$$

[*6] ここでは詳細な証明を省くが，Lagrange 的記述，Euler 的記述の双方で，この定理を定量的に説明することができる．

まず Lagrange 的記述では，初期時刻での座標を (a,b,c)，渦度を (ξ_0,η_0,ζ_0)，密度を ρ_0 とし，その後の時刻での座標を (x,y,z)，渦度を (ξ,η,ζ)，密度を ρ とすると，

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{\rho}{\rho_0}\left(\dfrac{\partial x}{\partial a}\xi_0 + \dfrac{\partial x}{\partial b}\eta_0 + \dfrac{\partial x}{\partial c}\zeta_0\right) \\ \eta = \dfrac{\rho}{\rho_0}\left(\dfrac{\partial y}{\partial a}\xi_0 + \dfrac{\partial y}{\partial b}\eta_0 + \dfrac{\partial y}{\partial c}\zeta_0\right) \\ \zeta = \dfrac{\rho}{\rho_0}\left(\dfrac{\partial z}{\partial a}\xi_0 + \dfrac{\partial z}{\partial b}\eta_0 + \dfrac{\partial z}{\partial c}\zeta_0\right) \end{cases}$$

が成り立つ（Cauchy の積分；証明は今井や Lamb 参照）．よって，最初に流体粒子の渦度が 0 ならばその後も 0 であり，逆に最初に渦度の成分に 1 つでも 0 でないものがあれば，その後も渦度は 0 でない．

また Euler 的記述でも，渦度方程式 (2.11) から類似の式

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot\mathrm{grad}\right)\boldsymbol{v}$$

が示せる．

である．両辺の rot をとると，傾圧の場合の渦度方程式が得られる；

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} &= \mathrm{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}) - \mathrm{rot}\left(\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p\right) \\
&= \mathrm{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}) - \mathrm{grad}\left(\frac{1}{\rho}\right)\times\mathrm{grad}\,p - \frac{1}{\rho}\,\cancel{\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,p)} \\
&= \mathrm{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{\rho^2}\,\mathrm{grad}\,\rho\times\mathrm{grad}\,p.
\end{aligned}$$

この式と $\mathrm{grad}\,s$ の内積を作る．$s = s(p,\rho)$ であるから

$$\begin{aligned}
ds &= \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_\rho dp + \left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_p d\rho, \\
\mathrm{grad}\,s &= \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_\rho \mathrm{grad}\,p + \left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_p \mathrm{grad}\,\rho.
\end{aligned}$$

$\mathrm{grad}\,s$ は $\mathrm{grad}\,p$, $\mathrm{grad}\,\rho$ の線形結合であるから，$\mathrm{grad}\,s\cdot(\mathrm{grad}\,\rho\times\mathrm{grad}\,p) = 0$ となる．よって

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}\,s\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} &= \mathrm{grad}\,s\cdot\mathrm{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}) + 0 \\
&\quad \text{ベクトル解析の公式 } \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B} - \mathrm{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \\
&= \cancel{\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,s)}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}) - \mathrm{div}[\mathrm{grad}\,s\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega})] \\
&\quad [\,]\text{ 内をベクトル 3 重積で展開} \\
&= -\,\mathrm{div}[\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,s) - \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,s)] \\
&\quad \text{ベクトル解析の公式 } \mathrm{div}(\boldsymbol{A}f) = f\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{grad}\,f \\
&= -(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,s)\cdot\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,s) + (\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,s)\cdot\cancel{\mathrm{div}\,\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}(\underbrace{\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,s}_{=-\partial s/\partial t}) \\
&= -(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,s)\cdot\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,s) - \boldsymbol{\omega}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{grad}\,s),
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,s) + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,s) + (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,s)\cdot\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0.$$

前半を $\dfrac{D}{Dt}$ でまとめ，後半に $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{D\rho}{Dt}$ を代入すると

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,s) + (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,s)\left(-\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}\right) &= 0 \\
\frac{1}{\rho}\frac{D}{Dt}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,s) + (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,s)\left(-\frac{1}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt}\right) &= 0 \\
\therefore\quad \frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,s}{\rho}\right) &= 0
\end{aligned}$$

となる．

以上の証明は本文に従ったが，逆向きに示した方がわかりやすいかもしれない．

$$\begin{aligned}
\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,s}{\rho}\right) &= \frac{D}{Dt}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,s) + (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,s)\left(-\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,s) + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,s) + (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,s)\cdot\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}\cdot\mathrm{grad}\,s + \boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right) + \mathrm{div}[\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,s)]
\end{aligned}$$

第 3 項は，ベクトル三重積の公式より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}[\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,s)] &= \mathrm{div}[\mathrm{grad}\,s\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega})+\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,s)] \\
&= \cancel{\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,s)}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega})-\mathrm{grad}\,s\cdot\mathrm{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega})+(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,s)\cancel{\mathrm{div}\,\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,s)
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,s}{\rho}\right) &= \mathrm{grad}\,s\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}-\mathrm{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega})\right)+\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\cancel{\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,s\right)} \\
&= \mathrm{grad}\,s\cdot\left(\frac{1}{\rho^2}\,\mathrm{grad}\,\rho\times\mathrm{grad}\,p\right)=0
\end{aligned}
$$

となる．

⬆ 目次へ戻る

§9　ポテンシャル流

循環の保存則から，重要な結果を導くことができる．

まずは定常流を考える．ある流線上のある点で，渦度が 0 であるとする．その点を取り囲む無限小の閉曲線について循環を計算すると

$$
\Gamma=\int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}=0
$$

であるから，この点のまわりの循環は 0 である．時間の経過とともに，閉曲線は流体とともに動くが，無限小のままであり，同じ流線を囲むことは明らかである（定常流では流線と流体粒子の軌跡が一致することに注意）．一方で循環の値も 0 で一定のままである．よって，流線上の全ての点で循環は 0 となり

流線上のある 1 点で $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{0}$ ならば，その流線上の任意の点で $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{0}$　①

という結論が導かれる[*7]．

定常流でない場合にも，流線の代わりに流跡線に対して①が成り立つ．

以上から，次の議論が可能であるように思える；無限遠から流れてくる一様な定常流中に物体を置いたとき，無限遠では $\boldsymbol{v}=\mathrm{const.}$ つまり $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{0}$ であるから，①より全空間にわたって $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{0}$ となる．このような流れは，**渦なしの流れ（ポテンシャル流）**と呼ばれる．つまり

無限遠で一様な，物体まわりの定常流はポテンシャル流である．　②

また，次のことも言えそうである；ある瞬間に流体全体で渦なしなら，流体内の任意の閉曲線に関する循環は 0 である[*8]から，Kelvin の循環定理よりそれ以降も渦なしである．つまり

ある瞬間に流れがポテンシャル流ならばその後もポテンシャル流である．　③

（特に，最初に静止状態にあった流れはポテンシャル流でなければならない．）

[*7] ①は乱流では意味を持たない．また，流体粒子が衝撃波面を通過した後も，一般に渦度は 0 でなくなる（衝撃波面を通過すると，エントロピーが増加するため）．

[*8] 厳密には，流体が単連結である場合に限る．多重連結の場合には，1 点に縮めようとするときに流体の境界を越えてしまうような閉曲線についての循環は 0 にはならない（ストークスの定理が適用できない）．多重連結領域内の閉曲線についての循環が 0 となるのは，領域に切れ目を入れて，閉曲線の存在する領域を単連結にすることができる場合である．

しかし実際には，②③は正しくない．というのは，物体の表面を通る流線に対しては，流線を取り囲む閉曲線をとることができないから，この流線上のいたるところで $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ とは限らないからである．この場合，物体表面で「はがれ」が起こりうる．すなわち，流線はある距離の間は物体表面に沿っているが，ある点で物体から離れ，流体の中に入っていく．この結果，この点から後方へ「接線速度の不連続面」が生じる．この面上では速度は接線方向に平行で，値は面の両側で不連続となる（一方の流体が他方の上を「滑る」）．数学的に言えば，この面は渦度が 0 でない面に対応している*9．

このような不連続があるとき，理想流体の運動方程式の解は一意ではない．すなわち，不連続面の下側で速度が任意の値をとるから無限の解が存在してしまう．しかし，このような不連続な解を論じることはあまり意味がない．なぜなら，接線方向の速度不連続は不安定であり，**乱流**となるからである．

実際には，そもそも完全な理想流体なるものが存在しないために，一意的な解が存在する．実在流体は粘性を持ち，たとえそれがどんなに小さくても，物体に隣接する領域に**境界層**が生じる．そして，境界層理論（第 4 章）に基づいて，無数の中からただ 1 つの解が選ばれる*10．

このように，物体まわりのポテンシャル流は実際には存在しそうもないが，それでも物体まわりのポテンシャル流の研究が重要となる場合がある．1 つは流線形の物体のまわりに生じる流れで，物体表面の薄い流体層と背後の伴流部分を除けば，流れはポテンシャル流となる（§ 46）．

もう 1 つは，流体中で物体が微小に振動する場合である．物体の代表的な長さ l に比べて振動の振幅 a が非常に小さい（$a \ll l$）場合には，Euler 方程式の各項のオーダーを比較することで，物体まわりの流れがポテンシャル流となることが示せる；振動する物体の速度を u，振動数を ω とする（物体の変位は $ae^{i\omega t}$，速度は $ue^{i\omega t}$ となる．ただし $u \sim a\omega$）．流体の速度や時間変化の仕方は物体の振動のそれに近いだろうから

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \sim \omega u \sim \frac{u^2}{a}.$$

次に，流体の速度は，物体の大きさ l 程度の距離にわたって大きく変化するだろうから

$$(\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad})\boldsymbol{v} \sim \frac{v^2}{l}.$$

$a \ll l$ であるから，移流項を $\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}$ に比べて無視することができ，流体の運動方程式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\,\mathrm{grad}\, h$$

となる．rot をとって

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = 0 \qquad \therefore \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = \mathrm{const.}$$

振動では速度の時間平均は 0 であるから，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ となる．よって，微小振動する物体まわりの流れは第 1 近似でポテンシャル流である．

ポテンシャル流の一般的性質

さて，ポテンシャル流の一般的な性質を調べよう．まず，ポテンシャル流となるのは（事実上）等エントロピー（順圧）の場合に限る．もし流れが等エントロピー的でなければ，循環の保存則は成り立たないから，（もしある瞬間に偶然ポテンシャル流になったとしても）渦度 0 の状態は持続しないからである．

*9 面に沿った，長さ δl，幅 δd の長方形に対して Stokes の定理を用いると $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} \cdot \delta S \simeq (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)\delta l \neq 0$

*10 一般に，物体まわりの流れでは，はがれを伴う解を捨てなければならない．はがれが生じるなら，乱流となる．

次に，ポテンシャル流中にとった閉曲線についての循環を考えると，Stokes の定理より

$$\oint_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S} = 0 \tag{9.1}$$

となる．もし，ある流線が閉じていたとすると，この閉曲線の沿った循環は明らかに 0 ではない[*11]．よって，

ポテンシャル流中には閉じた流線は存在できない　　④

ということになる[*12]．

繰り返しの注意になるが，流体が多重連結領域の場合には，(9.1) や④は成り立たない．

速度ポテンシャル

rot が 0 である任意のベクトル場と同様，ポテンシャル流の速度は**速度ポテンシャル** ϕ を用いて

$$\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\,\phi \tag{9.2}$$

と書くことができる（他の分野と異なり，マイナスを付けないのが慣例である）．(2.10) の形の Euler 方程式に代入し

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{grad}\,\phi) + \mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \boldsymbol{v}\times\cancel{\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\phi)} = -\,\mathrm{grad}\,h,$$

$$\mathrm{grad}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + h\right) = 0.$$

よって

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + h = f(t) \quad \text{（時間の任意関数）}. \tag{9.3}$$

これはポテンシャル流における方程式の第一積分で，**圧力方程式**と呼ばれる．これを

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi - \int f\,dt\right) + \frac{1}{2}v^2 + h = 0$$

と書き換えればわかるように，$\phi' = \phi - \displaystyle\int f\,dt$ とおいても $\mathrm{grad}\,\phi' = \mathrm{grad}\,\phi = \boldsymbol{v}$ となる．つまり，$f(t)$ は一般性を失うことなく 0 とすることができる．

特に定常流の場合には，$\dfrac{\partial\phi}{\partial t} = 0,\ f(t) = \mathrm{const.}$ とすることができるから

$$\frac{1}{2}v^2 + h = \mathrm{const.} \tag{9.4}$$

となり，Bernoulli の定理と同じ形になる．しかし，(5.3) 右辺の const. は流線によって異なる値をとるのに対し，(9.4) 右辺の const. は流体全体にわたって一定であることに注意する必要がある（ここに，ポテンシャル流の優位性が現れている）．

⬆ 目次へ戻る

[*11] 流線の方向は $\boldsymbol{v}$ の方向であるから，常に $\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{l} \neq 0$ であり，$\Gamma \neq 0$ である．

[*12] もちろん非ポテンシャル流（渦ありの流れ）では循環は 0 ではないから，閉じた流線は存在しうる．しかし，渦ありだからと言って必ず閉じた流線が存在する，というわけでもない．

§10　非圧縮性流体

基本方程式

多くの場合，流体の密度は変化しない（大きな膨張や収縮が起こらない）と仮定できる．そのような流れは**非圧縮性の流れ**と呼ばれる．非圧縮性流体の基礎方程式は簡単になる．Euler 方程式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad})\boldsymbol{v} = -\,\mathrm{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right)(+\boldsymbol{g}), \tag{10.1}$$

連続の式は

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0 \tag{10.2}$$

となる[*13]. 密度が未知関数ではないために, 方程式が速度のみを含むようにすることができる. それは (10.2) と (2.11)：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}) = \mathrm{rot}(\boldsymbol{v} \times \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}) \tag{10.3}$$

である．

非圧縮性流体に対して Bernoulli の定理を導こう．(10.1) は (2.9) で h を p/ρ で置き換えたものであるから，(5.4) は

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \mathrm{const.} \tag{10.4}$$

エネルギーフラックス (6.3) は

$$\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho}\right). \tag{10.5}$$

$h = \varepsilon + \dfrac{p}{\rho}$ であるのに, h を $\dfrac{p}{\rho}$ で置き換えてよい理由は次のとおりである；熱力学第 1 法則より $d\varepsilon = Tds - pdV$ であるが，エントロピー一定，$V = 1/\rho$ 一定であるから ε も一定となる．エネルギーでは付加定数を無視することができるから，$h = \varepsilon + \dfrac{p}{\rho}$ で ε を除くことができる．

非圧縮性流体のポテンシャル流

非圧縮性流体のポテンシャル流に対しては，方程式は非常に簡単になる．$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ のとき (10.3) は自動的に満たされる．一方，$\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\,\phi$ を (10.2) に代入すると

$$\triangle\phi = 0 \tag{10.6}$$

これは速度ポテンシャルに対する Laplace 方程式である．この方程式には，境界条件を付け加えなければならない．$v_n = \dfrac{\partial\phi}{\partial n} = \boldsymbol{n} \cdot \mathrm{grad}\,\phi$ を，固体表面に垂直な流速とする（$\partial/\partial n$ は法線微分を表す)．

- 固体表面が静止している場合は $v_n = 0$ である．
- 固体表面が動いている場合には $v_n =$（表面の速度の垂直成分）で，これは時間と座標の関数である．

[*13] 非圧縮であるとは，流体粒子の密度が運動とともに変わらないということであるから，本来は $\dfrac{D\rho}{Dt} = 0$ の意味であるが，$\rho = \mathrm{const.}$（時間，空間にわたって）の意味で使われることが多い．どちらの式を使っても非圧縮性流体の連続の式は $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$ となるため，あまり重要視されていないが，本来は区別すべきと思う．

(10.6) は時間微分を含んでいないから，速度場は（過去の歴史とは無関係に）各瞬間の境界条件によって決まる．つまり，定常であろうとなかろうと，境界条件が同じなら，流れは同じである[*14]．特に，固体物体が流体中を運動することでポテンシャル流が生じるなら，速度場はその瞬間の物体の速度のみに依存し，加速度などにはよらないことに注意せよ．

速度ポテンシャルに関する Laplace 方程式は，非圧縮と渦なしの 2 つの仮定しか使っていない．よって原理的には，理想流体に限らず粘性流体であってもよい．しかし，粘性流体では境界条件がより厳しい（固体表面に平行な流速も 0 にならなければならない）ので，特別な場合を除いては，解が存在しない．

