Chapitre III : Etude des Quadripoles linéaires

[Feldmann : Théorie des réseaux et syst. linéaires : Coll CNET, ENST, Eyrolles, 1981]

III.A) Définitions de base

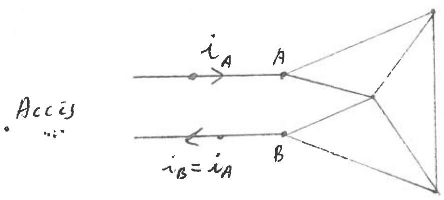
Les lois de Kirchhoff ont été établies au sein de "Réseaux" (KCL & KVL)

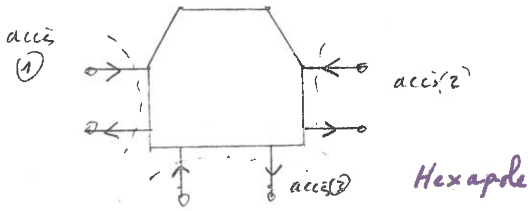
Déf : Réseaux à plusieurs accès (Multi-port Networks)

Accès (port) : On appelle accès une paire de nœuds sur chacun desquels on considère la connection d'un conducteur (branche à Z=0) avec la contrainte* suivante

Le courant entrant par l'une des branches de l'accès est égal au courant sortant par l'autre branche de l'accès (*Feldmann parle de Convention)

Déf : Dans un accès (port) on appelle courant à l'accès le courant entrant par l'une des branches. L'orientation d'un accès revient à choisir le nœud entrant. (A sur la figure)



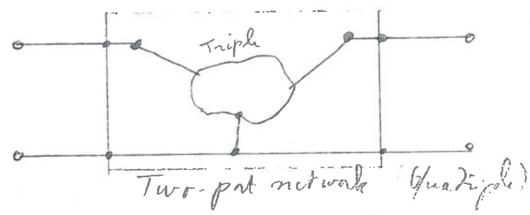


réseau à 1 accès : dipole

2 accès : Quadripole

3 accès : hexapole

4 accès : octopole



Remarque : Il y a équivalence entre un réseau à n accès et un réseau à ~~(n+1)~~ 2n-1 poles : En effet le ~~(n+1)~~ 2n-1 ème nœud peut être disposé au potentiel de référence et chacun des autres nœuds est vu comme un accès, rapport au nœud de référence : Ex Triple → (Two-port) Network

(n+1) pôles ⇒ n accès
2 accès
2n-1 = 3 pôles
2 accès

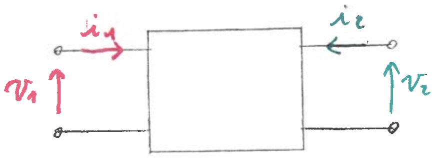
III.B] Spécifications propres aux quadripoles Q

Déf : le Q comporte 2 accès pour échanger des charges avec l'extérieur.

L'entrée est l'accès auquel on applique un signal

La sortie transmet "une réponse" vers l'extérieur

Convention : Comme en Thermodynamique (grandeurs extensives) On compte positifs les courants entrant



III.B.1] Paramètres des quadripôles linéaires : généralités

Déf : On appelle λ les fonctions des éléments du Q permettant d'expliquer les relations entre grandeurs d'entrée et grandeurs de sortie

On peut distinguer 6 groupes de paramètres

λ chaîne (Transfert) et λ chaîne inverse Matrice Caractéristique $\mathcal{T}$

λZ impédance et λY les admittances

λh hybrides et λg hybrides inverses

La tension d'entrée pour obtenir une unité de courant en sortie en court circuit : $\left(\frac{V_1}{I_2}\right)_{V_2=0}$ Égale

La tension de sortie pour obtenir une unité de courant en entrée en court circuit : $\left(\frac{V_2}{I_1}\right)_{V_1=0}$

III.B.2) Les paramètres de chaîne : Transmission parameters $\mathcal{T}$

a) $\mathcal{T}$: (Input) = $[\mathcal{T}]$ (Output) $\mathcal{T}$ matrice de transfert

Les λ chaîne vérifient les relations linéaires $v_1 = A \cdot v_2 - B \cdot i_2$

$i_1 = C \cdot v_2 - D \cdot i_2$

soit
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{pmatrix}$$

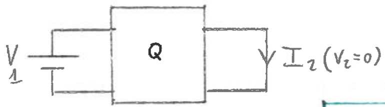
① **Remarque :** pour un quadripôle passif le déterminant $AD - BC$ est unitaire

On le montre en reformulant le théorème de réciprocité

Si V_1 volts en entrée ⇒ I_2 Ampères en sortie $\left(\frac{V_1}{I_2}\right)_{V_2=0}$ est la tension d'entrée pour 1 A en "sortie court circuitée"

Th de Maxwell ⇒ équivalence avec

la tension de sortie pour 1 A en "entrée court circuitée" $\left(\frac{V_2}{I_1}\right)_{V_1=0}$



$$\boxed{\left(\frac{V_1}{I_2}\right)_{V_2=0} = \left(\frac{V_2}{I_1}\right)_{V_1=0}}$$
Th. de réciprocité pour un quadripôle

$v_1 = A v_2 - B i_2$ ①

$i_1 = C v_2 - D i_2$ ②

① ⇒ $\left(\frac{V_1}{I_2}\right)_{V_2=0} = -B$

$\left(\frac{V_2}{I_1}\right)_{V_1=0}$ ① pour $V_1 = 0$ ⇒ $A v_2 = B i_2$ et $i_2 = \frac{A}{B} v_2$

② $v_2 = \frac{i_1 + D i_2}{C} = \frac{i_1}{C} + \frac{D}{C} \cdot \frac{A}{B} v_2$

$v_2\left(1 - \frac{AD}{BC}\right) = \frac{i_1}{C}$ ⇒ $\frac{v_2}{i_1} = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{1 - \frac{AD}{BC}} = \frac{1}{C - \frac{AD}{B}}$

Soit $-B = \frac{1}{C - \frac{AD}{B}}$ ⇔ $-BC + AD = 1$

$$\boxed{AD - BC = 1}$$

Déterminant unitaire de la matrice de chaîne

② **Remarque :** pour des raisons pratiques on préfèrera souvent occulter la convention de signe en écrivant $i_s = -i_2$: ne pas traîner des signes ⊖ dans un calcul ...

$v_s = v_2$

b) paramètres de chaîne inverse : Matrice caractéristique $\mathcal{T}$

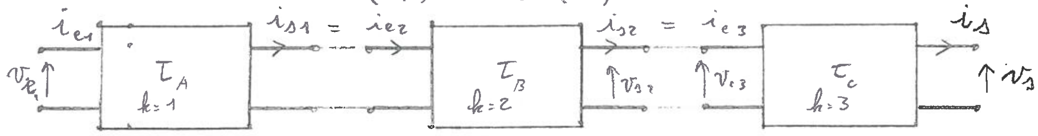
$$\begin{pmatrix} v_s \\ i_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_e \\ i_e \end{pmatrix} \qquad \mathcal{T} = \mathcal{T}^{-1} = \frac{1}{AD - BC} \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix}$$

(Output) = $[\mathcal{T}]$ (Input)

La matrice caractéristique est très utile en pratique car elle permet de formuler le comportement cascade de systèmes

En effet soient T_A T_B T_C les matrices caractéristiques de 3 quadripôles cascadés

$$(\mathcal{O}_k) = [T_k]\cdot(\mathcal{I}_k)$$



$$\begin{pmatrix} v_{s1}\\ i_{s1}\end{pmatrix} = T_A\begin{pmatrix} v_{e1}\\ i_{e1}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} v_{s2}\\ i_{s2}\end{pmatrix} = T_B\begin{pmatrix} v_{e2}\\ i_{e2}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} v_{s3}\\ i_{s3}\end{pmatrix} = T_C\begin{pmatrix} v_{e3}\\ i_{e3}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_s\\ i_s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{s3}\\ i_{s3}\end{pmatrix} = T_C\begin{pmatrix} v_{e3}\\ i_{e3}\end{pmatrix} = T_C\begin{pmatrix} v_{s2}\\ i_{s2}\end{pmatrix} = T_C\cdot T_B\begin{pmatrix} v_{e2}\\ i_{e2}\end{pmatrix} = T_C\cdot T_B\begin{pmatrix} v_{s1}\\ i_{s1}\end{pmatrix} = T_C\, T_B\cdot T_A\begin{pmatrix} v_e\\ i_e\end{pmatrix}$$

