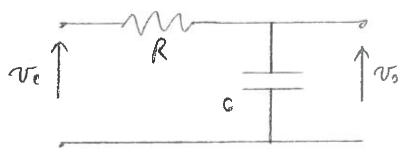
III.D.3) Transmittances fonction de fréquence : Diagrammes de Bode

La relation entrée-sortie Transmittance constitue une fonction de transfert au sens général c'est une fonction de la fréquence, compte tenu d'équations de comportement propres au système : fonction de 2 variables composantes : [Module, φ] ou [Re, Im]

En élec les éq. de comportement découlent des impédances de chaque dipôle élémentaire

a) Exemple de principe : Cellule RC passe-bas du 1er ordre intégrateur simple



$v_s = Z_c \cdot i = Z_c \cdot \frac{v_e}{R + Z_c} = v_e \cdot \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega}$

Soit $H(\omega) = A_T = \frac{1}{1 + jRC\omega}$ encore notée $\frac{1}{1+\tau p}$ pour $p \equiv j\omega$

$|A_T| = \left|\frac{1}{1+j\omega\tau}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$ et Phase $= ATN(-\omega\tau) = -ATN(\omega\tau)$ ATN fonction impaire

La transmittance exprimée en dB se rapporte au module (rapport des valeurs RMS)

on la note $G(j\omega) = 20 \log \left|\frac{v_{s\,RMS}}{v_{e\,RMS}}\right|$

$$\boxed{G_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{\dots}} = -10 \log (1 + \omega^2\tau^2)}$$

si $\omega \to 0$ $G \to 0$ Asymptote horizontale

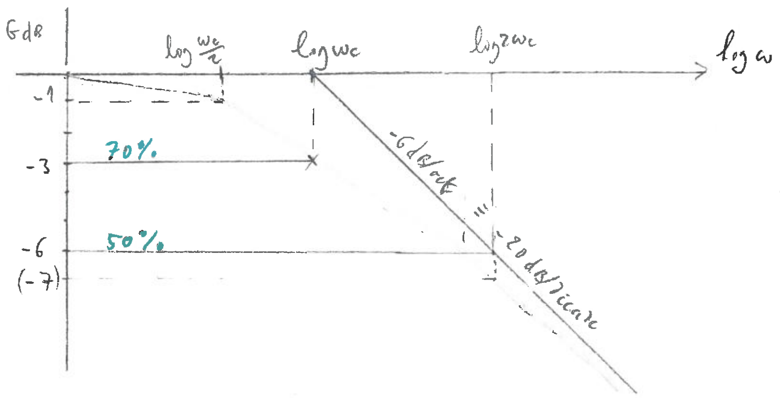
si $\omega >>$ $G \to -20 \log \omega\tau$ comportement asymptotique à $-20\,dB$/décade $\Leftrightarrow -6\,dB$/octave

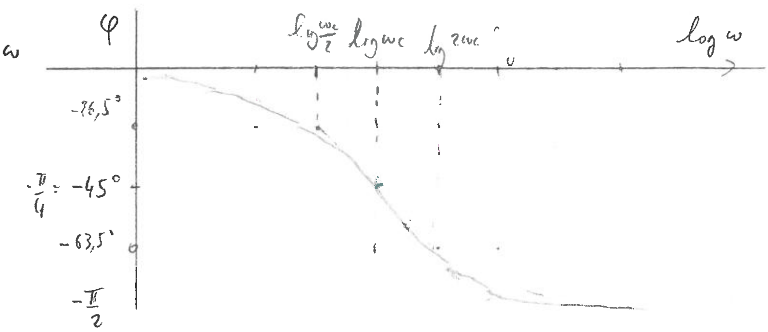
l'asymptote HF coupe l'axe $G = 0$ en $\omega_c\tau = 1$ soit $\omega_c = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \frac{1}{2\pi \cdot RC} = f_c$

ω_c fréquence angulaire de coupure

Pour la phase

$\varphi = -ATN(\omega\tau)$ $\omega \to 0 \Rightarrow \varphi \to 0$; $\omega \to \infty \Rightarrow \varphi \to -\frac{\pi}{2}$; $\omega = \omega_c \Rightarrow ATN(1) =$