非圧縮性流体のポテンシャル流に対する圧力方程式は，(9.3) で h を p/ρ で置きかえて

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = f(t). \tag{10.7}$$

特に，重力場中にない定常流では，Bernoulli の定理は

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = \text{const.}$$

となる．よって，この場合の最大圧力は速度 0 の点（**よどみ点**，ふつう流体中に置かれた物体の表面にある）で生じる．u を無限遠での流体の速さ，p_0 を無限遠での圧力とすると，よどみ点での圧力は

$$p_{\max} = p_0 + \frac{1}{2}\rho u^2 \tag{10.8}$$

となる．この式は，流速を計測するピトー管の原理を表している．

非圧縮性流体の２次元流と流線関数

流体の速度が 2 つの座標 (x, y) にのみ依存し，速度ベクトルが xy 平面内にある流れを **2 次元流**，**平面流**と呼ぶ．非圧縮性流体の 2 次元流では，流れの関数（**流線関数**）ψ を導入すると便利である；連続の式 $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ を満たすためには，速度成分が関数 $\psi(x, y)$ の微分として次のように書ければよい．

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{10.9}$$

これを (10.3) に代入することで，流線関数の満たすべき方程式が得られる．2 次元流では，渦度は z 成分

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\triangle\psi$$

[*14] ただし圧力場は，(10.7) のように圧力方程式が $\dfrac{\partial \phi}{\partial t}$ を含むので，定常流と非定常流では異なる．

のみ 0 でないから[*15]，(10.3) の x, y 成分は自動的に 0 となり，z 成分のみが意味を持つ；

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(-\triangle\psi) &= \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_y - \frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_x \\
&= \frac{\partial}{\partial x}[0 - v_x(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_z] - \frac{\partial}{\partial y}[v_y(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})_z - 0] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\partial\psi}{\partial y}(-\triangle\psi)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{\partial\psi}{\partial x}(-\triangle\psi)\right] \\
&= \cancel{\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\triangle\psi} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\triangle\psi) - \left[\cancel{\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}\triangle\psi} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\triangle\psi)\right]
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{\partial}{\partial t}(\triangle\psi) - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\triangle\psi) + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\triangle\psi) = 0 \tag{10.10}$$

を得る．

定常流の場合，流線関数が分かれば流線の形が決まる．2 次元での流線の方程式は，$\dfrac{dx}{v_x} = \dfrac{dy}{v_y}$ より

$$0 = -v_y dx + v_x dy = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = d\psi \qquad \therefore \quad \psi = \mathrm{const.}$$

つまり流線は，流線関数がある定数に等しいとして得られる曲線の集合である．

xy 平面上の 2 点 A,B を通る曲線を，(A から B を見たときに) 左から右へ横切る質量フラックス Q を求めよう．線素ベクトル $\boldsymbol{dl} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ を右に 90° 回転したベクトルは $\begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix}$ であるから，曲線を左から右へ横切る単位ベクトルは

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{dy^2 + dx^2}}\begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{dy}{dl} \\ -\dfrac{dx}{dl} \end{pmatrix}$$

である．よって

$$\begin{aligned}
Q &= \rho\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,dl \\
&= \rho\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (v_x n_x + v_y n_y)\,dl = \rho\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (v_x dy - v_y dx) \\
&= \rho\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \left[\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dl} + \left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\left(-\frac{dx}{dl}\right)\right] dl \\
&= \rho\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} d\psi \\
&= \rho(\psi_{\mathrm{B}} - \psi_{\mathrm{A}}).
\end{aligned} \tag{10.11}$$

つまり，質量フラックス Q は曲線端点での流線関数の値の差だけで決まり，曲線の形にはよらない．

[*15] このラプラシアンは当然，2 次元の演算子 $\triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ である．2 次元か 3 次元かは文脈で判断できるので，これ以降も両者を区別しない．

非圧縮性流体の 2 次元ポテンシャル流と複素関数論

非圧縮性流体における物体まわりの 2 次元ポテンシャル流を求める際，複素関数論は非常に有力である．応用例は色々な本に書かれているので，ここでは基本的なアイデアを述べるにとどめる[16]．

速度成分，速度ポテンシャル，流線関数の間には次の関係がある[17]．

$$
\begin{cases}
v_x = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\
v_y = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}
\end{cases}
$$

これは，複素関数

$$
w = \phi + i\psi \tag{10.12}
$$

が複素変数 $z = x + iy$ の正則関数となるための条件（Cauchy-Riemann の関係式）である．Cauchy-Riemann の関係式が成り立つとき，複素変数による微分は方向によらないことに注意すると[18]

$$
\begin{aligned}
\frac{dw}{dz} &= \frac{\partial w}{\partial x} \\
&= \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} \\
&= v_x - iv_y \qquad (10.13) \\
&= ve^{-i\theta}. \qquad (10.14)
\end{aligned}
$$

関数 w は**複素速度ポテンシャル**，微分 $\dfrac{dw}{dz}$ は**複素速度**と呼ばれる．$\dfrac{dw}{dz}$ の絶対値は速度の大きさ $\sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$，偏角（の符号を変えたもの）は $\boldsymbol{v}$ が x 軸となす角を表している．

理想流体の境界条件は，流れが物体表面に沿うこと，つまり表面を表す曲線が流線に一致することである．よって表面に沿って $\psi = \text{const.}$ であり，この定数は 0 に取ることができる．したがって，非圧縮性流体における物体まわりの 2 次元ポテンシャル流を求める問題は，物体表面で実数となる正則関数 $w(z)$ を探すことに帰着する．そして，流体が自由表面を持つ場合にも，同様に取り扱うことができる（問題 10.9）．

さて，閉曲線 C に沿って複素速度 $\dfrac{dw}{dz}$ を積分すると，C 内に含まれる $\dfrac{dw}{dz}$ の留数を A_k として

$$
\oint_C \frac{dw}{dz}\, dz = 2\pi i \sum_k A_k.
$$

一方，

$$
\begin{aligned}
\oint_C \frac{dw}{dz}\, dz &= \oint_C (v_x - iv_y)(dx + idy) \\
&= \oint_C (v_x dx + v_y dy) + i\oint_C (v_x dy - v_y dx) \\
&= \varGamma + \frac{iQ}{\rho}
\end{aligned}
$$

---

[16] Landau で書き漏らされている事項には，例えば次のようなものがある．
- 円柱まわりの流れ，Milne-Thomson の円定理（3 次元では Weiss の球定理）
- Blasius の公式（物体に働く力とモーメントを与える）
- Joukowski 翼

なお，Kutta-Joukowski の定理や，複素関数論を用いて翼の揚力を計算する方法については，§ 38,47,48 に記載がある．

[17] 速度ポテンシャルは渦なしを仮定すれば存在が言えるが，流線関数の存在は 2 次元かつ非圧縮性のみから言うことができ，渦なしかどうかとは無関係であることに注意．

[18] あるいは，Wirtinger の微分 $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ を代入してもよい．

ただし Γ は C に沿った循環，Q は C を横切る質量フラックスで，C 内に湧き出しや吸い込みがなければ $Q=0$ である．この場合，

$$\Gamma = 2\pi i \sum_k A_k \tag{10.15}$$

留数 A_k は全て純虚数だというが，そうとは限らないように思う．

流体が非圧縮性とみなせる条件

断熱的な圧力変化 Δp が生じたときの密度変化は $\Delta\rho = \left(\dfrac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s \Delta p$ と表される．Bernoulli の定理より，定常流では $\Delta p \sim \rho v^2$ である．また，§ 64[*19]で示すように，音速 c は $c^2 = \left(\dfrac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s$ で定義される．よって $\Delta\rho \sim \rho\dfrac{v^2}{c^2}$ となり，非圧縮性とみなせる条件 $\dfrac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1$ は

$$v \ll c, \tag{10.16}$$

つまり流体の速度が音速に比べて十分小さいことである．

しかし，(10.16) は定常流に対してのみ十分な条件であり，非定常流に対してはさらに別の条件を課さなければならない．流体の速度が大きく変化する時間・空間スケールをそれぞれ τ, l とする．Euler 方程式で $\dfrac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}$ と $-\dfrac{1}{\rho}\operatorname{grad} p$ が同じオーダーだとすると $\dfrac{v}{\tau} \sim \dfrac{\Delta p}{\rho l}$ であるから，

$$\Delta p \sim \frac{\rho l v}{\tau} \qquad \therefore \quad \Delta\rho \sim \frac{\Delta p}{c^2} \sim \frac{\rho l v}{\tau c^2}$$

となる．次に，連続の式で $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$ と $\rho \operatorname{div}\boldsymbol{v}$ を比べたとき前者が無視できる条件は

$$\frac{\Delta\rho}{\tau} \ll \rho\frac{v}{l},$$

$$\frac{\rho l v}{\tau^2 c^2} \ll \rho\frac{v}{l} \qquad \therefore \quad \tau \gg \frac{l}{c}. \tag{10.17}$$

これは，音波が距離 l を通過するのに要する時間 l/c が，流れが大きく変わる時間 τ に比べて十分短いこと，つまり流体中の相互作用の伝播が瞬間的とみなせることを意味する．

(10.16)(10.17) の双方が成り立つとき，流体は非圧縮性とみなすことができる．

⬆ 目次へ戻る

問題 10.1

一様重力場中で，一様な角速度 Ω で軸のまわりを回転している円筒がある．この円筒内の非圧縮性流体の表面の形を求めよ．

【解答】 円筒の軸を z 軸とする．円筒を回転しはじめたときは速度は時間に依存しているだろうが，十分長い時間が経過したあとは液体は剛体回転を行うと考えられる．

この仮定が正しいか，よくわからない．粘性流体ならば剛体回転することが示せる（§ 18）が，今は粘性がないから，円筒の動きは流体には伝わらず，流体が静止している解も可能なはずではないか？

[*19] 第 1 版では § 63

ひとまず，なんらかの方法で剛体的に回転している非圧縮性流体の表面の形を考える問題だと思うことにする．

その流速分布は $v_x = -\Omega y,\ v_y = \Omega x,\ v_z = 0$ となり，連続の式 $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ は自動的に満たされる．$\boldsymbol{v}$ が既知となったので，未知関数 p を Euler 方程式から求めよう．

$$
\begin{cases}
v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{p}{\rho}\right) \\
v_x \dfrac{\partial v_y}{\partial x} = -\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{p}{\rho}\right) \\
0 = -\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{p}{\rho}\right) - g
\end{cases}
$$

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{p}{\rho}\right) = \Omega^2 x,\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{p}{\rho}\right) = \Omega^2 y,\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{p}{\rho}\right) = -g$ より

$$
\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}\Omega^2(x^2+y^2) - gz + \text{const.}
$$

となる．自由表面では $p = \text{const.}$ であるから，最も低い表面を原点に取れば

$$
z = \frac{\Omega^2}{2g}(x^2+y^2).
$$

これは回転放物面である．

流体粒子を質点とみて，それに働く力を考えてもよい．自由表面上の粒子で，軸から r の距離にあるものを考える．この点における表面の傾きは

$$
\frac{dz}{dr} = \tan\theta.
$$

一方，粒子に働く重力 mg と遠心力 $mr\Omega^2$ の合力は自由表面と垂直であるから

$$
\tan\theta = \frac{mr\Omega^2}{mg}.
$$

よって

$$
\frac{dz}{dr} = \frac{\Omega^2}{g}r \qquad \therefore \quad z = \frac{\Omega^2}{2g}r^2 + \text{const.}
$$

問題 10.2

非圧縮性流体中を速度 $\boldsymbol{u}$ で運動する，半径 R の球の周りに生じるポテンシャル流を求めよ．

【解答】

ϕ を求める過程がかなり大胆（強引？）である．もう少し丁寧な論証を，本解の後に載せる．

座標原点を球の中心にとる．$r \neq 0$ では $\triangle\left(\dfrac{1}{r}\right) = 0$ であるから[*20]，$\dfrac{1}{r}$ の座標微分

$$
\frac{1}{r},\ \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right),\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right),\ \cdots
$$

[*20] 一般には $\triangle\left(\dfrac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(r)$ だが，$r = 0$ は流体中にはない点だから，今は考える必要がない．

もまた Laplace 方程式 $\triangle\phi = 0$ の解である．一般に，$r \to \infty$ で $\phi \to 0$ になる調和関数は

$$\phi = \frac{A}{r} + A_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) + A_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots$$

のように書くことができる（各項は 2^n 重湧き出しを表すが，知らなくてもこの問題は解ける）．これらの係数を求める．

Laplace 方程式と境界条件の線形性から，ϕ は $\boldsymbol{u}$ の 1 次式だけを含むだろう（本当？）．ϕ の展開係数の中でベクトルは A_i のみであり，もし他の階数のテンソルを $\boldsymbol{u}$ から作ろうとすると，それは 1 次式ではなくなってしまう．よって第 2 項以外は消え，$\boldsymbol{u}$ に比例する定数ベクトル $\boldsymbol{A}$ を用いて

$$\phi = A_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) = \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right)$$

となる．

以下の計算では次の関係を頻繁に用いる；
$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ のとき $\dfrac{\partial r}{\partial x_i} = \dfrac{2x_i}{2\sqrt{\quad}} = \dfrac{x_i}{r}$ であるから

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(r^N\right) = \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^N\right) = \frac{x_i}{r}Nr^{N-1} = Nx_i r^{N-2} \qquad \therefore \quad \mathrm{grad}(r^N) = N\boldsymbol{r}r^{N-2} = N\boldsymbol{n}r^{N-1}.$$

ただし $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ は動径方向の単位ベクトルである．

$$\phi = A_i\left(-\frac{x_i}{r^3}\right) = -\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} = -\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}}{r^2}$$

$$\begin{aligned}
v_i = \frac{\partial\phi}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{A_j x_j}{r^3}\right) \\
&= -A_j\left[\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\frac{1}{r^3} + x_j\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right] \\
&= -A_j\left[\frac{\delta_{ij}}{r^3} + x_j\left(-3x_i\frac{1}{r^5}\right)\right] \\
&= -\frac{A_i}{r^3} + 3\frac{x_i A_j x_j}{r^5} \\
&= \frac{3(A_j n_j)n_i - A_i}{r^3} \\
\boldsymbol{v} &= \frac{3(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{A}}{r^3}
\end{aligned}$$

$r = R$ で $\boldsymbol{v}$ の法線成分と $\boldsymbol{u}$ の法線成分が等しいから

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} \quad @\, r = R,$$

$$\frac{3\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n} - \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}}{R^3} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{A} = \frac{R^3}{2}\boldsymbol{u}.$$

よって速度ポテンシャル，速度は

$$\phi = -\frac{R^3}{2r^2}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}), \quad \boldsymbol{v} = \frac{R^3}{2r^2}[3(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{u}]$$

となる（これは双極子の作る場にほかならず，流体の場合は特に「2 重湧き出し」と呼ばれる）．

$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{n}$ のなす角を θ とすると $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = u\cos\theta$ であるから，速度ポテンシャルは

$$\phi = -\frac{R^3 u\cos\theta}{2r^2},$$

速度の法線成分は

$$v_r = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = \frac{R^3}{2r^2}(2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}) = \frac{R^3 u\cos\theta}{r^3}.$$

圧力方程式 (10.7) を用いて，表面での圧力を求めよう．無限遠での圧力を p_0 とすると

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = (\text{無限遠での値}) = \frac{p_0}{\rho},$$

$$p\bigg|_{r=R} = p_0 - \rho\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{r=R}.$$

ここで

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}v^2\bigg|_{r=R} &= \frac{1}{8}[3(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{u}]^2 \\ &= \frac{1}{8}\left[9(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})^2 - 6(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})^2 + u^2\right] \\ &= \frac{u^2}{8}(3\cos^2\theta + 1).\end{aligned}$$

$\dfrac{\partial\phi}{\partial t}$ を計算するときには，座標原点が速度 $\boldsymbol{u}$ で動いていることに注意する必要がある．図で $\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\delta t) - \boldsymbol{r}(t) \simeq -\boldsymbol{u}\delta t$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial t} &= \frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{u}}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \\ &= -\frac{R^3}{2r^2}\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + \boldsymbol{v}\cdot(-\boldsymbol{u}) \\ \frac{\partial\phi}{\partial t}\bigg|_{r=R} &= -\frac{R}{2}\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} - \frac{1}{2}[3(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{u}]\cdot\boldsymbol{u} \\ &= -\frac{R}{2}\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} - \frac{1}{2}\left[3(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})^2 - u^2\right] \\ &= -\frac{R}{2}\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} - \frac{u^2}{2}(3\cos^2\theta - 1).\end{aligned}$$

以上より，

$$\begin{aligned}p\bigg|_{r=R} &= p_0 - \rho\left[\frac{u^2}{8}(3\cos^2\theta+1) - \frac{R}{2}\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} - \frac{u^2}{2}(3\cos^2\theta - 1)\right] \\ &= p_0 + \frac{1}{8}\rho u^2\left[-3\cos^2\theta - 1 + 4(3\cos^2\theta - 1)\right] + \frac{1}{2}\rho R\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} \\ &= p_0 + \frac{1}{8}\rho u^2(9\cos^2\theta - 5) + \frac{1}{2}\rho R\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}.\end{aligned}$$

【ϕ を求めるところまで】
実質的に同じだが，もう少し丁寧に ϕ を求める方法を紹介する．$\boldsymbol{u}$ の方向が時間によらないとき，流れは軸対称であるから，ϕ は中心からの距離 r と軸から測った偏角 θ だけの関数で，$\phi = F(r)G(\theta)$ と変数分

