

3

MODÉLISATION D'UN QUADRIPOLE PASSIF - DIAGRAMMES DE BODE :

ÉLÉMENTS DE PRÉPARATION

3.1 ÉTUDE D'UN QUADRIPOLE PASSIF

3.1.1 Paramètres impédances caractéristiques d'un quadripôle

♦ Recherche la matrice impédance $[Z]$ du quadripôle Q_2 .

Soit I_0 le courant circulant dans le condensateur C_2 , on a $V_2 = \frac{I_0}{jC_2\omega}$ soit $I_0 = jC_2\omega \cdot V_2$

$$D'autre part \quad V_2 = R_2 \cdot (I_2 - I_0) + R_1 \cdot (I_1 + I_2 - I_0)$$

$$V_2 = R_1 \cdot I_1 + (R_1 + R_2) \cdot (I_2 - I_0)$$

$$V_2 = R_1 \cdot I_1 + (R_1 + R_2) \cdot I_2 - jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2) \cdot V_2$$

$$V_2 \cdot (1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2)) = R_1 \cdot I_1 + (R_1 + R_2) \cdot I_2$$

$$V_2 = \frac{1}{1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2)} (R_1 \cdot I_1 + (R_1 + R_2) \cdot I_2)$$

$$V_2 = \frac{R_1}{1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2)} \cdot I_1 + \frac{R_1 + R_2}{1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2)} \cdot I_2$$

$$\text{On a aussi : } V_1 = \frac{I_1}{jC_1\omega} + R_1 \cdot (I_1 + I_2 - I_0) = \left(\frac{1}{jC_1\omega} + R_1 \right) \cdot I_1 + R_1 \cdot (I_2 - I_0) = \left(\frac{1}{jC_1\omega} + R_1 \right) \cdot I_1 + R_1 \cdot I_2 - jC_2\omega \cdot R_1 \cdot V_2$$

$$V_1 = \left(\frac{1}{jC_1\omega} + R_1 \right) \cdot I_1 + R_1 \cdot I_2 - \frac{jC_2\omega \cdot R_1}{1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2)} \cdot (R_1 \cdot I_1 + (R_1 + R_2) \cdot I_2)$$

$$V_1 = \left(\frac{1}{jC_1\omega} + R_1 - \frac{jC_2\omega \cdot R_1^2}{1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2)} \right) \cdot I_1 + \left(1 - \frac{jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2)}{1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2)} \right) \cdot R_1 \cdot I_2$$

$$V_1 = \frac{1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2) + jC_1\omega \cdot R_1 \cdot (1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2)) - jC_1\omega \cdot jC_2\omega \cdot R_1^2}{jC_1\omega \cdot (1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2))} \cdot I_1 + \frac{R_1 \cdot I_2}{1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2)}$$

$$V_1 = \frac{1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2) + jC_1\omega \cdot R_1 + jC_1\omega \cdot R_1 \cdot jC_2\omega \cdot R_2}{jC_1\omega \cdot (1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2))} \cdot I_1 + \frac{R_1}{1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2)} \cdot I_2$$

Soit $[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 + j\omega \cdot (C_2 \cdot (R_1 + R_2) + C_1 \cdot R_1) + (j\omega)^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2}{jC_1\omega \cdot (1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2))} & \frac{R_1}{1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2)} \\ \frac{R_1}{1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2)} & \frac{R_1 + R_2}{1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2)} \end{bmatrix}$

♦ Recherche de la valeur de l'impédance de sortie Z_S du quadripôle Q_2 en fonction de ses éléments.

L'impédance du générateur $Z_G = 0$ d'où :

$$Z_S = \left(\frac{V_2}{I_2} \right)_{E_G=0} = Z_{22} - \frac{Z_{21} \cdot Z_{12}}{Z_{11}} = \frac{1 + j\omega \cdot (C_2 \cdot (R_1 + R_2) + C_1 \cdot R_1) + (j\omega)^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2}{jC_1\omega \cdot (1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2))}$$

$$Z_S = \frac{R_1 + R_2}{1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2)} - \frac{\frac{R_1}{1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2)} \cdot \frac{R_1}{1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2)}}{\frac{1 + j\omega \cdot (C_2 \cdot (R_1 + R_2) + C_1 \cdot R_1) + (j\omega)^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2}{jC_1\omega \cdot (1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2))}}$$

$$Z_S = \frac{1}{1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2)} \left(R_1 + R_2 - \frac{jC_1\omega \cdot R_1^2}{1 + j\omega \cdot (C_2 \cdot (R_1 + R_2) + C_1 \cdot R_1) + (j\omega)^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2} \right)$$

$$Z_S = \frac{(R_1 + R_2) \cdot \left(1 + j\omega \cdot \left(C_2 \cdot (R_1 + R_2) + \frac{C_1 \cdot R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \right) + (j\omega)^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2 \right)}{(1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2)) \cdot \left(1 + j\omega \cdot (C_2 \cdot (R_1 + R_2) + C_1 \cdot R_1) + (j\omega)^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2 \right)}$$

