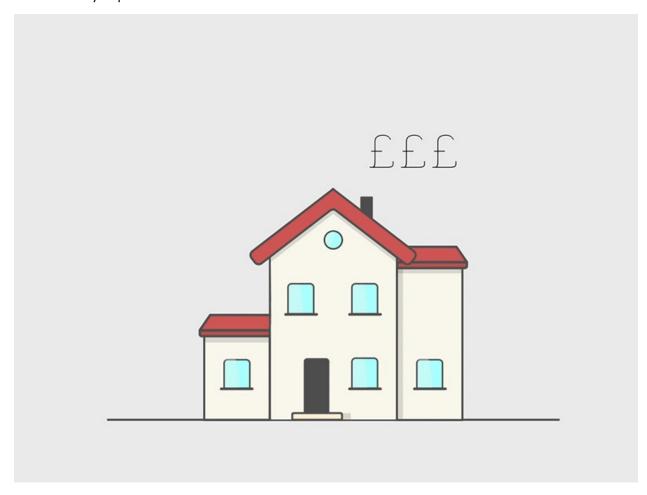
# Regresja liniowa i logistyczna

## Wstęp

Celem tego laboratorium będzie stworzenie modelu uczenia maszynowego do estymacji cen nieruchomości na podstawie danych o jej położeniu, ilości sypialń, roku budowy, typie budynku oraz wielu innych parametrów.



W trakcie realizacji tego labratorium zapoznamy się z następującymi zagadnieniami:

- przygotowaniem danych:
  - ładowaniem danych,
  - typami danych,
  - czyszczeniem danych,
  - rozkładami danych,
  - obsługą wartości brakujących,
  - zmiennymi kategorycznymi uporządkowanymi i nieuporządkowanymi,
  - skalowaniem wartości,

- API biblioteki Scikit-Learn dla transformacji danych;
- regresją liniową, w szczególności z:
  - podziałem zbioru na część treningową i testową,
  - oceną jakości modelu,
  - walidacją skrośną,
  - wyszukiwaniem hiperparametrów,
  - problemem przeuczenia, niedouczenia,
  - regularyzacją L1 i L2,
  - regresją wielomianową;
- regresją logistyczną, w szczególności z:
  - różnymi rodzajami błędów klasyfikacji,
  - metrykami oceniającymi jakość klasyfikatorów.

Na pierwszych zajęciach możesz korzystać ze środowiska Google Colab i zdalnego środowiska obliczeniowego. Jeżeli interesuje Cię skonfigurowanie Pythona na własnym komputerze, to niezbędne informacje są podane w sekcji "Konfiguracja własnego komputera".

**Uwaga:** niektóre zadania zamiast kodu wymagają podania pisemnej odpowiedzi w miejscu oznaczonym // skomentuj tutaj.

## Wykorzystywane biblioteki

Na zajęciach korzystać będziesz z kilku popularnych bibliotek Pythona, które umożliwiają klasyfikację danych, ich wizualizację czy preprocessing. Są to:

- numpy bibliotek do wykonywania obliczeń macierzowych. Pozwala na efektywne przeprowadzanie obliczeń naukowych. Dobrze współgra z biblioteką pandas.
- pandas narzędzie do analizy danych tabelarycznych, ich strukturyzowania oraz manipulacji na nich.
- sklearn narzędzie do tworzenia modeli klasyfikacji, regresji, clusteringu itp. Biblioteka ta jest dość rozbudowana i pozwala także na mapowanie danych czy redukcję wymiarów. Więcej informacji znajdziesz w podanym linku.
- missingno narzędzie do wizualizacji kompletności danych (brakujących wartości).
- seaborn kompleksowe narzędzie do wizualizacji danych jako takich. Pozwala na stworzenie bardzo szerokiej gamy wykresów w zależności od potrzeb.

Zostały tutaj pominięte pewne standardowe biblioteki jak np. os czy matplotlib.

## Wykorzystanie Google Colab

Korzystanie Google Colab nie jest wymagane. W niektórych laboratorich może być jednak przydatny dostęp do środowiska wyposażonego w kartę GPU.

Jeżeli pracujesz na Google Colab, zacznij od przeniesienia dwóch plików CSV, które zostały dołączone do laboratorium (ames\_data.csv oraz bank\_marketing\_data.csv), do folderu

/content. Nie musisz ich umieszczać w /content/sample\_data - ważne, aby znalazły się w /content. Jeżeli pracujesz lokalnie, to wystarczy, że pliki te będą obok tego notebooka.

## Konfiguracja własnego komputera

Jeżeli korzystasz z własnego komputera, to musisz zainstalować trochę więcej bibliotek (Google Colab ma je już zainstalowane). Najlepiej używać Pythona 3.9 lub nowszej wersji. Laboratorium było testowane z wersją 3.9.

#### Anaconda

Jeżeli korzystasz z Anacondy (możesz uruchomić w terminalu):

```
# !conda install -c conda-forge --yes numpy pandas scikit-learn matplotlib missingno
```

#### venv

Jeżeli używasz zwykłego venv'a (zdecydowanie niezalecane, szczególnie na Windowsie):

```
# !pip install --yes numpy pandas scikit-learn matplotlib missingno
```

W przypadku własnego komputera, jeżeli instalowałeś z terminala, pamiętaj, aby zarejestrować aktualne środowisko wirtualne jako kernel (środowisko uruchomieniowe) dla Jupyter Notebooka. Wybierz go jako używany kernel w menu na górze notebooka (nazwa jak w komendzie poniżej).

```
# !ipython kernel install --user --name "PSI"
```

## Zbiór danych do regresji

Wykorzystamy zbiór danych Ames housing, w którym zadaniem jest przewidywanie wartości domu na podstawie cech budynku, działki, lokalizacji itp. Jest to więc przewidywanie wartości ciągłej, czyli regresja. Zbiór ten zawiera zmienne numeryczne (floaty i inty), kategoryczne nieuporządkowane (categorical nominal) oraz kategoryczne uporządkowane (categorical ordinal), więc będzie wymagał wstępnego przetworzenia tak jak większość prawdziwych danych w uczeniu maszynowym.

Inne znane, ale gorsze jakościowo zbiory tego typu, to na przykład:

- Boston housing rasistowski, z tego powodu usunięty np. ze Scikit-learn (wyjaśnienie, dyskusja, badanie)
- California housing zbyt prosty (tylko kilka zmiennych numerycznych), użyty np. w książce "Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow" A. Geron (opis)

Autor zbioru to Dean De Cock, a zbiór został opisany oryginalnie w tym artykule.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import pandas as pd
```

## Ładowanie danych tabelarycznych

Pliki ames\_data.csv oraz bank\_marketing\_data.csv to dwa zbiory danych, niezależne od siebie. Pierwszy jest wykorzystywany w pierwszej części laboratorium (regresji liniowej), natomiast drugi przyda się przy regresji logistycznej (klasyfikacji). Jego celem jest przewidywanie wartości domu.

Wczytajmy dane ames\_data.csv do zmiennej df (takiej nazwy często się używa, żeby oznaczyć obiekt DataFrame - zaawansowanej tablicy, dostarczonej nam przez bibliotekę pandas).

```
df = pd.read_csv("ames_data.csv")
# remove dots from names to match data_description.txt
df.columns = [col.replace(".", "") for col in df.columns]
```

Zobaczmy jakie dane znajdują się w naszej tabeli. Wykorzystajmy do tego metodę info().

```
df.info()
<class 'pandas.core.frame.DataFrame'>
RangeIndex: 2930 entries, 0 to 2929
Data columns (total 82 columns):
                    Non-Null Count
     Column
                                    Dtype
- - -
     _ _ _ _ _
 0
                    2930 non-null
     0rder
                                    int64
1
     PID
                    2930 non-null
                                    int64
 2
    MSSubClass
                    2930 non-null
                                    int64
    MSZoning
LotFrontage
 3
                    2930 non-null
                                    object
 4
                   2440 non-null
                                    float64
 5
                    2930 non-null
                                    int64
    LotArea
 6
     Street
                    2930 non-null
                                    object
 7
                    198 non-null
    Alley
                                    object
 8
    LotShape
                    2930 non-null
                                    object
    LandContour
 9
                    2930 non-null
                                    object
 10
    Utilities
                    2930 non-null
                                    object
 11 LotConfig
                    2930 non-null
                                    object
 12
    LandSlope
                    2930 non-null
                                    object
 13
    Neighborhood
                    2930 non-null
                                    object
 14
    Condition1
                    2930 non-null
                                    object
 15
    Condition2
                    2930 non-null
                                    object
                    2930 non-null
 16 BldgType
                                    object
 17
    HouseStyle
                    2930 non-null
                                    obiect
    OverallOual
                    2930 non-null
 18
                                    int64
 19
    OverallCond
                    2930 non-null
                                    int64
```

```
20
    YearBuilt
                    2930 non-null
                                     int64
21
    YearRemodAdd
                    2930 non-null
                                     int64
22
    RoofStyle
                    2930 non-null
                                     object
23
    RoofMatl
                    2930 non-null
                                     object
24
    Exterior1st
                    2930 non-null
                                     object
25
    Exterior2nd
                    2930 non-null
                                     object
26
    MasVnrType
                    2907 non-null
                                     object
27
    MasVnrArea
                    2907 non-null
                                     float64
28
    ExterQual
                    2930 non-null
                                     object
29
    ExterCond
                    2930 non-null
                                     object
30
    Foundation
                    2930 non-null
                                     object
                    2850 non-null
31
    BsmtQual
                                     object
32
    BsmtCond
                    2850 non-null
                                     object
33
                    2847 non-null
    BsmtExposure
                                     object
34
    BsmtFinType1
                    2850 non-null
                                     object
35
                    2929 non-null
    BsmtFinSF1
                                     float64
36
    BsmtFinType2
                    2849 non-null
                                     object
37
    BsmtFinSF2
                    2929 non-null
                                     float64
38
                    2929 non-null
                                     float64
    BsmtUnfSF
39
    TotalBsmtSF
                    2929 non-null
                                     float64
40
    Heating
                    2930 non-null
                                     object
41
    HeatingQC
                    2930 non-null
                                     object
42
                    2930 non-null
    CentralAir
                                     object
43
    Electrical
                    2929 non-null
                                     object
44
                    2930 non-null
    X1stFlrSF
                                     int64
45
    X2ndFlrSF
                    2930 non-null
                                     int64
46
    LowQualFinSF
                    2930 non-null
                                     int64
47
                    2930 non-null
                                     int64
    GrLivArea
48
    BsmtFullBath
                    2928 non-null
                                     float64
49
    BsmtHalfBath
                    2928 non-null
                                     float64
50
    FullBath
                    2930 non-null
                                     int64
51
    HalfBath
                    2930 non-null
                                     int64
52
    BedroomAbvGr
                    2930 non-null
                                     int64
53
    KitchenAbvGr
                    2930 non-null
                                     int64
54
    KitchenOual
                    2930 non-null
                                     object
55
    TotRmsAbvGrd
                    2930 non-null
                                     int64
56
    Functional
                    2930 non-null
                                     object
57
    Fireplaces
                    2930 non-null
                                     int64
58
    FireplaceQu
                    1508 non-null
                                     object
59
    GarageType
                    2773 non-null
                                     object
                    2771 non-null
60
    GarageYrBlt
                                     float64
61
    GarageFinish
                    2771 non-null
                                     object
                                     float64
62
    GarageCars
                    2929 non-null
63
    GarageArea
                    2929 non-null
                                     float64
                    2771 non-null
64
    GarageQual
                                     object
                    2771 non-null
65
    GarageCond
                                     object
66
    PavedDrive
                    2930 non-null
                                     object
67
    WoodDeckSF
                    2930 non-null
                                     int64
68
    OpenPorchSF
                    2930 non-null
                                     int64
```

```
69
    EnclosedPorch 2930 non-null
                                  int64
70 X3SsnPorch
                  2930 non-null
                                  int64
71 ScreenPorch
                  2930 non-null
                                  int64
72 PoolArea
                  2930 non-null
                                  int64
73 PoolOC
                  13 non-null
                                  object
                  572 non-null
74 Fence
                                  object
75 MiscFeature 106 non-null
75 MiscVal
                                  object
                  2930 non-null
                                  int64
                  2930 non-null
                                  int64
78 YrSold
                  2930 non-null
                                  int64
   SaleType
79
                  2930 non-null
                                  object
80
   SaleCondition 2930 non-null
                                  object
    SalePrice
                  2930 non-null
81
                                  int64
dtypes: float64(11), int64(28), object(43)
memory usage: 1.8+ MB
```

Mamy naprawdę dużo cech! Ich szczegółowy opis znajdziesz w dołączonym do laboratorium pliku ames\_description.txt.

### Wstępna analiza danych

Zawsze, zanim zaczniesz robić jakąkolwiek predykcję czy analizę danych, dobrze jest zapoznać się z nimi, z ich kodowaniem i znaczeniem. Kolejnym istotnym aspektem jest typ danych. Nie każdy klasyfikator nadaje się do każdego typu.

Wyświetlmy teraz kilka przykładowych rekordów z początku pliku, korzystając z metody head ( ) .

df.hea	d()								
0rd	er	PID	MSSubC	lass M	SZon	ing l	_otFrontage	LotArea	Street
Alley 0 NaN	1	526301100		20		RL	141.0	31770	Pave
1 NaN	2	526350040		20		RH	80.0	11622	Pave
NaN 2 NaN	3	526351010		20		RL	81.0	14267	Pave
3	4	526353030		20		RL	93.0	11160	Pave
NaN 4	5	527105010		60		RL	74.0	13830	Pave
NaN									
LotS MoSold		e LandConto	ur	PoolA	rea	PoolQ(	C Fence Mi	.scFeature	MiscVal
0	IR	1 L	.vl		0	Nal	N NaN	NaN	0
1 6	Re	g L	.vl		0	Nal	N MnPrv	NaN	0

2 IR1 6	Lv	l	0	NaN	NaN	Gar2	12500
Reg	Lv	l	0	NaN	NaN	NaN	0
4 IR1 3	Lv	l	0	NaN	MnPrv	NaN	Θ
YrSold S 0 2010 1 2010 2 2010 3 2010 4 2010	aleType Sa WD WD WD WD WD	leCondition Normal Normal Normal Normal Normal	2 1 1 2	Price 15000 05000 72000 44000 89900			

Jeżeli potrzebujesz szybko stwierdzić, ile dane zawierają rekordów i kolumn, pomocna jest opcja shape:

```
df.shape
(2930, 82)
```

## Eksploracja danych, czyszczenie danych i inżynieria cech

### Usunięcie niepotrzebnych kolumn

Niektóre kolumny są **nieinformatywne (uninformative)**, czyli nie niosą żadnej informacji dla zadania, czyli przewidywania wartości domu. Są pewnym rodzajem metadanych. Przykładowo mamy tutaj kolumny **Order** oraz **PID**.

**Order** jest po prostu numerem rekordu w zbiorze danych, moglibyśmy przetasować cały zbiór i to nie powinno w żaden sposób wpłynąć na cokolwiek, a więc możemy spokojnie tę kolumnę usunąć.

Formalnie czynimy założenie, że rekordy w naszych danych (próbki / wiersze, poszczególne domy w przypadku tego zbioru) są **niezależne i równomiernie rozłożone** (ang. **independent and identically distributed - i.i.d.**). Innymi słowy, kolejność w danych nie ma znaczenia, bo zbieraliśmy dane taką samą metodą i w identycznych warunkach. Jest to bardzo typowe w ML.

**PID** jest po prostu numerem identyfikacyjnym danej nieruchomości w systemie informatycznym, a więc też możemy to usunąć.

```
df = df.drop(["Order", "PID"], axis="columns")
```

### Usunięcie słabo reprezentowanych dzielnic

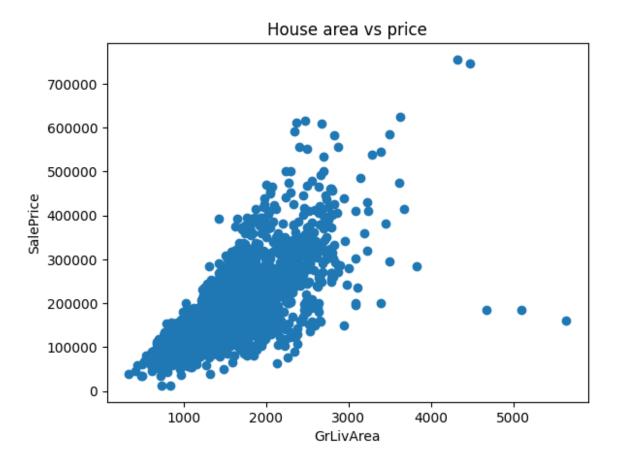
Dzielnice *GrnHill* oraz *Landmrk* obejmują w sumie zaledwie 3 domy.

```
df = df.loc[~df["Neighborhood"].isin(["GrnHill", "Landmrk"]), :]
```

## Usunięcie obserwacji odstających (outliers)

Usuniemy budynki, które mają powyżej 4000 stóp kwadratowych (ok. 370 metrów kwadratowych) powierzchni. Możemy zobaczyć je na wykresie poniżej.

```
plt.scatter(df["GrLivArea"], df["SalePrice"])
plt.title("House area vs price")
plt.xlabel("GrLivArea")
plt.ylabel("SalePrice")
plt.show()
```



Jak widać na wykresie, jest dosłownie kilka domów o tej powierzhcni. Takie skrajne przypadki raczej nas nie interesują - a na pewno stanowią problem dla tak prostego modelu jak regresja logistyczna. Nie chcemy też, żeby nasz model uczył się takich anomalii, więc lepiej je usunąć.

Tutaj robimy to ręcznie, ale istnieją też algorytmy do detekcji i usuwania obserwacji odstających.

#### Zadanie 1 (0.25 punktu)

Usuń rekordy nieruchomości o powierzchni (**GrLivArea**) ponad (ostra nierówność) 4 tys. stóp kwadratowych.

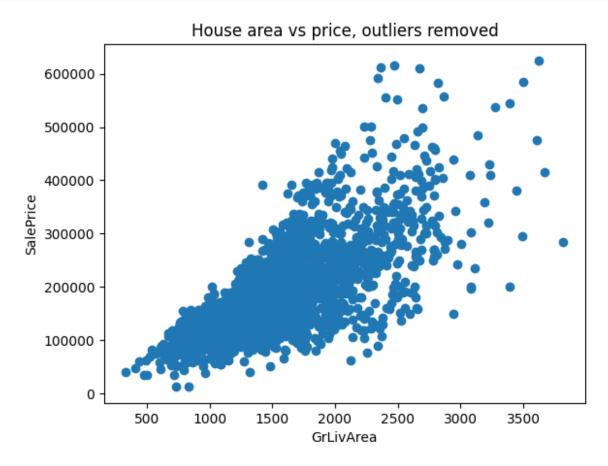
Podpowiedź: w Pandas korzysta się z .loc[] do filtrowania wierszy i kolumn. Pierwszy indeks oznacza, które wiersze zostawić, a drugi indeks, które kolumny wybrać. Jeżeli chcemy zostawić wszystko (np. nie usuwać żadnych kolumn), to zadziała standardowy Pythonowy:, jak przy indeksowaniu list.

```
# remove outliers
# your_code

# print(df.loc[df["GrLivArea"]<=4000])
df = df.loc[df["GrLivArea"]<=4000]</pre>
```

Zobaczmy jak teraz wygląda ten sam wykres.

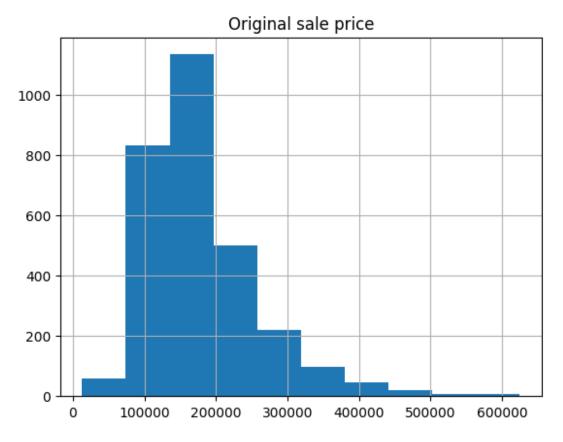
```
plt.scatter(df["GrLivArea"], df["SalePrice"])
plt.title("House area vs price, outliers removed")
plt.xlabel("GrLivArea")
plt.ylabel("SalePrice")
plt.show()
```



### Transformacja logarytmiczna zmiennej zależnej

Zawsze warto też przyjrzeć się rozkładowi zmiennej docelowej, żeby poznać jej typ i skalę. Jak widać poniżej, rozkład jest dość skośny, co ma sens - mało jest bardzo drogich domów.

```
df["SalePrice"].describe()
           2922,000000
count
mean
         180358.266940
          78536.952287
std
min
          12789.000000
25%
         129425.000000
50%
         160000.000000
         213430.000000
75%
         625000.000000
max
Name: SalePrice, dtype: float64
df["SalePrice"].hist()
plt.title("Original sale price")
plt.show()
```



Rozkład normalny jest zwykle korzystniejszy dla tworzenia modeli, bo daje sensowną "wartość środkową" do przewidywania, a także penalizuje tak samo błędy niezależnie od ich znaku (zaniżona i zawyżona predykcja). Dokonamy dlatego **transformacji logarytmicznej (log transform)**, czyli zlogarytmujemy zmienną docelową (zależną). Dla stabilności numerycznej używa się zwykle np.log1p, a nie np.log (tutaj wyjaśnienie).

Dodatkowa korzyść z takiej transformacji jest taka, że regresja liniowa przewiduje dowolne wartości rzeczywiste. Po przekształceniu logarytmicznym jest to całkowicie ok, natomiast w oryginalnej przestrzeni trzeba by wymusić przewidywanie tylko wartości pozytywnych

(negatywne ceny są bez sensu). Da się to zrobić, ale zwiększa to koszt obliczeniowy. Operowanie na tzw. log-price jest bardzo częste w finansach.

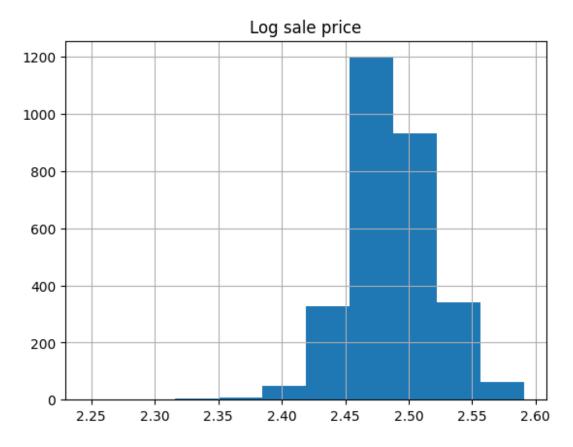
#### Zadanie 2 (0.25 punktu)

Przekształć zmienną **SalePrice** za pomocą funkcji logarytmicznej **np. log1p**.

```
# apply log transform
# your_code
df["SalePrice"] = np.log1p(df["SalePrice"])
```

Sprawdźmy teraz jak rozkład SalePrice wygląda po transformacji:

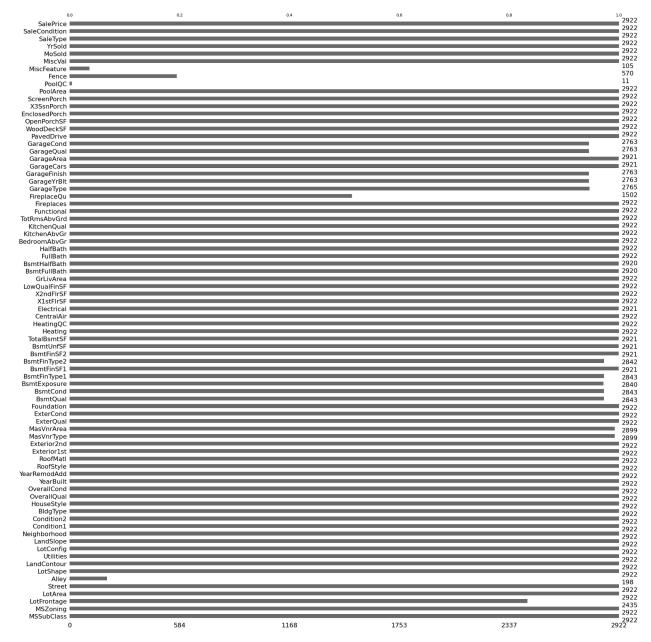
```
pd.Series(np.log(df["SalePrice"])).hist()
plt.title("Log sale price")
plt.show()
```



### Uzupełnianie wartości brakujących

Sprawdźmy też wartości brakujące. Są zmienne, które mają poniżej 10% wartości - takie zmienne dla modeli regresji liniowej są po prostu bezużyteczne, ponieważ brakujących wartości nie można wprost zamodelować. Znacząca liczba cech ma jednak co najmniej 10% braków. Z nich będziemy jednak starali się zrobić użytek.

```
import missingno as msno
msno.bar(df)
# df_with_missing = df[df.isnull().any(axis=1)]
# # msno.bar(df_with_missing)
# df_with_missing.shape
<Axes: >
```



W ramach dalszego czyszczenia danych automatycznie uzupełnimy wartości brakujące. Trzeba tu jednak wziąć pod uwagę:

- zmienne kategoryczne nie można w nich dokonać zastąpienia wartości brakującej średnią, medianą itp.
- wiele brakujących wartości estymacja modą czy medianą byłaby niedokładna,
- możliwość wykorzystania wiedzy o innych zmiennych na podstawie opisu cech.

Można więc zastosować odpowiednią wiedzę i przyjąć wartości domyślne. Przykładowo, brak informacji o powierzchni piwnicy możemy uznać po prostu za brak piwnicy i wpisać tam odpowiednią wartość. W przypadku niektórych zmiennych może doprowadzić to do stworzenia nowej wartości, która implicite będzie reprezentować wartość brakującą.

Znaczna część poniższej analizy została zainspirowana tym notebookiem na Kaggle.