離できる．Laplace 方程式は

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]F(r)G(\theta)=0.$$

両辺を $\dfrac{FG}{r^2}$ で割って

$$\frac{1}{F}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right)=-\frac{1}{G}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dG}{d\theta}\right).$$

左辺は r，右辺は θ だけの関数だから，両辺は定数 λ に等しい．

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right)=\lambda F \tag{①}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dG}{d\theta}\right)+\lambda G=0 \tag{②}$$

②で $\lambda=n(n+1)$ とする．また，$x=\cos\theta$ と置換すると $\dfrac{d}{d\theta}=-\sin\theta\dfrac{d}{dx}$ であるから

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dG}{dx}\right]+n(n+1)G=0$$

これは Legendre の微分方程式であり，基本解は Legendre 関数 $P_n(x), Q_n(x)$ である（この時点では n が整数かどうかは不明）．まず $Q_n(x)$ は，n の値によらず $x=\pm1$ が特異点となるので除外する．また $P_n(x)$ については，n が整数でないとき $x=-1$ が特異点となるが，n が整数であれば特異点を持たないから，n は整数でなければならない．言い換えれば $P_n(x)$ は Legendre 多項式であり

$$G(\theta)\propto P_n(\cos\theta)$$

となる（なお $P_n=P_{-(n+1)}$ なので $n\geqq 0$ としてよい）．
次に①は

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right)=n(n+1)F.$$

F が r の冪だとすると両辺が整合するから，$F=r^k$ とおいてみると

$$(\text{左辺})=\frac{d}{dr}\left(r^2\cdot kr^{k-1}\right)=k(k+1)r^k$$

となるから，

$$k(k+1)=n(n+1)\qquad\therefore\quad k=n,-(n+1).$$

$r\to\infty$ で発散する r^n を除外すれば $F(r)\propto\dfrac{1}{r^{n+1}}$ となり，結局

$$\phi=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{1}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta)$$

を得る．
境界条件は，$r=R$ で $v_r=\dfrac{\partial\phi}{\partial r}=u\cos\theta$ となることで

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(n+1)a_n}{R^{n+2}}P_n(\cos\theta)=u\cos\theta$$

Legendre 多項式で $\cos\theta$ の 1 次式が現れるのは $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$ のみであるから，$n \neq 1$ のとき $a_n = 0$ で，$n = 1$ のとき

$$\frac{-2a_1}{R^3}\cos\theta = u\cos\theta \qquad \therefore \quad a_1 = -\frac{R^3}{2}u.$$

ゆえに

$$\phi = -\frac{R^3 u\cos\theta}{2r^2}.$$

問題 10.3

問題 10.2 で，無限に長い円柱が軸と垂直な方向に運動する場合はどうか.

【解答】 要は，2 次元で考えよということである．2 次元では，$\dfrac{1}{r}$ の座標微分だけでなく $\log r$ も Laplace 方程式の解となる．よって

$$\phi = A\log r + A_i\frac{\partial}{\partial x_i}(\log r) + A_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\log r) + \cdots .$$

問題 10.2 と同様に，ベクトルが展開係数となっている第 2 項だけが残り

$$\phi = A_i\frac{\partial}{\partial x_i}(\log r) = \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{grad}(\log r)$$

となる．$\dfrac{\partial}{\partial x_i}\log\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2x_i}{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{x_i}{r^2}$ であるから

$$\phi = A_i\frac{x_i}{r^2} = \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}}{r^2} = \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}}{r}$$

$$\begin{aligned}
v_i &= \frac{\partial\phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{A_j x_j}{r^2}\right) \\
&= A_j\left[\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\frac{1}{r^2} + x_j\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r^2}\right)\right] \\
&= A_j\left[\frac{\delta_{ij}}{r^2} + x_j\left(-2x_i\frac{1}{r^4}\right)\right] \\
&= \frac{A_i}{r^2} - 2\frac{x_i A_j x_j}{r^4} \\
&= \frac{A_i - 2(A_j n_j)n_i}{r^2} \\
\boldsymbol{v} &= \frac{\boldsymbol{A} - 2(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}}{r^2}
\end{aligned}$$

境界条件 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} \quad @r = R$ より

$$\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n} - 2(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})}{R^2} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{A} = -R^2\boldsymbol{u}.$$

よって

$$\phi = -\frac{R^2}{r}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}), \quad \boldsymbol{v} = \frac{R^2}{r^2}[2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{u}]$$

を得る.

圧力について

$$\frac{1}{2}v^2\Big|_{r=R} = \frac{1}{2}[2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}-\boldsymbol{u}]^2$$
$$= \frac{1}{2}\left[4(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})^2 - 4(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})^2 + u^2\right] = \frac{u^2}{2},$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{u}}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$
$$= -\frac{R^2}{r}\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial t}\Big|_{r=R} = -R\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} - [2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}-\boldsymbol{u}]\cdot\boldsymbol{u}$$
$$= -R\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} - u^2(2\cos^2\theta - 1).$$

よって

$$p\Big|_{r=R} = p_0 - \rho\left[\frac{u^2}{2} - R\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} - u^2(2\cos^2\theta-1)\right]$$
$$= p_0 + \frac{1}{2}\rho u^2\left[-1 + 2(2\cos^2\theta - 1)\right] + \rho R\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$$
$$= p_0 + \frac{1}{2}\rho u^2(4\cos^2\theta - 3) + \rho R\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}.$$

楕円体，楕円柱のまわりのポテンシャル流については，本文に載っている参考文献を参照のこと（前者は入手困難）.

問題 10.4

角速度 Ω で主軸のまわりを回転している楕円体がある．この中の非圧縮性流体のポテンシャル流と，流体の全角運動量を求めよ．

【解答】 主軸を z 軸とする静止座標 (x, y, z) で考える．楕円体上の任意の点 $\boldsymbol{r}$ における速度は

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}0\\0\\\Omega\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\Omega y\\\Omega x\\0\end{pmatrix}.$$

さて，楕円体の方程式を

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \qquad ①$$

とすると，表面での（規格化されていない）法線ベクトルとして

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{2}\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix}x/a^2\\y/b^2\\z/c^2\end{pmatrix}$$

がある．

表面上の隣接する 2 点 (x, y, z) と $(x+dx, y+dy, z+dz)$ を考える．$f(x+dx, y+dy, z+dz)=0$ と $f(x, y, z)=0$ の辺々引いて，Taylor 展開を用いると

$$0 \simeq \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \mathrm{grad}\, f \cdot d\boldsymbol{r}$$

よって $\mathrm{grad}\, f$ は表面に垂直である．ここでは余計な係数 2 を除くために 1/2 倍してある．

よって境界条件は，①上で

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \boldsymbol{n} \cdot \mathrm{grad}\, \phi = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}$$

となることで

$$\frac{x}{a^2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{y}{b^2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{z}{c^2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\Omega y \cdot \frac{x}{a^2} + \Omega x \cdot \frac{y}{b^2} = \Omega xy \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \quad (\text{on ①}). \tag{②}$$

②を満たす，Laplace 方程式の解を探そう．

$\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ と変数分離できると仮定する．$\triangle \phi = 0$ より

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0.$$

各項は x のみ，y のみ，z のみの関数であるから，各々は定数であり，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{X}\dfrac{d^2 X}{dx^2} = {k_x}^2 \\ \dfrac{1}{Y}\dfrac{d^2 Y}{dy^2} = {k_y}^2 \\ \dfrac{1}{Z}\dfrac{d^2 Z}{dz^2} = {k_z}^2 \end{cases}$$

（ただし k_x, k_y, k_z は複素数で ${k_x}^2 + {k_y}^2 + {k_z}^2 = 0$）とおける．

$k_x, k_y, k_z \neq 0$ だとすると，$X \sim e^{\pm k_x x}$ などとなるが，これを②へ代入すると成立しない（本当？）．よって $k_x = k_y = k_z = 0$ で，X, Y, Z はそれぞれ x, y, z の 1 次関数となる．さらに②の右辺には x, y しか含まれないから $\dfrac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ つまり Z は定数であり[*21]，

$$\phi = pxy + qx + ry$$

とおける（定数は結果に影響しない）．これを②の左辺に代入し

$$\frac{x}{a^2}(py+q) + \frac{y}{b^2}(px+r) = pxy\frac{a^2+b^2}{a^2 b^2} + \frac{qx}{a^2} + \frac{ry}{b^2}.$$

これと $\Omega xy \left(\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{a^2} \right)$ を等置すると $p = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\Omega,\ q = r = 0$ となり

$$\phi = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\Omega xy$$

を得る．

[*21] 回転軸まわりの対称性から，ϕ は z によらないと言った方がよいかもしれない．しかし，本当に z に依存しないと対称性だけから言い切れるか，少々不安ではある．

❙ 実は①上だけでなく，楕円体内の至るところで $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}$ を満たしている． ❙

このとき

$$v_x=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\Omega y,\ v_y=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\Omega x,\ v_z=0. \qquad ③$$

容器内の流体の全角運動量は次式で与えられる（積分は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqq 1$ 全体にわたって行う）．

$$M=\rho\int(xv_y-yv_x)\,dV=\rho\Omega\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\int(x^2-y^2)\,dV$$

これを計算するために，まず変数変換 $\dfrac{x}{a}=\xi,\ \dfrac{y}{b}=\eta,\ \dfrac{z}{c}=\zeta$ により (ξ,η,ζ) 系に移り，次に (ξ,η,ζ) 系での球座標 (r,θ,φ) に移る：

$$\begin{cases}\xi=r\sin\theta\cos\varphi\\ \eta=r\sin\theta\sin\varphi\\ \zeta=r\cos\theta\end{cases}.$$

このとき

$$\begin{aligned}\int_{x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2\leqq 1}dxdydz\,(x^2-y^2)&=\int_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqq 1}abc\,d\xi d\eta d\zeta\,(a^2\xi^2-b^2\eta^2)\\ &=abc\int_0^1dr\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\,r^2\sin\theta\cdot r^2\sin^2\theta(a^2\cos^2\varphi-b^2\sin^2\varphi)\\ &=abc\int_0^1r^4\,dr\int_0^\pi\sin^3\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2\varphi-b^2\sin^2\varphi)\,d\varphi\\ &=abc\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi(a^2-b^2).\end{aligned}$$

よって，$V=\dfrac{4}{3}abc$ を楕円体の体積として

$$M=\frac{\rho V}{5}\Omega\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}.$$

③は，静止座標に対する流体の速度を表している．ここから $\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$ を差し引くことで，容器に対する相対速度（ダッシュをつけて区別する）が得られる．

$$\begin{aligned}v'_x&=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\Omega y-(-\Omega y)=\frac{2a^2}{a^2+b^2}\Omega y\\ v'_y&=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\Omega x-\Omega x=\frac{-2b^2}{a^2+b^2}\Omega x\\ v'_z&=0\end{aligned}$$

流体粒子の相対運動の軌跡は，$\dfrac{dx}{dt}=v'_x,\ \dfrac{dy}{dt}=v'_y$ を積分し

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\mathrm{const.}$$

である．

∵　両辺を t で微分すると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=\frac{2x}{a^2}\frac{dx}{dt}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dt}$$
$$=\frac{2x}{a^2}\cdot\frac{2a^2}{a^2+b^2}\Omega y+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{-2b^2}{a^2+b^2}\Omega x=0.$$

つまり，回転軸に垂直な面内を，断面と相似な楕円を描きながら運動する．

問題 10.5

よどみ点付近のポテンシャル流を求めよ．

【解答】 よどみ点のごく近傍では，物体の表面は平面とみなせる．これを xy 平面にとる．x, y, z が微小として，ϕ をこれらの 2 次まで展開すれば

$$\phi=ax+by+cz+Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx.$$

係数を Laplace 方程式と境界条件から決める．$\triangle\phi=0$ より

$$2(A+B+C)=0 \qquad \therefore \quad C=-(A+B).$$

$z=0$ で $\dfrac{\partial\phi}{\partial z}=0$ より

$$(c+2Cz+Ey+Fx)_{z=0}=0.$$

これが任意の x, y について成り立つから

$$c=0, E=F=0.$$

よどみ点 $x=y=z=0$ では $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=0$ も成り立つから

$$\begin{cases}(a+2Ax+Dy+Fz)_{x=y=z=0}=0\\ (b+2By+Dx+Ez)_{x=y=z=0}=0\end{cases} \qquad \therefore \quad a=b=0.$$

さらに，Dxy の項は x, y 軸を適当に回転することで消すことができるから，結局

$$\phi=Ax^2+By^2-(A+B)z^2.$$

ここでは，次の 2 つの場合を考える．

【流れが z 軸について軸対称の場合】

$A=B$ であるから $\phi=A(x^2+y^2-2z^2)$ となる．速度は

$$v_x=2Ax,\ v_y=2Ay,\ v_z=-4Az.$$

流線を (5.2) から求めよう．

$$\frac{dx}{2Ax}=\frac{dz}{-4Az},\ \frac{dy}{2Ay}=\frac{dz}{-4Az}$$

第 1 式から

$$\frac{2dx}{x}+\frac{dz}{z}=0 \qquad \therefore \quad x^2z=c_1$$

第 2 式も同様に

$$y^2z=c_2$$

これは 3 次の双曲線である（らしい）．

【流れが y 方向に一様の場合】

ϕ は y に依存しないから $B=0$ で，$\phi = A(x^2 - z^2)$ となる．速度は

$$v_x = 2Ax,\ v_y = 0,\ v_z = -2Az.$$

流線の方程式は

$$\frac{dx}{2Ax} = \frac{dz}{-2Az}$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{z} = 0 \qquad \therefore \quad xz = \text{const.}$$

問題 10.6

互いに交わる平面が作る角（かど）近傍のポテンシャル流を求めよ．

【解答】 流れは，二平面に垂直な面内の二次元流となる．交線を原点とする極座標 (r, θ) を取り（θ はどちらか一方の面から測る），二平面のなす角を α とする（$0 < \alpha < \pi$ は角の「内側」，$\pi < \alpha < 2\pi$ は角の「外側」の流れを表す）．境界条件を満たす正則関数は

$$w = Az^n = Ar^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad \left(n = \frac{\pi}{\alpha}\right),$$

すなわち

$$\begin{cases} \phi = Ar^n \cos n\theta \\ \psi = Ar^n \sin n\theta \end{cases},$$

$$\begin{cases} v_r = \dfrac{\partial \phi}{\partial r} = nAr^{n-1} \cos n\theta \\ v_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \phi}{\partial \theta} = -nAr^{n-1} \sin n\theta \end{cases}$$

である．実際，$\theta = 0, \alpha$ で $\sin n\theta = 0$ つまり $v_\theta = 0,\ \psi = 0$ であるから，二平面に垂直な流れはなく流線となっていることがわかる（もちろん，z^n の他に $z^{2n}, z^{3n}, \ldots$ も解となるが，r が小さい[*22]と仮定すれば，最も小さな冪だけを取ればよい．）．

原点 $r=0$ での，動径方向の速度 v_r を求めよう．$n > 1$ つまり角の内側の流れの場合，

$$v_r = nAr^{n-1} \cos n\theta \to 0 \ (r \to 0)$$

となるから，原点はよどみ点である．一方，$n < 1$ つまり角の外側の流れの場合，

$$v_r = nAr^{-(1-n)} \cos n\theta \to \infty \ (r \to 0)$$

で発散する．この矛盾は液体の圧縮性や粘性を無視したため生じるもので，実際には原点で「はがれ」が生じ，渦が発生する．あるいは高速気流の場合，原点で密度が急激に低下し，非圧縮の仮定が破れてしまう（膨張波が出現する）．

[*22] これは平面が無限に続くと仮定することと同じである．

♠ 境界面が無限に続くと仮定すると，問題 10.5，10.6 の解は「縮退」する．つまり，解の定数 A, B は未定のまま残る．実際の流れでは物体の大きさが有限であるため，A, B は一意に定まる．

問題 10.7

無限に広い領域を占める非圧縮性流体中に，半径 a の球状の穴が開いた．この穴を流体が埋めるのにかかる時間を求めよ（Besant 1859, Rayleigh 1917）．

【解答】穴が開いたあとの流れは中心へ向かい，かつ球対称であるから，非ゼロの速度成分は $v_r \equiv v\ (<0)$ のみであり，球座標系での Euler 方程式は

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}. \qquad ①$$

連続の式（質量保存則）は，ある時刻 t から $t + \Delta t$ までの間に半径 r の球面を通って内側に流れ込む流体の体積が半径によらず時間だけの関数となることで

$$4\pi r^2 v \Delta t = \text{（時間だけの関数）} \qquad \therefore \quad r^2 v = F(t). \qquad ②$$