La relation Output - Input d'un ensemble de n quadripôles cascadés a pour matrice caractéristique

$$\boxed{T = \prod_{k=1}^{k=n}\left(T_{n+1-k}\right)}$$

Ex: si $n=3$ $\quad (T_{3+1-1})(T_{3+1-2})(T_{3+1-3}) = T_3\cdot T_2\cdot T_1 \qquad (\mathcal{O}) = [T]\cdot(\mathcal{I})$

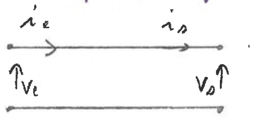
⚠ En général les produits ne sont pas commutatifs

Réciproquement: On a $T' = (T)^{-1} = T_1\cdot T_2\cdot T_3 \qquad (\text{Input}) = [T_1\cdot T_2\cdot T_3](\text{Output})$ | cascade des matrices de chaîne

c) Exemples pour des quadripôles simples

Matrice chaîne

liaison directe T_D

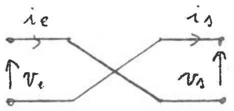


$v_e = 1\cdot v_s + 0\cdot i_s$

$i_e = 0\cdot v_s + 1\cdot i_s$

$$\begin{pmatrix} v_e\\ i_e\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{T_D}\cdot\begin{pmatrix} v_s\\ i_s\end{pmatrix}$$

liaison inverse T_i

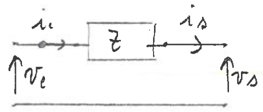


$v_e = -v_s + 0\cdot i_s$

$i_e = 0\cdot v_s - 1\cdot i_s$

$$\begin{pmatrix} v_e\\ i_e\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}_{T_i}\cdot\begin{pmatrix} v_s\\ i_s\end{pmatrix}$$

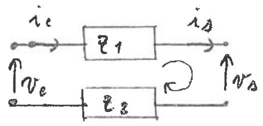
liaison par impédance T_z



$$\left.\begin{aligned} v_e &= z\cdot i_e + v_s\\ i_e &= i_s\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} v_e &= v_s + z\cdot i_s\\ i_e &= 0\cdot v_s + i_s\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} v_e\\ i_e\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & z\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{T_z}\cdot\begin{pmatrix} v_s\\ i_s\end{pmatrix}$$

Liais. par 2 imp. série T'_z

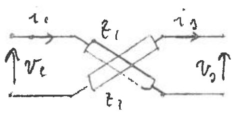


$v_e = z_1\cdot i_e + v_s + z_2\cdot i_s$

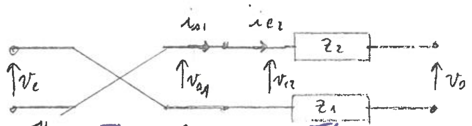
$i_e = i_s$

$$\begin{pmatrix} v_e\\ i_e\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & z_1+z_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{T'_z}\begin{pmatrix} v_s\\ i_s\end{pmatrix}$$

L. par 2 Z croisés T''_z



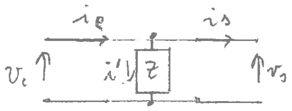
=



$\mathcal{I}$ $\quad T_i$ $\quad \mathcal{O}_1$ $\quad \mathcal{I}_2$ $\quad T'_z$ $\quad \mathcal{O}$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &= T'_z\cdot\mathcal{O}\\ \mathcal{I} &= T_i\cdot\mathcal{O}_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_1 = \mathcal{I}_2\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \mathcal{I} &= [T_i]\cdot\mathcal{I}_2 = [T_i][T'_z]\cdot\mathcal{O}\\ \mathcal{I} &= T''_z\cdot\mathcal{O}\end{aligned}\right\} \quad T''_z = \begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & z_1+z_2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -(z_1+z_2)\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Liaison par Z shunt T_{sh}



$v_e = v_s + 0 \cdot i_s$

$i_e = i' + i_s = \dfrac{v_s}{Z} + i_s$

$$\begin{pmatrix} v_e \\ i_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_s \\ i_s \end{pmatrix}$$

vision de la matrice caractéristique τ (inverse de chaîne)

- les éq ci-dessus $\Rightarrow$ $v_s = v_e$, $i_s = i_e - \dfrac{v_s}{Z}$ $\Bigg\}$ $\begin{pmatrix} v_s \\ i_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{Z} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_e \\ i_e \end{pmatrix}$

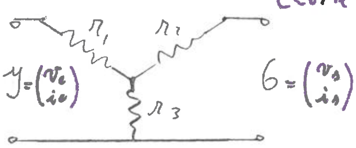
  ou l'inversion $\tau = (T)^{-1}$

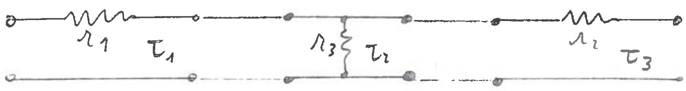
  soit : $\dfrac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}$ aussi $\Delta = 1$

Cellule en "T" : recherche de la relation $(Out) = [\tau] \cdot (\mathcal{Y})$

Etoile

Il s'agit de déterminer la matrice caractéristique





$\tau_1 = [T_1]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & r_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -r_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

As seen before : $\tau = \tau_3 \cdot \tau_2 \cdot \tau_1$ $\Bigg\}$ $\tau = \begin{pmatrix} 1 & -r_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/r_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -r_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\tau_3) \quad (\tau_2) \quad (\tau_1)$

$[\tau_3][\tau_2] = \begin{bmatrix} 1+\frac{r_2}{r_3} & -r_2 \\ -\frac{1}{r_3} & 1 \end{bmatrix}$

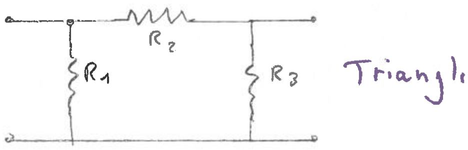
$\tau_3 \cdot \tau_2 \cdot \tau_1 = \begin{bmatrix} 1+\frac{r_2}{r_3} & -r_2 \\ -1/r_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -r_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\frac{r_2}{r_3} & -r_1 - r_2 - \frac{r_1 r_2}{r_3} \\ -1/r_3 & 1 + r_1/r_3 \end{bmatrix} = \tau_T$

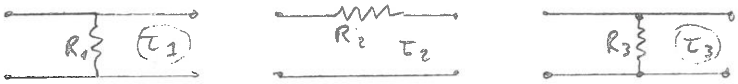
(a, b, c, d)

Cellule en π : recherche de la relation $(Out) = [\tau_\pi] \cdot (\mathcal{Y}_n)$

Triangle

La matrice caractéristique $\tau = \tau_3 \cdot \tau_2 \cdot \tau_1$





$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/R_1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & -R_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/R_3 & 1 \end{pmatrix}$

$[\tau_3] \cdot [\tau_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/R_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -R_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -R_2 + 0 \\ -1/R_3 & +\frac{R_2}{R_3} + 1 \end{bmatrix}$ soit $\ast\, \tau_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/R_1 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\tau_\pi = \begin{bmatrix} 1 + \frac{R_2}{R_1} & -R_2 \\ -\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_1} - \frac{R_2}{R_1 R_3} & 1 + \frac{R_2}{R_3} \end{bmatrix}$

(a', b', c', d')

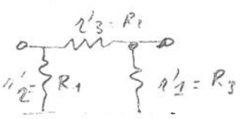
Remarques :
- D'une manière générale on considère des impédances pas seulement des résistances pour l'étude des structures de filtres en T ou en π
- Le déterminant des matrices précédentes reste unitaire

  Objet "Z" vu comme T_{sh} de la liaison shunt

- Passage Triangle $\to$ étoile (Th de Kennedy) si par ex on égale c et c'

$\dfrac{1}{r_3} = \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{R_2}{R_1 R_3}$ $\Rightarrow$ $r_3\,(\text{étoile}) = \dfrac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{R_1 R_3}} = \dfrac{R_1 R_3}{R_1 + R_3 + R_2}$

et si noté



$r_3 = \dfrac{r'_1 r'_2}{r'_1 + r'_2 + r'_3}$ et par permutation circulaire

$r_2 = \dfrac{r'_1 r'_3}{r'_1 + r'_2 + r'_3}$

$r_1 = \dfrac{r'_2 \cdot r'_3}{r'_1 + r'_2 + r'_3}$

fin du cours n° 7
je peux donner Kennedy en sujet

matrix_1.cdr

ENSIM

Two-ports networks fundamentals

Transmission **T**

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

T^{-1} is the characteristic matrix

Impedance **Z**

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Z^{-1} is the admittance matrix

