第 7 章・表面現象

2023-04-23 12:29

これは L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2nd English edition, Pergamon Press, 1987. の内容を補ったノートである．内容の正確性は保証できないが，改善点・誤植（内容，体裁のどちらでも構わない）を見つけた方は筆者まで知らせてほしい．図がほとんどないが，徐々に付け加えていく予定である．

なお，♠ は第 2 版で新たに加わった部分，♠ ♠ は筆者が勝手に付け加えた部分である．また，目次，式や問題の番号，各節末尾の「目次へ戻る」ボタンにはハイパーリンクを設定し，利便性を高めたつもりである．

本文中で頻繁に参照する文献の略称は以下の通りである．

- 今井→今井功『物理学選書⒁ 流体力学（前編）』裳華房，1974
- 巽→巽友正『新物理学シリーズ 21 流体力学』培風館，1982
- Lamb → H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6th ed., Cambridge, 1932（邦訳あり）
- 『力学』，『統計物理学』，『物理的運動学』→それぞれ，ランダウ＝リフシッツ理論物理学教程の第 1 巻，第 5 巻，第 10 巻．

目次

§61　Laplace の式

この章では，2 つの連続媒質の境界面付近で起こる現象を調べることにする（もちろん実際には，媒質は薄い遷移層に分かれているが，この層は薄いので面とみなすことができる）．境界が曲面の場合，表面付近で 2 つの媒質の圧力は異なっている．この圧力差（**表面圧**）を求めるために，境界面の性質を考慮して，2 つの媒質が熱力学的に平衡状態にある条件を書き下そう．

2 つの媒質を 1，2 とし，境界面が無限小の変位 $\delta\zeta$ を行ったとする（$\delta\zeta$ は，変化後の境界面から変化前の境界面におろした垂線の長さであり，1 から 2 に変位するとき $\delta\zeta > 0$ と定める）．境界の面積要素を dS とすると，変化前後の表面に挟まれた体積要素は $\delta\zeta\, dS$ となる．媒質 1，2 の圧力を p_1, p_2 とすると，以上のような変位を行うのに必要な仕事は

$$\int (-p_1 + p_2)\delta\zeta\, dS$$

である．

次に，表面積を変化させるのに必要な仕事は，表面積の変化 δS に比例し $\alpha\,\delta S$ と表せる（α は**表面張力係数**

と呼ばれる）．よって，表面を変位させるのに必要な仕事 δW は

$$\delta W = -\int (p_1 - p_2)\delta\zeta\, dS + \alpha\,\delta S \tag{61.1}$$

となる．熱力学的に平衡であるための条件は，もちろん $\delta W = 0$ である．

次に，δS を $\delta\zeta$ と関係付けるために，曲率半径を考えよう．ある点の主曲率半径を R_1, R_2 とする（媒質 2 側に曲がるとき曲率が正とする）．また，曲率円上の線素を dl_1, dl_2 とする．表面が $\delta\zeta$ 変位することで，主曲率半径は $R_1' = R_1 + \delta\zeta$，$R_2' = R_2 + \delta\zeta$ となり，線素は $dl_1' = \dfrac{R_1 + \delta\zeta}{R_1} dl_1$，$dl_2' = \dfrac{R_2 + \delta\zeta}{R_2} dl_2$ となる．したがって微小面積 $dS = dl_1 dl_2$ の変化は

$$dS' - dS = dl_1' dl_2' - dl_1 dl_2 = \left[\left(1 + \frac{\delta\zeta}{R_1}\right)\left(1 + \frac{\delta\zeta}{R_2}\right) - 1\right] dl_1 dl_2 \simeq \left(\frac{\delta\zeta}{R_1} + \frac{\delta\zeta}{R_2}\right) dS,$$

つまり

$$\delta S = \int \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\delta\zeta\, dS \tag{61.2}$$

となる．これを (61.1) に代入し

$$\int \left\{-(p_1 - p_2) + \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right\}\delta\zeta\, dS = 0$$

$$\therefore \quad p_1 - p_2 = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{61.3}$$