【以降の方針】
ある瞬間の穴の半径を $R(t)\ (\leqq a)$，その時間変化率を $V(t) \equiv \dfrac{dR}{dt}\ (<0)$ とすると，穴が消滅するまでの時間は

$$\int dt = \int_{R=a}^{R=0} \left(\frac{dR}{dt}\right)^{-1} dR$$

で計算できる．したがって，①②を積分して $V(t) = \dfrac{dR}{dt}$ を R だけの関数として表せばよい．

②を $v = \dfrac{F(t)}{r^2}$ と書いて，①の左辺第 1 項に代入する．

$$\frac{1}{r^2}\frac{dF}{dt} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

$r \to \infty$ では $v = 0$ かつ $p = p_0$，$r = R$ では $v = V$ かつ $p = 0$ であることに注意して $R \leqq r < \infty$ で積分すると

$$\left[-\frac{1}{r}\frac{dF}{dt}\right]_{r=R}^{r=\infty} + \left[\frac{1}{2}v^2\right]_{r=R}^{r=\infty} = \left[-\frac{1}{\rho}p\right]_{r=R}^{r=\infty},$$

$$\frac{1}{R}\frac{dF}{dt} - \frac{1}{2}V^2 = -\frac{p_0}{\rho}. \qquad ③$$

最終的に R, V だけの式を得たいので，F を消去する．穴の表面を考えると，②は $F(t) = R^2(t)V(t)$ となるから，③は

$$\frac{1}{R}\left(2R\frac{dR}{dt}V + R^2\frac{dV}{dt}\right) - \frac{1}{2}V^2 = -\frac{p_0}{\rho}.$$

$V = \dfrac{dR}{dt}$，$\dfrac{R}{2}\frac{dV^2}{dR} = \dfrac{R}{2}2V\dfrac{dV}{dR} = RV\dfrac{dV/dt}{dR/dt} = R\dfrac{dV}{dt}$ に注意すると

$$\frac{3}{2}V^2 + \frac{1}{2}R\frac{dV^2}{dR} = -\frac{p_0}{\rho}, \qquad ④$$

$$V^2 + \frac{1}{3}R\frac{dV^2}{dR} = -\frac{2p_0}{3\rho}$$

これは V^2 に関する非斉次の微分方程式であり，斉次解 $V^2 = \dfrac{C}{R^3}$ と特解 $V^2 = -\dfrac{2p_0}{3\rho}$ を重ね合わせて

$$V^2(R) = \frac{C}{R^3} - \frac{2p_0}{3\rho}$$

を得る．$R = a$ のとき $V(R) = 0$ であるから $C = \dfrac{2p_0}{3\rho}a^3$ となり

$$V(R) = -\sqrt{\frac{2p_0}{3\rho}\left(\frac{a^3}{R^3} - 1\right)} \left(= \frac{dR}{dt}\right).$$

よって穴が満たされるまでの時間は

$$\tau = \int_a^0 \left(\frac{dR}{dt}\right)^{-1} dR = \sqrt{\frac{3\rho}{2p_0}} \int_0^a \frac{dR}{\sqrt{(a/R)^3 - 1}}$$

で与えられる．$\left(\dfrac{R}{a}\right)^3 = x$ とおくと $R = ax^{1/3}$, $dR = \dfrac{1}{3}ax^{-2/3}\,dx$ であるから

$$\begin{aligned}
\int_0^a \frac{dR}{\sqrt{(a/R)^3 - 1}} &= \frac{a}{3}\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}x^{-2/3}\,dx \\
&= \frac{a}{3}\int_0^1 x^{-1/6}(1-x)^{-1/2}\,dx \\
&\quad \text{ベータ関数 } B(p,q) \equiv \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \text{ を用いると} \\
&= \frac{a}{3}B\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right) = \frac{a}{3}\frac{\Gamma(5/6)\Gamma(1/2)}{\Gamma(4/3)} \\
&\quad \Gamma(4/3) = \Gamma(1/3)/3,\ \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \text{ であるから} \\
&= \frac{a}{3}\frac{\Gamma(5/6)\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/3)/3} = a\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)}.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\tau = \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)}a\sqrt{\frac{3\pi\rho}{2p_0}} \simeq 0.915a\sqrt{\frac{\rho}{p_0}}$$

を得る．

問題 10.8

非圧縮性流体中を球が半径 $R = R(t)$ で膨張するとき，球表面での圧力 $P(t)$ を求めよ．

【解答】 $R(t)$ が与えられた関数であることと，$r = R$ での圧力が $P(t)$ であること以外は問題 10.7 と同じである．③は

$$\frac{1}{R}\frac{dF}{dt} - \frac{1}{2}V^2 = \frac{P(t) - p_0}{\rho},$$

④は

$$\frac{P(t) - p_0}{\rho} = \frac{3}{2}V^2 + R\frac{dV}{dt}.$$

ここで

$$\frac{d^2(R^2)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(2R\frac{dR}{dt}\right) = 2\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + 2R\frac{d^2R}{dt^2} = 2\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + 2R\frac{dV}{dt}$$

であるから

$$\frac{3}{2}V^2 + R\frac{dV}{dt} = \frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d^2(R^2)}{dt^2} - \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{d^2(R^2)}{dt^2}\right].$$

よって

$$P(t) = p_0 + \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{d^2(R^2)}{dt^2}\right].$$

問題 10.9

無限に長い平面壁に開いたスリットから流れ出るジェットの形を求めよ.

【解答】固定された平面壁と自由流線で囲まれた 2 次元流の理論（不連続流の理論）は，Helmholtz が創始し，Kirchhoff や Rayleigh が発展させた歴史あるものだが，Landau の記述はかなりあっさりしていて，初見では分かりづらいかもしれない．ここでは，説明の詳しい Lamb（§ 73〜）を参考にしながら，丁寧な解説を試みる（混乱を避けるため，ノーテーションは Landau に従う）*23．

§ 10 本文で述べられているように，非圧縮性流体の 2 次元ポテンシャル流の問題は，与えられた境界条件を満たす正則関数 $w(z)$ を見つけることに帰着する．物体まわりの流れの場合，境界の形状は既知である．ところが流体が自由流線を持つ場合，その形自体が未定のため，境界条件を満たす $w(z)$ を見つけるのは難しそうに思える．しかし，z 平面（物理面）では未定でも，別の複素平面（速度面やそれに類する面）では自由流線の形がわかっているものとして解き進めることができるのである．そして問題は，これらの平面同士の関係（つまりこれらを結びつける等角写像）を求めることに帰着する．

前置きはこのくらいにして，まずは問題を解くための座標を設定しよう．図 1 のように，$z\,(= x + iy)$ 平面上の x 軸に壁があり，$-\dfrac{a}{2} \leqq x \leqq \dfrac{a}{2}$ がスリットになっているとする．流体は $y \geqq 0$ の部分を占めており，スリットを通って $y \leqq 0$ の方へ流れ出ていく．$y \to \infty$ や x 軸上の $x \to \pm\infty$ の点では流体は静止しており，そこでの圧力を p_0 とする．自由流線 BC，B′C′ 上では $p = 0$ であり，速度は（Bernoulli の定理より）一定値 $v_1 = \sqrt{\dfrac{2p_0}{\rho}}$ をとる．なお，壁 AB，A′B′ も流線であり，スリットから出て BC，B′C′ と繋がっている．また，$y \to -\infty$ でのジェットの幅を a_1 をすると，スリットから単位時間に流れ出る質量は $Q = \rho a_1 v_1$ と書ける．

さて，複素速度 $\dfrac{dw}{dz} = ve^{-i\theta}$ の逆数を適当に無次元化した*24，次の変数を考えよう．

$$\eta = \frac{v_1 e^{i\pi/2}}{dw/dz} = \frac{v_1}{v}e^{i(\theta+\pi/2)}$$

なお，後の都合で偏角の範囲を $-\pi \leqq \theta \leqq \pi$ に制限する．

流体は，自由流線または直線壁に囲まれている．自由流線上は $v = v_1$（一定）で θ が変化するから，η 平面では半径 1 の円弧に対応し，直線壁上は θ 一定で v が変わるから，η 平面では円弧から外に伸びる放射状の直線

*23 不連続流の理論は今井の第 7 章や巽の 8–8 でも解説されているが，Helmholtz 以来の伝統的な解法（後述の Schwarz-Christoffel 変換）を使っていないので，残念ながら Landau の行間を埋めるのには役立たない．

*24 ここでは $y \to -\infty$ での複素速度 $v_1 e^{i\pi/2}$ を用いて無次元化したが，問題に応じて適切なものを選ぶことになる．

に対応する．よって z 平面（物理面）で流体が囲んでいた領域は，η 平面では円弧と放射状の直線で囲まれた領域に移る（もはや境界の形は未定ではない！）．

この問題の場合，

- AB は $\theta=-\pi,\ v:0\to v_1$．BC は $v=v_1,\ \theta:-\pi\to-\dfrac{\pi}{2}$.
- $\mathrm{A'B'}$ は $\theta=0,\ v:0\to v_1$．$\mathrm{B'C'}$ は $v=v_1,\ \theta:0\to-\dfrac{\pi}{2}$.

であるから，η 平面の様子は図 2 のようになる．

これで境界の形が扱いやすくなったが，さらに簡単な形にするために，別の平面へ移る．

$$\zeta\equiv\log\eta=\log\Big(\frac{v_1}{v}\Big)+i\Big(\theta+\frac{\pi}{2}\Big) \qquad ①$$

とおくと，η 平面の円弧 $v=v_1$ は ζ 平面の虚軸の一部に，η 平面の放射状の直線 $\theta=\mathrm{const.}$ は ζ 平面の実軸に平行な直線の一部になる．よって流体が囲む領域は，ζ 平面では図 3 のような無限に長い矩形領域となる．

η,ζ 平面のことは一度忘れ，次は $w\,(=\phi+i\psi)$ 平面について考える．自由流線も直線壁も $\psi=\mathrm{const.}$ という流線の一部であるから，w 平面では実軸に平行な直線となる．ϕ,ψ の決め方には任意性があるが，ふつうは後の計算が楽になるよう決める．この問題では，流体は 2 つの流線 ABC，$\mathrm{A'B'C'}$ に囲まれている．ABC を $\psi=0$ に対応させることにすると，$\mathrm{A'B'C'}$ は $\psi=-\dfrac{Q}{\rho}$ に対応する（(10.11) 参照）．一方ポテンシャル ϕ は，A と $\mathrm{A'}$ での $\phi\to-\infty$ から C と $\mathrm{C'}$ での $\phi\to\infty$ まで任意の値をとる．後の都合上，B と $\mathrm{B'}$ を $\phi=0$ に対応づけると，w 平面で流体が囲む領域は領域は図 4 のような幅 Q/ρ の無限に長い帯状領域になる．

もし，w 平面の領域と ζ 平面の領域の関係が分かれば，w と $\dfrac{dw}{dz}$ の関係式が得られ，ジェットの形を求めることができる．この関係を明らかにするために，**Schwarz-Christoffel 変換**（以下 SC 変換）を用いる．SC 変換は，ある複素平面（u 平面とする）の上半面を別の平面（Z 平面とする）上の多角形で囲まれた領域に移す変換であるから，

- u 平面の上半面と ζ 平面の矩形領域を結びつける変換
- u 平面の上半面と w 平面の帯状領域を結びつける変換

を SC 変換によって作成すればよいことがわかる．

以下，SC 変換について説明する．Z と u を，次の式で結ばれた複素変数とする．

$$\frac{dZ}{du}=A(u-a)^{\alpha/\pi-1}(u-b)^{\beta/\pi-1}(u-c)^{\gamma/\pi-1}\cdots$$

ただし $a<b<c\cdots$ は実数，つまり u 平面の実軸上に左から順に並んでいるとし，$\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ も実数とする．このとき，u の上半面が Z 平面の多角形に移る．これを直感的に説明すると次のようになる*[25]．u の実軸上を，$-\infty$ から ∞ に向かって進んでいく．点 a を左から右にまたぐとき，$u-a$ の符号が変わる．複素数的に言えば $u-a$ に $e^{-i\pi}$ がかかり，$\dfrac{dZ}{du}$ には $e^{i(\pi-\alpha)}$ がかかる．$\dfrac{dZ}{du}$ を，du を dZ に変換する操作とみなせば，a をまたいだことで，Z 平面上の a に対応する点のところで，進行方向が $\pi-\alpha$ だけ変わることになる．よって，u の実軸上で $a,b,c,\ldots$ を順にまたぎながら進んでいくことで，Z 平面では内角 $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ の多角形が描かれる．

さて問題に戻って，u の上半面と ζ 平面の矩形領域を結びつけよう．

矩形領域は，$\mathrm{A'}\to\mathrm{B'}\to\mathrm{C'}=\mathrm{C}\to\mathrm{B}\to\mathrm{A}$ のように囲まれているから，u の実軸上でもこの順で配置すればよいだろう．ここでは，$\mathrm{A'}$ を u 平面の $-\infty$，$\mathrm{B'}$ を -1，$\mathrm{C'}=\mathrm{C}$ を 0，B を $+1$，A を $+\infty$ に対応させる．

*25 日本語の文献では，スミルノフ高等数学教程(6)［3 巻 2 部第 1 分冊］に詳しい説明がある．

矩形領域の頂点は B',B であるから，SC 変換の式で $a=-1,\ b=1,\ \alpha=\beta=\dfrac{\pi}{2}$ とおいて

$$\frac{d\zeta}{du}=\frac{A}{\sqrt{u^2-1}}\quad \text{または}\ A\ \text{をとり直して}\quad \frac{d\zeta}{du}=\frac{A}{\sqrt{1-u^2}}.$$

どちらでも結果は同じなので，ここでは後者を採用すると

$$\zeta=A\sin^{-1}(u)+B$$

となる．定数 A,B を決めるには，点 B',B の対応関係を用いればよい．$u=-1$ と $\zeta=i\dfrac{\pi}{2}$，$u=1$ と $\zeta=-i\dfrac{\pi}{2}$ が対応しているから

$$\begin{cases} i\dfrac{\pi}{2}=A\Big(-\dfrac{\pi}{2}\Big)+B \\ -i\dfrac{\pi}{2}=A\cdot\dfrac{\pi}{2}+B \end{cases}\qquad \therefore\quad \begin{cases} A=-i \\ B=0 \end{cases}$$

となり[*26]，$\zeta=-i\sin^{-1}(u)$ つまり

$$u=\sin(i\zeta) \tag*{②}$$

を得る．

> 本当に矩形領域を上半面に移しているか確かめてみよう．$\zeta=\zeta_r+i\zeta_i$ とおくと
>
> $$\begin{aligned} u&=\sin(-\zeta_i+i\zeta_r) \\ &=\sin(-\zeta_i)\cos(i\zeta_r)+\cos(-\zeta_i)\sin(i\zeta_r) \\ &=-\sin(\zeta_i)\cosh(\zeta_r)+i\cos(\zeta_i)\sinh(\zeta_r). \end{aligned}$$
>
> $\zeta_r\geqq 0, -\dfrac{\pi}{2}\leqq\zeta_i\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，確かに $\mathrm{Im}(u)\geqq 0$ である．

次に，u の上半面と w 平面の帯状領域を結びつけよう．Landau では天下り的に結果が示されているが，Lamb によればこの写像も SC 変換から導くことができるので，辿ってみる．

帯状領域を，頂点 C,C' が無限遠にある多角形とみなす．すると，SC 変換の式で $a=b=0,\ \alpha=\beta=\dfrac{\pi}{2}$ とおいて

$$\frac{dw}{du}=\frac{A}{u}\qquad \therefore\quad w=A\log(u)+B.$$

定数 A,B を決めるため，やはり点 B',B の対応関係に着目する．$u=-1$ と $w=-\dfrac{iQ}{\rho}$，$u=1$ と $w=0$ が対応しているから（やはり u の偏角を $-\pi\leqq\arg(u)\leqq\pi$ に制限すれば）

$$\begin{cases} -\dfrac{iQ}{\rho}=A\cdot i\pi+B \\ 0=0+B \end{cases}\qquad \therefore\quad \begin{cases} A=-\dfrac{Q}{\rho\pi} \\ B=0 \end{cases}.$$

よって

$$w=-\frac{Q}{\rho\pi}\log(u) \tag*{③}$$

を得る．

[*26] 多価性をなくすため，ここでは u の偏角を $-\pi\leqq\arg(u)\leqq\pi$ に制限した．

本当に上半面を帯状領域に移しているか確かめてみよう．

$$w = -\frac{Q}{\rho\pi}[\log|u| + i \cdot \arg(u)]$$

u の上半面は $0 \leqq |u| < \infty$, $0 \leqq \arg(u) \leqq \pi$ で表されるから，$-\infty < \phi < \phi$, $-\dfrac{Q}{\rho} \leqq \psi \leqq 0$ となる．点 $\mathrm{A}, \mathrm{A}', \mathrm{C}, \mathrm{C}'$ が対応づけられていることも容易にわかる．

①②③より w と $\dfrac{dw}{dz}$ の関係式が得られたので，ジェットの形すなわち曲線 BC の式を（パラメータ表示で）求めることができる．BC 上では $v = v_1$, $-\pi \leqq \theta < -\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\zeta = i\Big(\theta + \frac{\pi}{2}\Big),$$

$$u = \sin(i\zeta) = \sin\Big[-\Big(\theta + \frac{\pi}{2}\Big)\Big] = -\cos\theta \quad (1 \geqq u > 0)$$