Admittance **Y**

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Y^{-1} is the impedance matrix

Hybrid h parameters **h**

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

h^{-1} is the inverse hybryd matrix G

matrix_3.cdr

ENSIM

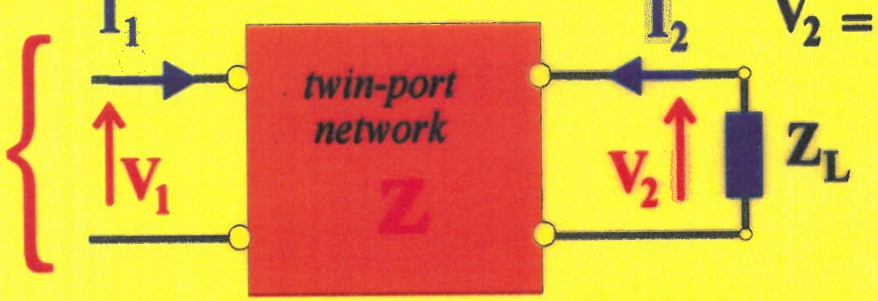
Two-ports networks input & output impedances

si $Z_{11} = Z_{22}$ le Q est physiquement symétrique $\Leftrightarrow$ invariance par permutation des accès

Input measurement considering an output load impedance Z_L

measurement

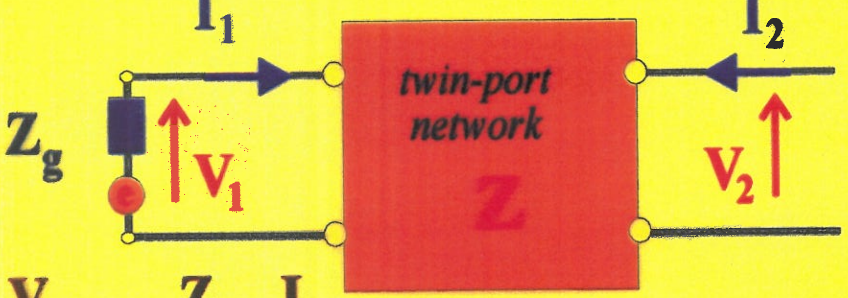
$$Z_e = \frac{V_1}{I_1}$$



$$V_2 = -\,Z_L \cdot I_2$$

$$Z_e = Z_{11} - \frac{Z_{12} \cdot Z_{21}}{Z_{22} + Z_L}$$

Output measurement considering a generator featuring a given impedance Z_g



$$V_{11} = -\,Z_g \cdot I_1$$

measurement

$$Z_s = \left[\frac{\partial V_2}{\partial I_2}\right]_{e=0}$$

$$Z_s = Z_{22} - \frac{Z_{12} \cdot Z_{21}}{Z_{11} + Z_g}$$

⚠ La grandeur Impédance est parmi les autres paramètres la grandeur la plus utilisée en électronique

III · B · 3] Paramètres impédances d'un quadripôle et paramètres admittance

Les observables d'un Q (2 port Network) sont au nombre de 4 (v_1, i_1, v_2, i_2)

chaque observable peut être exprimée en fonction de 2 des 3 autres

a) Expressions — Si on choisit d'exprimer $v_1 = f(i_1, i_2)$ et $v_2 = f(i_1, i_2)$ les paramètres de liaison seront des impédances : Soit

$v_1 = z_{11} i_1 + z_{12} i_2$ ①

$v_2 = z_{21} i_1 + z_{22} i_2$ ②

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad (V) = [Z] \cdot (I)$$

Le Théorème de réciprocité montre que :

La tension d'entrée pour obtenir 1 unité de courant en "sortie court circuitée" $\left(\frac{V_1}{I_2}\right)_{V_2=0}$ égale

la tension de sortie pour obtenir 1 unité de courant en "entrée court circuitée" $\left(\frac{V_2}{I_1}\right)_{V_1=0}$

Il en découle une relation de contrainte sur les paramètres impédances, de la même manière qu'on avait déduit le caractère unitaire du déterminant des matrices chaîne et caractéristique

Soit : $\left(\frac{V_1}{I_2}\right)_{V_2=0}$

$$\left(\frac{v_1}{i_2}\right)_{v_2=0} = z_{11} \cdot \left(\frac{i_1}{i_2}\right)_{v_2=0} + z_{12} \qquad \text{avec selon ② si } v_2 = 0 \quad \frac{i_1}{i_2} = \frac{-z_{22}}{z_{21}}$$

$$= z_{11} \cdot \frac{-z_{22}}{z_{21}} + z_{12} = \frac{1}{z_{21}} \cdot \left(z_{12} \cdot z_{21} - z_{11} z_{22}\right)$$

D'autre part

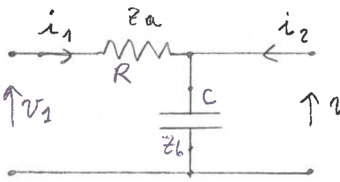
$\left(\frac{V_2}{I_1}\right)_{V_1=0}$

$$\left(\frac{v_2}{i_1}\right)_{v_1=0} = z_{21} + z_{22} \cdot \left(\frac{i_2}{i_1}\right)_{v_1=0} \qquad \text{avec selon ① si } v_1 = 0 \quad \frac{i_2}{i_1} = \frac{-z_{11}}{z_{12}}$$

$$= z_{21} - z_{22} \cdot \frac{z_{11}}{z_{12}} = \frac{1}{z_{12}} \cdot \left(z_{12} \cdot z_{21} - z_{11} z_{22}\right)$$

Il découle du Th de réciprocité : $\boxed{z_{21} = z_{12}}$ La matrice impédance est symétrique

Exemple d'expression : Quadripôle cellule passe bas RC



(α) $v_1 = z_a \cdot i_1 + z_b \cdot (i_1 + i_2) = R \cdot i_1 + \frac{1}{jC\omega}(i_1 + i_2)$

$v_2 = z_b \cdot (i_1 + i_2) = \frac{1}{jC\omega}(i_1 + i_2)$

$$\text{Soit } Z = \begin{bmatrix} R + \frac{1}{jC\omega} & 1/jC\omega \\ 1/jC\omega & 1/jC\omega \end{bmatrix}$$

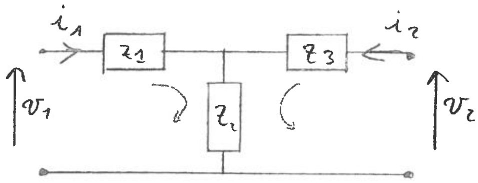
(β) On peut aussi écrire à partir du sens physique

$$z_{11} = \left(\frac{v_1}{i_1}\right)_{i_2=0} = z_a + z_b = R + \frac{1}{jC\omega} \qquad z_{22} = \left(\frac{v_2}{i_2}\right)_{i_1=0} = z_b = \frac{1}{jC\omega} \qquad z_{12} = z_{21} = \left(\frac{v_2}{i_1}\right)_{i_2=0} = z_b \cdot \frac{i_1}{i_1} = \frac{1}{jC\omega}$$

cette seconde manière présente l'avantage d'être applicable en l'absence de connaissance de la structure interne du quadripôle. Dans l'exemple z_{11} impédance d'entrée sortie Q ouverte

c'est une Description en terme de mesures (accessible à la mesure)

Autre exemple d'expression : cellule en T (Triangle)



(2) On peut écrire directement (convention i_2 entrant)

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= Z_1 \cdot i_1 + Z_2 (i_1 + i_2) \\ v_2 &= Z_3 \cdot i_2 + Z_2 (i_1 + i_2) \end{aligned}\right\} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

Si $Z_1 = Z_3$ le quadripôle est physiquement symétrique $Z_{11} = Z_{22}$

(3) ou selon le sens physique des définitions (méthode plus pertinente)

$$v_1 = Z_{11} \cdot i_1 + Z_{12} \cdot i_2$$
$$v_2 = Z_{21}\, i_1 + Z_{22} \cdot i_2$$

$Z_{11} = \left(\dfrac{v_1}{i_1}\right)_{i_2 = 0} = Z_1 + Z_2$ sortie open

$Z_{22} = \left(\dfrac{v_2}{i_2}\right)_{i_1 = 0} = Z_3 + Z_2$ entrée ouverte

$$Z_{12} = Z_{21} = \left(\frac{v_2}{i_1}\right)_{i_2 = 0} = \frac{Z_2 \cdot i_1}{i_1} = Z_2$$