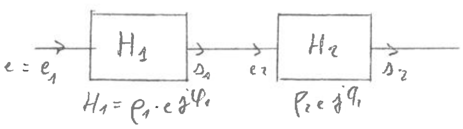


Le lieu de Bode peut s'obtenir par l'analyse harmonique : $\forall f$ par pas de Δf relevé de $\frac{v_s}{v_e}$

L'observation peut se faire par wobulation (pilotage du GBF par signal extérieur : rampe, expo ....)

b) Composition relative des transmittances

Attention à la visualisation cascade des fonctions de transferts en automatisme : les couplages ne doivent pas affecter les fonctions de transfert : Usuellement, on compose ainsi les éléments :



si $s_1(\omega) = H_1(\omega) \cdot e_1(\omega)$

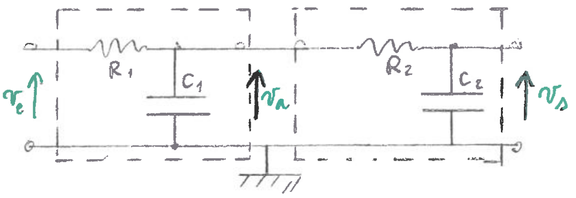
$s_2(\omega) = H_2(\omega) \cdot e_2(\omega) = H_2(\omega) s_1(\omega) = H_2(\omega) \cdot H_1(\omega) \cdot e$

$H = \prod_{i=1}^{n} H_i = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n \cdot e^{\sum \varphi_i}$ $H_{dB} = 20 \log \rho_1\rho_2\rho_n = \sum_{i=1}^{n} H_{i\,dB}$

En fait par Déf la transmittance d'un Q est $H(\omega) = \left(\frac{v_s}{v_e}\right)_{i_s = 0}$ [ω]

La composition standard (en terme de produit) des fonctions de transferts peut conduire à des erreurs si on oublie que les systèmes ne sont pas idéaux : Échange de grandeur extensive et donc de charges en électricité : les transmittances ne se composent pas, de manière absolue, par produit

Exemple : Soient 2 cellules RC passe bas montées en cascade



La fonction de transfert $H_1(\omega) = \frac{v_a}{v_e}$ est du même type que $H_2(\omega) = \frac{v_s}{v_a}$

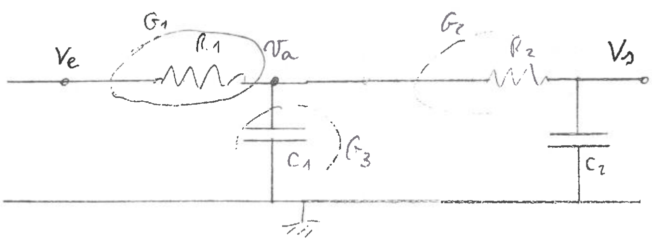
$$H = \frac{Z_c}{R + Z_c} = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Au sens d'une composition de fonct de transfert H si la connection de la seconde cellule ne perturbait en rien le comportement de la première, on aurait alors $H_{rés} = \frac{v_s}{v_e} = \frac{v_s}{v_a} \cdot \frac{v_a}{v_e} = H_2(\omega) \cdot H_1(\omega)$

Soit $H(\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega\tau_1)} \cdot \frac{1}{(1 + j\omega\tau_2)}$ Soit sur un tracé de Bode $H_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{(1+\omega^2\tau_1^2)(1+\omega_1^2\tau_2^2)}}$

$H_{dB} = -10\left(\log(1+\omega^2\tau_1^2) + \log(1+\omega^2\tau_2^2)\right)$ avec si $\omega \to \infty$ $\to -10\left(\log \omega^4 \cdot \tau_1^2\tau_2^2\right) = [\text{cte} - 40 \log \omega] \Rightarrow -40\ \text{dB}/\text{déc}$

En réalité, toute rigueur le potentiel au point A dépend de la présence de $(R_2 + Z_{C2})$ disposée en impédance de charge : le raisonnement précédent n'est correct que si $\left(R_2 + \frac{1}{jC_2\omega}\right) \to \infty$ (donc en relative B.F ou $C_2 <$



Détermination rigoureuse

Soit à utiliser Millman pour rechercher v_a

$$v_a = \frac{\sum_k v_k \cdot G_k}{\sum G_k}$$

$G_1 = \frac{1}{R_1}$ $G_2 = \frac{1}{R_2}$ $G_3 = jC_1\omega$

$$v_a = \frac{\frac{v_e}{R_1} + \frac{v_s}{R_2} + 0 \cdot jC_1\omega}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + jC_1\omega} \times R_1$$