これが Laplace **の式**であり，表面圧（Laplace **圧**）$p_1 - p_2$ を与える．もし R_1 と R_2 が正なら $p_1 > p_2$ であり，圧力の大きい方の媒質が凸になる．また境界が平面（$R_1, R_2 \to \infty$）なら $p_1 = p_2$ であり，2 つの媒質の圧力は等しい．

隣接する 2 つの媒質の力学的平衡を調べるために (61.3) を適用してみよう．境界面にも媒質にも，外力は作用していないものとする．よって圧力は 2 つの媒質で等しいから，平衡状態の方程式は

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{const.} \tag{61.4}$$

である．つまり，曲率の和は任意の自由表面上で一定でなければならない．もし表面全体が自由表面なら，条件 (61.4) は表面が球状でなければならないことを意味する（例：重力が無視できる場合の，小さい液滴の表面）．しかし，表面がある曲線によって支えられている場合（例：固体枠上の液体薄膜），表面の形はそれほど単純ではない．

条件 (61.4) が，固体枠に支えられた液体薄膜の平衡状態に適用される場合には，右辺の定数は 0 でなければならない．和 $1/R_1 + 1/R_2$ は薄膜表面上のどこでも等しい値を取る．一方，曲率は，反対側から見れば大きさが同じで符号が逆になるから，この定数は膜の反対側で逆符号となる．よって

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0. \tag{61.5}$$

次に，重力場中にある媒質表面の平衡条件を考えよう．簡単のため，媒質 2 は大気であり，その圧力は表面で一定とみなせるとする．また，媒質 1 は非圧縮性流体とする．このとき $p_2 = \text{const.}$ であり，式 (3.2) より $p_1 = \text{const.} - \rho g z$ となる（z 軸は鉛直上向きにとる）．よって平衡条件は

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{\rho g z}{\alpha} = \text{const.} \tag{61.6}$$

となる．

個々の場合に平衡状態での流体表面の形を求めるには，式 (61.6) の形ではなく，全自由エネルギーを最小にするという変分法の問題を解く方が便利である，ということを指摘しておこう．この場合に解くべき式は

$$\alpha \int dS + \rho g \int z\, dV = \min, \tag{61.7}$$

$$\int dV = \text{const.} \tag{61.8}$$

である．

定数 ρ, g, α は，条件 (61.6)(61.7) の中で $\alpha/\rho g$ という形でしか出てこない．この量の次元は長さの 2 乗である．長さの次元を持つ量

$$a = \sqrt{\frac{2\alpha}{\rho g}} \tag{61.9}$$

は，今考えている物質の**毛細定数**と呼ばれる．流体の表面の形はこの量のみで決まる．毛細定数が，媒質の特徴的な長さのオーダーに比べて大きい場合には，表面の形を求める際に重力の影響を無視することができる．

条件 (61.4)(61.6) から表面の形を求めるためには，表面の形が与えられた場合に，その曲率半径を求める式が必要である．この公式は微分幾何により与えられるが，一般の場合にはやや複雑である．しかし，表面が平面からわずかにずれている特殊な場合には，この式は簡単になる．ここでは，微分幾何を用いずに，適当な式を導くことにしよう．

表面の形を $z = \zeta(x, y)$ とし，ζ は十分小さいとする．よく知られているように，表面積は次で与えられる．

$$S = \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2} dxdy \simeq \int \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2\right] dxdy \tag{61.10}$$

その変分は

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \delta\zeta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\frac{\partial \delta\zeta}{\partial y}\right) dxdy \\ &\quad \leftarrow \text{部分積分} \\ &= -\int \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right) \delta\zeta\, dxdy. \end{aligned}$$

これを (61.2) と比べ

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right) \tag{61.11}$$

を得る．

3 つの媒質が隣接して平衡状態にある場合，表面の形は，共通の交線上で表面張力の和が 0 になるという条件から求められる．この条件は，表面張力係数 α の値から決まるある角度（**接触角**）で境界面同士が交わることを意味する．

最後に，表面張力を考慮して，運動している 2 つの流体の境界面で満たされるべき条件を考えよう．表面張力が無視できる場合は

$$(\sigma_{2,ij} - \sigma_{1,ij}) n_j = 0$$

であったが，表面張力を考える場合には，右辺に Laplace の式から決まる項を加えなければならない．

$$(\sigma_{2,ij} - \sigma_{1,ij}) n_j = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) n_i \tag{61.12}$$

