UNIVERSITÉ DU MAINE

ensim

Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs du Mans

humecter

humecter

[redacted]

Après avoir rempli la partie ci-dessous, détacher et rabattre cette partie noircie dans le sens de la flèche

Filière : ______________ ______ année

1er Semestre ☐ Épreuve de : ______________

2e Semestre ☐ ______________

Date : ______________

Compléter et cocher les cases correspondantes

NOM : ______________
suivi du nom d'épouse

Prénoms : ______________

signature

Note sur 20

CADRE RÉSERVÉ AUX CORRECTEURS

TD n° 1

(feuille 1/2)

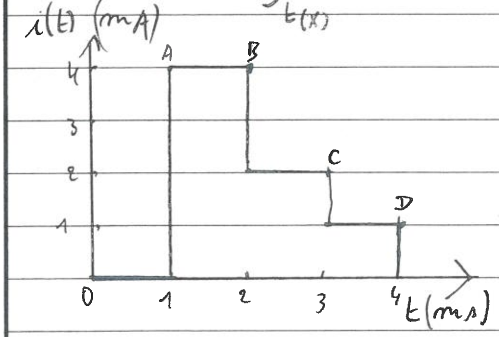
Copie n° ..... / .....

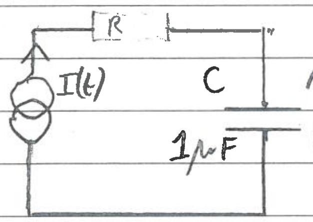
Loi de Comportement du condensateur

$Q_{(t)} = C \cdot V_{(t)}$ $\quad i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C \cdot \frac{dV(t)}{dt} \Rightarrow V(t) = \int_{t=0}^{t} \frac{1}{C}\, i(t)\, dt$

Entre deux états X et Y définis $\Delta V\Big]_X^Y = \frac{1}{C}\int_{t(X)}^{t(Y)} i(t)\cdot dt$

pour un régime à courant constant I_0 de durée Δt $\quad \Delta V\Big]_X^Y = \frac{1}{C}\, I_0 \cdot \Delta t$ croissance linéaire de $v(t)$





• Etablir les tensions $v(t)$ aux instants respectifs $t_1 = 1ms, t_2 = 2ms, t_3 = 3ms, t_4$

• représenter $v(t)$

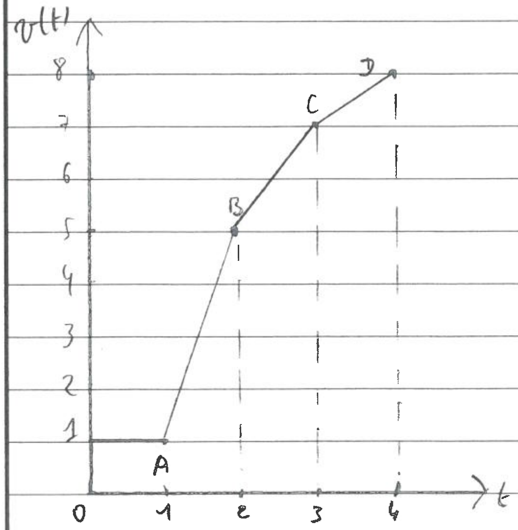
Si $v(t_0) = 1V$ $\quad \Delta V\Big]_0^A = \frac{1}{C}\cdot 0 \cdot \Delta t = 0 \Rightarrow V_A = V_0 = 1V$ $\quad \Delta t = 10^{-3}\,sec$ $\forall$ les pas

$\Delta V\Big]_A^B = \frac{1}{C}\cdot(4\cdot 10^{-3})\cdot 10^{-3} = 4V \Rightarrow V_B = 4+1 = 5V$

où $C = 10^{-6} F$

$\Delta V\Big]_B^C = \frac{1}{10^{-6}}\cdot(2\cdot 10^{-3})\cdot 10^{-3} = 2V \Rightarrow V_C = 5+2 = 7V$

$\Delta V\Big]_C^D = \frac{1}{10^{-6}}\,(1\cdot 10^{-3})\cdot 10^{-3} = 1V \Rightarrow V_D = 7+1 = 8V$