Attendu que en sortie $v_s = \frac{v_a}{(1 + j\omega\tau_2)}$ $\Big\} \Rightarrow v_a = v_s(1 + j\omega\tau_2)$ (2)

(1) $v_a = \frac{v_e + \frac{R_1}{R_2} \cdot v_s}{\frac{R_1}{R_2} + (1 + j\omega\tau_1)}$

Egalisant (1) et (2)

$$v_s(1 + j\omega\tau_2)\left[\frac{R_1}{R_2} + (1 + j\omega\tau_1)\right] = v_e + \frac{R_1}{R_2} \cdot v_s \Rightarrow v_s \cdot \left[(1 + j\omega\tau_2)\left[\frac{R_1}{R_2} + (1 + j\omega\tau_1)\right] - \frac{R_1}{R_2}\right] = v_e$$

D'où $H(\omega) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{1}{(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2) + j\omega R_1 C_2}$ où apparaît la cst de temps hybride $\tau_x = R_1 C_2$

la condition de simplification se réduit à

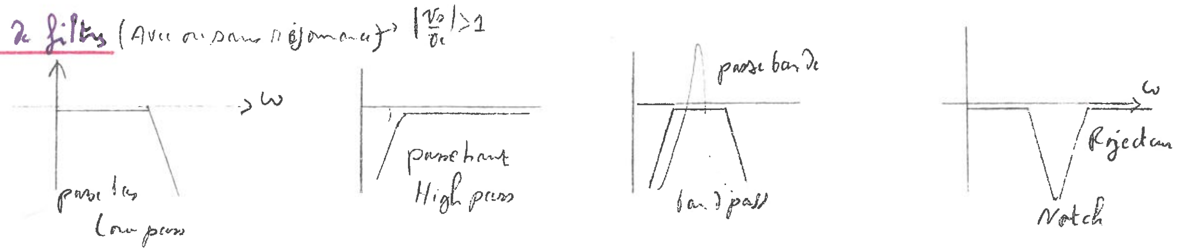
$C_2 << C_1 \Rightarrow$ composition par produit de 2 transmittances pures

En fait si on développe

$1 + j\omega\tau_1 + j\omega\tau_2 - \omega^2\tau_1\tau_2 + j\omega R_1 C_2$

$= 1 + j\omega\tau_2 + j\omega R_1(C_1 + C_2) - \omega^2\tau_1\tau_2$

c) familles de filtres (Avec ou sans résonance) $\left|\frac{v_s}{v_e}\right| > 1$



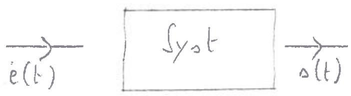
Spătaru Alexandru : Théorie de la transmission de l'info : p 80
Max Jacques : Méthodes et techniques de trait^t de signal

Chapitre IV : Dualité [temps - fréquences] appliquée à l'étude des circuits et systèmes

IV.1) Position du problème : Inconvénients, contingences de l'analyse harmonique

La connaissance du comportement fréquence d'un système caractérisé par son lieu de Bode procède de l'analyse harmonique

On peut, en principe, déduire du lieu de Bode la forme du signal de sortie pour tout signal périodique imposé à l'entrée [Hyp : système linéaire]



si j'applique $e_1(t)$ en observant $s_1(t)$ en sortie
et si en entrée $e_2(t)$ $\rightsquigarrow$ $s_2(t)$ en sortie
En entrée ; $e(t) = a\cdot e_1 + b\cdot e_2 \Rightarrow s(t) = [a\, s_1(t) + b\, s_2(t)]$

principe de base : Analyse Harmonique

Si le signal e(t) est périodique il peut être développé en série de Fourier

$$e(t) = \left(\frac{a_0}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t\right] \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e(t)\cdot\cos n\omega_0 t\, dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e(t)\cdot\sin n\omega_0 t\, dt$$

effet. moyenne

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{j n\omega_0 t + \varphi_n} \quad \text{avec } c_n \in \mathbb{C} \text{ et } \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - j b_n) \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e(t)\cdot e^{-j n\omega_0 t}\, dt$$

$$|c_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \varphi_n = -\mathrm{ATN}\frac{b_n}{a_n}$$