Remarque sur les conventions :

Certains auteurs considèrent la relation v_e, v_s, i_e, i_s avec $\begin{pmatrix} v_e \\ v_s \end{pmatrix} = [\mathcal{Z}] \begin{pmatrix} i_e \\ i_s \end{pmatrix}$

sachant que $i_2 = -i_s$ $\quad \mathcal{Z} = \begin{pmatrix} \mathcal{Z}_{11} & \mathcal{Z}_{12} \\ \mathcal{Z}_{21} & \mathcal{Z}_{22} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & -Z_{12} \\ Z_{21} & -Z_{22} \end{bmatrix}$ (Antisymétrie de la matrice)

b) Les paramètres admittances

On exprime les courants fonction des tensions $\quad (I) = [Y] \cdot (V)$

$$i_1 = Y_{11} \cdot v_1 + Y_{12} \cdot v_2$$
$$i_2 = Y_{21} \cdot v_1 + Y_{22} \cdot v_2$$

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$i_1 = Y_{11}\, v_1 + Y_{12}\, v_2$ (1)

$i_2 = Y_{21}\, v_1 + Y_{22}\, v_2$ (2)

Th de Réciprocité $\left(\dfrac{V_1}{I_2}\right)_{v_2=0} = \left(\dfrac{V_2}{I_1}\right)_{v_1=0}$

$\left(\dfrac{v_1}{i_2}\right)_{v_2=0}$ avec (2) $\dfrac{1}{Y_{21}}$ $\qquad \left(\dfrac{V_2}{I_1}\right)_{v_1=0}$ avec (1) $= \dfrac{1}{Y_{12}}$

Soit $Y_{21} = Y_{12}$

Le Théorème de réciprocité entraîne la symétrie de la matrice $\quad Y_{12} = Y_{21}$

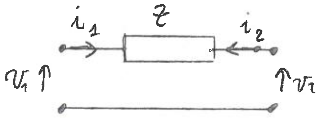
La matrice admittance est l'inverse de la matrice impédance

$$[Y] = \begin{bmatrix} \dfrac{Z_{22}}{\Delta Z} & -\dfrac{Z_{12}}{\Delta Z} \\ -\dfrac{Z_{21}}{\Delta Z} & \dfrac{Z_{11}}{\Delta Z} \end{bmatrix}$$

avec $\Delta Z = Z_{11} \cdot Z_{22} - Z_{12} \cdot Z_{21}$ déterminant de $[Z]$

à Dimontrer (contrôle final ?)

Exemple d'écriture : liaison impédance série



$$\left.\begin{aligned} v_1 &= v_2 + Z \cdot i_1 \\ i_2 &= -i_1 \end{aligned}\right\}$$

On cherche une forme $\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = (Y) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$i_1 = \frac{v_1 - v_2}{Z} = \frac{1}{Z} v_1 - \frac{1}{Z} v_2$$
$$i_2 = -i_1 = -\frac{1}{Z} v_1 + \frac{1}{Z} v_2$$

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/Z & -1/Z \\ -1/Z & 1/Z \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

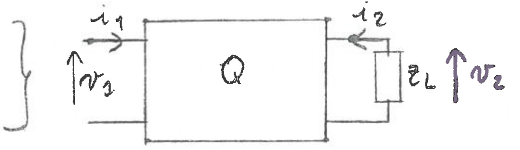
c) Impédances d'entrée et de sortie des quadripôles

c.1) Impédance d'entrée d'un quadripôle

Z_e est l'impédance présentée à l'entrée du quadripôle en charge sur une impédance Z_L

Mesure de Z_e

$Z_e = \frac{v_1}{i_1}$



$i_s = -i_2$

$v_2 = Z_L \cdot i_s = -Z_L \cdot i_2$

Soit à définir $Z_e = \frac{v_1}{i_1}$

$v_1 = Z_{11} \cdot i_1 + Z_{12} \cdot i_2$ ①

$v_2 = Z_{21} \cdot i_1 + Z_{22} \cdot i_2$ ②

Soit $Z_e = Z_{11} + Z_{12} \cdot \left(\frac{i_2}{i_1}\right)$

avec ② et $v_2 = -Z_L \cdot i_2 = Z_{21} \cdot i_1 + Z_{22} \cdot i_2$

$i_2(-Z_L - Z_{22}) = Z_{21} \cdot i_1$

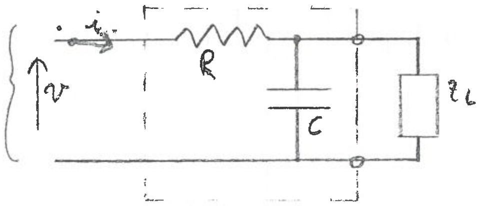
$\Rightarrow \frac{i_2}{i_1} = \frac{-Z_{21}}{Z_L + Z_{22}}$

$$\boxed{Z_e = Z_{11} - \frac{Z_{12} \cdot Z_{21}}{Z_L + Z_{22}}} \quad ③$$

Expression générale de l'impédance d'entrée d'un quadripôle

Vérification de la relation sur un exemple : filtre RC avec une charge Z_L

Z_e



On a directement

$Z_e = R + Z_C // Z_L = R + \frac{\frac{1}{jC\omega} \cdot Z_L}{\frac{1}{jC\omega} + Z_L} = R + \frac{Z_L}{1 + jC\omega Z_L}$

On doit vérifier avec le filtre RC : cf § III.B.3.a.α

$Z_{11} = R + \frac{1}{jC\omega}$ $\quad Z_{12} = Z_{21} = \frac{1}{jC\omega}$ $\quad Z_{22} = \frac{1}{jC\omega}$

Relation $Z_e \Rightarrow$ ③

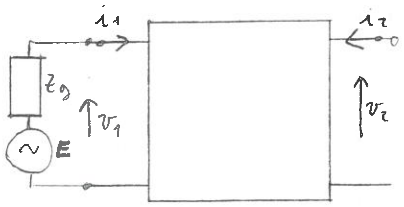
$$Z_e = R + \frac{1}{jC\omega} - \frac{-\frac{1}{C^2\omega^2}}{Z_L + \frac{1}{jC\omega}} = R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{1/C^2\omega^2}{Z_L + 1/jC\omega} = R + \frac{Z_L + \cancel{\frac{1}{jC\omega}} + \cancel{\frac{jC\omega}{C^2\omega^2}}}{1 + jC\omega Z_L}$$

$-\frac{1}{jC\omega}$

On retrouve bien l'expression directe

c.2) Impédance de sortie d'un quadripôle

Z_s est l'impédance présentée par le générateur équivalent (Thévenin ou Norton) à la sortie du quadripôle lorsque ce dernier est sollicité par un générateur d'impédance Z_g



$Z_s = \frac{\partial V_2}{\partial I_2} = \left[\frac{V_2}{I_2}\right]_{E=0}$ (vision de sources annulées au sens du th. de Thévenin)

soit selon 2 $\quad Z_s = Z_{22} + Z_{21} \frac{i_1}{i_2}$

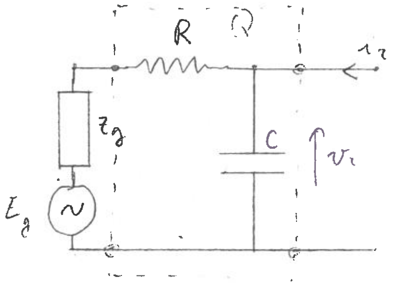
soit à définir $\frac{i_1}{i_2}$ selon 1 avec $v_1 = -Z_g \cdot i_1$

① $\Rightarrow -Z_g \cdot i_1 = Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2 \Rightarrow \frac{i_1}{i_2} = \frac{-Z_{12}}{Z_{11} + Z_g}$

$$\boxed{Z_s = Z_{22} - \frac{Z_{21} \cdot Z_{12}}{Z_{11} + Z_g}} \quad ④$$

Expression générale de l'impédance de sortie d'un quadripôle

Vérification de la relation sur un exemple : filtre RC sollicité par un géné d'impédance Z_g



○ Calcul direct

$$Z_s = (R+Z_g) /\!/ (Z_{capa})$$

$$= \frac{(R+Z_g)/jC\omega}{(R+Z_g)+\frac{1}{jC\omega}} \Rightarrow Z_s = \frac{R+Z_g}{1+(R+Z_g)jC\omega}$$