```
def replace na(df: pd.DataFrame, col: str, value) -> None:
    df.loc[:, col] = df.loc[:, col].fillna(value)
# Alley : data description says NA means "no alley access"
replace na(df, "Alley", value="None")
# BedroomAbvGr : NA most likely means 0
replace na(df, "BedroomAbvGr", value=0)
# BsmtQual etc : data description says NA for basement features is "no
basement"
replace na(df, "BsmtQual", value="No")
replace na(df, "BsmtCond", value="No")
replace_na(df, "BsmtExposure", value="No")
replace_na(df, "BsmtFinType1", value="No")
replace_na(df, "BsmtFinType2", value="No")
replace_na(df, "BsmtFullBath", value=0)
replace na(df, "BsmtHalfBath", value=0)
replace na(df, "BsmtUnfSF", value=0)
# Condition : NA most likely means Normal
replace na(df, "Condition1", value="Norm")
replace na(df, "Condition2", value="Norm")
# External stuff : NA most likely means average
replace_na(df, "ExterCond", value="TA")
replace_na(df, "ExterQual", value="TA")
# Fence : data description says NA means "no fence"
replace na(df, "Fence", value="No")
# Functional : data description says NA means typical
replace na(df, "Functional", value="Typ")
# GarageType etc : data description says NA for garage features is "no
garage"
replace na(df, "GarageType", value="No")
replace na(df, "GarageFinish", value="No")
```

```
replace_na(df, "GarageQual", value="No")
replace_na(df, "GarageCond", value="No")
replace na(df, "GarageArea", value=0)
replace na(df, "GarageCars", value=0)
# HalfBath : NA most likely means no half baths above grade
replace_na(df, "HalfBath", value=0)
# HeatingQC : NA most likely means typical
replace na(df, "HeatingQC", value="Ta")
# KitchenAbvGr : NA most likely means 0
replace na(df, "KitchenAbvGr", value=0)
# KitchenQual : NA most likely means typical
replace na(df, "KitchenQual", value="TA")
# LotFrontage : NA most likely means no lot frontage
replace na(df, "LotFrontage", value=0)
# LotShape : NA most likely means regular
replace na(df, "LotShape", value="Reg")
# MasVnrType : NA most likely means no veneer
replace_na(df, "MasVnrType", value="None")
replace_na(df, "MasVnrArea", value=0)
# MiscFeature : data description says NA means "no misc feature"
replace_na(df, "MiscFeature", value="No")
replace na(df, "MiscVal", value=0)
# OpenPorchSF : NA most likely means no open porch
replace na(df, "OpenPorchSF", value=0)
# PavedDrive : NA most likely means not paved
replace na(df, "PavedDrive", value="N")
# PoolQC : data description says NA means "no pool"
replace na(df, "PoolQC", value="No")
replace_na(df, "PoolArea", value=0)
# SaleCondition : NA most likely means normal sale
replace na(df, "SaleCondition", value="Normal")
# ScreenPorch : NA most likely means no screen porch
replace_na(df, "ScreenPorch", value=0)
# TotRmsAbvGrd : NA most likely means 0
replace_na(df, "TotRmsAbvGrd", value=0)
# Utilities : NA most likely means all public utilities
```

```
replace_na(df, "Utilities", value="AllPub")
# WoodDeckSF : NA most likely means no wood deck
replace_na(df, "WoodDeckSF", value=0)
```

W przypadku wykonywania tego typu zmian - o ile istnieje taka możliwość - warto rozważyć różne interpretacje brakujących wartości. Może okazać się, że przyjęte przez nas założenia są błędne i prowadzą do pogorszenia działania modelu. Dlatego warto porównać jakoś predykcji z danymi uzupełnionymi oraz z danymi, w których kolumna z brakującymi wartościami jest po prostu usuwana.

#### Zadanie 3 (0.5 punktu)

Z pomocą dokumentacji zmiennych w pliku ames\_description.txt zdecyduj, jakie wartości domyślne przypisać zmiennym:

- CentralAir
- EnclosedPorch
- FireplaceQu oraz Fireplaces
- SaleCondition

W praktyce niestety zwykle nie jest tak łatwo, że mamy dokumentację i ten krok zajmuje kilka godzin (lub dni) konsultacji z różnymi osobami w firmie :) Czasami w ogóle nie da się ustalić jaka wartość byłaby sensowna, ponieważ nie mamy żadnego dostępu do osób odpowiedzialnych za przygotowanie wykorzystywanego zbioru danych.

```
# your_code
replace_na(df, "CentralAir", value="N")
# print(df["CentralAir"].unique())

replace_na(df, "EnclosedPorch", value =0)
# print(df["EnclosedPorch"].max())

replace_na(df, "FireplaceQu", value="No")
replace_na(df, "Fireplaces", value =0)
# print(df["Fireplaces"].max())
# print(df["Fireplaces"])

replace_na(df, "SaleCondition", value="Normal")
# print(df["SaleCondition"])
```

## Dane kategoryczne

Jak już zdążyliśmy zauważyć, istnieją dwa główne rodzaje danych: numeryczne (*numerical data*) oraz kategoryczne (*categorical data*). Ten podział jest bardzo istotny. Dane numeryczne to żadna niespodzianka, po prostu mają swoją wartość, jak np. **GrLivArea**, czyli powierzchnia budynku/apartamentów. Dane kategoryczne to takie, którym w większości przypadków nie można przyporządkować wartości liczbowej (wyjątkiem są dane kategoryczne uporządkowane - *categorical ordinal*).

Wyobraź sobie zmienną reprezentującą kolory o wartościach "red", "green" i "blue. Jeżeli zakodowałbyś je np. jako red=0, green=1, blue=2, to stwierdzasz tym samym, że w pewnym sensie red=1, blue=1, aczej nie ma powodu, żeby tak sądzić. Jest to zmienna, która ma skończoną liczbę wartości, ale są one nieuporządkowane. Taki typ to zmienne categorical nominal.

Szczególnym przypadkiem są zmienne binarne (*boolean*). Jest to u nas kolumna **CentralAir** (Central Air Conditioning). Z opisu w pliku <u>ames\_description.txt</u> wiemy, że przyjmuje ona dokładnie dwie wartości kategoryczne: *No* oraz *Yes*. W takiej sytuacji wolno zakodować te wartości numerycznie jako 0 i 1. Stwierdzasz tym samym, że klimatyzacja albo jest, albo jej nie ma.

Sytuacją podobną, chociaż mniej oczywistą, może być zmienna **Street**, opisująca typ drogi wiodącej do nieruchomości. Jeśli znowu spojrzymy do opisu danych, to można zauważyć, że ta zmienna może przyjmować tylko dwie różne wartości - *Grvl* i *Pave*. I tu też możemy sobie pozwolić na zakodowanie tych wartości jako 0 i 1. Stwierdzamy wtedy, że droga jest *utwardzona* (Pave) dla wartości 1. Oczywiście równie dobrze można by zakodować to odwrotnie i stwierdzić, że droga jest *nieutwardzona* (Grvl) gdy wartość wynosi 1.

W Pandas typy numeryczne są oparte o NumPy (np. np.int64), a zmienne kategoryczne, napisy itp. są typu object (typ Categorical istnieje od pewnego czasu, ale nie jest jeszcze zbyt dobrze wspierany).

Zmienne **MSSubClass** oraz **MoSold** są kategoryczne (tak wynika z informacji zawartej w pliku ames\_description.txt), a są w naszych danych wprost liczbami. Przekształćmy je zatem do poprawnego typu.

```
df = df.replace(
        "MSSubClass": {
            20: "SC20"
            30: "SC30"
            40: "SC40",
            45: "SC45"
            50: "SC50",
            60: "SC60"
            70: "SC70".
            75: "SC75",
            80: "SC80",
            85: "SC85"
            90: "SC90"
            120: "SC120",
            150: "SC150"
            160: "SC160"
            180: "SC180"
            190: "SC190",
        },
        "MoSold": {
            1: "Jan",
            2: "Feb".
```

```
3: "Mar",

4: "Apr",

5: "May",

6: "Jun",

7: "Jul",

8: "Aug",

9: "Sep",

10: "Oct",

11: "Nov",

12: "Dec",

},
```

Oprócz tego zakodujemy zmienne kategoryczne uporządkowane (*categorical ordinal*) z tekstowych na kolejne liczby całkowite.

Przykładowo zmienna **BsmtCond**, oceniająca stan piwnicy, ma następujące możliwe wartości:

- NA (No) Basement
- *Po* (Poor) Severe cracking, settling, or wetness
- Fa (Fair) dampness or some cracking or settling
- TA (Typical) slight dampness allowed
- Gd (Good)
- Ex (Excellent)

Do następujących wartości możemy dopasować pewną skalę punktową, bo są one naturalnie uporządkowane.

```
df = df.replace(
        "Alley": {"None": 0, "Grvl": 1, "Pave": 2},
        "BsmtCond": {"No": 0, "Po": 1, "Fa": 2, "TA": 3, "Gd": 4,
"Ex": 5},
        "BsmtExposure": {"No": 0, "Mn": 1, "Av": 2, "Gd": 3},
        "BsmtFinType1": {
            "No": 0,
            "Unf": 1,
            "LwQ": 2,
            "Rec": 3,
            "BLQ": 4,
            "ALQ": 5,
            "GLQ": 6,
        "BsmtFinType2": {
            "No": 0,
            "Unf": 1,
            "LwQ": 2,
            "Rec": 3,
```

```
"BL0": 4,
                "ALQ": 5,
                "GLQ": 6,
          "BsmtOual": {"No": 0, "Po": 1, "Fa": 2, "TA": 3, "Gd": 4,
"Ex": 5},
          "ExterCond": {"Po": 1, "Fa": 2, "TA": 3, "Gd": 4, "Ex": 5},
          "ExterQual": {"Po": 1, "Fa": 2, "TA": 3, "Gd": 4, "Ex": 5},
           "FireplaceQu": {"No": 0, "Po": 1, "Fa": 2, "TA": 3, "Gd": 4,
"Ex": 5},

"Functional": {
                "Sal": 1,
                "Sev": 2,
                "Maj2": 3,
                "Maj1": 4,
                "Mod": 5,
                "Min2": 6,
                "Min1": 7,
                "Typ": 8,
          "GarageCond": {"No": 0, "Po": 1, "Fa": 2, "TA": 3, "Gd": 4,
"Ex": 5},
    "GarageQual": {"No": 0, "Po": 1, "Fa": 2, "TA": 3, "Gd": 4,
"Ex": 5},
           "HeatingQC": {"Po": 1, "Fa": 2, "TA": 3, "Gd": 4, "Ex": 5},
          "KitchenQual": {"Po": 1, "Fa": 2, "TA": 3, "Gd": 4, "Ex": 5},
"LandSlope": {"Sev": 1, "Mod": 2, "Gtl": 3},
"LotShape": {"IR3": 1, "IR2": 2, "IR1": 3, "Reg": 4},
"PavedDrive": {"N": 0, "P": 1, "Y": 2},
"PoolQC": {"No": 0, "Fa": 1, "TA": 2, "Gd": 3, "Ex": 4},
           "Street": {"Grvl": 0, "Pave": 1},
          "Utilities": {"ELO": 1, "NoSeWa": 2, "NoSewr": 3, "AllPub":
4},
     }
```

## Przygotowanie danych do uczenia

Nasz zbiór podzielimy na dwa podzbiory: treningowy (70%) i testowy (30%). Zbiór treningowy pozwoli nam utworzyć model regresji liniowej, natomiast testowy - oszacować jego jakość.

Pamiętaj, że wyniki uzyskiwane przez model na danych treningowych nie odzwierciedlają tego, jak będzie on sobie radził na danych, których nie ma w zbiorze uczącym. Aby uzyskać taką informację, konieczne jest sprawdzenie, jak model radzi sobie na danych testowych. Daje nam to oszacowanie, jak dobrze model **generalizuje się** dla nowych danych.

Wydzielimy sobie równeż zbiory kolumn z danymi numerycznymi i kategorycznymi, co później ułatwi nam odwoływanie się do nich.

Funkcja train\_test\_split z biblioteki Scikit-Learn przyjmuje osobno macierze dla cech (features) i etykiet (labels), dlatego wyodrębniamy sobie z naszej tablicy kolumnę **SalePrice**, która zawiera ceny nieruchomości.

#### Ciekawostka

Można zauważyć, że zmienna y jest małą literą, natomiast X\_train czy X\_test są z dużej. Są to konwencje pochodzące z matematyki:

- wektor w matematyce często oznaczamy małą pogrubioną literą (y) w programowaniu natomiast oznaczamy po prostu małą literą - y
- macierz w matematyce oznaczamy dużą pogrubioną literą (X) w programowaniu po prostu dużą literą X

Zbiór etykiet to w naszym przypadku wektor cen, więc zapisujemy y małą literą. Z drugiej strony X zawiera kolumny z cechami opisującymi poszczególne rekordy, a więc jest to macierz.

**Uwaga**: w eksperymentach ustalamy na sztywno wartość parametru random\_state. Doczytaj, dlaczego wykorzystywany jest ten parametr i co się dzieje, gdy jest on równy stałej wartości jak zero.