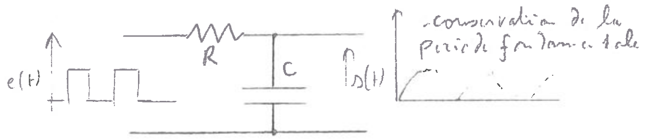
$$e(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}\cdot e^{j(n\omega_0 t + \varphi_n)}$$

chaque composante est alors transformée pour son propre compte à la fréquence angulaire ($n\omega_0$)

$$\text{avec} \quad H(n\omega_0) = |H_{n\omega_0}|\cdot e^{j\phi(n)}$$

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |H_{n\omega_0}|\cdot \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2}\cdot e^{j(n\omega_0 \cdot t + \varphi_n + \phi_n)}$$

la sortie résulte de la recombinaison des composantes transformées par $H(n\omega_0)$



En général une harmonique max de $n = 40$ est suffisante pour recomposer un créneau

Contingences d'une simulation de comportement

→ Après avoir caractérisé $H(\omega)$ si (boîte noire) (Manip ds le domaine temps : scruter tout t pour un pt fr...

1) il faut calculer a_n, b_n ⇒ $c_n = |c_n|\cdot e^{j\varphi_n}$ (passage ds le domaine fréquence)

2) faire le produit $|c_n|\cdot|H_n|$, la somme $\Sigma\, \varphi_n + \phi_n$, traitement ds le domaine fréquence

3) recomposer le signal de sortie (retour ds le domaine temps)

4] Et Quid si le signal n'est pas périodique ? Big Hassle

Nous allons rechercher un outil totalement localisé ds le domaine temps, à même de simuler plus facilement le comportement des circuits systèmes en temps réel.

IV.A.2) Réponses temporelles caractéristiques

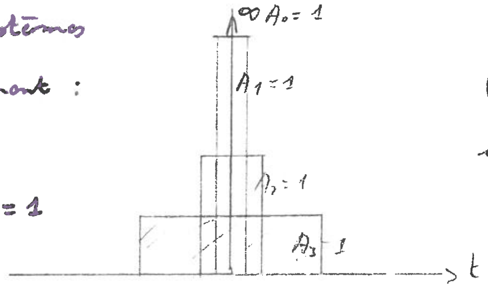
En instrumentation on s'intéresse aux réponses (évolutives) à des signaux types, en vue d'identifier les circuits et systèmes

ces signaux sont respectivement :

(α) l'impulsion de Dirac

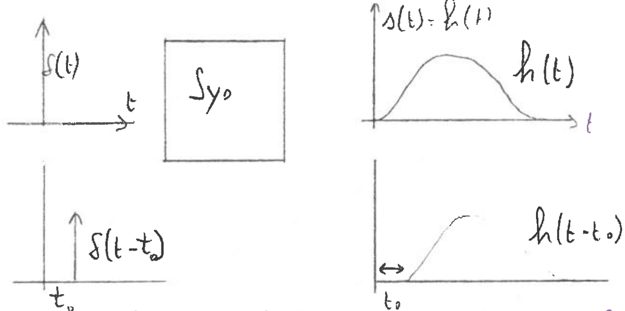
caractérisée par $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$

durée $\varepsilon \to 0$
Amplitude ∞



Perception relative en fonction des "zoom" temps vs. Amplitude

La réponse à l'impulsion par un système est appelée réponse impulsionnelle



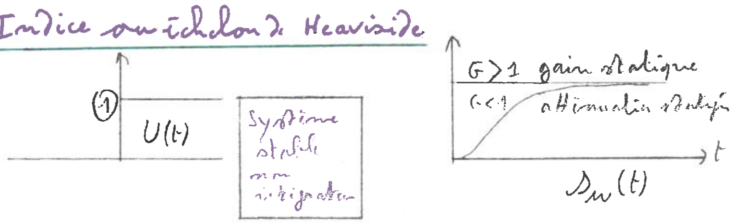
La sortie non ∞ brève est due aux phénomènes de stockage énergétique
avec aussi dispersion du contenu fréquentiel
restriction des HF filtrage

En audio un "plip" amplifié s'atténue d'autant plus vite que la B.P est élevée

En optique un point devrait être transformé en 1 point image (télescope, μscope) mais en fait c'est une tache qu'on observe (limitation du pouvoir séparateur angle minimal entre 2 pts résolus)