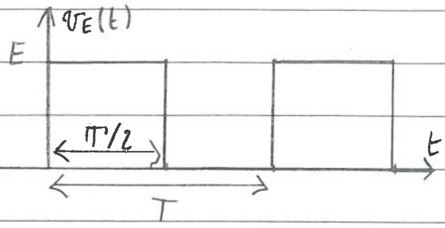


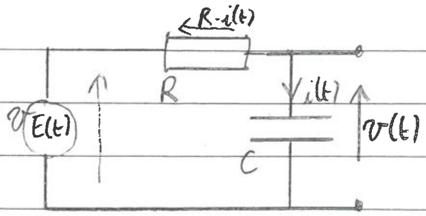
• Si $R = 1k\Omega$ établir la valeur de l'énergie dissipée au cours du processus entre $t = 0$ et $t = 4\,ms$

N.B. - Il est interdit au candidat, sous peine de sanction, de signer sa composition et d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer la provenance de sa copie.

Exercice n° 2

Une tension en créneaux assymétrique est imposée en entrée d'une cellule RC passe bas dont la constante de temps est notée $\tau = RC$





On suppose $\tau \gg T$ A l'instant initial, en $t = 0$, le condensateur est chargé avec $v(0) = V_{min}$

1ère question (Phase de charge)

a) Déterminer l'expression de $v(t)$

b) Exprimer la valeur de $v(T/2)$ que l'on notera V_{max}

c) Evaluer V_{max} en utilisant le développement limité : $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots \quad \forall y$

on considèrera $\tau \gg T$

a) Expression de $v(t)$

manière académique

- La figure montre que $v_E = R \cdot i(t) + v(t)$ avec $i(t) = \frac{dQ}{dt}$ et $Q = C \cdot v(t) \Rightarrow i(t) = C \cdot \frac{dv}{dt}$

soit $v_E = RC \cdot \frac{dv(t)}{dt} + v(t)$

Eq. dif du 1er ordre

Sol générale à $0 = \tau \cdot \frac{dv}{dt} + v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dt}{\tau} \Rightarrow v = K_1 e^{-t/\tau}$

Sol particulière en régime établi $v_E = v(t) = K_2$

Σ Sol = Sol gén + Sol part $\Rightarrow v(t) = K_1 e^{-t/\tau} + K_2$

les conditions limites donnent K_1 et K_2

$t \to 0$ $v(t) = V_{min} = K_1 + K_2$

$t \to \infty$ $v(t) = E = K_2 \Rightarrow K_2 = E$

avec $V_{min} = K_1 + K_2 = K_1 + E \Rightarrow K_1 = V_{min} - E$

Soit $v(t) = (V_{min} - E)e^{-t/\tau} + E$ ou encore

$v(t) = V_{min} \cdot e^{-t/\tau} + E(1 - e^{-t/\tau})$ dans la plage $0 \leq t < T/2$

Voir manière physique pour ce même résultat

b) Valeur en $t = T/2$ que l'on note V_{max}

$$v\left(\frac{T}{2}\right) = V_{max} = V_{min}\, e^{-\frac{T}{2\tau}} + E\left(1 - e^{-\frac{T}{2\tau}}\right)$$

c) Evaluation de V_{max} si $\tau \gg T$ notant $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \varepsilon$ si $y \to 0$ $e^y \to 1 + y$

notons $y = -\frac{T}{2\tau} = \varepsilon$ $\exp\left(-\frac{T}{2\tau}\right) \to 1 - \frac{T}{2\tau}$

$\Rightarrow$ Evaluation $v(T/2) = V_{max} \approx V_{min}\left(1 - \frac{T}{2\tau}\right) + E\left(1 - \left(1 - \frac{T}{2\tau}\right)\right)$

D'où $V_{max} = V_{min}\left(1 - \frac{T}{2\tau}\right) + E \cdot \frac{T}{2\tau}$

Remarque sur la manière physique pour résultat de la question 1a

Nous avons considéré en conférence d'électrocinétique comment obtenir l'évolution de $v_c(t)$ en étudiant d'abord l'intensité en termes de réponse indicielle à un échelon E