```
from google.colab import drive
drive.mount('/content/drive')

from sklearn.model_selection import train_test_split

y = df.pop("SalePrice")

categorical_features = df.select_dtypes(include="object").columns
numerical_features = df.select_dtypes(exclude="object").columns

X_train, X_test, y_train, y_test = train_test_split(
    df, y, test_size=0.3, random_state=0
)

# print(type(X_test))
# print(X_train[categorical_features])
# X_test = X_test.replace({"FireplaceQu": {"N": 0}})
# X_train = X_train.replace({"FireplaceQu": {"N": 0}})
```

Teraz trzeba dokonać transformacji naszych danych:

- zmienne kategoryczne nieuporządkowane trzeba przetworzyć tak, aby nasz algorym był w stanie je obsłużyć, czyli je zakodować za pomocą one-hot encoding,
- zmienne numeryczne dalej mogą mieć wartości brakujące, więc trzeba je uzupełnić, inaczej **imputować (impute)**,
- zmienne numeryczne trzeba przeskalować do zakresu wartości [0,1] czyli je **znormalizować (normalization)** przez zastosowanie **min-max scaling**.

### Kodowanie one-hot encoding

Powyżej omawialiśmy zmienne kategoryczne. Typ *categorical ordinal* można zakodować kolejnymi liczbami całkowitymi, co jest oczywiście proste. Co jednak ze zmiennymi bez kolejności, typu *categorical nominal*? Trzeba je dalej przekształcić na liczby (żeby model był w stanie je przetworzyć), ale tak, aby nie nadać im implicite kolejności.

Spójrzmy na kolumnę **Neighborhood**, oznaczającą poszczególne dzielnice. Dom znajduje się tylko w jednej dzielnicy, a w pozostałych go nie ma. Idea kodowania **one-hot encoding** polega na stworzeniu tylu zmiennych, ile jest możliwych wartości, a następnie w każdym wierszu przypisanie wartości 1 w tej kolumnie, z której była oryginalnie zmienna.

Przykładowo, jeżeli mielibyśmy 3 wartości ["A", "B", "C"], to powstają z nich 3 cechy (kolumny macierzy X) [col\_A, col\_B, col\_C]. Wiersz z pierwotną wartością "B" będzie miał wartości tych cech [0, 1, 0]. W przypadku naszej zmiennej **Neighborhood** pojawią się osobne zmienne **Old Town, NoRidge, Gilbert** itd., a dla każdego wiersza dokładnie jedna z nich będzie miała wartość 1.

#### Dla zainteresowanych

Jeżeli mamy dużo możliwych wartości, czyli zmienną o dużej **kardynalności (cardinality)**, to kolumn powstanie bardzo dużo. Do tego są **rzadkie (sparse)**, więc tracimy dużo pamięci na przechowywanie zer. Istnieją inne kodowania, które zajmują mniej miejsca, a implementuje je biblioteka Category Encoders.

### Imputacja brakujących wartości numerycznych

Wcześniej już napotkaliśmy wartości brakujące i postaraliśmy się uzupełnić je jak najlepiej potrafiliśmy, używając dokumentacji naszego zbioru. Nie gwarantuje to jednak usunięcia wszystkich braków. Nie zawsze w praktyce da się też tak łatwo znaleźć wartości do uzupełnienia. W przypadku zwykłych cech numerycznych możemy zastosować jedną z kilku bardzo popularnych strategii radzenia sobie z wartościami brakującymi:

- 1. Usunąć kolumnę, która zawiera brakujące wartości.
- 2. Usunąć wiersze, w których brakuje wartości.
- 3. Zastąpić brakujące wartości innymi, np. średnią z kolumny, medianą albo wartością stałą.
- 4. Przewidzieć brakujące wartości wykorzystując odpowiedni model uczenia maszynowego.

Podejście 4 jest często zbyt czasochłonne. Opcje 1 i 2 prowadzą do utraty danych. My wypróbujemy sposób nr 3.

Nie znaczy to jednak, że usunięcie wierszy czy kolumny jest zawsze złym podejściem. Usunięcie kolumny jest uzasadnione, jeśli ma ona naprawdę dużo wartości brakujących. W takich wypadkach ciężko z niej wyciągnąć jakąkolwiek sensowną informację. Usunięcie wierszy może być uzasadnione w przypadku, gdy mamy dużo rekordów i tylko niewielka część z nich posiada wartości brakujące (usunięcie kilku wierszy nie powinno powodować problemu).

#### Dla zainteresowanych

Popularne algorytmy imputacji danych często są oparte o algorytm najbliższych sąsiadów, czyli najbardziej podobne punkty. Innym podejściem, iteracyjnie imputującym wartości, jest algorytm MICE.

#### Skalowanie

Jest to bardzo ważny krok dla wielu modeli sztucznej inteligencji. Często takie modele mają pewne założenia co do danych wejściowych, a szczególnie popularnym założeniem jest, że wszystkie cechy mają wartości o podobnej skali. W szczególności regresja liniowa i logistyczna też czynią to założenie. Dlatego trzeba przeskalować nasze dane, żeby spełnić to założenie. Najprostsza metoda to MinMaxScaler, który przekształca wszystkie wartości do przedziału [0,1].

Istnieją też inne metody, np. standaryzacja, którą możesz pamiętać ze statystyki (jej wynikiem jest Z-score). Polega na odjęciu średniej i podzieleniu przez odchylenie standardowe każdej cechy. Wynikiem przekształcenia są cechy o średniej 0 i odchyleniu standardowym 1.

Więcej informacji na temat tego, dlaczego skalowanie jest tak istotne, możesz znaleźć tutaj.

#### Dla zainteresowanych

Porównanie różnych metod skalowania możesz znaleźć tutaj. Ciekawą metodą jest np. RobustScaler, który jest podobny do StandardScaler, ale używa mediany i kwartyli zamiast średniej i odchylenia standardowego. Są to tzw. robust statistics, czyli miary odporne na występowanie wartości odstających (outliers).

## Przetwarzanie danych z wykorzystaniem Scikit-Learn

Mamy zatem do wykonania:

- na zmiennych numerycznych 2 operacje do wykonania: imputacja i skalowanie,
- na zmiennych kategorycznych: zastosowanie kodowania one-hot encoding.

W Scikit-learn służą do tego następujące klasy:

- OneHotEncoder, SimpleImputer, MinMaxScaler transformacje, implementują metody .fit() i .transform(),
- Pipeline do układania transformacji sekwencyjnie,
- ColumnTransformer do układania transformacji równolegle, dla różnych kolumn.

Ważne: jako, że zaraz skorzystamy z regresji liniowej, do klasy OneHotEncoder trzeba przekazać drop="first". Stworzy to 1 zmienną mniej, niż typowy one-hot encoding, np. pd.get\_dummies(), gwarantując brak idealnie współliniowych zmiennych (perfectly collinear features), co byłby niestabilny numerycznie. Dodatkowo, jako że przekształcamy już po podziale na zbiór treningowy i testowy, to możemy spotkać na zbiorze testowym nieliczne przypadki kategorii, których nie ma w zbiorze treningowym - kodujemy je wtedy po prostu jako wektory zer za pomocą handle unknown="ignore".

Na przykładzie **StandardScaler** (standaryzacja) rozpatrzmy, jak działają poszczególne metody.

### Metoda .fit()

Do wykonania standaryzacji potrzebujemy dla każdej z cech określić 2 wartości - średnią oraz odchylenie standardowe. Formuła standaryzacji dla przypomnienia:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Metodę . fit () wykonujemy tylko raz, dla **danych treningowych**. To powoduje, że obliczamy wartości  $\mu$  oraz  $\sigma$  dla każdej cechy, na podstawie wartości ze zbioru treningowego. Wyuczone wartości zostają zapisane w obiekcie **StandardScaler** i mogą być później używane do przeprowadzenia standaryzacji zarówno dla danych treningowych, jak i testowych.

#### Co, gdyby dla danych testowych przeprowadzić osobną standaryzację?

Będziemy, na przykład, standaryzować kolumnę **GrLivArea** – powierzchnię nieruchomości. Załóżmy, że z danych treningowych wyszłoby, że średnia jest równa  $60\,m^2$ , a odchylenie standardowe –  $20\,m^2$ . Wtedy wartości z przedziału  $[40\,,80]$  zostaną przekształcone do  $[-1\,,1]$ . Nasz model wykorzysta to przekształcenie i będzie uważał, że wartości po transformacji w pobliżu 0 oznaczają średniej wielkości apartamenty.

Określiliśmy parametry modelu i dostajemy kilkadziesiąt budynków z jakiejś zamożnej dzielnicy dla predykcji. Średnia powierzchnia dla tych budynków to około  $160\,m^2$ . Osobno przeprowadzając standaryzację dla takich danych testowych, zaburzylibyśmy rozkład tej cechy, gdyż tym razem wartości wokół 0 oznaczałyby dość duże mieszkania. Modele są niezwykle czułe na podobne zaburzenia – musimy przetwarzać dane spójnie, żeby nie doszło do podobnych sytuacji.

#### Czemu nie wywołać . fit() na wszystkich danych, a nie tylko treningowych?

Wydzieliliśmy dane testowe po to, żeby sprawdzać, jak model poradzi sobie z danymi, których do tej pory nigdy nie widział, bo to właśnie takie dane będzie on dostawać w praktyce, po wdrożeniu do realnego systemu. Ta ocena obejmuje też etap preprocessingu, w tym skalowania. Więc jeśli etap preprocessingu zobaczy dane testowe, to nie będziemy w stanie uczciwie estymować jego zachowania na nowych danych.

Wykorzystanie danych testowych w procesie treningu to błąd **wycieku danych (data leakage)**. Skutkuje on niepoprawnym, nadmiernie optymistycznym oszacowaniem jakości modelu.

### Metoda .transform()

Przekształca dane za pomocą parametrów wyznaczonych w .fit().

### Metoda .fit\_transform()

Metoda, która najpierw wykonuje .fit(), a potem .transform() i zwraca wynik ostatniej. W przypadku niektórych transformacji wykorzystuje ich specyfikę i działa szybciej, niż sekwencyjne

wywołanie .fit() oraz .transform(). Trzeba jednak pamiętać, że możemy tego użyć tylko na zbiorze treningowym - na zbiorze testowym wywołujemy już tylko .transform().

#### Zadanie 4 (0.5 punktu)

Stwórz pipeline'y dla zmiennych kategorycznych i numerycznych. Połącz je następnie z użyciem ColumnTransformer. "Wytrenuj" go na danych treningowych, a następnie przetransformuj dane treningowe oraz testowe.

**Uwaga:** przekaż do ColumnTransformer parametr verbose\_feature\_names\_out=False, żeby nie zmieniał on nazw cech. Ułatwi nam to późniejszą analizę wyników.

```
from sklearn.compose import ColumnTransformer
from sklearn.impute import SimpleImputer
from sklearn.pipeline import Pipeline
from sklearn.preprocessing import OneHotEncoder, MinMaxScaler
one hot encoder = OneHotEncoder(
    drop="first", sparse output=False, handle unknown="ignore"
median imputer = SimpleImputer(strategy="median")
min max scaler = MinMaxScaler()
categorical pipeline = Pipeline([
    # ('imputer', SimpleImputer(strategy='most frequent')),
    ('onehot', one hot encoder)
    1)
numerical pipeline = Pipeline([
    ('imputer', median imputer),
    ('scaler', min_max_scaler)
    1)
column transformer = ColumnTransformer( transformers=[
    ('cat', categorical pipeline, categorical features.to list()),
    ('num', numerical_pipeline, numerical_features.to list())
    ], verbose feature names out=False)
# fit and transform
column transformer.fit(X train, y train)
X train = column transformer.transform(X train)
X test = column transformer.transform(X test)
/usr/local/lib/python3.10/dist-packages/sklearn/preprocessing/
encoders.py:202: UserWarning: Found unknown categories in columns
[12, 15, 17] during transform. These unknown categories will be
encoded as all zeros
 warnings.warn(
```

```
column transformer
ColumnTransformer(transformers=[('cat',
                                   Pipeline(steps=[('onehot',
OneHotEncoder(drop='first',
handle unknown='ignore',
sparse output=False))]),
                                   ['MSSubClass', 'MSZoning',
'LandContour',
                                    'LotConfig', 'Neighborhood',
'Condition1',
                                    'Condition2', 'BldgType',
'HouseStyle',
                                    'RoofStyle', 'RoofMatl',
'Exterior1st',
                                    'Exterior2nd', 'MasVnrType',
'Foundation',
                                    'Heating', 'Centra...
'LotShape', 'Utilities',
'LandSlope',
                                    'OverallQual', 'OverallCond',
'YearBuilt',
                                    'YearRemodAdd', 'MasVnrArea',
'ExterQual',
                                    'ExterCond', 'BsmtQual', 'BsmtCond',
                                     'BsmtExposure', 'BsmtFinType1',
'BsmtFinSF1',
                                    'BsmtFinType2', 'BsmtFinSF2',
'BsmtUnfSF',
                                    'TotalBsmtSF', 'HeatingQC',
'X1stFlrSF',
                                    'X2ndFlrSF', 'LowQualFinSF',
'GrLivArea',
                                    'BsmtFullBath',
'BsmtHalfBath', ...])],
                   verbose feature names out=False)
```

## Regresja liniowa

Możemy teraz przejść do przewidywania wartości domów. Naszym narzędziem będzie tutaj **regresja liniowa (linear regression)**, czyli model postaci:

$$\hat{\mathbf{v}} = a \mathbf{x} + b$$

gdzie  $\hat{y}$  to zmienna zależna, x to zmienna niezależna (wartość cechy), a współczynniki obliczane są według wzorów opisanych tutaj, bez wątpienia znanych Ci z algebry liniowej i statystyki.

Rozwinięciem regresji liniowej jest wielokrotna regresja liniowa (*multiple linear regression*), która pozwala na wykorzystanie więcej niż jednej cechy do predykcji wartości. W takim modelu predykcja to kombinacja liniowa cech i wag, gdzie każda cecha posiada własną wagę. Więcej o tym mechanizmie możesz przeczytać tutaj. Formalnie jest to model postaci:

$$\hat{y} = w \cdot x + b = \sum_{i=1}^{d} w_i x_i + b$$

qdzie:

- *d* to **wymiarowość (dimensionality)**, czyli liczba cech
- w to wektor wag o długości d
- W<sub>i</sub> to wagi poszczególnych cech
- $oldsymbol{b}$  to **wyraz wolny (bias / intercept)**, punkt przecięcia ze środkiem układu współrzędnych

Pozostaje pytanie, jak wyznaczyć wagi w i wyraz wolny b. Można to robić na różne sposoby, przy czym klasyczna regresja liniowa minimalizuje **błąd średniokwadratowy (mean squared error, MSE)**. Jest to przykład **funkcji kosztu (loss function / cost function)**, a konkretnie \*squared loss / L2 loss\*\*. Ma on postać:

$$L(y, \hat{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y - \hat{y})^{2}$$

gdzie  $\hat{y}$  to wartość przewidywana przez model, y - prawdziwa, a n to liczba punktów w zbiorze.

W Scikit-learn ten model implementuje klasa LinearRegression. Jej ważne cechy:

- domyślnie uwzględnia intercept (bias) przez fit\_intercept=True; jeżeli nasze dane są już wycentrowane, to jest to niepotrzebne i może powodować problemy numeryczne,
- używa implementacji z pseudoodwrotnością Moore'a-Penrose'a (SVD),
- nie pozwala na regularyzację, do tego trzeba użyć innych klas.

Jak ocenić, jak taki model sobie radzi? Trzeba tutaj użyć pewnej **metryki (metric)**, czyli wyznacznika jakości modelu. Można na to patrzeć z wielu różnych perspektyw, w zależności od charakterystyki problemu. Tradycyjnie używa się **Root MSE (RMSE)**, czyli pierwiastka kwadratowego z MSE. Ma ważne zalety:

- regresja liniowa z definicji modelu optymalizuje miarę MSE, więc używamy metryki dobrze związanej z modelem,
- dzięki pierwiastkowaniu ma tę samą jednostkę, co przewidywane wartości.

Jest też dość czuła na wartości odstające, ale może to być korzystne, w zależności od zastosowania.

$$RMSE(y,\hat{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2}$$

W Scikit-learn RMSE liczy się dość specyficznie, bo używa się funkcji do MSE z argumentem squared=False.

#### Dla zainteresowanych

Minimalizując inne rodzaje błędu, otrzymujemy modele liniowe o innych parametrach, ale tej samej postaci funkcji. Typowo modele te są bardziej odporne na wartości odstające, ale bardziej kosztowne w treningu. Są to np. quantile regression optymalizująca koszt L1 (*mean absolute error*) czy Huber regression, optymalizująca tzw. Huber loss (połączenie L1 i L2).

Obliczanie regresji liniowej używa pseudoodwrotności Moore'a-Penrose'a i SVD. Objaśnia to dobrze ten tutorial.