Remarque : En réalité l'impulsion "mathématique" est inapplicable sur un système physique réel compte tenu de l'Amplitude ∞ : (limite à la linéarité, destruction, limite de Valim)
On identifie plutôt un système par l'intégration de $\delta(t)$: Echelon de Heaviside

(β) Indice ou échelon de Heaviside



On montrera que :
$$s_u(t) = \int_0^t h(t)\,dt$$
En pratique c'est ainsi que l'on détermine $h(t) = \frac{d\,s_u(t)}{dt}$

En mesure, intérêt car :
$$H(j\omega) = \mathcal{L}\, h(t) = \mathcal{L}\,\frac{d\,s_u(t)}{dt} = p \cdot \mathcal{L}\, s_u(t)$$

(γ) Signal de rampe :

provient de l'intégration de l'échelon : Utilisé en pratique pour "aligner" la fonction dérivée des régulateurs : P.I.D

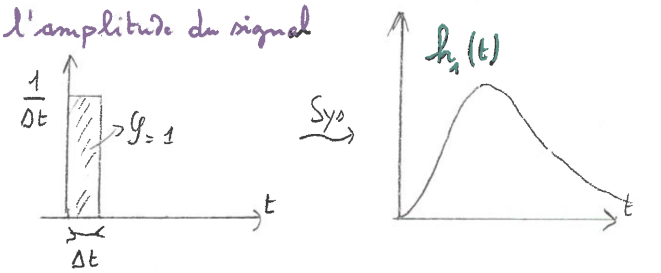
IV.A.3) Réponse temporelle par l'équation de convolution

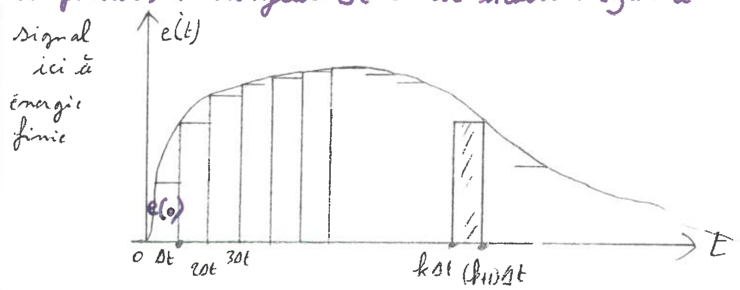
a) Position du Pb : Ayant au préalable enregistré (ou déterminé) la réponse impulsionnelle d'un système on recherche un traitement simple, exclusivement propre au domaine temps, permettant de simuler (à t présent) en temps réel l'expression du signal de sortie, pour un signal d'entrée donné

(Remarque : ttes les déterminations par le D fréquence demandant l'histoire totale du signal ($\forall t$) pour 1pt fréquence)

b) modélisation du signal d'entrée

Un signal d'entrée $e(t)$ peut se décomposer en une suite d'impulsions de largeur Δt et de hauteur égale à l'amplitude du signal





Soit $h_1(t)$ la réponse à une impulsion de surface unité telle que : largeur Δt, hauteur $1/\Delta t$

alors $(h_1(t)\cdot\Delta t)$ est la réponse à une impulsion telle que : largeur Δt, hauteur unité

Donc pour une amplitude $e(0)$ à t initial : $s_0 = \underbrace{e(0)}_{\text{amplitude de } e(t) \text{ pour le 1° échantillon}} \cdot \underbrace{h_1(t)\cdot\Delta t}_{\text{réponse au pulse de largeur } \Delta t\text{, hauteur unité}}$

c) Eq. de convolution

De la même manière en $t = \Delta t$ pour l'échantillon suivant :

$$s(\Delta t) = e(\Delta t)\cdot h_1(t-\Delta t)\cdot\Delta t$$

Soit au cours du temps :

$$\left.\begin{aligned} s(0) &= e(0)\cdot h_1(t)\cdot\Delta t \\ s(\Delta t) &= e(\Delta t)\cdot h_1(t-\Delta t)\cdot\Delta t \\ s(k\cdot\Delta t) &= e(k\cdot\Delta t)\cdot h_1(t-k\Delta t)\cdot\Delta t \end{aligned}\right\}$$

le système étant linéaire, on peut lui appliquer le théorème de superposition et la sortie est la somme des contributions de chaque $e(k\Delta t)$ jusqu'à t considéré