○ Application de la relation générale

avec pour la cellule RC $\quad Z_{11} = R + \frac{1}{jC\omega} \quad Z_{12} = Z_{21} = \frac{1}{jC\omega} \quad Z_{22} = \frac{1}{jC\omega}$

Soit (4) $\Rightarrow Z_s = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_g + Z_{11}}$

$$\text{soit } Z_s = \frac{1}{jC\omega} - \frac{-\frac{1}{C^2\omega^2}}{(Z_g+R)+\frac{1}{jC\omega}} = \frac{Z_g + R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{jC\omega}{C^2\omega^2}}{1+(Z_g+R)jC\omega} = \frac{(Z_g+R) + \frac{1}{jC\omega} - \frac{1}{jC\omega}}{1+(R+Z_g)jC\omega} \quad (\Diamond)$$

c3) Impédances particulières d'entrée et de sortie des quadripôles passifs

Nous avons montré, de manière générale : $\boxed{Z_e = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}+Z_L}}$ à l'entrée d'un Q refermé sur Z_L

Avec $\quad v_1 = Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2$

$\quad v_2 = Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2$

$\boxed{Z_s = Z_{22} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{11}+Z_g}}$ en sortie d'un Q sollicité avec Z_g

On distingue en pratique

c31) $Z_{e\infty}$

impédance d'entrée à sortie ouverte ($Z_L \infty$)

$$Z_{e\infty} = \left(\frac{v_1}{i_1}\right)_{i_2=0} = Z_{11}$$

c32) Z_{e0}

impédance d'entrée à sortie en court circuit ($Z_L = 0$)

$$Z_{e0} = \left(\frac{v_1}{i_1}\right)_{v_2=0} = (\text{relation générale}) \Rightarrow Z_{e0} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}}$$

c33) $Z_{s\infty}$

impédance de sortie, entrée à $Z_g \infty$ (= sollicité en courant)

$$Z_{s\infty} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial i_2}\right)_{\delta i_1=0} \overset{\text{relation générale}}{=} Z_{22}$$

c34) Z_{s0}

impédance de sortie, entrée en court circuit $Z_g = 0$ (sollicité en tension)

$$Z_{s0} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial i_2}\right)_{\delta v_1=0} = (\text{relation générale}) \Rightarrow Z_{s0} = Z_{22} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{11}}$$

c.3.5) Z_{im} : Impédances images : Z_{im_1} en entrée Z_{im_2} en sortie (Uniquement Quadripôles passifs)

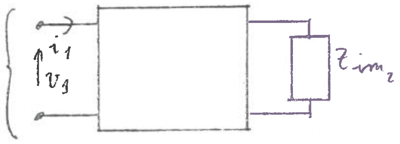
Les impédances images sont définies par le couple Z_{im_1} et Z_{im_2} telles que :

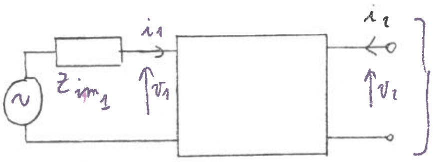
- Si Q est chargé par Z_{im_2} en sortie, son impédance d'entrée est Z_{im_1}
- Si Q est sollicité sous impédance Z_{im_1}, son impédance de sortie est Z_{im_2}

Trc

Soient les schémas des deux situations de définition des impédances images

Je mesure Z_{im_1} en cette entrée





Je mesure Z_{im_2} au niveau de cette sortie

Avec de manière générale : $Z_e = Z_{11} - \dfrac{Z_{12}^2}{Z_{22}+Z_L}$

Déf :

① $Z_{im_1} = Z_{11} - \dfrac{Z_{12}^2}{Z_{22}+Z_{im_2}}$

$$Z_{im_1} = \sqrt{Z_{e0} \cdot Z_{e\infty}}$$

avec $Z_{e0} = Z_{11} - \dfrac{Z_{12}^2}{Z_{22}}$

$Z_{e\infty} = Z_{11}$

$$Z_{im_1} = \sqrt{Z_{11} \cdot \left(Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}}\right)}$$

Avec de manière générale $Z_s = Z_{22} - \dfrac{Z_{12}^2}{Z_{11}+Z_g}$

Déf :

② $Z_{im_2} = Z_{22} - \dfrac{Z_{12}^2}{Z_{11}+Z_{im_1}}$

Ces définitions et les définitions précédents conduisent encore à exprimer :

$$Z_{im_2} = \sqrt{Z_{s0} \cdot Z_{s\infty}}$$

avec $Z_{s0} = Z_{22} - \dfrac{Z_{12}^2}{Z_{11}}$

$Z_{s\infty} = Z_{22}$

soit à montrer que :

$$Z_{im_2} = \sqrt{Z_{22}\left(Z_{22} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{11}}\right)}$$

Démonstration (pour Z_{im_1}) : On recherche d'abord la relation de contrainte liée aux égalités ① et ② simultanées

$$\left.\begin{aligned} ① &\Rightarrow Z_{im_1} Z_{22} + Z_{im_1} Z_{im_2} = Z_{11} \cdot Z_{22} + Z_{im_2} Z_{11} - Z_{12}^2 \\ ② &\Rightarrow Z_{im_2} Z_{11} + Z_{im_2} Z_{im_1} = Z_{11} \cdot Z_{22} + Z_{im_1} Z_{22} - Z_{12}^2 \end{aligned}\right\} \Delta$$

$$Z_{im_1} Z_{22} - Z_{im_2} Z_{11} = Z_{im_2} Z_{11} - Z_{im_1} Z_{22} \Rightarrow 2 \cdot Z_{im_1} Z_{22} = 2 \cdot Z_{im_2} \cdot Z_{11}$$

Soit : $\boxed{Z_{im_1} \cdot Z_{22} = Z_{im_2} \cdot Z_{11}}$ ③ relation entre impédances images

→ D'où pour Z_{im_1} : ③ dans ① $\Rightarrow$ $Z_{im_1} = Z_{11} - \dfrac{Z_{12}^2}{Z_{22} + Z_{im_1}\dfrac{Z_{22}}{Z_{11}}}$ $\Rightarrow$ $\cancel{Z_{im_1} \cdot Z_{22}} + Z_{im_1}^2 \cdot \dfrac{Z_{22}}{Z_{11}} = Z_{11} \cdot Z_{22} + \cancel{Z_{im_1} \cdot Z_{22}} - Z_{12}^2$

Soit $Z_{im_1}^2 = Z_{11}^2 - \dfrac{Z_{11} \cdot Z_{12}^2}{Z_{22}}$ $\Rightarrow$ $Z_{im_1} = \sqrt{Z_{11} \cdot \left(Z_{11} - \dfrac{Z_{12}^2}{Z_{22}}\right)} = \sqrt{Z_{e\infty} \cdot Z_{e0}}$

→ Même démonstration pour établir $Z_{im_2} = \sqrt{Z_{s\infty} \cdot Z_{s0}}$

③ dans ② $\Rightarrow$ $Z_{im_2} = Z_{22} - \dfrac{Z_{12}^2}{Z_{11} + Z_{im_2}\dfrac{Z_{11}}{Z_{22}}}$ $\Rightarrow$ $\cancel{Z_{im_2} Z_{11}} + Z_{im_2}^2 \cdot \dfrac{Z_{11}}{Z_{22}} = Z_{11} Z_{22} + \cancel{Z_{im_2} Z_{11}} - Z_{12}^2$

Soit $Z_{im_2}^2 = Z_{22}^2 - \dfrac{Z_{22} \cdot Z_{12}^2}{Z_{11}}$ $\Rightarrow$ $Z_{im_2} = \sqrt{Z_{22}\left(Z_{22} - \dfrac{Z_{12}^2}{Z_{11}}\right)} = \sqrt{Z_{s\infty} \cdot Z_{s0}}$

impédance de transparence du quadripôle

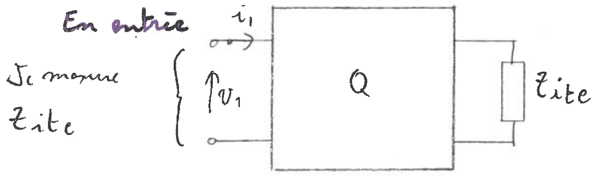
c.3.6) Impédances itératives d'entrée et de sortie des quadripôles

Déf : En entrée : c'est la valeur Z_{ite} de la charge qui connectée en sortie de Q définit la même valeur Z_{ite} mesurée en entrée