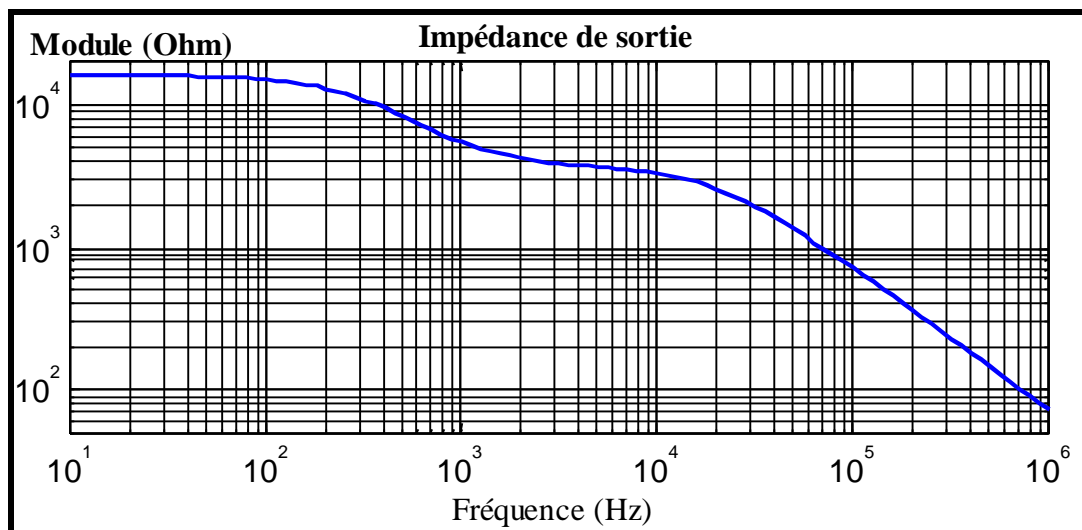
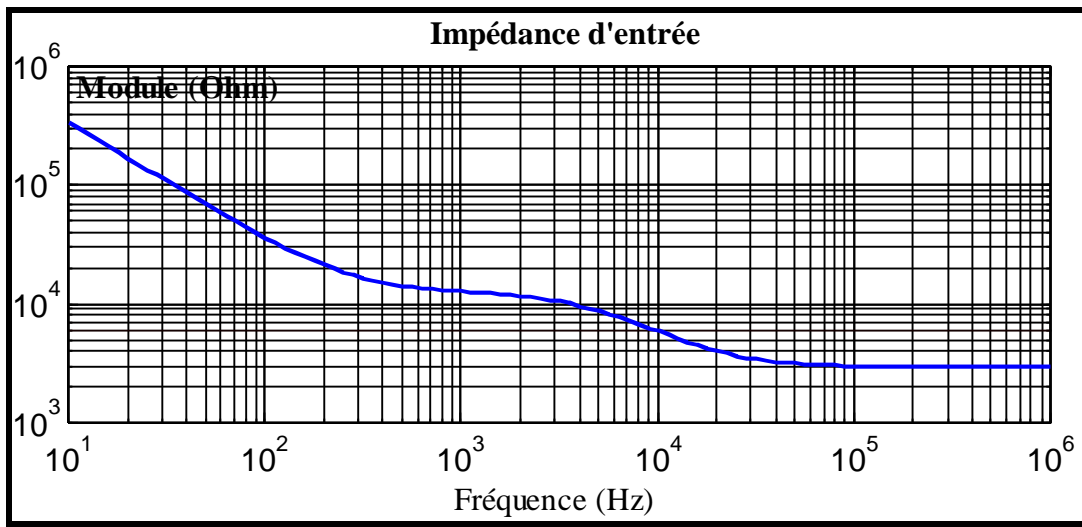
- ♦ Recherche de la valeur de l'impédance d'entrée Z_E du quadripôle Q_2 en fonction de ses éléments.

La charge $Z_L = \infty$ donc $I_2=0$, donc $Z_E = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} = \frac{1 + j\omega \cdot (C_2 \cdot (R_1 + R_2) + C_1 \cdot R_1) + (j\omega)^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2}{jC_1\omega \cdot (1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2))}$

$$Z_E = \frac{1}{jC_1\omega} \cdot \frac{1 + (C_2 \cdot (R_1 + R_2) + C_1 \cdot R_1) \cdot j\omega + C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot (j\omega)^2}{1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2)}$$

- ♦ Sans effectuer de calculs, préciser les valeurs limites (ou asymptotes) des impédances définies ci-dessus aux basses fréquences et aux hautes fréquences.

- ♦ Ci-dessous les tracés exacts des modules des impédances en fonction de la fréquence (Matlab)



3.1.2 Fonction de transfert - Diagrammes asymptotiques de Bode

- ◆ Rechercher la fonction de transfert du quadripôle Q_2 lorsque l'impédance de charge est infinie.

$$T = \frac{Z_{21}}{Z_{11}} = \frac{\frac{R_1}{1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2)}}{\frac{1 + j\omega \cdot (C_2 \cdot (R_1 + R_2) + C_1 \cdot R_1) + (j\omega)^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2}{jC_1\omega \cdot (1 + jC_2\omega \cdot (R_1 + R_2))}}$$

$$T = \frac{jR_1C_1\omega}{1 + j\omega \cdot (C_2 \cdot (R_1 + R_2) + C_1 \cdot R_1) + (j\omega)^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2}$$

$$T = \frac{j\omega}{\frac{1}{R_1C_1}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_2}\right)} \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{R_1C_1}, \omega_1 \cdot \omega_2 = \frac{1}{C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2}, \left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right) = C_2 \cdot (R_1 + R_2) + C_1 \cdot R_1$$

soit $\underline{T} = j \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{1}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right) \cdot \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2}\right)}$, avec $\omega_0 = 1,77 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$, $\omega_1 = 122 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$ et $\omega_2 = 1,69 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$

- ◆ Tracés des diagrammes asymptotiques de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert \underline{T} .

- ◆ Tracés exacts avec le logiciel Matlab

3.1.3 Manipulation

3.1.3.1 Diagrammes de Bode

- ◆ Diagrammes de Bode