$$s(t) = \sum_0^{l} s(k\cdot\Delta t) = \sum_0^{l} e(k\cdot\Delta t)\cdot h_1(t-k\cdot\Delta t)\cdot\Delta t$$

où $l = \frac{t}{\Delta t}$ le n° d'échantillon associé au temps t

Lorsque $\Delta t \to 0$; $h_1(t)$ tend vers la réponse au signal de Dirac (à surface unité) : La somme discrète tend vers l'intégrale dite de convolution :

$$\boxed{s(t) = \int_0^t e(\tau)\cdot h(t-\tau)\cdot d\tau}$$

où la variable muette τ est un temps "courant" pour le signal d'entrée "contre courant" pour la réponse impulsionnelle

Compte tenu de la causalité du système on peut aussi écrire

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau$$

$+\infty \to$ en $\tau > t$ $e(\tau)$ n'existe pas encore

la somme discrète peut comporter $\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e(k\Delta t)\cdot h_1(t-k\Delta t)\cdot\Delta t$

$h_1(t<0) = 0$ par causalité $\Rightarrow h_1(t-k\Delta t) \equiv 0$ pour $k\Delta t > t$ ou $t < k\Delta t$

On écrit symboliquement l'Eq. de Convolution : $s(t) = e(t) * h(t)$ $*$ opérateur de convolution

$*$ est commutatif, associatif, distributif

$a(t) * [b(t) + c(t)] = a(t) * b(t) + a(t) * c(t)$ } en raison de la linéarité du système

IV · B] Circuits et systèmes dans le domaine fréquence

IV · B · 1) Une vision de la problématique

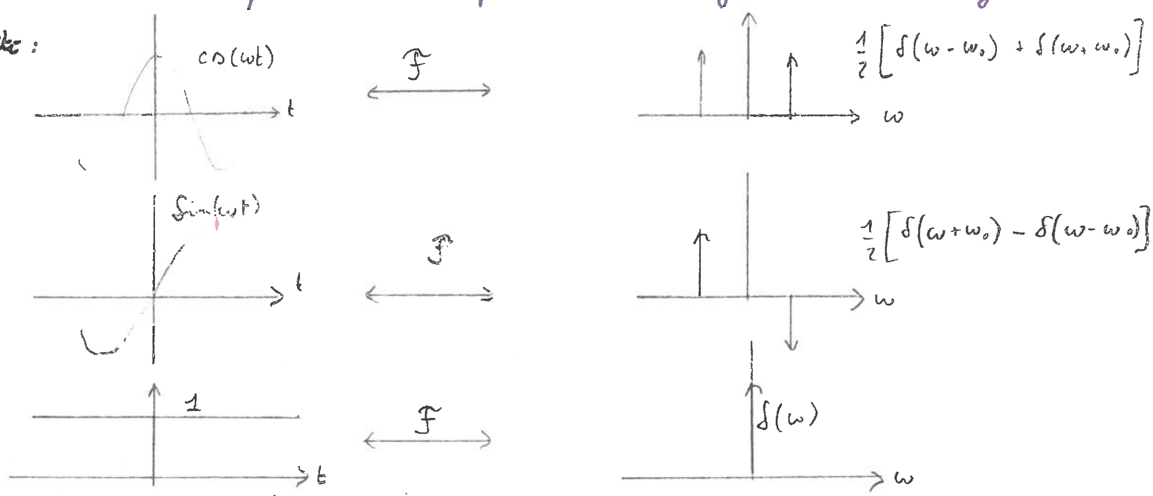
Les systèmes sollicités par des signaux périodiques ⇒ analyse harmonique

La non périodicité d'un signal conduit à étendre le développement de Fourier (discret, spectre de raies séparées par Δf = fondamentale = $\frac{1}{T_{\text{période de récurrence}}}$) : si $T \to \infty$ le spectre devient continu et la recherche d'un point fréquence résulte de la transformée de Fourier } $\mathcal{F}_\omega(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$

L'outil est très évolué si l'on ne considère plus des fonctions mais des distributions

En effet, l'écriture en tant que telle ne traite pas directement $f(t) = \sin \omega t$ et $g(t) = \cos \omega t$

En réalité :



Remarque : $\mathcal{F}^{-1}$: $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega$

IV · B · 2) Analyse par la transformation de Laplace : généralités et définition

Les systèmes physiques étant causaux, on s'intéresse à une transformée D t → D fréq où les signaux sont causaux : La convergence est forcée artificiellement par un facteur d'atténuation réel noté α