```
from sklearn.metrics import mean_squared_error, mean_absolute_error
from sklearn.linear_model import LinearRegression

# all variables are in range [0, 1], so we don't need an intercept
reg_linear = LinearRegression(fit_intercept=False)
reg_linear.fit(X_train, y_train)

y_pred = reg_linear.predict(X_test)
rmse = mean_squared_error(y_test, y_pred, squared=False)

print(f"RMSE: {rmse:.4f}")
# print(np.expm1(y_train))

RMSE: 0.1159
```

Czy taki błąd to duży, czy mały? Wszystko zależy od skali wartości przewidywanych. Trzeba pamiętać, że dokonaliśmy logarytmowania zmiennej docelowej, więc trzeba to sprawdzić po transformacji odwrotnej np.expm1. Po tej operacji wartość błędu będzie wyrażona w dolarach.

## Zbyt małe i nadmierne dopasowanie

W trakcie trenowania modelu może dojść do sytuacji, w której zostanie on **przeuczony** (overfitting). W takim wypadku model nadmiernie dostosowuje się do danych treningowych, "zakuwając" je. Daje wtedy bardzo dokładne wyniki na zbiorze treningowym, ale kiepskie na zbiorze testowym. Modele przeuczone słabo zatem się **generalizują (generalization)**.

Dlatego wcześniej wydzieliliśmy zbiór testowy, za pomocą którego oceniamy skuteczność naszego modelu. Pozwala to uniknąć powyższego błędu. Przeuczenie bardzo często można rozpoznać właśnie po różnym zachowaniu modelu na danych treningowych i testowych. Jeśli z danymi treningowymi model radzi sobie dużo lepiej, niż z testowymi, to istnieje dużo ryzyko, że model został przeuczony i skupił się na zapamiętywaniu konkretnych przykładów, na których się uczył, niż na wyciąganiu z nich uniwersalnych wzorców. Taki model słabo się generalizuje i nie poradzi sobie z nowymi danymi.

Sprawdza się to następująco:

- obliczamy błąd treningowy oraz testowy,
- jeżeli oba błędy są wysokie, to mamy zbyt małe dopasowanie (underfitting) i trzeba użyć pojemniejszego modelu,

• jeżeli błąd treningowy jest dużo niższy od treningowego, to mamy nadmierne dopasowanie (*overfitting*) i model trzeba regularyzować.

W praktyce paradoksalnie często model o większej pojemności z mocną regularyzacją działa lepiej od prostszego modelu ze słabą regularyzacją. Wyjaśnianie, czemu tak jest, to otwarty problem naukowy, szczególnie w kontekście sieci neuronowych.

Przeuczenie modelu jest bardzo istotnym problemem w sztucznej inteligencji i istnieje szereg metod, służących zapobieganiu tego zjawiska. Jedną z nich jest regularyzacja - do globalnej funkcji błędu dodawane są "kary" za tworzenie zbyt złożonych modeli. Typowe metody regularyzacji to L1 oraz L2, które penalizują wielkość parametrów obliczonych w trakcie treningu. Obie te wartości są tak naprawdę normami (odpowiednio l1 i l2) wektorów wag modelu, przeskalowanymi przez określoną wartość. Dodawanie tych kar ma zapobiec przeuczeniu, bo typowo duże wagi w regresji liniowej i podobnych modelach oznaczają przeuczenie.

Czemu tak jest? Przeuczenie bierze się z tego, że nasz model "zakuwa" zbiór treningowy, ucząc się **szumu (noise)** w danych, przypisując nadmierne znaczenie niewielkim różnicom w wartościach cech. Jeżeli cecha ma dużą wagę, to nawet niewielka zmiana jej wartości bardzo zmienia finalną predykcję (która jest kombinacją liniową). Dzięki regularyzacji, jeżeli model podczas treningu będzie chciał zwiększyć wagę dla cechy, to musi mu się to opłacać. Innymi słowy, zwiększenie wagi cechy musi zmniejszyć koszt (np. MSE) bardziej, niż wzrośnie kara z regularyzacji.

Jak słusznie się domyślić, zbyt duże kary spowoduję z kolei niedouczenie (ang. *underfitting*). Więcej o konstrukcji i zastosowaniach regularyzacji L1 i L2 możesz przeczytać tutaj.

### Dla zainteresowanych

W praktyce detekcja nadmiernego dopasowania nie musi być wcale taka oczywista. Nasz model może przeuczać się tylko na niektórych segmentach danych, dla nietrywialnych kombinacji cech etc. Testowanie modeli ML i detekcja overfittingu jest otwartym problemem badawczym, ale powstają już pierwsze narzędzia do tego, np. Giskard.

#### Zadanie 5 (1.0 punkt)

Uzupełnij kod funkcji assess regression model o:

- obliczenie predykcji na zbiorze treningowym oraz testowym,
- transformacje eksponencjalne, żeby wrócić do oryginalnej jednostki (dolara),
- obliczenie RMSE dla zbioru treningowego i testowego,
- wypisywanie RMSE, zaokrąglonego do 2 miejsc po przecinku.

Skomentuj wyniki. Czy następuje przeuczenie modelu? Oceń także sam błąd, czy subiektywnie to duża wartość, biorąc pod uwagę rozkład zmiennej docelowej (wartości i wykresy w sekcji EDA)?

```
def assess_regression_model(model, X_train, X_test, y_train, y_test) -
> None:
    # predict for train and test
    # your_code_here
    y_train_pred = model.predict(X_train)
    y_test_pred = model.predict(X_test)
```

```
# exponential transform for y train, y test and predictions
    # your code here
    y_train = np.expm1(y train)
    y test = np.expm1(y test)
    y_train_pred = np.expm1(y_train_pred)
    y test pred = np.expm1(y test pred)
    # calculate train and test RMSE
    # your code here
    rmse_train = mean_squared_error(y_train, y_train_pred,
squared=False)
    rmse_test = mean_squared_error(y_test, y_test_pred, squared=False)
    # print train and test RMSE
    # your_code_here
    print(f"RMSE train: {rmse train:.2f}")
    print(f"RMSE test: {rmse test:.2f}")
# your code
assess regression model(reg linear, X train, X test, y train, y test)
print(np.expm1(y test))
RMSE train: 16751.11
RMSE test: 21318.61
1818
        120750.0
22
        216000.0
502
        260000.0
2536
        140000.0
686
        135000.0
1626
        160000.0
2371
        108000.0
2278
        130000.0
411
        123000.0
969
        139500.0
Name: SalePrice, Length: 877, dtype: float64
```

// skomentuj tutaj

błąd wychodzi proporcjonalnie duży, jest rzędu wielkości salePrice/10.

Na grupie testowej jest większy niż na treningowej

## Regresja regularyzowana (ridge, LASSO)

Regularyzacja zmniejsza pojemność modelu regresji liniowej, narzucając mniejsze wagi poprzez penalizację dużych wag w funkcji kosztu. Regresja liniowa z regularyzacją L2 nazywa się *ridge* 

*regression*, z regularyzacją L1 - *LASSO regression*, a z oboma naraz - *ElasticNet regression*. Formalnie mamy:

$$\begin{split} L_{ridge}(y, \hat{y}) &= \frac{1}{n} (y - \hat{y})^2 + \lambda |) w|)_2^2 \\ L_{LASSO}(y, \hat{y}) &= \frac{1}{n} (y - \hat{y})^2 + \alpha |) w|)_1 \\ L_{ElasticNet}(y, \hat{y}) &= \frac{1}{n} (y - \hat{y})^2 + \lambda |) w|)_2^2 + \alpha |) w|)_1 \end{split}$$

Jak widać, regularyzacja dodaje do zwykłego kosztu MSE dodatkowe wyrazy, penalizujące wielkość wag w. **Siłę regularyzacji (regularization strength)**, czyli jak mocna jest taka kara, wyznacza współczynnik, oznaczany typowo  $\lambda$  albo  $\alpha$ . Jest to **hiperparametr (hyperparameter)**, czyli stała modelu, którą narzucamy z góry, przed treningiem. Nie jest on uczony z danych. Jak go dobrać, omówimy poniżej.

Regresja ridge (L2) zmniejsza wagi i jest różniczkowalna (szybsza i łatwiejsza w treningu). Regresja LASSO (L1) dokonuje **selekcji cech (feature selection)**, zmniejszając często wagi cech dokładnie do zera, eliminując tym samym słabe cechy. Oba naraz realizuje model ElasticNet.

W Scikit-learn implementują je klasy **Ridge**, **Lasso** oraz **ElasticNet**. Najważniejszy hiperparametr każdego z tych modeli to siła regularyzacji, która we wszystkich klasach to alpha. Scikit-learn definiuje regularyzację ElasticNet dość specyficznie, za pomocą parametru l1 ratio, który wyznacza, jaki ułamek siły regularyzacji przypada dla L1, a jaki dla L2:

 $$\ L_{ElasticNet}(y, \hat{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( y - \hat{y} \right)^2 + \alpha \left( 1 - L1 \right) \cdot \left( y - \frac{y} \right)^2 + \alpha \left( 1 - L1 \right) \cdot \left( y - \frac{y} \right)^2 + \alpha \left( 1 - L1 \right) \cdot \left( y - \frac{y} \right)^2 + \alpha \left( y - \frac{y} \right)^2 +$ 

Inne ważne uwagi:

- liczba iteracji max\_iter wyznacza liczbę iteracji solwera; im więcej, tym dokładniejsze rozwiązanie, ale tym dłuższy czas obliczeń,
- jeżeli max\_iter będzie zbyt mała i algorytm nie osiągnie zbieżności, to dostaniemy ostrzeżenie, wtedy zwykle trzeba po prostu ją zwiększyć, np. 10-krotnie,
- jeżeli nie potrzebujemy bardzo precyzyjnego rozwiązania, można ustawić większe tol dla przyspieszenia obliczeń.

Jako że nasz model jest regularyzowany i nie ma ryzyka problemów numerycznych, to teraz już obliczamy intercept.