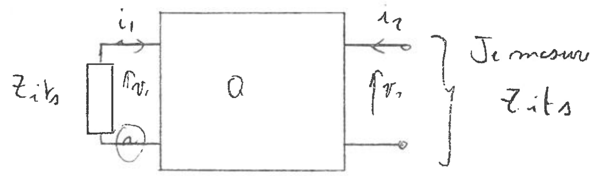
En sortie : c'est la valeur Z_{its} de la charge qui connectée en entrée de Q définit la même valeur Z_{its} mesurable en sortie

Illustration :

En entrée



En sortie



De manière générale en entrée

$$Z_e = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22} + Z_L}$$

Soit en particulier,

$$Z_{ite} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22} + Z_{ite}}$$

De manière générale en sortie

$$Z_s = Z_{22} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{11} + Z_g}$$

Soit en particulier,

$$Z_{its} = Z_{22} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{11} + Z_{its}}$$

$$Z_{ite} \cdot Z_{22} + Z_{ite}^2 = Z_{11} Z_{22} + Z_{11} \cdot Z_{ite} - Z_{12}^2 \qquad Z_{its} \cdot Z_{11} + Z_{its}^2 = Z_{11} Z_{22} + Z_{22} Z_{its} - Z_{12}^2$$

En l'état, il n'y a rien de spécifique sauf à regrouper ... et résoudre

$$Z_{ite}^2 + Z_{ite}(Z_{22} - Z_{11}) + (Z_{12}^2 - Z_{11} Z_{22}) = 0 \qquad Z_{its}^2 + Z_{its}(Z_{11} - Z_{22}) + (Z_{12}^2 - Z_{11} Z_{22}) = 0$$

Cependant il importe de considérer le cas particulier des quadripôles physiquement symétriques

Un géné disposé à G ou à Dr du Q voit le même comportement (invariance par permutation Entrée Sortie)

Ainsi $Z_{11} = Z_{22}$ pour les Q symétriques physiquement. Soit

$Z_{e0} = Z_{s0}$ $\quad Z_{e\infty} = Z_{s\infty}$

$$Z_{ite} = Z_{its} = \sqrt{Z_{11}^2 - Z_{12}^2} = \sqrt{Z_{11} \cdot \left(Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{11}}\right)} = \sqrt{Z_{22} \cdot \left(Z_{22} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}}\right)}$$

(cf p28) $\quad Z_{ite} = Z_{its} = \sqrt{Z_{e\infty} \cdot Z_{e0}} = \sqrt{Z_{s\infty} \cdot Z_{s0}} = Z_{im1} = Z_{im2}$

Cette valeur commune d'impédance est nommée Impédance caractéristique Z_c (typiquement et exclusivement pour les Q physiquement symétriques)

$$\boxed{Z_c = \sqrt{Z_{e0} \cdot Z_{e\infty}} = \sqrt{Z_{s0} \cdot Z_{s\infty}}}$$

Application aux câbles coaxiaux

Les câbles d'instrumentation mentionnent 50 Ω

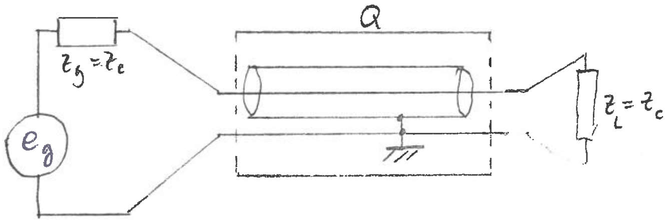
Les câbles d'antenne TV mentionnent 75 Ω

Cables coaxial

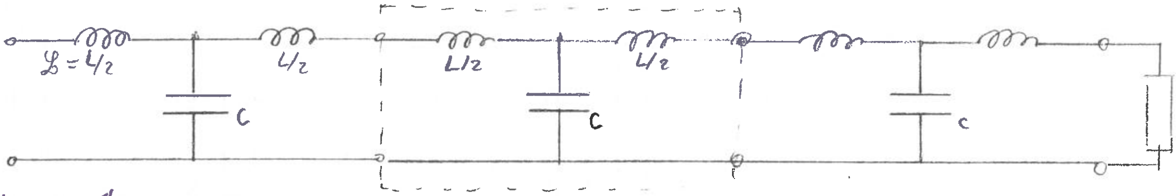
En négligeant les pertes ohmiques de ces cables on peut considérer que l'assemblage cable + charge adaptée ($Z_L = Z_c$) présente à son entrée : $Z = Z_c$

Le cable devient transparent pour le générateur qui croit débiter directement sur Z_L

// // pour Z_L qui croit être sollicité par le générateur ($Z_g = Z_c$)



modélisation : Le cable peut être assimilé à la disposition cascade de cellules (LC) représentatives de la capa linéique et self linéiques (C et L par unité de longueur)



Considérant l'un des élément Q

$$Z_{e\infty} = Z_{1\infty} = \left(\frac{V_1}{I}\right)_{i_2=0} = j\mathcal{L}\omega + \frac{1}{jC\omega} = \frac{(1-\mathcal{L}C\omega^2)}{jC\omega}$$

impédance d'entrée à sortie c.c

$$Z_{e0} = Z_g + Z_c // Z_g = j\mathcal{L}\omega + \frac{\frac{1}{jC\omega}\cdot j\mathcal{L}\omega}{\frac{1}{jC\omega} + j\mathcal{L}\omega} \quad \times jC\omega$$

$$Z_{e0} = j\mathcal{L}\omega + \frac{j\mathcal{L}\omega}{1-\mathcal{L}C\omega^2}$$

Soit avec $Z_c^2 = Z_{e\infty} \cdot Z_{e0}$

$$= \frac{(1-\mathcal{L}C\omega^2)}{jC\omega} \cdot \left(j\mathcal{L}\omega + \frac{j\mathcal{L}\omega}{1-\mathcal{L}C\omega^2}\right)$$

$$= (1-\mathcal{L}C\omega^2)\cdot\frac{\mathcal{L}}{C} + \frac{\mathcal{L}}{C} = \frac{\mathcal{L}}{C}(2-\mathcal{L}C\omega^2)$$

Soit à considérer l'Hypothèse de Basse fréquence relative :

$\mathcal{L}C\omega^2 << 2$ ou encore $\omega << \frac{1}{\sqrt{LC}}$ fréquence de résonance de la cellule

$$Z_c = \sqrt{\frac{2\mathcal{L}}{C}} \Rightarrow \boxed{Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

impédance caractéristique du cable où L et C sont des self et capa linéiques

Remarque : Il faut tenir compte en réalité d'une résistance linéique représentative de la chute de tension dans le cable, de même qu'une conductance linéique traduisant les "fuites" de courant. Le Pb se traite en général sous la forme d'une équation diff du second ordre appelée

Equation des télégraphistes dont les divers cas de figures (Thermique par ex) donnant lieu à la Théorie des lignes

III. B.4] Paramètres hybrides et hybrides inverses

a) Déf : Les paramètres ont pour définition :

$$v_1 = h_{11} \cdot i_1 + h_{12} \cdot v_2 \qquad \text{soit :} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = [H] \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$i_2 = h_{21} \cdot i_1 + h_{22} \cdot v_2$$

b) Le Théorème de réciprocité conduit à : $h_{21} = \ominus h_{12}$

c) · Sens physique et expressions

$h_{11} = \left(\frac{v_1}{i_1}\right)_{v_2=0}$ soit en fait l'impédance d'entrée du Q à sortie en court circuit

Nous avons déjà montré alors : $h_{11} = z_{11} - \frac{z_{12}^2}{z_{22}} = Z_{e0}$

c'est aussi équivalent à ce que montre le calcul matriciel cf TR (multipôles Transfo)

$$h_{11} = \frac{\mathrm{Det}(Z)}{z_{22}} = \frac{z_{11} z_{22} - z_{12}^2}{z_{22}} = z_{11} - \frac{z_{12}^2}{z_{22}} \qquad \text{en } \Omega$$