である．また BC 上では $\psi = 0$ であるから

$$\phi = w = -\frac{Q}{\rho\pi}\log(-\cos\theta) \quad (0 \leqq \phi < \infty).$$

$Q = \rho a_1 v_1$ に注意すると

$$d\phi = -\frac{Q}{\rho\pi}\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}\,d\theta = \frac{a_1 v_1}{\pi}\tan\theta\,d\theta. \tag{④}$$

一方 BC 上では

$$\frac{dw}{dz} = v_1 e^{-i\theta} \qquad \therefore \quad d\phi = v_1 e^{-i\theta}\,dz. \tag{⑤}$$

④⑤を比べて

$$dz = \frac{d\phi}{v_1 e^{-i\theta}} = \frac{a_1}{\pi}e^{i\theta}\tan\theta\,d\theta,$$

$$dx + idy = \frac{a_1}{\pi}(\cos\theta + i\sin\theta)\tan\theta\,d\theta,$$

$$\therefore \quad \begin{cases} dx = \dfrac{a_1}{\pi}\sin\theta\,d\theta \\ dy = \dfrac{a_1}{\pi}\sin\theta\tan\theta\,d\theta \end{cases}.$$

$\theta = -\pi$（点 B）から，BC 上の任意の θ の点まで積分する．$\theta = -\pi$ では $x = \dfrac{a}{2}$, $y = 0$ であるから

$$\begin{cases} x - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a_1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\theta}\sin\theta\,d\theta \\ y - 0 = \dfrac{a_1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\theta}\sin\theta\tan\theta\,d\theta \end{cases}.$$

第 1 式より $x = \dfrac{a}{2} - \dfrac{a_1}{\pi}(1 + \cos\theta)$ となるが，特に点 $\mathrm{C}\Big(\theta = -\dfrac{\pi}{2}\Big)$ では $x = \dfrac{a_1}{2}$ であることから

$$\frac{a_1}{2} = \frac{a}{2} - \frac{a_1}{\pi} \qquad \therefore \quad a_1 = \frac{\pi}{\pi + 2}a.$$

よって

$$x = \frac{a}{2} - \frac{a}{\pi + 2}(1 + \cos\theta) = \frac{a}{\pi + 2}\Big(\frac{\pi + 2}{2} - 1 - \cos\theta\Big) = \frac{a}{\pi + 2}\Big(\frac{\pi}{2} - \cos\theta\Big). \tag{⑥}$$

一方 y の方は，$t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ とおくと $\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\tan\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}$，$d\theta=\dfrac{2dt}{1+t^2}$ であるから

$$\begin{aligned}\int\sin\theta\tan\theta\,d\theta&=\int\frac{8t^2}{(1+t^2)^2(1-t^2)}\,dt\\&=\int\left[\frac{-2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}+\frac{2}{1-t^2}\right]dt\\&=\int\left[-\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)'+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right]dt\\&=-\frac{2t}{1+t^2}+\log|1+t|-\log|1-t|\\&=-\sin\theta+\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|.\end{aligned}$$

$-\pi\leqq\theta<-\dfrac{\pi}{2}$ では $t<-1$ であるから

$$y=\frac{a_1}{\pi}\left(-\sin\theta+\log\frac{t+1}{t-1}\right)=\frac{a}{\pi+2}\left(-\sin\theta+\log\frac{\tan\frac{\theta}{2}+1}{\tan\frac{\theta}{2}-1}\right). \qquad ⑦$$

⑥⑦が自由流線 BC の形を与える $\left(-\pi\leqq\theta<-\dfrac{\pi}{2}\right)$．特に，ジェットのすぼまり方を表す縮脈係数は

$$\frac{a_1}{a}=\frac{\pi}{\pi+2}\simeq 0.611.$$

⬆ 目次へ戻る

§11　物体のまわりのポテンシャル流による抗力

静止した物体まわりの，非圧縮性流体のポテンシャル流（無限遠での流れは 0 ではない）の問題を考える．これは物体が流体中を運動するときの流れ（無限遠での流れは 0）を求める問題と等価である．前者から後者を得るには，無限遠で流体が静止している座標系（流体の重心速度で動く座標系）に移ればよいから，以下では後者（物体が流体中を運動している問題）を考える．

物体から遠く離れたところでの流れを求めよう[*27]．非圧縮性流体のポテンシャル流は $\triangle\phi=0$ の解であり，このうち無限遠で 0 となるものを考えなければならない．物体の中に原点をとり（座標系は物体とともに動くので，ある短い時間内での流体の速度を考えることにする)，原点からの距離を r とする．問題 10.2 で述べたように，無限遠で 0 となる Laplace 方程式の解は $1/r$ とその高階微分の線形結合であり，物体から十分離れたところでは

$$\phi=-\frac{a}{r}+\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right)+\cdots$$

となる（$a,\boldsymbol{A}$ は座標によらない)．$a=0$ であることが以下のようにしてわかる：$\phi=-\dfrac{a}{r}$ のとき[*28]の速度は

[*27] 遠く離れたところでの流れだけを考えればよい理由は，このあと流体の全エネルギーを求めるのに必要となるのは，無限遠での ϕ や $\boldsymbol{v}$ のふるまいだからである．

[*28] ポテンシャル $\phi=-\dfrac{a}{r}$ の作る流れ場は，湧き出しや吸い込みと呼ばれる．

$\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\left(-\dfrac{a}{r}\right) = \dfrac{a\boldsymbol{r}}{r^3}$ である．半径 R の球面を通過する質量フラックスは

$$\rho \int_{r=R} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} = \rho \frac{a}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi\rho a.$$

一方，湧き出しや吸い込みのない非圧縮性流体では

$$\rho \int_{r=R} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{r \leqq R} \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}\, dV = 0$$

である．よって $a = 0$ でなければならない．

以上より，ϕ は $1/r$ の 1 階以上の微分を含む．物体から離れたところでの解を求めるので，2 階以上を無視すると，次のようになる（$\boldsymbol{n}$ を $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトルとする）．

$$\phi = \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}}{r^2} \tag{11.1}$$

$$\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\, \phi = \frac{3(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{A}}{r^3} \tag{11.2}$$

つまり，物体から離れたところでは速度は $\mathcal{O}\left(r^{-3}\right)$ で減少する．ベクトル $\boldsymbol{A}$ は物体の速度や形に依存し，物体表面での適切な境界条件のもと $\triangle\phi = 0$ を解くことで求められる．

(11.2) の $\boldsymbol{A}$ は，物体まわりの流体の全運動量 $\boldsymbol{P}$，全エネルギー E と結びついている．非圧縮性流体では内部エネルギー ε が一定であったから，$E = \dfrac{1}{2}\rho \displaystyle\int v^2\, dV$ となる（積分は物体の外側の全空間にわたって行う）．これを計算するために，原点を中心とする半径 R の球の内部 V（から物体 V_0 を除いた領域）で積分し，最後に $R \to \infty$ としよう．

u を物体の速度とすると

$$\int_{V-V_0} v^2\, dV = \int_{V-V_0} u^2\, dV + \int_{V-V_0} (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})\, dV.$$

右辺第 1 項は，$\boldsymbol{u}$ が座標によらないから $u^2(V - V_0)$ に等しい．右辺第 2 項は，$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} = \mathrm{grad}(\phi + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{r})$ とベクトル解析の公式 $\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{grad}\, f = \mathrm{div}(f\boldsymbol{A}) - f\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{A}$，および $\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = \mathrm{div}\, \boldsymbol{u} = 0$ より

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) &= \mathrm{grad}(\phi + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \\
&= \mathrm{div}[(\phi + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})] - (\phi + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{r})\, \mathrm{div}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \\
&= \mathrm{div}[(\phi + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})].
\end{aligned}$$

よって，V の表面を S，物体表面を S_0 として，Gauss の発散定理を用いると

$$\int_{V-V_0} v^2\, dV = u^2(V - V_0) + \int_{S+S_0} (\phi + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \cdot d\boldsymbol{S}.$$

$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}$ を物体表面に平行な成分と垂直な成分に分けて

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{v}_{\parallel} - \boldsymbol{u}_{\parallel}) + (\boldsymbol{v}_{\perp} - \boldsymbol{u}_{\perp})$$

と書くと，$(\boldsymbol{v}_{\parallel} - \boldsymbol{u}_{\parallel})$ は物体表面の面積要素ベクトル $d\boldsymbol{S}$ に垂直であるから，両者の内積は 0 である．また境界条件から，物体表面では $\boldsymbol{v}_{\perp} = \boldsymbol{u}_{\perp}$ である．よって S_0 上の面積分は 0 であり，S 上の面積分

$$\int_S (\phi + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \cdot d\boldsymbol{S} \tag{①}$$

を計算すればよい．do を微小立体角要素とすると $d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}R^2\,do$ であるから，(11.2) より

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_{r=R}\cdot d\boldsymbol{S} &= \left(\frac{3(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}-\boldsymbol{A}}{R^3}-\boldsymbol{u}\right)\cdot\boldsymbol{n}R^2\,do\\
&= \left(\frac{3(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}}{R}-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}R^2\right)do\\
&= \left(\frac{2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}}{R}-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}R^2\right)do,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
① &= \int\left(-\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}}{R^2}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}R\right)\left(\frac{2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}}{R}-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}R^2\right)do\\
&= \int\left[-\frac{2(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})^2}{R^3}+(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})+2(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})^2R^3\right]do\\
&\qquad R\to\infty\text{ で 0 となる第 1 項を除くと}\\
&= \int\left[3(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})^2R^3\right]do.
\end{aligned}
$$

(11.1)(11.2) で省いた高次の項を書いてみると

$$
\left(-\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}}{R^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{R^3}\right)+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}R\right)\left(\frac{2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}}{R}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{R^2}\right)-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}R^2\right)
$$

となる．新たに加えた項は最高でも $\mathcal{O}(1/R)$ であるから，省いても結果には影響しない．

ある量 f の立体角 o による積分は，$\boldsymbol{n}$ のあらゆる方向にわたって f を平均して 4π [*29]をかけたものに等しいから，定数ベクトル $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ を用いて $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n})=A_iB_jn_in_j$ と表される量を o で積分すると

$$
\int(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n})\,do=4\pi A_iB_j\overline{n_in_j}
$$

となる．$\overline{n_in_j}$ は対称テンソルであるから $\overline{n_in_j}=a\delta_{ij}$ と書けて，i,j を縮約して $1=3a$ すなわち $a=\dfrac{1}{3}$ を得る．ゆえに

$$
\int(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n})\,do=\frac{4}{3}\pi\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}
$$

であり

$$
① = \frac{4}{3}\pi\big(3\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}-u^2R^3\big),
$$

$$
\int_{V-V_0}v^2\,dV=u^2\left(\frac{4}{3}\pi R^3-V_0\right)+\frac{4}{3}\pi\big(3\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}-u^2R^3\big)=4\pi\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}-u^2V_0
$$

$$
E=\frac{1}{2}\rho\big(4\pi\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}-u^2V_0\big). \tag{11.3}
$$

これで $\boldsymbol{A}$ と全エネルギーの関係が得られた．

以上の説明を初めて読んだとき，(11.3) を導くのに，かなり大がかりなことをやるものだと思った．類書

*29 $\int do=4\pi$ は規格化の定数．

を見ると，次のような説明が載っている：$\mathrm{div}(\phi\,\mathrm{grad}\,\phi) = (\mathrm{grad}\,\phi)^2 + \phi\triangle\phi = v^2$ より

$$E = \frac{1}{2}\rho\int_{V-V_0} v^2\,dV = \frac{1}{2}\rho\int_{S+S_0}\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}\,dS$$

が成り立つ．S 上では $\phi\to 0$ であるから S 上の積分は寄与せず

$$E = \frac{1}{2}\rho\int_{S_0}\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}\,dS$$

となる．ここに (11.1) を代入すれば，答えが出るような気がした．
ところが，(11.1) は物体から離れたところで成り立つ式だから，今は使うことはできない．一方，本文の方法は S_0 上の面積分の寄与をなくし，逆に S 上の面積分だけにしており，これなら (11.1) を用いることができる．
やや文脈は異なるが，S_0 上の面積分を全て S 上の面積分に変換して物体に働く力を求める方法が，巽に載っている．他にも載っている本があるかもしれない．

さて，$\boldsymbol{A}$ の正確な表式を求めるには，物体表面での境界条件のもとで $\triangle\phi = 0$ を解く必要があり，一般には面倒である．しかし，Laplace 方程式と境界条件の線形性から，$\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{u}$ の成分の線形結合でなければならない．よって一般には，(11.3) は $\boldsymbol{u}$ の成分の 2 次形式

$$E = \frac{1}{2}m_{ij}u_iu_j \tag{11.4}$$

で表される．m_{ij} は**誘導質量テンソル**と呼ばれ，定義から明らかなように対称である．その具体的な形は $\boldsymbol{A}$ を求めることで得られる．

流体の全エネルギーが得られたので，次は全運動量 $\boldsymbol{P}$ を求めよう．まず，定義 $\boldsymbol{P} = \int\rho\boldsymbol{v}\,dV$ から直接計算することはできないことに注意しよう．なぜなら，この積分は体積の取り方によって異なる値になるからである．このため，エネルギーと運動量の微小量の関係

$$dE = \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{P}$$

を用いる．

$\because$　物体が外力 $\boldsymbol{F}$ を受けて時間 dt のあいだ加速されるとすれば，この間の運動量変化は $d\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}dt$ と書ける．$\boldsymbol{u}$ との内積をとれば $\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{u}dt)$ となる．右辺は距離 $\boldsymbol{u}dt$ の間に力によってされた仕事であるから，$\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{P}$ は流体のエネルギーの増分 dE に等しい．

(11.4) より（m_{ij} は定数であるから）

$$dE = \frac{1}{2}m_{ij}(du_i\cdot u_j + u_i\,du_j)$$

第 1 項で i, j を入れかえ，m_{ij} が対称であることを用いる．

$$= \frac{1}{2}m_{ij}\cdot 2u_i\,du_j = u_i d(m_{ij}u_j).$$

よって

$$P_i = m_{ij}u_j \tag{11.5}$$

を得る．

今考えている問題では，$E = \dfrac{1}{2}\rho(4\pi A_i - V_0u_i)u_i$ より $m_{ij}u_j = 4\pi\rho A_i - \rho V_0 u_i$ である．したがって流体の全運動量は

$$\boldsymbol{P} = 4\pi\rho\boldsymbol{A} - \rho V_0\boldsymbol{u} \tag{11.6}$$

となる．$\boldsymbol{P}$ が確定した有限値であることに注意．

流体中の物体に働く力

物体が動くことにより流体に与えられる単位時間あたりの運動量は $\dfrac{d\boldsymbol{P}}{dt}$ である．よって，流体が物体に及ぼす力はこれの符号を変えたもので

$$\boldsymbol{F} = -\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} \tag{11.7}$$

となる．$\boldsymbol{F}$ のうち，$\boldsymbol{u}$ に平行な成分は**抗力**，垂直な成分は**揚力**と呼ばれる．

理想流体中を一様な速度で動く物体のまわりのポテンシャル流では，$\boldsymbol{u} = \text{const.}$ より $\boldsymbol{P} = \text{const.}$ であり，$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ となる．すなわち，物体は流体から力を受けない（d'Alembert **のパラドックス**）．

> よく，どのような運動をしても力を受けないと誤解されるが，d'Alembert のパラドックスは**等速度**運動のとき力を受けないことを主張しているのであって，加速度運動を行うときは当然力を受ける．
> なお，ふつうの本では，「d'Alembert のパラドックスは粘性を考慮すれば解決する」で済まされることが多いが，ここでは，理想流体では力が当然 0 とならなければならないことが説明されている．

力を受けない理由は次のとおりである．物体の一様な運動で力を受けると仮定すると，この運動を持続させるためには，外力により仕事が行われなければならない．この仕事は，(1)流体中で消費されるか，(2)流体の運動エネルギーに変換され，無限遠へ輸送される．しかし，理想流体ではエネルギーの散逸がないから(1)はありえない．また，物体の運動によって生じた流れの速度は物体から離れるにしたがって急速に減少するから，(2)もありえない．よって，力を受けることはない．

> この議論は，流体が無限の体積を持つ場合に限ることに注意．例えば流体が自由表面を持つ場合，表面と平行に一様な運動をする物体は抗力（**波の抗力**）を受ける．これは，自由表面を伝わる波により，エネルギーを無限遠へ運ぶことが可能なためである．