```
from sklearn.linear_model import Ridge, Lasso

reg_ridge = Ridge(random_state=0)
reg_lasso = Lasso(random_state=0)

reg_ridge.fit(X_train, y_train)
reg_lasso.fit(X_train, y_train)
assess_regression_model(reg_ridge, X_train, X_test, y_train, y_test)
```

```
print()
assess_regression_model(reg_lasso, X_train, X_test, y_train, y_test)

RMSE train: 16870.91
RMSE test: 18879.11

RMSE train: 79579.79
RMSE test: 80091.99
```

W przypadku regularyzacji L2 domyślna siła regularyzacji (alpha=1.0) znacząco poprawiła wynik, natomiast w przypadku L1 mamy bardzo silny underfitting.

### Tuning hiperparametrów, zbiór walidacyjny

Praktycznie wszystkie modele ML mają hiperparametry, często liczne, które w zauważalny sposób wpływają na wyniki, a szczególnie na underfitting i overfitting. Ich wartości trzeba dobrać zatem dość dokładnie. Jak to zrobić? Proces doboru hiperparametrów nazywa się tuningiem hiperparametrów (hyperparameter tuning).

Istnieje na to wiele sposobów. Większość z nich polega na tym, że trenuje się za każdym razem model z nowym zestawem hiperparametrów i wybiera się ten zestaw, który pozwala uzyskać najlepsze wyniki. Metody głównie różnią się między sobą sposobem doboru kandydujących zestawów hiperparametrów.

Najprostsze i najpopularniejsze to:

- **pełne przeszukiwanie** (*grid search*) definiujemy możliwe wartości dla różnych hiperparametrów, a metoda sprawdza ich wszystkie możliwe kombinacje (czyli siatkę),
- **losowe przeszukiwanie** (*randomized search*) definiujemy możliwe wartości jak w pełnym przeszukiwaniu, ale sprawdzamy tylko ograniczoną liczbę losowo wybranych kombinacji.

Jak ocenić, jak dobry jest jakiś zestaw hiperparametrów? Nie możemy sprawdzić tego na zbiorze treningowym - wyniki byłyby zbyt optymistyczne. Nie możemy wykorzystać zbioru testowego - mielibyśmy data leakage, bo wybieralibyśmy model explicite pod nasz zbiór testowy. Trzeba zatem osobnego zbioru, na którym będziemy na bieżąco sprawdzać jakość modeli dla różnych hiperparametrów. Jest to **zbiór walidacyjny** (*validation set*).

Zbiór taki wycina się ze zbioru treningowego. Dzielimy zatem nasze dane nie na dwie, ale trzy części: treningową, walidacyjną i testową. Typowe proporcje to 60-20-20% lub 80-10-10%.

Metody tuningu hiperparametrów są zaimplementowane w Scikit-Learn jako GridSearchCV oraz RandomizedSearchCV. Są też bardziej wyspecjalizowane metody dla konkretnych modeli, które są dla nich typowo o wiele szybsze.

**Uwaga:** warto zauważyć, że liczba możliwych kombinacji rośnie gwałtownie wraz z liczbą hiperparametrów i ich możliwych wartości. Mając siatkę na 3 hiperparametry po 10 możliwych wartości dla każdego, otrzymujemy 1000 możliwych kombinacji. W pracy w ML płacą nam też za to, że wiemy, jakie siatki dobrać:)

#### Dla zainteresowanych

Szczególnie inteligentne są metody tuningu z grupy metod optymalizacji bayesowskiej (Bayesian hyperparameter optimization / Bayesian HPO). Są to np. procesy Gaussowskie oraz Tree Parzen Estimator (TPE). Wykorzystują one dość zaawansowaną statystykę, aby zamodelować, jak poszczególne hiperparametry wpływają na wynik i dobierają takie kolejne kombinacje hiperparametrów, które są ich zdaniem najbardziej obiecujące. W szczególności wiele z tych metod traktuje dobór hiperparametrów jak problem regresji, gdzie parametrami są hiperparametry modelu, które dobieramy.

Takich metod szczególnie często używa się przy tuningu hiperparametrów dla sieci neuronowej, gdyż jej wytrenowanie jest czasochłonne, a więc nie możemy pozwolić sobie na sprawdzenie licznych kombinacji, bo zbyt dużo by nas to kosztowało.

Ta metoda została zaimplementowana w wielu frameworkach, jak np. Optuna czy Hyperopt. Więcej można o nich przeczytać tutaj.

## Walidacja skrośna

Jednorazowy podział zbioru na części nazywa się *split validation* lub *holdout*. Używamy go, gdy mamy sporo danych, i 10-20% zbioru jako dane walidacyjne czy testowe to dość dużo, żeby mieć przyzwoite oszacowanie. Zbyt mały zbiór walidacyjny czy testowy da nam mało wiarygodne wyniki - nie da się nawet powiedzieć, czy zbyt pesymityczne, czy optymistyczne! W praktyce niestety często mamy mało danych. Trzeba zatem jakiejś magicznej metody, która stworzy nam więcej zbiorów walidacyjnych z tej samej ilości danych.

Taką metodą jest **walidacja skrośna** (*cross-validation, CV*). Polega na tym, że dzielimy zbiór na K równych podzbiorów, tzw. *foldów*. Każdy podzbiór po kolei staje się zbiorem walidacyjnym, a pozostałe łączymy w zbiór treningowy. Przykładowo, jeżeli mamy 5 foldów (1, 2, 3, 4, 5), to będziemy mieli po kolei:

- zbiór treningowy: (2, 3, 4, 5), walidacyjny: (1)
- zbiór treningowy: (1, 3, 4, 5), walidacyjny: (2)
- zbiór treningowy: (1, 2, 4, 5), walidacyjny: (3)
- zbiór treningowy: (1, 2, 3, 5), walidacyjny: (4)
- zbiór treningowy: (1, 2, 3, 4), walidacyjny: (5)

Trenujemy zatem K modeli dla tego samego zestawu hiperparametrów i każdy testujemy na zbiorze walidacyjnym. Mamy K wyników dla zbiorów walidacyjnych, które możemy uśrednić (i ew. obliczyć odchylenie standardowe). Takie wyniki są znacznie bardziej wiarygodne zgodnie ze statystyką (moc statystyczna itp.). Typowo używa się 5 lub 10 foldów, co jest dobrym balansem między liczbą modeli do wytrenowania i wielkością zbiorów walidacyjnych.

Szczególnym przypadkiem jest Leave-One-Out Cross-Validation (LOOCV), w którym ilość podzbiorów (*foldów*) jest równa ilości rekordów. Czyli w danej chwili tylko 1 przykład jest zbiorem walidacyjnym. Daje to możliwość prawie całkowitego wykorzystania naszych danych (w każdej iteracji musimy wydzielić tylko 1 przykład na zbiór walidacyjny, cała reszta jest naszym zbiorem treningowym), ale wprowadza ogromny koszt obliczeniowy. Jest to opłacalne tylko w szczególnych przypadkach.

Można zauważyć, że w nazwach klas do tuningu parametrów, wspomnianych wyżej, mamy sufiks CV - to jest właśnie *Cross Validation*.

#### Dla zainteresowanych

Walidacji skrośnej można użyć także do testowania, tworząc wiele zbiorów testowych. Można połączyć obie techniki, co daje tzw. nested cross-validation. Jest to bardzo kosztowna, ale jednocześnie bardzo precyzyjna technika.

### RidgeCV, LassoCV, ElasticNetCV

W przypadku regresji liniowej istnieją bardzo wydajne implementacje walidacji skrośnej, głównie dzięki prostocie tego modelu. W Scikit-learn są to odpowiednio RidgeCV, LassoCV oraz ElasticNetCV.

RidgeCV domyślnie wykorzystuje efektywną implementację Leave-One-Out Cross-Validation (LOOCV). Jest to możliwe dzięki pewnym sztuczkom opartym na algebrze liniowej, wyjaśnionych w dokumentacji w kodzie (dla zainteresowanych). Co ważne, jest to operacja o wiele szybsza niż osobne grid search + ridge regression, a nawet od RidgeCV z mniejszą liczbą foldów.

LassoCV oraz ElasticNetCV iterują od najmniejszych do największych wartości alpha (siły regularyzacji), używając rozwiązania dla mniejszej siły regularyzacji jako punktu początkowego dla kolejnej wartości. Odpowiada to po prostu dość inteligentnemu wyborowi punktu startowego w optymalizacji funkcji kosztu, a znacznie obniża koszt obliczeniowy.

#### Zadanie 6 (1.0 punkt)

Użyj klas RidgeCV oraz LassoCV do tuningu hiperparametrów.

Dla RidgeCV sprawdź 1000 wartości [0.1, 100] w skali liniowej - przyda się np.linspace(). Użyj LOOCV.

Dla LassoCV Scikit-learn sam dobierze wartości, musisz podać tylko liczbę wartości alfa do sprawdzenia - użyj 1000. Użyj 5-fold CV. Pamiętaj o podaniu random\_state=0 - solver jest niedeterministyczny.

Wypisz znalezione optymalne wartości siły regularyzacji .alpha\_ dla obu modeli, zaokrąglone do 4 miejsca po przecinku dla czytelności.

#### Ciekawostka

Atrybuty z \_ (underscore) na końcu w Scikit-Learn oznaczają, że zostały one wyliczone podczas treningu (.fit()). W powyższym przypadku optymalny współczynnik regularyzacji .alpha\_został wyznaczony dopiero po przeprowadzeniu tuningu hiperparametrów.

Jeśli zajrzeć do dokumentacji dla klasy LinearRegression, to można zauważyć takie atrybuty jak . coef przechowujący wyznaczone współczynniki cech, czy .intercept - wyraz wolny.

Takie atrybuty pozwalają przeprowadzić dogłębniejszą analizę wytrenowanego modelu.

Przetestuj modele z użyciem assess\_regression\_model (). Skomentuj wyniki. Czy udało się wyeliminować overfitting?

```
# your code
from sklearn.linear model import RidgeCV, LassoCV
ridge alphas = np.linspace(0.1, 100, 1000)
ridge cv = RidgeCV(alphas = ridge alphas)#, store cv values=True,
cv=None)
ridge cv.fit(X train, y train)
optimal alpha ridge = round(ridge cv.alpha , 4)
# print(""optimal_alpha_ridge)
print(f"Optimal Ridge Alpha: {optimal alpha ridge}")
lasso cv = LassoCV(n alphas=1000, cv=5, random state=0)
lasso cv.fit(X train, y train)
optimal alpha lasso = round(lasso cv.alpha , 4)
# print(optimal alpha lasso)
print(f"Optimal Alpha Lasso: {optimal alpha lasso}")
reg ridge = Ridge(alpha=optimal alpha ridge)
reg ridge.fit(X train, y train)
reg lasso= Lasso(alpha=optimal alpha lasso)
reg lasso.fit(X train, y train)
assess regression model(reg ridge, X train, X test, y train, y test)
print()
assess_regression_model(reg_lasso, X_train, X_test, y_train, y_test)
Optimal Ridge Alpha: 2.9
Optimal Alpha Lasso: 0.0003
RMSE train: 17212.41
RMSE test: 18758.43
RMSE train: 18127.10
RMSE test: 18673.47
```

// skomentuj tutaj

## Regresja wielomianowa

Regresja wielomianowa to po prostu dodanie wielomianów cech do naszych danych:

$$[a,b,c,d] -> [a,b,c,d,a^2,b^2,c^2,d^2,ab,ac,ad,bc,bd,cd]$$

Pozwala to na uwzględnienie bardziej złożonych kombinacji cech, których sama regresja liniowa, ze względu na swoją prostotę, nie jest w stanie uwzględnić.

W Scikit-learn regresja wielomianowa składa się z 2 osobnych kroków: wygenerowania cech wielomianowych i użycia zwykłej regresji liniowej. Pozwala to na użycie tej transformacji dla dowolnych algorytmów, nie tylko regresji liniowej.

Kwestią sporną jest, czy jest sens przeprowadzać taką transformację dla zmiennych po one-hot encodingu. Potęgi na pewno nie mają sensu, natomiast interakcje realizują po prostu operację koniunkcji (AND), ale łatwo prowadzi to do eksplozji wymiarowości. Dla uproszczenia poniżej zastosujemy transformację dla wszystkich cech.

Warto pamiętać, że jeżeli używamy modelu, który sam dodaje intercept (jak regresja liniowa), to trzeba przekazać include\_bias=False. Żeby wymiarowość zbytnio nam nie urosła, użyjemy interaction only=True.

```
from sklearn.preprocessing import PolynomialFeatures
poly features = PolynomialFeatures(degree=2, interaction only=True,
include bias=False)
poly features.fit(X train)
X_train_poly = poly_features.transform(X_train)
X test poly = poly features.transform(X test)
reg ridge cv poly = RidgeCV(alphas=np.linspace(0.1, 100, 1000))
reg ridge cv poly.fit(X train poly, y train)
assess regression model(reg ridge cv poly, X train poly, X test poly,
y train, y test)
print()
print(f"Ridge + polynomial features alpha:
{reg ridge cv poly.alpha :.4f}")
RMSE train: 12856.88
RMSE test: 18298.30
Ridge + polynomial features alpha: 84.8000
```

Co ciekawe, model bardziej zbliżył się do przeuczenia, ale błąd testowy zmalał. Jest to niezbyt częste, ale możliwe.

## Regresja logistyczna

Regresja logistyczna jest modelem, który pozwala na przewidywanie wartości zmiennych dychotomicznych w oparciu o jedną lub większą ilość cech. Funkcją bazową regresji logistycznej jest funkcja logistyczna. Bardzo ciekawe podsumowanie dotyczące matematyki stojącej za regresją logistyczną znajdziesz tu.

Do klasyfikacji wykorzystamy zbiór Bank Marketing, w którym przewiduje się, czy dana osoba będzie zainteresowana lokatą terminową w banku. Precyzyjny targetowany marketing jest ważny z perspektywy biznesu, bo w praktyce chce się reklamować tak mało, jak to możliwe. Bank zarabia tylko na tych osobach, które są faktycznie zainteresowane reklamą, a pozostałych można łatwo zrazić zbyt dużą liczbą reklam, więc precyzyjna ocena przynosi tu realne zyski.

Zbiór posiada dwie wersje, uproszczoną oraz rozszerzoną o dodatkowe atrybuty socjoekonomiczne (np. sytuację ekonomiczną w planowanym momencie reklamy). Wykorzystamy tę drugą, bo są to bardzo wartościowe cechy. Dodatkowo każda wersja posiada pełny zbiór (ok. 45 tysięcy przykładów) oraz pomniejszony (ok. 4 tysiąca przykładów). Dzięki skalowalności regresji logistycznej możemy bez problemu wykorzystać pełny zbiór z dodatkowymi cechami.

Opisy zmiennych znajdują się w pliku bank\_marketing\_description.txt.

#### Zadanie 7 (1.0 punkt)

Wczytywanie i czyszczenie danych

- 1. Załaduj zbiór danych z pliku bank\_marketing\_data.csv do DataFrame'a. Zwróć uwagę, że separatorem jest średnik (argument Sep).
- 2. Usuń kolumny:
  - default, czy klient ma zadłużenie na karcie kredytowej; ma tylko 3 wartości yes,
  - duration, czas trwania ostatniego telefonu reklamowego; autorzy sugerują usunięcie w opisie zbioru, bo nie znamy tej wartości przed wykonaniem telefonu,
  - pdays, liczba dni od ostatniego telefonu reklamowego w ramach danej kampanii marketingowej; jeżeli to pierwszy kontakt, to wartość to 999, i ciężko byłoby włączyć taką cechę do modelu, a mamy już i tak informację o tym, czy to pierwszy kontakt z klientem w zmiennej previous,
  - poutcome, wynik poprzedniej kampanii; w zdecydowanej większości przypadków to nonexistent.
- 3. Dokonaj filtrowania wierszy:
  - usuń wiersze z education na poziomie illiterate, jest ich tylko kilkanaście.
- 4. Zakoduj odpowiednio zmienne education, contact, month, day\_of\_week i y. Dla ułatwienia słowniki tych zmiennych są w zmiennych poniżej.
- 5. Wyodrębnij kolumnę y do zmiennej y (pamiętaj o usunięciu jej z DataFrame'a).