Remarque : L'idée sous-jacente des transformations $t \leftrightarrow f$ consiste à associer un point fréq à toute l'histoire $\forall t$ du signal, et réciproquement de restituer un point temps compte tenu de tout le spectre fréquentiel

↘ cf Mme p 17 filtrage ∞ sélectif

Hypothèses : le signal $f(t)$ est causal ⇒ $t < 0 \Rightarrow f(t) = 0$ et $t \geq 0$ $f(t)$ quelconque

Notant p la variable de Laplace : $p = \alpha + j\omega$ $\quad f(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} F(p)$

$$\boxed{F(p) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt}$$

Laplace ne conserve pas l'unité si $f(t)$ en V $F(p)$ en Vs

La transformation inverse peut s'exprimer : $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) \cdot e^{pt} \cdot dp = \mathcal{L}^{-1} F(p)$

Il est de loin plus aisé d'utiliser une table des divers transformations que de recourir au calcul direct

IV.B.3) Rappel des propriétés fondamentales de la transformée de Laplace

a) Propriété physique fondamentale

On admettra dans un premier temps, et c'est tout l'intérêt de la transformation de Laplace que si $h(t)$ est la réponse impulsionnelle, alors $H(p)$ est la fonction de transfert

$$h(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} H(p)$$

en identifiant $p \leftrightarrow j\omega$; principe de la transformation temps fréquence

régime isomorphe → régime sinusoïdal

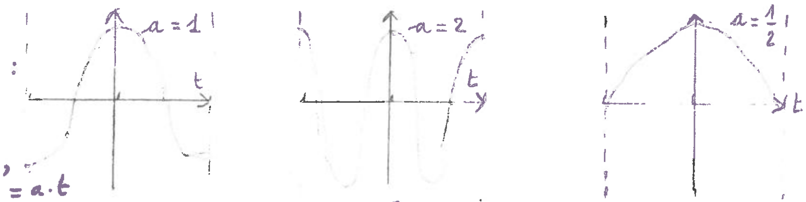
b) Propriétés mathématiques de base (6)

1] Linéarité de la transformation : $\quad \mathcal{L} f(t) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} \cdot dt$

$$\mathcal{L}\left[\sum a_i \cdot f_i(t)\right] = \int_0^\infty \sum a_i \cdot f_i(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt = \sum a_i \cdot \int f_i(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt = \sum a_i \cdot \mathcal{L} f_i(t)$$

2] Changement de l'échelle du temps

soit $t' = a \cdot t$ soit en visualisant :



$a \Leftrightarrow$ vitesse de relecture après enregistrement

soit $\mathcal{L} f(t') = \int_0^\infty f(a \cdot t) \cdot e^{-pt} \cdot dt$ avec $t' = a \cdot t$

$$= \int_{0/a}^{\infty/a} f(t') \cdot e^{-p \cdot \frac{t'}{a}} \cdot d\frac{t'}{a} = \frac{1}{a} \int_0^\infty f(t') \cdot e^{-\frac{p}{a} \cdot t'} \cdot dt' = \frac{1}{a} \mathcal{L}[f(t)]_{\frac{p}{a}}$$

D'où si $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p)$

alors $f(a \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{p}{a}\right)$

un étalement dans le domaine temps (vision grand angle du signal) conduit à une contraction (zoom) dans le domaine fréquence

Remarque : il faut $a > 0$ sinon le chgt de variable avec bornes $\int_0^{-\infty}$ pas défini pour la transformée de Laplace

3] Translation du signal dans le temps

Le signal $f(t)$ passe dans une ligne à retard et devient $f'(t) = f(t - t_0)$: Transfo du New signal ?