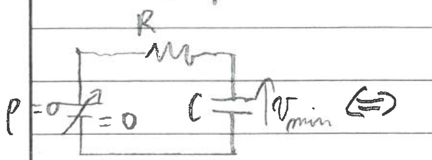
$i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$ avec en plus $E = R \cdot i + v_C(t)$

d'où $v_c = E - Ri = E - R \cdot \frac{E}{R} e^{t/\tau} \Rightarrow v_c = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

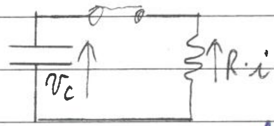
Réponse indicielle

Pour étudier le point 1a il suffit d'imaginer que le signal résulte de la superposition de deux régimes : 1/ une réponse indicielle : Rép indicielle

relaxation 2) la décharge de V initiale dans l'impédance nulle du géné



$\Leftrightarrow$



$v_c = Ri = RC\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{v_c}{\tau} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dt}{\tau}$

Soit $v = K \cdot e^{-t/\tau}$ avec $K = V_{min}$ en $t = 0$

Relaxation } $v = V_{initial} \cdot e^{-t/\tau}$

D'où la superposition

$v(t) =$ Rép indicielle ⊕ décharge $= E\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + V_{min} \exp\frac{-t}{\tau}$ [◊]

$v(t) =$ Réponse indicielle ⊕ relaxation

Deuxième question (phase de décharge de C)

- a) Prenant T/2 comme nouvelle origine du temps, établir $v(t)$
- b) La tension globale de ce régime oscillant étant périodique quelle relation relie V_{max} à V_{min}
- c) En déduire les expressions respectives de V_{min} et V_{max}
- d) Représenter le signal $v(t)$

a) Prenant T/2 en nouvelle origine, établir $v(t)$: Régime de relaxation

Relaxation : Vu précédemment $v(t) = V_{initial} \cdot \exp^{-t/\tau}$ avec $V_{initial} = V_{max}$

Soit $v(t) = V_{max} \exp\left(-t/\tau\right)$

b) Démarrant cette relaxation en T/2 on la maintient pendant $t = T/2$ pour revenir à $v(t) = V_{min}$

d'où $V_{fin\ période} = V_{max} \exp\left(\frac{-T}{2\tau}\right) = V_{min}$

c) Evaluations de V_{max} et de V_{min} : avec $\exp\frac{-t}{2\tau} \to 1 - \frac{T}{2\tau}$ avec $\varepsilon = \frac{T}{2\tau} \ll 1$.

précédemment et $\begin{cases} V_{min} \# V_{max}\left(1 - \frac{T}{2\tau}\right) \\ V_{max} \# V_{min}\left(1 - \frac{T}{2\tau}\right) + E \cdot \frac{T}{2\tau} \end{cases}$ ① $v_m = V_M(1 - \varepsilon)$ Recherche de V_{max}

② $V_M = v_m(1-\varepsilon) + E\varepsilon \overset{①}{\Rightarrow} V_M = V_M(1-\varepsilon)^2 + E\varepsilon$ ③

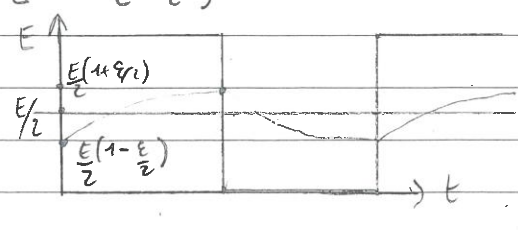
$V_M\left[1 - (1-\varepsilon)^2\right] = E \cdot \varepsilon \Rightarrow V_M\left[1 + (1-\varepsilon)\right] \cdot \left[1 - (1-\varepsilon)\right] = V_M(2-\varepsilon) \cdot \varepsilon = E\varepsilon \Rightarrow V_M = \frac{E}{2-\varepsilon} = \frac{E}{2 - T/2\tau} \Rightarrow V_M = \frac{E}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+T/4\tau}\right)$

③ est approximable avec : $V_M = \frac{E}{2-\varepsilon} = \frac{E}{2(1-\varepsilon/2)} \# \frac{E}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow \boxed{V_M \# \frac{E}{2}\left(1 + \frac{T}{4\tau}\right)}$ ④