$h_{22} = \left(\frac{i_2}{v_2}\right)_{i_1=0}$ c'est l'inverse de l'impédance de sortie à entrée sur impédance $Z_g\ \infty$

$$h_{22} = 1/z_{22} = \frac{1}{Z_{s\infty}} \qquad \text{en Siemens}$$

$h_{12} = -h_{21}$ $\quad h_{21} = \left(\frac{i_2}{i_1}\right)_{v_2=0}$ Gain en courant sans dim à sortie en court circuit (β pour un transo)

d) Cas particulier des quadripôles symétriques physiquement

Ds ce cas si l'on permute les grandeurs d'entrée et de sortie les éq. restent invariantes

$$v_1 = h_{11} i_1 + h_{12} v_2 \quad (1) \qquad\qquad v_2 = h_{11} i_2 + h_{12} v_1 \quad (3)$$
permutées
$$i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} v_2 \quad (2) \qquad\qquad i_1 = h_{21} i_2 + h_{22} v_1 \quad (4)$$

on introduit (3) et (4) dans (1)

$$v_1 = h_{11}(h_{21} i_2 + h_{22} v_1) + h_{12}(h_{11} i_2 + h_{12} v_1)$$
$$= v_1 \cdot \underbrace{(h_{11} h_{22} + h_{12}^2)}_{h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21} \;=\; 1} + i_2 \cdot (\underbrace{h_{11} h_{21} + h_{12} h_{11}}_{h_{11}(h_{21} + h_{12}) \;=\; 0})$$

avec $h_{12} = -h_{21}$

Pour un quadripôle physiquement symétrique D'où $\Delta h = h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21} = 1$

e) Paramètres Hybrides inverses

$\begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = [G] \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$

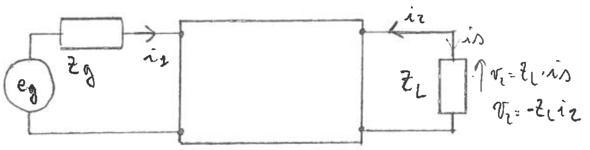
- Le Th de réciprocité montre que $g_{21} = -g_{12}$
- Pour un Q physiquement symétrique $\Delta g = g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21} = 1$

Sujet d'exam : (même dans ?)
Q physiquement symétrique
que se passe-t-il pour Z
et les paramètres z_{ij}

4) quelques caractéristiques propres aux paramètres hybrides : Gains des Q actifs et impédances

α Gain en tension

Soit un Q sollicité par un générateur d'impédance Z_g et fermé sur une charge Z_L



$$v_1 = h_{11}\, i_1 + h_{12}\, v_2 \quad (1)$$
$$i_2 = \underset{\beta}{h_{21}}\, i_1 + h_{22}\, v_2 \quad (2)$$

Le gain en tension se définit par $\dfrac{v_2}{v_1} = A_v$

pour l'impédance de sortie

avec (2) $\quad i_2 = -\dfrac{v_2}{Z_L} = -v_2 \cdot Y_L = h_{21} \cdot i_1 + h_{22}\, v_2 \Rightarrow \boxed{i_1 = \dfrac{-(Y_L + h_{22})\, v_2}{h_{21}}}$ (3)

(1) Soit $v_1 = \left(-\dfrac{h_{11}}{h_{21}} \cdot (Y_L + h_{22}) + h_{12}\right) \cdot v_2 = v_2 \left(\dfrac{h_{12} h_{21} - h_{11} h_{22} - Y_L h_{11}}{h_{21}}\right) = \dfrac{-(\Delta h + Y_L \cdot h_{11})}{h_{21}} \cdot v_2$

D'où $\boxed{A_v = \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{-h_{21}}{\Delta h + Y_L \cdot h_{11}}}$

Gain en tension d'un quadripôle actif

β Gain en courant

le gain en courant est défini par $A_i = \dfrac{i_2}{i_1}$ avec (2) $i_2 = h_{21}\, i_1 + h_{22} \cdot (-Z_L \cdot i_2)$

soit $i_2 (1 + h_{22} \cdot Z_L) = h_{21} \cdot i_1$

$$\boxed{A_i = \frac{i_2}{i_1} = \frac{h_{21}}{1 + Z_L \cdot h_{22}}}$$

Gain en courant du quadripôle actif

avec en régime de CC $Z_L = 0$

$A_i = h_{21} = \beta$

γ Gain en puissance

$A_p = \left|\dfrac{v_2 \cdot i_2}{v_1 \cdot i_1}\right| = |A_v \cdot A_i|$ soit $A_p = \dfrac{h_{21}^2}{(\Delta h + Y_L \cdot h_{11})(1 + Z_L \cdot h_{22})}$

δ Impédance d'entrée du quadripôle et admittance de sortie

$Z_e = \dfrac{v_1}{i_1} = h_{11} + h_{12} \cdot \dfrac{v_2}{i_1}$ avec selon (3) $\dfrac{v_2}{i_1} = \dfrac{-h_{21}}{(Y_L + h_{22})}$

$$\boxed{Z_e = h_{11} - \frac{h_{12} \cdot h_{21}}{(Y_L + h_{22})}}$$

Impédance d'entrée d'un quadripôle (actif) fonction des paramètres hybrides

Pour le calcul d'admittance de sortie : $Z_s = \dfrac{v_2}{i_2} \Rightarrow Y_s = \dfrac{i_2}{v_2}$

$v_1 = -Z_g \cdot i_1 = (1) = h_{11}\, i_1 + h_{12}\, v_2$

d'où $i_1 (h_{11} + Z_g) = -h_{12}\, v_2$ et $i_1 = \dfrac{(-h_{12})}{h_{11} + Z_g} \cdot v_2$

Selon (2) $i_2 = h_{21} \cdot \dfrac{-h_{12}}{h_{11} + Z_g} \cdot v_2 + h_{22}\, v_2$

D'où $\boxed{Y_s = \dfrac{i_2}{v_2} = h_{22} - \dfrac{h_{21} h_{12}}{h_{11} + Z_g}}$

Admittance de sortie fonction des paramètres hybrides

5 avril 2001
fin du cours n° 10
faire un TR

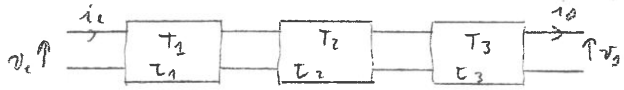
III · C] Association des quadripôles

III · C · 1) Association chaîne ou cascade

Cas déjà étudié au § III · B · 2 · b

Bref Rappel

M. chaîne : $\begin{pmatrix} v_e \\ i_e \end{pmatrix} = [T] \begin{pmatrix} v_s \\ i_s \end{pmatrix}$ $\quad [T] = [T_1]\cdot[T_2]\cdot[T_3]$



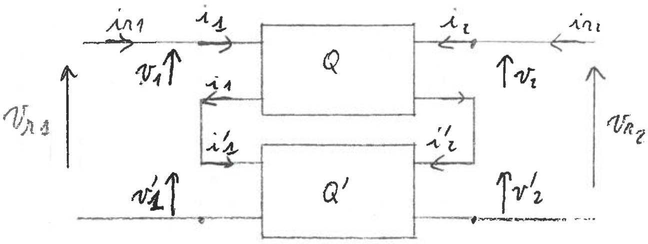
$\tau = [T]^{-1}$

M Caractéristique $\begin{pmatrix} v_s \\ i_s \end{pmatrix} = [\tau] \begin{pmatrix} v_e \\ i_e \end{pmatrix}$ $\quad [\tau] = [\tau_3][\tau_2][\tau_1]$

Conclusion : Ds le cas de associations cascade il est recommandé d'utiliser soit les matrices de chaîne (transfert) soit les matrices caractéristiques

III · C · 2) Association série des quadripôles

Le schéma de Couplage prend la forme :



v_R et i_R résultant de ce couplage

Soient :

$v_{R1} = v_1 + v'_1$
$v_{R2} = v_2 + v'_2$
avec conservation des courants
Dans les accès $i_1 = i'_1 = i_{R_1}$ et $i_2 = i'_2 = i_{R2}$

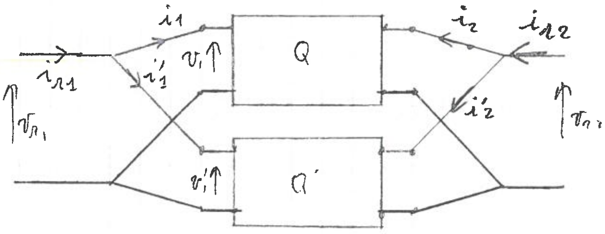
$\begin{pmatrix} v_{R_1} \\ v_{R_2} \end{pmatrix} = [Z_R]\cdot\begin{pmatrix} i_{R1} \\ i_{R_2} \end{pmatrix} = [Z_1]\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + [Z']\cdot\begin{pmatrix} i'_1 \\ i'_2 \end{pmatrix} \Rightarrow [Z_R] = [Z] + [Z']$