$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$ を代入して粘性応力テンソルを用いて書けば

$$(p_1 - p_2)n_i = (\sigma'_{1,ij} - \sigma'_{2,ij})n_j + \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)n_i. \tag{61.13}$$

2 つの流体がどちらも理想流体なら $\sigma'_{ij} = 0$ であり，(61.3) に戻る．

しかし (61.13) は，まだ完全ではない．というのは，表面張力係数 α が（例えば温度変化によって）非一様になるかもしれないからである．この場合，法線応力のほかに接線応力を考える必要がある．圧力が非一様な場合，単位体積に $-\operatorname{grad} p$ の力が加わるのと同様に，この場合，表面の単位面積に $\operatorname{grad}\alpha$ の力が（接線方向に）かかる．符号が正であるのは，表面張力は表面積を減らすように働くからである．(61.13) は

$$\left[(p_1 - p_2) - \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right]n_i = (\sigma'_{1,ij} - \sigma'_{2,ij})n_j + \frac{\partial\alpha}{\partial x_i} \tag{61.14}$$

となる（$\boldsymbol{n}$ は媒質 1 に向かうようにとる）．この条件は粘性流体でなければ満たされないことに注目せよ；理想流体では $\sigma'_{ij} = 0$ であるから，(61.14) は（法線方向の力）＝（接線方向の力）という式になる．これは（両辺が 0 というつまらない場合を除けば）成立し得ない．

⬆ 目次へ戻る

§62　表面張力波

流体の表面は，重力と表面張力の作用のもと，平衡状態での形に移行しようとする．§ 12 で流体の表面波を調べたときには，表面張力を考慮していなかった．以下では，短波長の重力波に対して表面張力が重要な影響を与えることを学ぼう．

§ 12 と同様に，波の振幅は波長に比べて十分小さいと仮定する．速度ポテンシャルに対する方程式は以前と同様 $\triangle\phi = 0$ である．しかし今の場合，表面での境界条件が異なる．表面を挟んで両側の圧力差は 0 ではなく，Laplace の式 (61.3) で与えられる．

表面の点の z 座標を ζ としよう．ζ は微小量であるから，(61.11) より

$$p - p_0 = -\alpha\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right).$$

ここで p は表面近傍での流体の圧力，p_0 は一定の外圧である．(12.2) より $p = -\rho g\zeta - \rho\dfrac{\partial\phi}{\partial t}$ であるから

$$\rho g\zeta + \rho\frac{\partial\phi}{\partial t} - \alpha\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) = 0$$

となる (§ 12 と同様に，ϕ を定義し直すことにより，p_0 を除くことができる)．これを t で微分し $\dfrac{\partial\zeta}{\partial t} \simeq v_z = \dfrac{\partial\phi}{\partial z}$ とおけば，ϕ に関する境界条件が得られる．

$$\rho g\frac{\partial\phi}{\partial z} + \rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \alpha\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) = 0 \quad (z = 0). \tag{62.1}$$

x 軸方向に伝播している平面波 $\phi = Ae^{kz}\cos(kx - \omega t)$ を求めよう（これは $\triangle\phi = 0$ を満たす）．(62.1) より

$$\rho gk - \rho\omega^2 - \alpha k(-k^2) = 0$$

$$\therefore \quad \omega^2 = gk + \frac{\alpha k^3}{\rho} \tag{62.2}$$

を得る（W. Thomson 1871）.

長波長の場合（$gk \gg \dfrac{\alpha k^3}{\rho}$ すなわち $\dfrac{1}{k} \gg a$），表面張力の影響を無視することができ，純粋な重力波となることがわかる．逆に短波長の場合，重力の影響を無視することができ

$$\omega^2 = \frac{\alpha k^3}{\rho} \tag{62.3}$$

となる．このような波は**表面張力波（さざなみ）**と呼ばれる．(62.2) のような，重力波と表面張力波の中間の場合は**表面張力重力波**と呼ばれる．

⬆ 目次へ戻る

§63　吸着薄膜が流体の運動に与える影響

省略する．

⬆ 目次へ戻る