流体中の物体の運動方程式

流体の運動量が分かったので，そこから得られる結果について考えよう．

まず，物体が外力 $\boldsymbol{f}$ により振動しており，§ 10 で述べた条件（物体の大きさに比べて振幅が非常に小さい）が満たされ，流れがポテンシャル流である場合を考えよう．物体の質量を M とする．外力 $\boldsymbol{f}$ は系の全運動量（つまり物体の運動量 $M\boldsymbol{u}$ と流体の運動量 $\boldsymbol{P}$ の和）の時間微分に等しいから

$$M\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \boldsymbol{f}.$$

(11.5) を代入して

$$(M\delta_{ij} + m_{ij})\frac{du_j}{dt} = f_i. \tag{11.8}$$

これは理想流体中を運動する物体の運動方程式である．

これとは逆に，外力によって流体が振動しているときの，物体の運動方程式を導こう．前と同じく物体の速度を $\boldsymbol{u}$ とする．物体がない（摂動がない）ときの流体の速度を $\boldsymbol{v}$ とし，物体の長さ程度では流体の速度は変わらないとする．

物体に働く力を考えよう．物体が流体と同じ速度で動く（$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$）ならば，物体[*30]に働く力は，物体がない場合に物体と同じ体積の流体に働く力に等しく $\rho V_0 \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ である．実際には，物体と流体の速度が異なるために

[*30] 日本語版では「流体」となっているが，誤訳であろう．

相対的な運動が生じ，流体は物体がないときとは異なる運動をする．物体があることで生じる流体の運動量は，(11.5) で $\boldsymbol{u}$ を（流体から見た相対速度）$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ に置きかえて $m_{ij}(u_j-v_j)$ である．この時間微分の符号を変えたものが，物体に働く．以上より物体に働く力は

$$\rho V_0 \frac{dv_i}{dt} - m_{ij}\frac{d}{dt}(u_j-v_j)$$

となる．よって物体の運動方程式は

$$\frac{d}{dt}(Mu_i) = \rho V_0 \frac{dv_i}{dt} - m_{ij}\frac{d}{dt}(u_j-v_j).$$

これを時間で積分し，積分定数を 0 とおくと[*31]

$$Mu_i = \rho V_0 v_i - m_{ij}(u_j-v_j),$$

$$\therefore \quad (M\delta_{ij}+m_{ij})u_j = (m_{ij}+\rho V_0\delta_{ij})v_j. \tag{11.9}$$

この式は，流体の速度が与えられたとき物体の速度を求める式である．特に，物体の密度が流体の密度に等しい（$M=\rho V_0$）とき，当然 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$ となる．

問題 11.1

理想流体中で振動しているの球の運動方程式を求めよ．また，振動している理想流体中の球の運動方程式を求めよ．

【解答】

問題 10.2 の結果より，球の半径を R として

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}R^3\boldsymbol{u}$$

である．よって (11.6) より，球が流体に与える全運動量は

$$\boldsymbol{P} = 4\pi\rho\cdot\frac{R^3}{2}\boldsymbol{u} - \rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\boldsymbol{u} = \frac{2}{3}\pi\rho R^3\boldsymbol{u}$$

であり，誘導質量テンソルは

$$m_{ij} = \frac{2}{3}\pi\rho R^3\delta_{ij},$$

球に働く力は

$$\boldsymbol{F} = -\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = -\frac{2}{3}\pi\rho R^3\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$$

となる．

【前半】球の密度を ρ_0 とすると $M=\dfrac{4}{3}\pi\rho_0R^3$ であるから (11.8) は

$$\left(\frac{4}{3}\pi\rho_0R^3\delta_{ij}+\frac{2}{3}\pi\rho R^3\delta_{ij}\right)\frac{du_j}{dt} = f_i,$$

$$\underline{\frac{4}{3}\pi R^3\left(\rho_0+\frac{1}{2}\rho\right)}\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{f}.$$

[*31] 流体が動かなければ物体も動かないから，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ である．

下線部は球のみかけの質量と呼ばれ，球自身の質量と誘導質量の和である．この場合，誘導質量は球が押しのけた流体の質量の半分になっている．
【後半】(11.9) は

$$\left(\frac{4}{3}\pi\rho_0 R^3\delta_{ij}+\frac{2}{3}\pi\rho R^3\delta_{ij}\right)u_j=\left(\frac{2}{3}\pi\rho R^3\delta_{ij}+\frac{4}{3}\pi\rho R^3\delta_{ij}\right)v_j.$$

$$\left(\rho_0+\frac{1}{2}\rho\right)\boldsymbol{u}=\frac{3}{2}\rho\boldsymbol{v}\qquad\therefore\quad \boldsymbol{u}=\frac{3\rho}{\rho+2\rho_0}\boldsymbol{v}$$

流体よりも球の方が重い（$\rho<\rho_0$）ときは $u<v$ となり，球は流体から遅れる（引きずられる）．流体よりも球の方が軽い（$\rho>\rho_0$）ときは $u>v$ となり，球の方が流体より先に進む．

問題 11.2

流体中を運動する物体に働く力のモーメント $\boldsymbol{M}$ をベクトル $\boldsymbol{A}$ を用いて表せ．

【解答】力学で学んだように[*32]，物体を無限小角度 $\delta\boldsymbol{\theta}$ だけ回転させたとき，働くモーメントとの間には

$$\delta E=\boldsymbol{M}\cdot\delta\boldsymbol{\theta}$$

の関係が成り立つ（δE は回転によるエネルギーの変化）．

物体を $\delta\boldsymbol{\theta}$ 回転させると，$\boldsymbol{u}$ と流れのなす角が変わり，m_{ij} が変わってしまう．これを避けるために，流体を $-\delta\boldsymbol{\theta}$ だけ回転してみよう．これは座標自体を回転していることに相当し，$\boldsymbol{u}$ が変化する．その変化分は $\delta\boldsymbol{u}=(-\delta\boldsymbol{\theta})\times\boldsymbol{u}$ であるから（？）

$$\delta E=\boldsymbol{P}\cdot\delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{P}\cdot(-\delta\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{u})=-\delta\boldsymbol{\theta}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{P}).$$

よって

$$\boldsymbol{M}=-\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{u}\times(4\pi\rho\boldsymbol{A}-\rho V_0\boldsymbol{u})=4\pi\rho\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{u}.$$

⬆ 目次へ戻る

§12　重力波

重力場中で平衡状態にある液体の自由表面は平面となる．なんらかの摂動が外から加わると，表面は平面からずれて，液体中に運動が生じる．これは重力場の作用により生じるため**重力波**（gravity wave）と呼ばれる．重力波は主に液体表面に生じ，内部へいくほどその影響は小さくなる．

ここでは，流体粒子の速度が十分小さく，Euler 方程式で $\dfrac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}$ に比べて $(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v}$ が無視できるような重力波を考えよう．その物理的意味は次のようにして分かる：波の周期を τ，振幅を a，波長を λ とする．τ 程度の時間に流体粒子は a 程度の距離を動くから，流体粒子の速度は $v\sim a/\tau$ のオーダーである．速度は τ 程度の時間経つと，あるいは λ 程度離れれば大きく変化する．よって速度の時間微分は v/τ，空間微分は v/λ のオーダーである．したがって，条件 $(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v}\ll\dfrac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}$ は

$$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{a}{\tau}\right)^2\ll\frac{1}{\tau}\left(\frac{a}{\tau}\right)\qquad\therefore\quad a\ll\lambda.\tag{12.1}$$

[*32] 『力学』§ 9 参照．

すなわち，波の振幅が波長に比べて十分短いような場合が，ここでの考察の対象である．

§ 9 で見たように，移流項 $(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v}$ を $\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}$ に比べて無視できる場合[*33]には，流れをポテンシャル流とみなすことができる．さらに非圧縮性流体を仮定すれば，Laplace 方程式 (10.6)，圧力方程式 (10.7) を用いることができる．(10.7) は速度の 2 乗を含んでいるが，これは落とすことができる．

$\dfrac{\partial \phi}{\partial t}$ に比べて $\dfrac{1}{2}v^2$ を無視できることが次のようにして分かる：$\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\,\phi$ であるから $\phi \sim v\lambda \sim \dfrac{a\lambda}{\tau}$，$\dfrac{\partial \phi}{\partial t} \sim \dfrac{a\lambda}{\tau^2}$ である．一方 $\dfrac{1}{2}v^2 \sim \left(\dfrac{a}{\tau}\right)^2$ であるから，$a \ll \lambda$ のとき $\dfrac{1}{2}v^2 \ll \dfrac{\partial \phi}{\partial t}$．

$f(t) = 0$ と置き，重力場中であるから gz を加えて（鉛直上方を z 軸に，平衡状態での自由表面を xy 平面にとる）

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \qquad \therefore \quad p = -\rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}. \tag{12.2}$$

流体表面の流体粒子の z 座標を ζ とする．平衡状態では $\zeta = 0$ であるから，ζ は振動している表面の鉛直変位を表し，x, y, t の関数である．表面には一定の圧力 p_0 が働いているとすると，(12.2) は

$$p_0 = -\rho g \zeta - \rho \left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{z=\zeta}.$$

これを $g\zeta + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\phi + \dfrac{p_0}{\rho}t\right)_{z=\zeta} = 0$ と書き，$\phi + \dfrac{p_0}{\rho}t$ を改めて ϕ としてよい（$\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\,\phi$ であるから，ϕ には時間の関数の分だけ不定性がある）．よって

$$g\zeta + \left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{z=\zeta} = 0 \tag{12.3}$$

を得る．

波の振幅は小さいと仮定しているから，変位 ζ も小さく，表面での v_z は ζ の時間微分で近似できる．

$$\left. v_z \right|_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

一方 $v_z = \dfrac{\partial \phi}{\partial z}$ であるから

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

よって (12.3) を t で微分して

$$\left(g\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right)_{z=\zeta} = \left(g\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right)_{z=\zeta} = 0.$$

波の振幅が小さいから，$z = \zeta$ での値は $z = 0$ での値と近似してよい．以上より，重力波を記述する方程式が得られた：

$$\triangle \phi = 0 \tag{12.4}$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right)_{z=0} = 0 \tag{12.5}$$

[*33] 本当は，振動の周期にわたって $\boldsymbol{v}$ の平均が 0 という条件も必要である．あるいは，運動が静止状態から始まったとして，その後も渦なしであると考える．

短波

この小節では，流体表面は無限に広がっているとし，波長は流体の深さに比べて十分短い（$a \ll \lambda \ll h$）場合を考える．つまり，流体は半無限空間 $z < 0$ に存在し，底面と端での境界条件は考える必要がない．

y 軸方向に一様な波動が x 軸方向に伝播する問題を考えよう．ϕ が y によらず，x, t について周期関数であるような解

$$\phi = f(z)\cos(kx - \omega t)$$

を求める（ω は**角周波数**，k は**波数**，$\lambda = 2\pi/k$ は**波長**である）．これを $\triangle\phi = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$ へ代入すると

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0 \qquad \therefore \quad f \propto e^{kz}, e^{-kz}.$$

流体の内部（$z < 0$）で減衰する解をとり，速度ポテンシャルは

$$\phi = Ae^{kz}\cos(kx - \omega t) \tag{12.6}$$

となる．次に境界条件 (12.5) は

$$k - \frac{\omega^2}{g} = 0 \qquad \therefore \quad \omega^2 = gk. \tag{12.7}$$

この式は重力波の**分散関係**を与える．

流体の速度分布は，ϕ を x, z で微分することで得られる．

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = -Ake^{kz}\sin(kx - \omega t) \\ v_z = \dfrac{\partial\phi}{\partial z} = Ake^{kz}\cos(kx - \omega t) \end{cases} \tag{12.8}$$

空間のある点における速度ベクトルは，xz 平面内で一様に回転する．その大きさ Ake^{kz} は深さとともに指数関数的に減少する．

波動中での流体粒子の軌跡を求めよう．ここでは一時的に，x, z を，運動している流体粒子の座標とする．平衡状態での流体粒子の座標を (x_0, z_0) とすると，波の振幅が小さいことから，(12.8) 右辺の x, z を x_0, z_0 で近似することができる．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_x \simeq -Ake^{kz_0}\sin(kx_0 - \omega t) \\ \dfrac{dz}{dt} = v_z \simeq Ake^{kz_0}\cos(kx_0 - \omega t) \end{cases}$$

時間に関して積分し

$$\begin{cases} x = x_0 - \dfrac{Ak}{\omega}e^{kz_0}\cos(kx_0 - \omega t) \\ z = z_0 - \dfrac{Ak}{\omega}e^{kz_0}\sin(kx_0 - \omega t) \end{cases} \tag{12.9}$$

となる．よって，流体粒子は点 (x_0, z_0) を中心とする半径 $\dfrac{Ak}{\omega}e^{kz_0}$ の円を描く．この半径は深さとともに指数関数的に減少する．

§ 67[*34]で示すように，波動の伝播速度（群速度）は $U = \dfrac{\partial\omega}{\partial k}$ で与えられる．$\omega = \sqrt{gk}$ より

$$U = \frac{\partial}{\partial k}\sqrt{gk} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \tag{12.10}$$

[*34] 日本語版では § 66

が，半無限の流体の表面を伝わる重力波の速度であり，これは波長が長いほど大きい．

長波

流体の深さに比べて波長が十分短い重力波を扱ったので，今度は逆の極限として，深さに比べて波長が十分長い波（**長波**）を考えよう．

最初に，水路内の長波を考える．水路は x 方向に無限に長いとし，水路の断面の形は任意（x 方向に変化しうる）とする．ただし深さと幅は波長に比べて短い．水路内の流体の断面積を $S(x,t)$ とする．

ここでは，流体が水路に沿って動く縦波を考えよう．この場合 $v_x \gg v_y, v_z$ であるから，v_x を単に v とおいて，他の成分を無視してよい．微小量の 2 次以上を無視すると，Euler 方程式の x, z 成分は

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -g.$$

自由表面 $z=\zeta$ で $p=p_0$ という条件で第 2 式を積分すると $p = p_0 - \rho g(z-\zeta)$ となる．これを第 1 式に代入し

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x}. \tag{12.11}$$

この方程式の未知数 v, ζ を決めるためには，もう一つ方程式が必要であり，それは連続の式である．

2 つの断面 $x, x+dx$ に挟まれた流体の体積を考えよう．単位時間あたり，x の側からは体積 $(Sv)_x dx$ が流入し，$x+dx$ の側からは体積 $(Sv)_{x+dx}dx$ が流出する．よって体積変化は

$$(Sv)_x dx - (Sv)_{x+dx}dx \simeq -\frac{\partial}{\partial x}(Sv)\,dx.$$

非圧縮性流体を仮定しているから，この変化は単に水面が動いたことによる体積変化 $\dfrac{\partial}{\partial t}(Sdx)$ に等しい．よって

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(Sdx) &= -\frac{\partial}{\partial x}(Sv)\,dx \\ \therefore \quad \frac{\partial S}{\partial t} &+ \frac{\partial}{\partial x}(Sv) = 0. \end{aligned} \tag{12.12}$$

平衡状態での流体の断面積を $S_0(x)$ とすると $S(x,t) = S_0(x) + S'(x,t)$ である．ここで S' は波による断面積変化で，水面の上下が小さいと仮定しているから，b を水路の幅として $S' \simeq b\zeta$ となる．以上を (12.12) へ代入し，2 次の微小量を落とせば

$$b\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(S_0 v) = 0. \tag{12.13}$$

これを t で微分し，$\dfrac{\partial v}{\partial t}$ に (12.11) を代入すれば

$$\begin{aligned} b\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left[S_0\left(-g\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)\right] &= 0 \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{g}{b}\frac{\partial}{\partial x}\left(S_0\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{12.14}$$

となる．特に，水路の形が場所によって変わらないとすると

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{gS_0}{b}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0 \tag{12.15}$$

という**波動方程式**になる．波の伝播速度は（§ 64 で見るように）

$$U = \sqrt{\frac{gS_0}{b}} \tag{12.16}$$

である．

全く同様にして，深さ $h(x,y,t)$ で x,y 方向に無限に広がる容器内の長波の問題を考えることができる．$v_x, v_y \gg v_z$ であるから Euler 方程式は

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + g\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} + g\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0. \tag{12.17}$$

連続の式 (12.12) は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(hdxdy) &= (hdyv_x)_x - (hdyv_x)_{x+dx} + (hdxv_y)_y - (hdxv_y)_{y+dy} \\
&\simeq -\frac{\partial}{\partial x}(hv_x)dxdy - \frac{\partial}{\partial y}(hv_y)dxdy \\
\therefore \quad \frac{\partial h}{\partial t} &+ \frac{\partial}{\partial x}(hv_x) + \frac{\partial}{\partial y}(hv_y) = 0.
\end{aligned}$$

平衡状態での深さを $h_0(x,y)$ とすると $h(x,y,t) = h_0(x,y) + \zeta(x,y,t)$ であるから，2 次の微小量を落とせば

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_0 v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(h_0 v_y) = 0. \tag{12.18}$$

特に容器の底が水平（$h_0 = \mathrm{const.}$）なら

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + h_0\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = 0.$$

これを t で微分し，$\dfrac{\partial v_x}{\partial t}, \dfrac{\partial v_y}{\partial t}$ に (12.17) を代入すれば