Conclusion : Pour des couplages série il est recommandé d'utiliser la matrice impédance

$\boxed{[Z_R] = [Z_1] + [Z']}$ couplages série

III · C · 3) Association parallèle des quadripôles

Le schéma de couplage prend la forme :



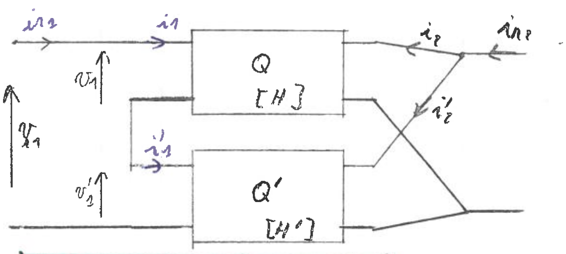
ici $i_{R_1} = i_1 + i'_1$ $\quad v_{R1} = v_1 = v'_1$

$i_{R2} = i_2 + i'_2$ $\quad v_{R2} = v_2 = v'_2$

Conclusion : Pour des couplages // il est recommandé d'utiliser la matrice admittance

$\boxed{[Y_R] = [Y] + [Y']}$ couplages parallèle

III · C · 4) Association mixte série // (et association // série)



en Entrée : $v_{R1} = v_1 + v'_1$ $\quad i_{R_1} = i_1 = i'_1$

en Sortie : $i_{R2} = i_2 + i'_2$ $\quad v_{R_2} = v_2 = v'_2$

$\begin{pmatrix} v_{R1} \\ i_{R2} \end{pmatrix} = [H_R]\begin{pmatrix} i_{R1} \\ v_{R2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v'_1 \\ i'_2 \end{pmatrix} = [H]\cdot\begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + [H']\cdot\begin{pmatrix} i'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix}$ avec $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Série //} \Rightarrow [H_R] = [H] + [H']}$

On montre que pour une Association $\boxed{\text{Série//le on obtient } [G_R] = [G] + [G']}$

matrix_2.cdr

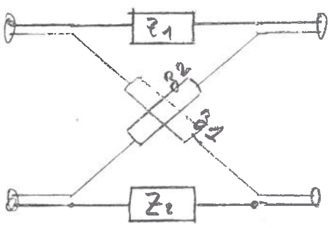
ENSIM

Two-port Networks Parameter Relationships

	Transmission **T**	Impedance **Z**	Admittance **Y**	Hybrid h-parameters **h**
T	$\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{\det(Z)}{Z_{21}} \\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} & -\frac{1}{Y_{21}} \\ -\frac{\det(Y)}{Y_{21}} & -\frac{Y_{11}}{Y_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\det(H)}{h_{21}} & \frac{h_{11}}{h_{21}} \\ -\frac{h_{22}}{h_{21}} & -\frac{1}{h_{21}} \end{matrix}$
Z	$\begin{matrix} \frac{A}{C} & \frac{AD-BC}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{matrix}$	$\begin{matrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{Y_{22}}{\det(Y)} & -\frac{Y_{12}}{\det(Y)} \\ -\frac{Y_{21}}{\det(Y)} & \frac{Y_{11}}{\det(Y)} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\mathrm{Det}(H)}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ -\frac{h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{matrix}$
Y	$\begin{matrix} \frac{D}{B} & -\frac{AD-BC}{B} \\ \frac{-1}{B} & \frac{A}{B} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{Z_{22}}{\det(Z)} & -\frac{Z_{12}}{\det(Z)} \\ -\frac{Z_{21}}{\det(Z)} & \frac{Z_{11}}{\det(Z)} \end{matrix}$	$\begin{matrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{11}} & -\frac{h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\mathrm{Det}(H)}{h_{11}} \end{matrix}$
h	$\begin{matrix} \frac{B}{D} & \frac{AD-BC}{D} \\ \frac{-1}{D} & \frac{C}{D} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\det(Z)}{Z_{22}} & \frac{Z_{12}}{Z_{22}} \\ -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} & \frac{1}{Z_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{Y_{11}} & -\frac{Y_{12}}{Y_{11}} \\ \frac{Y_{21}}{Y_{11}} & \frac{\det(Y)}{Y_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}$

III.C.5) Exemple de détermination d'association (utilisation des tables de correspondances)

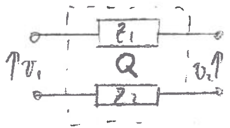
Soit à calculer la matrice impédance d'un quadripôle Treillis



(physiquement symétrique)

$Z_{11} = Z_{22} \qquad Y_{11} = Y_{22}$

Découle de la mise en // de Q et Q'



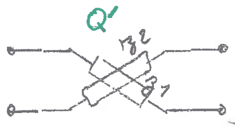
$v_1 = Z_1 \cdot i_1 + v_2 + Z_2 i_1$

$i_1 = i_1 = -i_2$

soit $v_1 - v_2 = i_1(Z_1 + Z_2) \Rightarrow i_1 = \dfrac{v_1}{Z_1+Z_2} - \dfrac{v_2}{Z_1+Z_2}$

$i_2 = \dfrac{-v_1}{Z_1+Z_2} + \dfrac{v_2}{Z_1+Z_2}$

$$Y_Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1+Z_2} & \frac{-1}{Z_1+Z_2} \\ \frac{-1}{Z_1+Z_2} & \frac{1}{Z_1+Z_2} \end{bmatrix}$$



cf III.B.2.c matrice de transfert

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -(g_1+g_2) \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

D'où la matrice $[Y]$

$$Y = \begin{bmatrix} D/B & -1/B \\ -\frac{1}{B} & A/B \end{bmatrix}$$

$(Y_{21} = Y_{12})$ Th de réciprocité

$$[Y_{Q'}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{g_1+g_2} & \frac{1}{g_1+g_2} \\ \frac{1}{g_1+g_2} & \frac{1}{g_1+g_2} \end{bmatrix}$$

D'où pour le Treillis complet $\quad [Y] = [Y_Q] + [Y_{Q'}]$

$$Y = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{g_1+g_2} + \frac{1}{Z_1+Z_2}\right) & \left(\frac{1}{g_1+g_2} - \frac{1}{Z_1+Z_2}\right) \\ \frac{1}{g_1+g_2} - \frac{1}{Z_1+Z_2} & \frac{1}{g_1+g_2} + \frac{1}{Z_1+Z_2} \end{bmatrix}$$

La matrice impédance découle de l'inversion de $[Y]$

$$Z = \frac{1}{\Delta Y} \begin{bmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{bmatrix}$$

Soit à calculer ΔY avec $\dfrac{1}{g_1+g_2} = x \qquad \dfrac{1}{Z_1+Z_2} = X$

$\Delta Y = (x+X)^2 - (x-X)^2$

$= x^2 + 2Xx + X^2$

$\ominus \quad x^2 - 2Xx + X^2$

$\Delta Y = 4X \cdot x = \dfrac{4}{(g_1+g_2)(Z_1+Z_2)}$

$$Z = \frac{1}{4}(g_1+g_2)(Z_1+Z_2) \begin{bmatrix} \frac{1}{g_1+g_2} + \frac{1}{Z_1+Z_2} & \frac{1}{Z_1+Z_2} - \frac{1}{g_1+g_2} \\ & \end{bmatrix}$$

D'où

$$Z = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (Z_1+Z_2)+(g_1+g_2) & (g_1+g_2)-(Z_1+Z_2) \\ (g_1+g_2)-(Z_1+Z_2) & (Z_1+Z_2)+(g_1+g_2) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Cas particulier où $Z_1 = Z_2$ et $g_1 = g_2$

$$Z = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (Z+g) & (g-Z) \\ (g-Z) & (Z+g) \end{bmatrix}$$

Matrice impédance du Quadripôle Treillis "régulier"

III.c.6] Relations entre les déterminants des matrices

$$\Delta Z = \frac{1}{\Delta Y} = \frac{B}{C} = \frac{h_{11}}{h_{22}}$$

$$\Delta Y = \frac{1}{\Delta Z} = \frac{C}{B} = \frac{h_{12}}{h_{11}}$$

(1 pour Q passif) $$\Delta T = \frac{h_{12}}{z_{21}} = \frac{Y_{12}}{Y_{21}} = \frac{h_{12}}{h_{21}}$$

$$\Delta h = \frac{z_{11}}{z_{12}} = \frac{Y_{12}}{Y_{11}} = \frac{A}{D}$$