```
education_mapping = {
    "basic.4y": "primary",
    "basic.6y": "primary",
    "basic.9y": "primary",
    "high.school": "secondary",
    "professional.course": "secondary",
    "university.degree": "tertiary",
}

contact_mapping = {
    "telephone": 0,
    "cellular": 1,
}

month_mapping = {
    "jan": 1,
    "feb": 2,
```

```
"mar": 3,
    "apr": 4,
    "may": 5,
    "jun": 6,
    "jul": 7,
    "aug": 8,
    "sep": 9,
    "oct": 10,
    "nov": 11,
    "dec": 12,
}
day of week mapping = {
    "mon": 1,
    "tue": 2,
    "wed": 3,
    "thu": 4,
    "fri": 5,
}
y mapping = {
    "no": 0,
    "yes": 1,
}
# your code
df = pd.read_csv("bank_marketing_data.csv", sep = ";")
df = df.drop(["default", "duration", "pdays", "poutcome"], axis=1)
mask = df["education"] != "illiterate"
df = df.loc[mask]
replacement dict = {
    "education": education mapping,
    "contact": contact_mapping,
    "month": month_mapping,
    "day_of_week": day_of_week_mapping,
    "y": y_mapping
}
df.replace(replacement_dict, inplace=True)
y = df.pop("y")
print(df)
                    job marital education housing loan contact
       age
month
        56
              housemaid married
0
                                     primary
                                                                  0
                                                   no
                                                        no
5
1
        57
               services married secondary
                                                   no
                                                        no
                                                                  0
5
```

2	37	services	married	secondary	yes	no	0
5 3 5	40	admin.	married	primary	no	no	0
4	56	services	married	secondary	no	yes	0
5							
 41183	73	retired	married	secondary	yes	no	1
11				_	-		
41184 11	46	blue-collar		secondary	no	no	1
41185 11	56	retired	married	tertiary	yes	no	1
41186 11	44	technician	married	secondary	no	no	1
41187	74	retired	married	secondary	yes	no	1
11							
cons.p				•	ar.rate		
0		1	1	0	1.1		93.994
1		1	1	0	1.1		93.994
2		1	1	0	1.1		93.994
3		1	1	0	1.1		93.994
4		1	1	0	1.1		93.994
41183		5	1	0	-1.1		94.767
41184		5	1	0	-1.1		94.767
41185		5	2	0	-1.1		94.767
41186		5	1	Θ	-1.1		94.767
41187		5	3	1	-1.1		94.767
0 1 2 3 4	cons	.conf.idx e -36.4 -36.4 -36.4 -36.4	uribor3m 4.857 4.857 4.857 4.857 4.857	nr.employed 5191.0 5191.0 5191.0 5191.0			

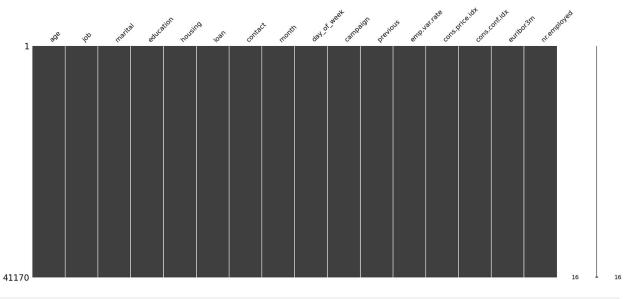
```
41183
                -50.8
                            1.028
                                         4963.6
41184
                -50.8
                            1.028
                                         4963.6
41185
                -50.8
                            1.028
                                         4963.6
41186
                -50.8
                            1.028
                                         4963.6
41187
                -50.8
                            1.028
                                         4963.6
[41170 rows x 16 columns]
```

## Zadanie 8 (0.5 punktu)

Exploratory Data Analysis (EDA)

- 1. Sprawdź, czy są jakieś wartości brakujące za pomocą biblioteki missingno. Jeżeli tak, to sprawdź w dokumentacji zbioru, jaka byłaby sensowna wartość do ich uzupełnienia.
- 2. Narysuj wykres (bar plot) z częstością klas. Uwzględnij częstość na wykresie (to może się przydać). Pamiętaj o tytule i opisaniu osi.

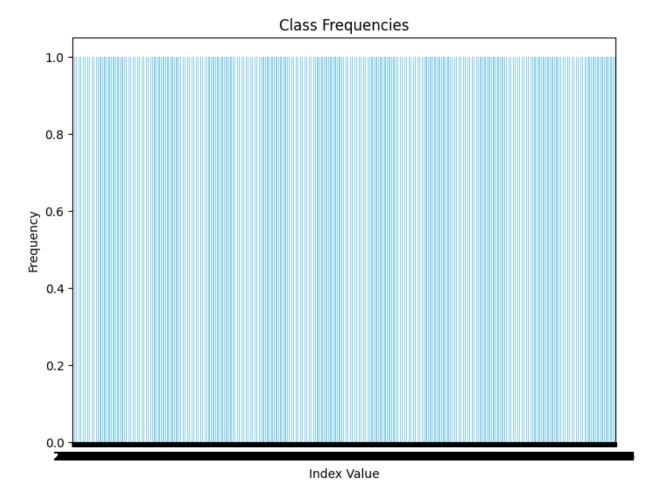
```
# plot missing values
# your_code
print(msno.matrix(df))
# brak wartości do uzupełnienia
Axes(0.125,0.11;0.698618x0.77)
```



```
# plot class frequencies
# your_code
indexes = df.index.value_counts()

# Create a bar plot of class frequencies
plt.figure(figsize=(8, 6))
```

```
indexes.plot(kind='bar', color='skyblue')
plt.title('Class Frequencies')
plt.xlabel('Index Value')
plt.ylabel('Frequency')
plt.xticks(rotation=0) # Optional: Rotate x-axis labels if needed
plt.show()
# df.head()
```



Jak widać, będziemy tu mieli do czynienia z problemem klasyfikacji niezbalansowanej. Na szczęście funkcja kosztu w regresji logistycznej pozwala na dodanie **wag klas (class weights)**, aby przypisać większą wagę interesującej nas klasie pozytywnej. Scikit-learn dla wartości class\_weights="balanced" obliczy wagi odwrotnie proporcjonalne do częstości danej klasy w zbiorze.

## Zadanie 9 (1.0 punkt)

# Podział i preprocessing danych

1. Dokonaj podziału zbioru na treningowy i testowy w proporcjach 75%-25%. Pamiętaj o użyciu podziału ze stratyfikacją (argument stratify), aby zachować proporcje klas. Ustaw random state=0.

2. Stwórz ColumnTransformer, przetwarzający zmienne kategoryczne za pomocą OneHotEncoder (teraz już nie musimy robić drop="first"), a numeryczne za pomocą StandardScaler. Zaaplikuj go do odpowiednich kolumn.

```
# your code
categorical features = df.select dtypes(include="object").columns
numerical features = df.select dtypes(exclude="object").columns
X_train, X_test, y_train, y_test = train test split(
    df, y, test size=0.25, random state=0, stratify = y
one hot encoder = OneHotEncoder(
    sparse output=False, handle unknown="ignore"
median_imputer = SimpleImputer(strategy="median")
min max scaler = MinMaxScaler()
categorical pipeline = Pipeline([
    # ('imputer', SimpleImputer(strategy='most frequent')),
    ('onehot', one hot encoder)
    ])
numerical pipeline = Pipeline([
    ('imputer', median imputer),
    ('scaler', min max scaler)
    1)
column transformer = ColumnTransformer( transformers=[
    ('cat', categorical pipeline, categorical features.to list()),
    ('num', numerical pipeline, numerical features.to list())
    ], verbose feature names out=False)
# fit and transform
column transformer.fit(X train, y train)
X train = column transformer.transform(X train)
X test = column transformer.transform(X test)
column transformer
ColumnTransformer(transformers=[('cat',
                                 Pipeline(steps=[('onehot',
OneHotEncoder(handle unknown='ignore',
sparse output=False))]),
                                 ['job', 'marital', 'education',
'housing',
                                   'loan']),
                                ('num',
                                 Pipeline(steps=[('imputer',
```

# Metryki klasyfikacji binarnej

W klasyfikacji binarnej mamy tylko dwie klasy, z konwencji oznaczamy jedną klasę jako negatywną, a drugą - pozytywną. W naszym przypadku klasą negatywną będą osoby niezainteresowane lokatą - nie chcemy im pokazywać naszych reklam, bo to będzie raczej nieskuteczne, a reklama kosztuje. Naszym targetem będą osoby oznaczone klasą pozytywną.

Wytrenowaliśmy model, ale jak sprawdzić jakość jego działania? Metryki z regresji raczej za wiele nam nie pomogą. Potrzebujemy zdefiniować nowe.

# Celność, dokładność (Accuracy)

Najprostszym sposobem oceny klasyfikacji jest sprawdzić, w ilu przypadkach się mylimy, a w ilu model odpowiada poprawnie. Ta metryka jest zwana *accuracy*. Ma ona jednak zasadniczą wadę - kompletnie nie radzi sobie z klasami niezbalansowanymi.

Prosty przypadek - mamy zbiór danych, który pozwala na podstawie różnych parametrów medycznych wykryć rzadką chorobę, która zdarza się u 0.01% ludzi. Weźmy prosty klasyfikator, który zawsze zwraca klasę negatywną. Niby jest w oczywisty sposób kompletnie nieprzydatny, ale jednak dla losowej próbki ludzi dostanie *celność* równą 99.99%, bo, rzeczywiście, u większości tej choroby nie będzie.

Potrzebujemy bardziej skomplikowanej metryki, której nie da się tak łatwo oszukać.

# Macierz pomyłek (Confusion Matrix)

Żeby zdefiniować taką metodę oceny klasyfikacji, musimy najpierw rozważyć jakie sytuacje mogą zdarzyć się przy klasyfikacji binarnej. Spójrzmy na tablicę poniżej:

Występują tutaj przypadki:

- *prawdziwie pozytywne* (*true positive*) model zwrócił klasę pozytywną (*positive*), i jest to prawda (*true*)
- *prawdziwie negatwyne* (*true negative*) model zwrócił klasę negatywną (*negative*), i jest to prawda (*true*)
- *fałszywie negatywne* (*false negative*) model zwrócił klasę negatywną (*negative*), ale nie jest to prawda (*false*)

• *fałszywie pozytywne* (*false positive*) - model zwrócił klasę pozytywną (*positive*), ale nie jest to prawda (*false*)

Mając powyższe punkty - możemy zdefiniować *celność* następująco:

$$accuracy = \frac{TP + TN}{TP + TN + FP + FN}$$

czyli ilość przypadków, w których poprawnie zidentykowaliśmy klasę, podzieloną przez ilość wszystkich przypadków.

Precyzja (miara predykcyjna dodatnia) i czułość (*Precision & Recall*)

Jednak jak zauważyliśmy wcześniej, istnieją sytuacje, w których nie jest to właściwe podejście.

Zdecydowanie ciekawszą dla nas metryką może być stwierdzenie jaką część rekordów z klasą pozytywną model poprawnie rozpoznał. Pozwoli to nam powiedzieć, jak czuły jest nasz model na klasę pozytywną. Ta metryka nazywa się czułością (*recall*):

$$recall = \frac{TP}{TP+FN}$$

Jest o ilość przypadków, w których poprawnie rozpoznaliśmy klasę pozytywną, podzielona przez ilość wszystkich przypadków z klasą pozytywną.

Drugą korzystną dla nas metryką będzie stwierdzenie ile z osób, które zakwalifikowaliśmy do klasy pozytywne, rzeczywiście do niej należy. Pozwoli to oszacować, jak często mylimy się oznaczając rekord klasą pozytywną. Ta metryka nazywa się precyzją (*precision*):

$$precision = \frac{TP}{TP + FP}$$

Jest to ilość przypadków, w których poprawnie rozpoznaliśmy klasę pozytywną, podzielona przez ilość wszystkich przypadków, w których zwróciliśmy klasę pozytywną.

Ta metryka może być bardzo pomocna, na przykład, przy klasyfikacji spamu. Gorzej będzie, jeśli wrzucimy ważnego maila do spamu, niż przegapimy jakąś reklamę. Chcemy, aby jeśli coś zostało zaklasyfikowane jako spam, rzeczywiście nim było - chcemy jak najwyższą precyzję.

#### F1 score

Powyższe metryki mają wadę - pojedynczo można je łatwo oszukać:

- Czy chcemy idealną *precyzję*? wystarczy zawsze zwracać klasę negatywną (ważny mail nie trafi do spamu, jeśli żadnego z nich tam nie wrzucimy).
- Czy chcemy idealną *czułość*? zawsze zwracamy klasę pozytywną (na pewno nie pominiemy chorego pacjenta, jeśli każdemu powiemy, że jest chory).

Musimy stosować je w parze. Dla prostoty, często agregujemy je do jednej zagregowanej miary za pomocą średniej harmonicznej. W przypadku liczb z zakresu [0,1] (a z takimi mamy do czynienia), ona ma taką własność, że wartość wynikowa zawsze będzie bliższa mniejszej wartości. I im większa jest między nimi różnica, tym bardziej jest to widoczne. Przykładowo, dla

pary (100%,0%) średnia harmoniczna wynosi 0%. Średnia harmoniczna z **precyzji** i **czułości** nazywana jest **miarą F1** (F1 score):

$$F_1 = \frac{2 \cdot precision \cdot recall}{precision + recall}$$

Ten tutorial ma świetne wizualizację, które w interaktywny sposób prezentują działanie powyższych metryk.

**Uwaga**: indeks dolny w mierze  $F_1$  oznacza, że mamy do czyninia z miarą, która daje taką samą wagę precyzji i czułości, ale w ogólnym przypadku jest to parametr, za pomocą którego możemy promować miarę, która ma dla nas większe znaczenie.

### Zadanie 10 (2.0 punkty)

Trening, tuning i analiza modeli

- Wytrenuj podstawowy model regresji logistycznej z użyciem LogisticRegression. Użyj wag klas (class\_weights="balanced"). Przetestuj model, wypisując pecyzję, czułość oraz miarę F1 w procentach. Uwaga: Scikit-learn domyślnie stosuje tutaj regularyzację L2, więc przekaż penalty="None".
- 2. Dokonaj tuningu modelu z regularyzacją L2 za pomocą LogisticRegressionCV:
  - sprawdź 100 wartości, wystarczy podać liczbę do Cs,
  - użyj 5-krotnej walidacji krzyżowej,
  - wybierz najlepszy model według metryki F1 (parametr scoring),
  - pamietaj o class weights="balanced" i random state=0,
  - użyj n\_jobs=-1 dla przyspieszenia obliczeń (-1 znaczy, że użyjemy wszystkich rdzeni do obliczeń),
  - przetestuj model, wypisując precyzję, czułość i miarę F1 w procentach.
  - uwaga: Scikit-learn stosuje tutaj konwencję, gdzie parametr C to odwrotność siły regularyzacji - im mniejszy, tym silniejsza regularyzacja.
- 3. Dokonaj analogicznego tuningu, ale dla regularyzacji L1. Użyj solwera SAGA. Przetestuj model, wypisując precyzję, czułość i miarę F1 w procentach.
- 4. Dokonaj analizy wytrenowanych modeli:
  - Oblicz miarę F1 na zbiorze treningowym modelu bez żadnej regularyzacji i porównaj go z wynikiem testowym; czy występuje tutaj overfitting?
  - Czy twoim zdaniem tworzenie modeli z regularyzacją ma sens w tym przypadku?

Napisz co, w twojej opinii, jest ważniejsze dla naszego problemu, *precision* czy *recall*? Jak moglibyśmy, nie zmieniając modelu, zmienić ich stosunek?