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + h_0\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-g\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-g\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)\right] = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - gh_0\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{12.19}$$

これは 2 次元の波動方程式で，波の伝播速度は

$$U = \sqrt{gh_0} \tag{12.20}$$

である．

問題 12.1

深さ h の流体の表面を伝わる重力波の伝播速度を求めよ．

【解答】 (12.4) の一般解は

$$\phi = (Ae^{kz} + Be^{-kz})\cos(kx - \omega t)$$

となる．底面 $z=-h$ での境界条件 $v_z=\dfrac{\partial\phi}{\partial z}=0$ から A, B の比を求めることができる．

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=-h}&=k(Ae^{kz}-Be^{-kz})_{z=-h}\cos(kx-\omega t)\\&=k(Ae^{-kh}-Be^{kh})\cos(kx-\omega t)=0\\ \therefore\quad B&=Ae^{-2kh}\end{aligned}$$

よって $A'=2Ae^{-kh}$ とおけば

$$\phi=2Ae^{-kh}\cdot\frac{e^{k(z+h)}+e^{-k(z+h)}}{2}\cos(kx-\omega t)=A'\cosh[k(z+h)]\cos(kx-\omega t).$$

次に (12.5) から分散関係を求める．

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}+\frac{1}{g}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)_{z=0}=A'k\sinh(kh)\cos(kx-\omega t)-\frac{\omega^2}{g}A'\cosh(kh)\cos(kx-\omega t)=0$$

$$\therefore\quad \omega^2=gk\tanh(kh).$$

波の伝播速度は

$$U=\frac{\partial}{\partial k}\sqrt{gk\tanh(kh)}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k\tanh(kh)}}\left[\tanh(kh)+\frac{kh}{\cosh^2(kh)}\right].$$

もし $kh\gg 1$ なら $\tanh(kh)\simeq 1$，$\dfrac{kh}{\cosh^2(kh)}\simeq\dfrac{4kh}{e^{2kh}}\simeq 0$ であるから $U\simeq\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{g}{k}}$ で (12.10) に戻る．

もし $kh\ll 1$ なら $\tanh(kh)\simeq kh$，$\cosh(kh)\simeq 1$ であるから $U\simeq\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{g}{k\cdot kh}}\cdot 2kh=\sqrt{gh}$ で (12.20) に戻る．

問題 12.2

上下を水平面で仕切られた 2 層流体の境界を伝わる重力波の分散関係を求めよ．上側の流体の密度を ρ'，厚さを h' とし，下側の流体の密度を ρ，厚さを h とする（$\rho>\rho'$）．

【解答】平衡状態における 2 層の境界を $z=0$ とする．問題 12.1 の解より，上下端での境界条件（$z=-h, h'$ で $\partial\phi/\partial z=0$）を満たす解は

$$\begin{cases}\phi=A\cosh[k(z+h)]\cos(kx-\omega t)\quad(z<0)\\ \phi'=B\cosh[k(z-h')]\cos(kx-\omega t)\quad(z>0)\end{cases}.\tag{①}$$

2 層の境界 $z=\zeta$ での条件は，速度の z 成分が連続となることと，圧力が連続となることで，前者の条件は

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=0}=\left.\frac{\partial\phi'}{\partial z}\right|_{z=0}.\tag{②}$$

後者の条件は，(12.2) より

$$\rho\left(g\zeta+\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{z=\zeta}\right)=\rho'\left(g\zeta+\left.\frac{\partial\phi'}{\partial t}\right|_{z=\zeta}\right),$$

$$(\rho-\rho')g\zeta=\left(\rho'\frac{\partial\phi'}{\partial t}-\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{z=\zeta}.$$

両辺を t で微分して $\dfrac{\partial\zeta}{\partial t} = v_z = \dfrac{\partial\phi}{\partial z}$ を用い，$z=\zeta$ を $z=0$ で近似すると

$$(\rho-\rho')g\left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=0} = \left(\rho'\frac{\partial^2\phi'}{\partial t^2} - \rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)_{z=0}. \qquad ③$$

①を②③へ代入して，係数 A, B に関する連立 1 次方程式が得られる．②は

$$A\sinh(kh) = B\sinh(-kh') \qquad \therefore\quad \sinh(kh)\cdot A + \sinh(kh')\cdot B = 0.$$

③は

$$(\rho-\rho')g\cdot kA\sinh(kh) = -\omega^2[\rho' B\cosh(-kh') - \rho A\cosh(kh)],$$

$$\therefore\quad \big[(\rho-\rho')gk\sinh(kh) - \rho\omega^2\cosh(kh)\big]A + \rho'\omega^2\cosh(kh')\cdot B = 0.$$

非自明な解を持つためには，行列式が 0 でなければならないから

$$\big[(\rho-\rho')gk\sinh(kh) - \rho\omega^2\cosh(kh)\big]\sinh(kh') - \rho'\omega^2\cosh(kh')\sinh(kh) = 0$$

$$[\rho\cosh(kh)\sinh(kh') + \rho'\cosh(kh')\sinh(kh)]\omega^2 = (\rho-\rho')gk\sinh(kh)\sinh(kh')$$

$$\therefore\quad \omega^2 = \frac{(\rho-\rho')gk}{\rho\coth(kh) + \rho'\coth(kh')}.$$

2 流体が十分厚い場合（$kh, kh' \gg 1$），$\coth(x) \to 1\ (x\to\infty)$ であるから

$$\omega^2 \simeq \frac{\rho-\rho'}{\rho+\rho'}gk.$$

2 流体が十分浅いまたは長波の場合（$kh, kh' \ll 1$），$\coth(x) \simeq \dfrac{1}{x}\ (x\simeq 0)$ であるから

$$\omega^2 \simeq \frac{(\rho-\rho')gk}{\dfrac{\rho}{kh} + \dfrac{\rho'}{kh'}} = \frac{(\rho-\rho')gk^2hh'}{\rho h' + \rho' h}.$$

♠ 最後に，$kh \gtrsim 1$ かつ $kh' \ll 1$（上側が薄い）場合，$\rho\coth(kh) \ll \rho'\coth(kh') \simeq \dfrac{\rho'}{kh'}$ であるから

$$\omega^2 \simeq \frac{(\rho-\rho')gk}{\dfrac{\rho'}{kh'}} = \frac{\rho-\rho'}{\rho'}gh'k^2.$$

問題 12.3

2 層流体で，上側の流体（密度 ρ'，厚さ h'）の上面は自由表面，下側の流体（密度 ρ）は無限に深いとする（$\rho > \rho'$）．自由表面および境界面を伝わる重力波の分散関係を求めよ．

【解答】 やはり平衡状態での境界面を $z=0$ にとる．$z\to-\infty$ で $\phi\to 0$ となる解は

$$\begin{cases}\phi = Ae^{kz}\cos(kx-\omega t) \quad (z<0) \\ \phi' = (Be^{-kz} + Ce^{kz})\cos(kx-\omega t) \quad (z>0)\end{cases}. \qquad ①$$

境界 $z=0$ での条件は

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial\phi'}{\partial z}\right|_{z=0}, \qquad ②$$

$$(\rho-\rho')g\left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=0}=\left(\rho'\frac{\partial^2\phi'}{\partial t^2}-\rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)_{z=0}. \quad ③$$

自由表面 $z=h'$ での境界条件は，(12.5) より

$$\left(g\frac{\partial\phi'}{\partial z}+\frac{\partial^2\phi'}{\partial t^2}\right)_{z=h'}=0. \quad ④$$

①を②に代入すると $A=-B+C$ となる．よって①を③④に代入することで，係数 B,C に関する連立 1 次方程式が得られる．③より

$$(\rho-\rho')gkA=-\omega^2[\rho'(B+C)-\rho A]$$

$$(\rho-\rho')gk(-B+C)=-\rho'\omega^2(B+C)+\rho\omega^2(-B+C)$$

$$\therefore\quad \big[(\rho+\rho')\omega^2-(\rho-\rho')gk\big]B-(\rho-\rho')(\omega^2-gk)C=0.$$

④より

$$gk(-Be^{-kh'}+Ce^{kh'})-\omega^2(Be^{-kh'}+Ce^{kh'})=0$$

$$\therefore\quad (\omega^2+gk)e^{-kh'}B+(\omega^2-gk)e^{kh'}C=0.$$

行列式を 0 とおいて

$$\big[(\rho+\rho')\omega^2-(\rho-\rho')gk\big](\omega^2-gk)e^{kh'}+(\rho-\rho')(\omega^2-gk)(\omega^2+gk)e^{-kh'}=0.$$

$\omega^2=gk$ は解の 1 つで，これは自由表面を伝わる波である．それ以外の解は

$$\big[(\rho+\rho')\omega^2-(\rho-\rho')gk\big]+(\rho-\rho')(\omega^2+gk)e^{-2kh'}=0$$

$$\Big[\rho+\rho'+(\rho-\rho')e^{-2kh'}\Big]\omega^2=(\rho-\rho')gk(1-e^{-2kh'})$$

$$\therefore\quad \omega^2=\frac{(\rho-\rho')(1-e^{-2kh'})}{\rho+\rho'+(\rho-\rho')e^{-2kh'}}gk.$$

上側の流体も十分厚い（$kh'\gg 1$）場合には $\omega^2\simeq\dfrac{\rho-\rho'}{\rho+\rho'}gk$ で前問で求めた極限と一致し，境界面を伝わる波を表す．

問題 12.4

縦 a，横 b，深さ h の直方体の容器内で生じる定常波の，可能な振動数を求めよ．

【解答】 直方体の縦，横方向に沿って x,y 軸をとる．定常波は

$$\phi=f(x,y)\cosh[k(z+h)]\cos\omega t$$

とおける．これを Laplace 方程式 $\triangle\phi=0$ に代入すると，f の満たすべき方程式は

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+k^2f=0. \quad ①$$

また，自由表面での境界条件 (12.5) より分散関係は

$$gk\sinh(kh)-\omega^2\cosh(kh)=0\qquad\therefore\quad \omega^2=gk\tanh(kh).$$

①の解を $f=\cos(px)\cos(qy)$ の形に求めよう．①より

$$p^2+q^2=k^2 \qquad ②$$

であり，側面での境界条件

$$\begin{cases} v_x=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=0 \quad (x=0,a) \\ v_y=\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=0 \quad (y=0,b) \end{cases}$$

より $pa=m\pi, qb=n\pi$ となる（m,n は整数）．可能な k の値は

$$k^2=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right).$$

⬆ 目次へ戻る

§13　非圧縮性流体中の内部波

重力波の中には，非圧縮性流体の内部を伝播するものがある．そのような波動は，重力場によって流体が不均質となったことで生じる．この場合，必然的に圧力は（したがってエントロピーも）高さによって異なる値をとる．よって流体粒子が上下方向に変位することで力学的平衡は敗れ，振動が生じる．なぜなら，運動が断熱的であるため，流体粒子は元の位置でのエントロピーのまま新しい位置に移動し，新しい位置での平衡状態でのエントロピーとは異なるからである．

以下では，重力場によって密度が大きく変化する距離に比べて波長が短く[*35]，圧力による密度変化は無視できるとする．すなわち，密度変化は熱膨張によってのみ生じると仮定する（Boussinesq 近似）．

このような運動の方程式系を書き下そう．以下，添字 0 は力学的平衡での値，ダッシュ（$'$）はそこからのずれを表すものとする．エントロピー $s=s_0+s'$ の保存則は，微小量の 1 次までとる近似で

$$\frac{\partial s'}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}s_0=0 \qquad (13.1)$$

となる（$\boldsymbol{v}$ も微小量とする）．s_0 は，平衡状態における他の量と同様，鉛直座標 z の（与えられた）関数である．

次に，Euler 方程式で 2 次の微小量 $(\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad})\boldsymbol{v}$ を無視し，平衡状態での圧力分布が $\operatorname{grad}p_0=\rho_0\boldsymbol{g}$ で与えら

[*35] ♠ 密度と圧力の勾配の関係は $\operatorname{grad}p=\left(\dfrac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s\operatorname{grad}\rho=c^2\operatorname{grad}\rho$ で与えられる（c は音速）．よって静水圧平衡の式 $\operatorname{grad}p=\rho\boldsymbol{g}$ は $\operatorname{grad}\rho=\dfrac{\rho}{c^2}\boldsymbol{g}$ となる．したがって，重力場によって密度が大きく変化する距離を l とすると，$\dfrac{\rho}{l}\sim\dfrac{\rho g}{c^2}$ より $l\sim\dfrac{c^2}{g}$ であり，空気では $l\sim 10\,\mathrm{km}$，水では $l\sim 200\,\mathrm{km}$ となる．以下では，波長がこれより短い波動を扱うことになる．

れることを用いると，同程度の近似で

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \boldsymbol{g} \\
&= -\frac{1}{\rho_0 + \rho'}\operatorname{grad}(p_0 + p') + \boldsymbol{g} \\
&\simeq -\frac{1}{\rho_0}\left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right)\operatorname{grad}(p_0 + p') + \boldsymbol{g} \\
&\simeq \cancel{-\frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p_0} - \frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p' + \frac{\rho'}{{\rho_0}^2}\operatorname{grad} p_0 + \cancel{\boldsymbol{g}} \\
&= -\frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p' + \frac{\rho'}{{\rho_0}^2}\operatorname{grad} p_0 .
\end{aligned}
$$

第 1 項について，波長程度の距離では ρ_0 が変化しないと仮定しているから，ρ_0 を grad の中に入れることができる．また，$\operatorname{grad} p_0 = \rho_0 \boldsymbol{g}$ を用いて第 2 項を $\dfrac{\rho'}{\rho_0}\boldsymbol{g}$ と書き，さらに密度変化がエントロピー変化のみであることから $\rho' = \left(\dfrac{\partial \rho_0}{\partial s_0}\right)_p s'$ を代入すると $\dfrac{\boldsymbol{g}}{\rho_0}\left(\dfrac{\partial \rho_0}{\partial s_0}\right)_p s'$ となる．したがって Euler 方程式は

$$
\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \frac{\boldsymbol{g}}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial s_0}\right)_p s' - \operatorname{grad}\left(\frac{p'}{\rho_0}\right). \tag{13.2}
$$

ρ_0 が波長程度の距離では変化しないことから，連続の式は

$$
\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \tag{13.3}
$$

となる．

さて，方程式系 (13.1)〜(13.3) の解を，平面波

$$
\boldsymbol{v} \propto e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}
$$

の形に求めよう（s', p' も同様）．(13.3) より

$$
\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} = 0, \tag{13.4}
$$

つまり速度が**波数ベクトル** $\boldsymbol{k}$ に垂直な横波である．一方，(13.1)(13.2) へ代入すると

$$
-i\omega s' + \boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad} s_0 = 0, \tag{①}
$$

$$
-i\omega \boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial s_0}\right)_p s'\boldsymbol{g} - \frac{i\boldsymbol{k}}{\rho_0}p'. \tag{②}
$$

②と $\boldsymbol{k}$ の内積をとって (13.4) を用いると

$$
0 = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial s_0}\right)_p s'\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{k} - \frac{ip'}{\rho_0}k^2 .
$$

$$
\therefore \quad \frac{ip'}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial s_0}\right)_p s'\frac{\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{k}}{k^2}
$$

z 軸と $\boldsymbol{k}$ のなす角を θ とすると $\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{k} = -gk\cos\theta$

$$
= -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial s_0}\right)_p s'\frac{g\cos\theta}{k}.
$$

再び②に戻して

$$
\begin{aligned}
-i\omega\boldsymbol{v} &= \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial s_0}\right)_p s'\boldsymbol{g} + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial s_0}\right)_p s' g\cos\theta\frac{\boldsymbol{k}}{k} \\
&= \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial s_0}\right)_p s'\left(\boldsymbol{g} + g\cos\theta\frac{\boldsymbol{k}}{k}\right)
\end{aligned}
$$

両辺と $\mathrm{grad}\, s_0 = \dfrac{ds_0}{dz}\hat{\boldsymbol{z}}$ の内積をとり，左辺に①を用いると

$$
-i\omega(i\omega s') = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial s_0}\right)_p s'\frac{ds_0}{dz}(-g + g\cos^2\theta),
$$

$$
\omega^2 = -\frac{g}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial s_0}\right)_p \frac{ds_0}{dz}\sin^2\theta.
$$

よって

$$
\omega^2 = {\omega_0}^2\sin^2\theta, \tag{13.5}
$$

$$
{\omega_0}^2 = -\frac{g}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dz}. \tag{13.6}
$$

ただし，平衡状態での量を表す添字 0 は省いた．

(4.1) より $\left(\dfrac{\partial V}{\partial s}\right)_p \dfrac{ds}{dz} = -\dfrac{1}{\rho^2}\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p \dfrac{ds}{dz} > 0$ であるから，(13.6) の右辺は正である．すなわち，§ 4 の安定条件が満たされていれば，実数 ω_0 は存在する．