Recherche de V_{min} ① $\Rightarrow v_m = V_M(1-\varepsilon) = \frac{E}{2}(1+\varepsilon/2)(1-\varepsilon) = \frac{E}{2}\left[1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2}\right]$ où $\varepsilon^2 \ll \varepsilon$

D'où

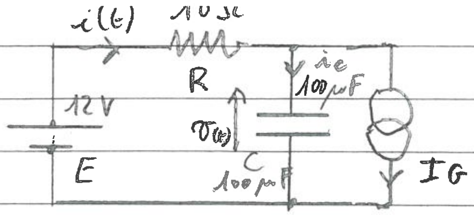
$v_m = \frac{E}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ Soit $\boxed{v_m = \frac{E}{2}\left(1 - \frac{T}{4\tau}\right)}$



Ex3 On considère le schéma ci-contre où $I_G(t)$ est une source de courant périodique (cf illustration)

$v_E(t) = E = 12\,V$ source de tension constante

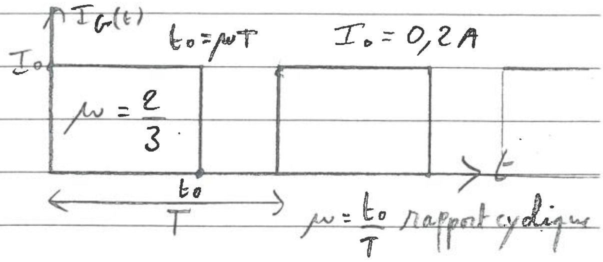
On suppose le régime établi du système



1) Calculer la valeur moyenne de $i_G(t)$

2) Calculer la puissance moyenne notée P fournie par la source de tension E

3) Exprimer la valeur moyenne de la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur



Question 1 : Valeur moyenne de $i_G(t)$

$$\langle i_G \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T i_{G(t)}\cdot dt = \frac{1}{T}\left[\int_0^{\mu T} I_0\, dt + \int_{\mu T}^{T} 0 \cdot dt\right] = \frac{I_0}{T}\left[t\right]_0^{\mu T} = \frac{I_0}{T}\cdot \mu T = \mu \cdot I_0$$

A·N Si $I_0 = 200\,mA$ et $\mu = \frac{2}{3}$ $\quad \langle I_G \rangle = \frac{2}{3}\cdot 0,2 = 0,133A = 133\,mA$

Question 2 : Puissance moyenne issue du générateur E de tension constante

$P(t) = E\cdot i(t)$ à E cte

$\langle P \rangle = E \cdot \langle i \rangle$ Or puisque la charge se conserve $i(t) = i_C + i_G \quad \forall t$

$\langle P \rangle = E \cdot \langle i_C + i_G \rangle = E\left[\langle i_C \rangle + \langle i_G \rangle\right]$

connaissant $\langle i_G \rangle$ il faut calculer $\langle i_C \rangle$

$$i_C = \frac{dQ_c}{dt} = C \cdot \frac{dv}{dt} \qquad \langle i_C \rangle = C\left(\frac{1}{T}\int_0^T \frac{dv}{\cancel{dt}}\cdot \cancel{dt}\right) = C\cdot\frac{1}{T}\int_{v_{ini}(0)}^{v_{fin}(T)} dv$$

$\langle i_C \rangle = \frac{C}{T}\left[v(T) - v(0)\right]$ avec $v(T) = v_0$ car récurrence du signal

Ainsi $\langle i_C \rangle = 0$

d'où $\langle P \rangle = E \cdot \langle i_G \rangle \quad \Rightarrow$ A·N $\langle P \rangle = 12 * 0,133 = 1,596\ W$

Question 3 : Valeur moyenne de $v(t)$ aux bornes du condensateur

$E = v(t) + Ri(t) \quad \Rightarrow \quad v(t) = E - Ri(t)$

$\langle v(t) \rangle = \langle E - Ri(t) \rangle = E \ominus R\cdot\langle i(t) \rangle = E \ominus R\left[\underbrace{\langle i_C \rangle}_{\text{"0" vu précédemment}} + \langle i_G \rangle\right]$

$\langle v(t) \rangle = E - R\langle i_G \rangle \quad \Rightarrow$

A·N $\langle v(t) \rangle = 12 \ominus 10 \cdot 0,133 = 10,66\ V$