```
# your_code
from sklearn.linear_model import LogisticRegression,
LogisticRegressionCV
from sklearn.metrics import precision_score, recall_score, f1_score,
make_scorer
from sklearn.model_selection import cross_val_score

def assess_regression_model_2(model, model_name, X_test, y_test):
```

```
y pred = model.predict(X test)
  precision = precision score(y test, y pred) * 100
  recall = recall_score(y_test, y_pred) * 100
  f1 = f1\_score(y\_test, y\_pred) * 100
  print("Regression model: "+model name)
  print(f"Precision: {precision:.2f}%")
  print(f"Recall: {recall:.2f}%")
  print(f"F1 Score: {f1:.2f}%")
def cross validate model(model, f1 scorer):
  cross val scores basic = cross val score(model, X train, y train,
cv=5, scoring=f1 scorer)
 # Calculate the mean and standard deviation of F1 scores
 mean f1 = np.mean(cross val scores basic)
  std f1 = np.std(cross val scores basic)
  print("Cross-Validation for Model:")
  print(f"Mean F1 Score: {mean f1:.2f}")
 print(f"Standard Deviation of F1 Scores: {std f1:.2f}")
# lin reg = LogisticRegression(class weight='balanced',
penalty='none', random state=0)
# lin req.fit(X train, y train)
# assess_regression_model_2(lin_reg, "Logistic_regression", X_test,
y test)
model l2 = LogisticRegressionCV(
    Cs=100, cv=5, scoring='f1', class_weight='balanced',
random state=0, n jobs=-1
model l2.fit(X train, y train)
assess_regression_model_2(model_l2, "L2", X_test, y_test)
f1_scorer = make_scorer(f1 score)
cross validate model(model l2, f1 scorer)
# 3
model l1 = LogisticRegressionCV(
    Cs=100, cv=5, scoring='f1', class_weight='balanced',
random state=0, n jobs=-1, penalty='l1', solver='saga'
model_l1.fit(X_train, y_train)
```

```
assess regression model 2(model l1, "L1", X test, y test)
cross validate model(model l1, f1 scorer)
Regression model: L2
Precision: 26.37%
Recall: 66.87%
F1 Score: 37.82%
Cross-Validation for Model:
Mean F1 Score: 0.39
Standard Deviation of F1 Scores: 0.01
Regression model: L1
Precision: 26.38%
Recall: 66.87%
F1 Score: 37.83%
Cross-Validation for Model:
Mean F1 Score: 0.39
Standard Deviation of F1 Scores: 0.01
# your code
lin reg = LogisticRegression(class weight='balanced', penalty='none',
random state=0)
lin reg.fit(X train, y train)
# assess_regression_model_2(lin_reg, "Logistic_regression", X_test,
y test)
y pred train basic = lin reg.predict(X train)
f1 train basic = f1 score(y train, y pred train basic)
y pred = lin reg.predict(X test)
# Calculate the F1 score on the test set for the basic model
f1 test basic = f1_score(y_test, y_pred)
print("F1 Score on Training Set (Basic Model):
{:.2f}".format(f1 train basic))
print("F1 Score on Test Set (Basic Model):
{:.2f}".format(f1 test basic))
if f1 train basic > f1 test basic:
    print("Overfitting")
else:
    print("no Overfitting")
/usr/local/lib/python3.10/dist-packages/sklearn/linear model/
_logistic.py:1173: FutureWarning: `penalty='none'`has been deprecated
in 1.2 and will be removed in 1.4. To keep the past behaviour, set
`penalty=None`.
 warnings.warn(
```

```
F1 Score on Training Set (Basic Model): 0.39
F1 Score on Test Set (Basic Model): 0.38
Overfitting

/usr/local/lib/python3.10/dist-packages/sklearn/linear_model/
_logistic.py:458: ConvergenceWarning: lbfgs failed to converge
(status=1):
STOP: TOTAL NO. of ITERATIONS REACHED LIMIT.

Increase the number of iterations (max_iter) or scale the data as shown in:
    https://scikit-learn.org/stable/modules/preprocessing.html
Please also refer to the documentation for alternative solver options:
https://scikit-learn.org/stable/modules/linear_model.html#logistic-regression
    n_iter_i = _check_optimize_result(
```

// skomentuj tutaj

### Zadanie 11 (2.0 punkty)

Dodanie cech wielomianowych do regresji logistycznej

- 1. Stwórz nowy pipeline do przetwarzania danych do regresji logistycznej, dodając PolynomialFeatures do zmiennych numerycznych przed standaryzacją. Wygeneruj cechy o stopniu 2, interakcje oraz potęgi, nie generuj interceptu.
- 2. Wytrenuj model regresji logistycznej bez regularyzacji na takim powiększonym zbiorze. Wypisz F1 treningowy oraz testowy w procentach.
- 3. Zdecyduj, czy jest sens tworzyć modele z regularyzacją. Jeżeli tak, to wytrenuj i dokonaj tuningu takich modeli. Jeżeli nie, to uzasadnij czemu.

```
# vour code
from sklearn.preprocessing import StandardScaler, PolynomialFeatures
model l2 = LogisticRegressionCV(
   Cs=100, cv=5, scoring='f1', class_weight='balanced',
random_state=0, n_jobs=-1, penalty='l2'
# pipeline bez regularyzacji
# poly pipe = Pipeline([
     interaction only=True, include bias=False)),
     ('scaler', StandardScaler()),
#
     ('logistic', LogisticRegression(penalty='none', random state=0))
# 1)
# pipeline z regularyzacją
polly pipe = Pipeline([
   ('poly features', PolynomialFeatures(degree=2,
```

```
interaction only=True, include bias=False)),
    ('scaler', StandardScaler()),
    ('logistic', model l2)
])
poly pipe.fit(X train, y train)
y train pred = poly pipe.predict(X train)
y test pred = poly pipe.predict(X test)
f1_train = f1_score(y_train, y_train_pred) * 100
f1 test = f1 score(y test, y test pred) * 100
print("F1 Score on Training Set: {:.2f}%".format(f1_train))
print("F1 Score on Test Set: {:.2f}%".format(f1_test))
NameError
                                          Traceback (most recent call
last)
<ipython-input-93-8de796870d73> in <cell line: 22>()
     20 1)
     21
---> 22 poly pipe.fit(X train, y train)
     24 y train pred = poly pipe.predict(X train)
NameError: name 'poly pipe' is not defined
```

// skomentuj tutaj

Występuje duży overfitting więc trzeba model regularyzować

# Zadanie dodatkowe (3 punkty)

Z formalnego, statystycznego punktu widzenia regresja liniowa czyni szereg założeń (Wikipedia):

- 1. Liniowość relacja w danych może być reprezentowana jako y=Xw.
- 2. Normalność błędów błędy (rezydua) mają rozkład normalny, wycentrowany na zerze.
- Homoskedastyczność (stała wariancja) wariancja błędu nie zależy od wartości docelowych y. Innymi słowy, nasz błąd będzie w przybliżeniu miał podobny "rozrzut" dla małych i dużych wartości y.
- 4. Niezależność błędów błąd i y są niezależne (w sensie statystycznym). Innymi słowy, nie ma między nimi bezpośredniej relacji. Jeżeli nie pracujemy z szeregami czasowymi, to to założenie po prostu jest spełnione.
- 5. Brak współliniowości zmiennych nie ma idealnej korelacji cech.

Testowanie tych własności nie zawsze jest oczywiste, a w szczególności Scikit-learn oferuje tutaj dość mało opcji, bo pochodzą one głównie z tradycyjnej statystyki.

- 1. Liniowość:
- numerycznie: wysoki współczynnik dopasowania modelu  $\mathbb{R}^2$  na zbiorze treningowym, niski bład (RMSE) na zbiorze treningowym oraz testowym
- testem statystycznym: Rainbow test lub Harvey Collier test
- graficznie: możliwe kiedy mamy 1/2 zmienne i da się narysować wykres zmiennej zależnej względem cech
- 1. Normalność błędów:
- graficznie: robimy histogram rezyduów, powinien mieć kształt rozkładu normalnego i być wycentrowany na zerze
- testem statystycznym: Jarque-Bera test, Omnibus normality test
- 1. Homoskedastyczność:
- graficznie: robimy scatter plot rezyduów dla wartości przewidywanych od najmniejszej do największej, nie powinno być na nim żadnych widocznych wzorców czy kształtów; przykład 1, przykład 2
- testem statystycznym: Breusch–Pagan test lub Goldfeld-Quandt test
- 1. Niezależność błędów nie omawiam, bo dotyczy tylko szeregów czasowych.
- 2. Brak współliniowości zmiennych: numerycznie, sprawdzić korelacje zmiennych, lub współczynnik uwarunkowania macierzy X

W ramach zadania wytrenuj model regresji liniowej dla zbioru danych Ames Housing z użyciem biblioteki Statsmodels: OLS docs, OLS, Regression diagnostics. Wytrenuj najpierw model bez regularyzacji, a następnie z regularyzacją L2 oraz L1. Nie przeprowadzaj tuningu, użyj tych wartości siły regularyzacji, które wyznaczyliśmy wcześniej.

Przetestuj założenia za pomocą testów statystycznych: Harvey Collier, Jarque-Bera, Breusch-Pagan. Współliniowość zmiennych zweryfikuj z użyciem współczynnika uwarunkowania. Zastosuj poziom istotności  $\alpha = 0.05$ .

Czy założenia są spełnione w przypadku podstawowego modelu i/lub modeli z regularyzacją? Czy modele regularyzowane w lepszym stopniu spełniają założenia?