(13.5) より，振動数は波数ベクトルの大きさにはよらず，方向のみに依存する．また $\theta = 0$ ならば $\omega = 0$ であるから，鉛直方向に伝わる波動は存在しないことがわかる．

流体が力学的にも熱力学的にも平衡ならば，温度は一定であるから

$$
\frac{ds}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dz} = -\rho g\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T
$$

である．c_p を単位質量あたりの比熱とすると

$$
\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p, \quad \left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p
$$

後者は § 4 の補足で説明した式 $\left(\dfrac{\partial V}{\partial s}\right)_p = \dfrac{T}{c_p}\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ より明らか．前者は，その補足で言及している Maxwell 関係式 $\left(\dfrac{\partial s}{\partial p}\right)_T = -\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ より明らか．

が成り立つから

$$
{\omega_0}^2 = -\frac{g}{\rho}\frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \cdot \left[-\rho g \cdot \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p\right] = \frac{Tg^2}{c_p\rho^2}\left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p\right]^2
$$

$$
\therefore\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{T}{c_p}}\frac{g}{\rho}\left|\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p\right| \tag{13.7}
$$

となる．特に理想気体では $-\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p = \dfrac{1}{T}$ であるから

$$
\omega_0 = \frac{g}{\sqrt{c_p T}} \tag{13.8}
$$

となる．

♠ 周波数が波数ベクトルの方向に依存するため，群速度 $\boldsymbol{U} = \dfrac{\partial \omega}{\partial \boldsymbol{k}}$ は $\boldsymbol{k}$ に平行ではなくなる．$\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{k}}{k}$，$\boldsymbol{\nu}$ を z 軸上向きの単位ベクトル（$= \hat{\boldsymbol{z}}$）とすると，$\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nu}}{k} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu}$ であるから

$$\omega(\boldsymbol{k}) = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nu}}{k}\right)^2}.$$

ここで

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial k_i}\left(\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nu}}{k}\right)^2 &= \frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial k_i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nu})^2 + (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nu})^2\frac{\partial}{\partial k_i}\left(\frac{1}{k^2}\right)\\ &= \frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial k_i}(k_j\nu_j k_l\nu_l) + (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nu})^2\left(-\frac{2k_i}{k^4}\right)\\ &= \frac{1}{k^2}(\delta_{ij}\nu_j k_l\nu_l + k_j\nu_j\delta_{il}\nu_l) - \frac{2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nu})^2}{k^4}k_i\\ &= \frac{k_l\nu_l + k_j\nu_j}{k^2}\nu_i - \frac{2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nu})^2}{k^4}k_i.\end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{k}}{k}$ に注意すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\left(\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nu}}{k}\right)^2 &= \frac{2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nu})}{k^2}\boldsymbol{\nu} - \frac{2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nu})^2}{k^4}\boldsymbol{k}\\ &= \frac{2}{k}\big[(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu})^2\boldsymbol{n}\big].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U} = \frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}} &= \frac{-\omega_0}{2\sqrt{}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\left(\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nu}}{k}\right)^2\\ &= \frac{-{\omega_0}^2}{2\omega}\cdot\frac{2}{k}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu})[\boldsymbol{\nu} - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{n}]\\ &= \frac{-{\omega_0}^2}{\omega k}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu})[\boldsymbol{\nu} - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{n}]\end{aligned} \tag{13.9}$$

これと $\boldsymbol{n}$ との内積 $\propto (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu}) - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu}) = 0$ より，$\boldsymbol{U}$ は $\boldsymbol{k}$ と垂直であることがわかる．

また，

$$[\boldsymbol{\nu} - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{n}]^2 = \nu^2 - 2(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu})^2 + 2(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu})^2 = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$$

に注意すると，$\boldsymbol{U}$ の大きさは

$$U = \frac{{\omega_0}^2}{\omega k}|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu}|\cdot|\boldsymbol{\nu} - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{n}| = \frac{\omega_0}{k\sin\theta}\cos\theta\cdot\sin\theta = \frac{\omega_0}{k}\cos\theta,$$

$\boldsymbol{U}$ の鉛直成分は

$$\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{\nu} = -\frac{{\omega_0}^2}{\omega k}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu})\big[1 - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu})^2\big] = -\frac{\omega_0}{k\sin\theta}\cdot\cos\theta\sin^2\theta = -\frac{\omega_0}{k}\cdot\cos\theta\sin\theta$$

となる．

⬆ 目次へ戻る

§14　♠ 回転流体中の波動

慣性波

全体が一様に回転している非圧縮性流体では，別の種類の内部波が伝播しうる．これは回転の際に生じるCoriolis 力によるものである．

流体とともに回転する座標系で考えることにすると，Euler 方程式の右辺に遠心力，Coriolis 力（流体の単位質量あたり）を付け加えなければならない．流体の回転の角速度ベクトルを $\boldsymbol{\Omega}$ とすると，遠心力は $\mathrm{grad}\left[\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})^2\right]$，Coriolis 力は $2\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}$ と書ける．Euler 方程式は

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p+\mathrm{grad}\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})^2\right]+2\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}$$

となる．

$$P=p-\frac{1}{2}\rho(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})^2 \tag{14.1}$$

で有効圧力を定義し，Coriolis 力を左辺に移せば

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,P. \tag{14.2}$$

連続の式は変わらない；非圧縮性流体では単に $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0$ となる．

波の振幅が小さいと仮定して (14.2) の速度の二次の項を無視し，圧力の摂動を p' とすると

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p'. \tag{14.3}$$

両辺の rot をとると，右辺は 0 になる．また，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0$ に注意すると

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{\Omega}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v}=-(\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v}.$$

$\boldsymbol{\Omega}$ の方向に z 軸をとれば

$$2\,\mathrm{rot}(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v})=-2\Omega\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z}.$$

よって (14.3) は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})=2\Omega\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z} \tag{14.4}$$

となる．

この解を平面波

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{A}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \tag{14.5}$$

の形に求める．$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0$ であるから，横波の条件

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}=0 \tag{14.6}$$

を満たす．(14.5) を (14.4) に代入すると

$$-i\omega(i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v})=2\Omega ik_z\boldsymbol{v},$$

$$\omega\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}=2i\Omega k_z\boldsymbol{v}. \tag{14.7}$$

分散関係を得るために，両辺と $\boldsymbol{k}$ の外積をとると[*36]，

$$-\omega k^2 \boldsymbol{v} = 2i\Omega k_z \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v}.$$

これと (14.7) を比べて

$$\omega^2 k^2 = (2\Omega k_z)^2.$$

よって $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{\Omega}$ のなす角を θ とすると（$k_z = k\cos\theta$），分散関係

$$\omega = \frac{2\Omega k_z}{k} = 2\Omega\cos\theta \tag{14.8}$$

が得られる．

(14.7) を (14.8) で割ると $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v} = ik\boldsymbol{v}$ であり，$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/k$ とおくと

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v} = i\boldsymbol{v}$$

となる．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を実数ベクトルとして，複素振幅を $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}$ と表すと，

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}) = i(\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}) = i\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}.$$

実部を比べ $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b}$，虚部を比べ $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ となる．よってベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$（どちらも $\boldsymbol{k}$ と垂直な平面にある）は直角で大きさが等しくなる．これらの方向を x 軸，y 軸とし，(14.5) で実部，虚部を分離すると

$$v_x = a\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t), \quad v_y = a\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)$$

となる．このように，波は円偏光している：空間の各点で，ベクトル $\boldsymbol{v}$ は大きさ一定のまま，時間の経過とともに回転する[*37]．

波の伝搬速度を求めよう．$\omega = 2\Omega\dfrac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nu}}{k}$（$\boldsymbol{\nu}$ は $\boldsymbol{\Omega}$ 方向の単位ベクトル）であるから

$$\frac{\partial}{\partial k_i}\left(\frac{k_j\nu_j}{k}\right) = \frac{1}{k}\delta_{ij}\nu_j + k_j\nu_j\frac{\partial}{\partial k_i}\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{\nu_i}{k} + (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nu})\left(-\frac{\boldsymbol{n}}{k^2}\right),$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{U} = \frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}} = \frac{2\Omega}{k}[\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu})]. \tag{14.9}$$

$\boldsymbol{U}$ の大きさは

$$U = \frac{2\Omega}{k}\sqrt{\nu^2 - 2(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu})^2 + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu})^2} = \frac{2\Omega}{k}\sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{2\Omega}{k}\sin\theta,$$

$\boldsymbol{\Omega}$ に沿った成分は

$$\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{\nu} = \frac{2\Omega}{k}\left[1 - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nu})^2\right] = \frac{2\Omega}{k}\sin^2\theta = U\sin\theta.$$

以上の波を**慣性波**と呼ぶ．Coriolis 力は移動する流体に対して仕事をしないので，波のエネルギーは運動エネルギーのみで構成される．

軸対称の（平面でない）慣性波の特殊な形として，流体の回転軸に沿って伝播するものがある（問題 14.1 参照）．

[*36] $\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{k} - k^2\boldsymbol{v} = -k^2\boldsymbol{v}$ に注意する．

[*37] この運動は回転座標系に対する相対的なものである．固定座標系で見る場合には，流体全体の回転と組み合わされる．

回転流体中の定常運動

もう一つ，回転流体中の波動伝播ではなく，回転流体中の定常運動について述べておこう．

このような運動の特徴的な長さを l，特徴的な速度を u とする．(14.2) の $(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v}$ のオーダーは u^2/l であり，$2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}$ のオーダーは Ωu となる．$u/l\Omega \ll 1$ [*38]であれば前者は後者に比べて無視することができ，定常運動の方程式は次のように簡単化される．

$$2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,P \tag{14.10}$$

回転軸方向に z 軸をとれば

$$2\Omega v_y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}, \quad 2\Omega v_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0.$$

第 3 式から P は z に依存せず，これを第 1 式，第 2 式に代入することで v_x, v_y も z に依存しないことがわかる．また，第 2 式を x で，第 1 式を y で微分して加えると

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

となり，連続の式 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$ は $\dfrac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ となる[*39]．このように，高速（$\Omega \gg u/l$）で回転する流体の（回転座標系における）定常運動は，xy 平面内の 2 次元流と，z に依存しない軸方向の流れという，独立した 2 つの運動の重ね合わせになる（J. Proudman 1916）．この結果は，地球流体力学で Taylor-Proudman **の定理**として知られている．

問題 14.1

全体が回転している非圧縮性流体の，軸に沿って伝播する軸対称な波動を求めよ（W. Thomson 1880）．

【解答】 z 軸が $\boldsymbol{\Omega}$ に平行な円筒座標 r, ϕ, z をとる．軸対称な波動ではすべての量は角度 ϕ に依存しないから，(14.3) の成分は

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} - 2\Omega v_\phi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial r}, \quad \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + 2\Omega v_r = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p'}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z}.$$

z 方向の進行波 $\exp[i(kz-\omega t)]$ を代入すると

$$-i\omega v_r - 2\Omega v_\phi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial r}, \tag{①}$$

$$-i\omega v_\phi + 2\Omega v_r = 0, \quad -i\omega v_z = -\frac{ik}{\rho}p'. \tag{②}$$

円筒座標での連続の式は

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + ikv_z = 0 \tag{③}$$

[*38] 移流項と Coriolis 項の比 $u/l\Omega$ はロスビー数と呼ばれる無次元数に相当する．

[*39] (14.10) の rot を取ると $(\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v} = 0$ で，ここからただちに $\dfrac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ を得ることもできる．

となる．

②の第 1 式より

$$v_\phi = \frac{2\Omega}{i\omega}v_r = -\frac{2i\Omega}{\omega}v_r.$$

③より $v_z = \dfrac{1}{-ikr}\dfrac{\partial}{\partial r}(rv_r)$，これを②の第 2 式に代入して

$$\frac{ik}{\rho}p' = i\omega v_z = -\frac{\omega}{kr}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r),$$

$$\frac{p'}{\rho} = \frac{i\omega}{k^2 r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r).$$

以上を①に代入して

$$-i\omega v_r - 2\Omega\left(-\frac{2i\Omega}{\omega}v_r\right) = -\frac{i\omega}{k^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}\right],$$

$$\therefore\quad \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}\right] + \left(\frac{4\Omega^2}{\omega^2} - 1\right)k^2 v_r = 0.$$

v_r の r 依存性を

$$v_r = F(r)e^{i(kz-\omega t)}$$

とすると

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rF)}{\partial r}\right] = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\left(F + r\frac{\partial F}{\partial r}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{F}{r} + \frac{\partial F}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{F}{r^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \left[\left(\frac{4\Omega^2}{\omega^2} - 1\right)k^2 - \frac{1}{r^2}\right]F = 0. \quad ④$$

これは（1 次の）Bessel の微分方程式であり，解は Bessel 関数 J_1 と Neumann 関数 N_1 である．しかし後者は原点で特異性を持つので捨てなければならない．よって

$$F = \text{const.} \times J_1\left[kr\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2} - 1}\right]. \quad ⑤$$

J_1 は原点 $r = 0$ で 0 となり，$r > 0$ に無限の零点 $x_1 < x_2 < \cdots$ を持つ．よって

$$kr_n\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2} - 1} = x_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad ⑥$$

を満たす r_n に対し，流れは同軸円筒の間の領域

$$0 < r < r_1,\ r_1 < r < r_2, \cdots$$

に制限される．すなわち円筒面 $r = r_n$ 上では $v_r = 0$ であり，これらを 1 つまたぐごとに流れの方向が逆転する．

流体が無限に広がっている場合，任意の $\omega < 2\Omega$ と k に対して⑥を満たす r_n が自由に取れるから，ω は k に依存しない．一方 $\omega \geqq \Omega$ のときは④は有限な解を持たない．

$\omega = 2\Omega$ のとき，④は冪関数 $r, 1/r$ を解に持つが，前者は $r \to \infty$，後者は $r \to 0$ で発散するから，解として適切ではない．$\omega > 2\Omega$ のとき，④は 1 次の変形 Bessel 関数 I_1, K_1 を解に持つが，前者は $r \to \infty$，後者は $r \to 0$ で発散するから，やはり適切ではない．

回転する流体が半径 a [*40]の円筒状の壁に囲まれている場合，その壁では $v_r = 0$ という条件を満たさなけれ

[*40] 原著には R とあるが誤植だろう．あるいは次の式の a が R の誤り．

ばならない．よって分散関係

$$ka\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2}-1}=x_n \quad (n=1,2,\ldots)$$

が成り立つ．

問題 14.2

回転流体中の圧力の任意の小さな摂動を記述する方程式を導け．

【解答】 やはり回転軸に沿って z 軸をとる．(14.3) の各成分は

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}-2\Omega v_y=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x},\quad \frac{\partial v_y}{\partial t}+2\Omega v_x=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y},\quad \frac{\partial v_z}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z}. \qquad ①$$

x,y,z に関して微分した式を加え，$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$ を用いると

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\rho}\triangle p'&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}-2\Omega v_y\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+2\Omega v_x\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}\right)\\&=\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\boldsymbol{v})-2\Omega\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\rho}\triangle p'=2\Omega\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right).$$

t に関して微分して①の第 1 式，第 2 式と $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$ を用いると

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}(\triangle p')&=2\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}\right)\right]\\&=2\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-2\Omega v_x-\cancel{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(2\Omega v_y-\cancel{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x}}\right)\right]\\&=-4\Omega^2\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)\\&=4\Omega^2\frac{\partial v_z}{\partial z}.\end{aligned}$$

さらに t に関して微分して①の第 3 式を用いると

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\triangle p')=4\Omega^2\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\triangle p')+4\Omega^2\frac{\partial^2 p'}{\partial z^2}=0 \qquad ②$$

を得る．

周波数 ω の周期的な摂動に対して（つまり $p'\propto e^{-i\omega t}$），②は次のようになる．

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p'}{\partial y^2}+\left(1-\frac{4\Omega^2}{\omega^2}\right)\frac{\partial^2 p'}{\partial z^2}=0 \qquad ③$$

(14.5) のような波（$p'\propto e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$）に対しては

$$-\omega^2(-k^2)-4\Omega^2{k_z}^2=0 \qquad \therefore\quad \omega=\frac{2\Omega k_z}{k}\ (<2\Omega).$$

これは既知の分散関係 (14.8) を与える．ただし $\omega < 2\Omega$ でなければならない．このとき，③の $\dfrac{\partial^2 p'}{\partial z^2}$ の係数は負であるから，③は双曲型の偏微分方程式である．原点で生じた摂動の影響は，z 方向に伸びた頂角 2θ $\left(\sin\theta = \dfrac{\omega}{2\Omega}\right)$ の無限に長い円錐内のみにあらわれる．

もし $\omega > 2\Omega$ なら，③の $\dfrac{\partial^2 p'}{\partial z^2}$ の係数は正であるから，③は楕円型の偏微分方程式である．つまり z 方向のスケールを適当に変えることにより Laplace 方程式に帰着させることができる．この場合，点源からの摂動は流体の全領域に影響を与え，その大きさは摂動源から離れるにつれてべき乗則にしたがって減少する．

⬆ 目次へ戻る