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^\infty f(t-t_0) \cdot e^{-pt} \cdot dt = \int_0^\infty f(t-t_0) \cdot e^{-p(t - t_0 + t_0)} \cdot d(t-t_0)$$ avec $d(t-t_0) = dt$

$$= e^{-pt_0} \cdot \int_0^\infty f(t-t_0) e^{-p(t-t_0)} \cdot d(t-t_0)$$

$$\mathcal{L}(f(t-t_0)) = e^{-pt_0} \cdot \mathcal{L}(f(t)) = e^{-p \cdot t_0} \cdot F(p) \qquad f(t-t_0) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} e^{-pt_0} \cdot F(p)$$

4] Translation du signal en fréquence : Décalage spectral

Soit à rechercher la transformée en un point décalé de ω_0 soit $p' = p - p_0$ et recherche de $F(p')$

$$F(p - p_0) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-(p-p_0)t} \cdot dt = \int_0^\infty e^{p_0 \cdot t} \cdot f(t) \cdot e^{-pt} dt$$

Soit $F(p - p_0) = \mathcal{L}\left[e^{p_0 \cdot t} \cdot f(t)\right]$

Sens physique :
Une modulation du signal à la fréquence ω_0 conduit à une translation du spectre de ω_0

Heaviside (Londre : 1850 - 1925)
Baron Joseph Fourier (Auxerre : 1768 - 1830)
Marquis Pierre Simon Laplace (: 1749 - 1827)

Remarque : les propriétés 5] et 6] sont respectivement définies quant aux transformations des dérivées et intégrales d'un signal : Ce sont les 2 propriétés qui justifient l'emploi du calcul symbolique de Heaviside (dite méthode de Laplace)

Les éq. de comportement des systèmes sont souvent des éq. différentielles : Dans le domaine Fréquence ces éq. se transforment en équations polynomiales plus faciles à résoudre

5] Transformée de la dérivée d'un signal

Hypothèse mathématique restrictive : On suppose la convergence des calculs pour les signaux physiques envisagés

$f(t)$ causale

$f(t)$ converge à l'∞
$f'(t)$ converge à l'∞
} malgré la précaution $p = \alpha + j\omega$ $\alpha > 0$ forçant la convergence

Méthode : On exprime la transformée de la dérivée en exprimant par partie la transformation de Laplace

$$\mathcal{L} f(t) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt = -\frac{1}{p} \int_0^\infty f(t) \cdot d\, e^{-pt}$$

$$\int f\, dg = f g - \int g \cdot df$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{p} \left[f(t) \cdot e^{-pt} \right]_0^\infty}_{\text{à } t \to \infty \text{ avec } \alpha > 0 \to 0} + \frac{1}{p} \int e^{-p \cdot t} \cdot d f(t) \quad \text{avec } d f(t) = f'(t) \cdot dt \text{ par déf d'une différentielle}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{p} \cdot f(0^+) + \frac{1}{p} \int_0^\infty f'(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{p} f(0^+) + \frac{1}{p} \mathcal{L} f'(t)$$

Il en découle l'importante propriété

$$\boxed{\mathcal{L} f'(t) = p \cdot \mathcal{L} f(t) \ominus f(0^+)}$$

} si à l'origine le signal est nul, la transformée de la dérivée est le simple produit de $p \ast$ la transformée

Corollaire ; Si toutes les dérivées sont sommables et nulles à l'origine jusqu'à l'ordre m

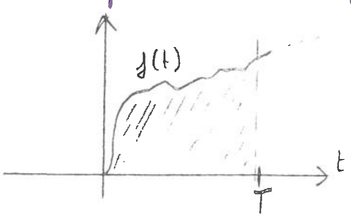
$$\mathcal{L} f^{(m)}(t) = p^m \cdot \mathcal{L} f(t)$$

Si l'on a pas la condition de nullité à l'origine alors :

$$\mathcal{L} f^{(m)}(t) = p^m \cdot \mathcal{L} f(t) - p^{(m-1)} \cdot f(0^+) - p^{(m-2)} \cdot f'(0) \cdots - p^{(m-n)} \cdot f^{(n)}(0^+) \qquad (n < m)$$

6] Transformée de l'intégrale d'un signal

Propriété : Si un signal $f(t)$ est causal, son intégration (signal intégral) l'est aussi à fortiori



soit $g(T) = \int_0^T f(t)\, dt$ avec $f(t)$ causale c.a.d $f(t) = 0$ si $t < 0$

pour $t < 0$ la surface sous la courbe est nulle $\Rightarrow$ | 1) $g(T)$ est causale
| 2) $g(0^+) = 0$

si $f(t)$ ne présente pas de singularité à l'origine alors $g(T)$ est causale et continue avec $g(T) = \int_0^{t=T} f(t)\,dt \qquad g'(t) = f(t)$

On applique le théorème de la transformée de la dérivée vu précédemment soit $\mathcal{L}f'(t) = p.\mathcal{L}f(t) - f(0^+)$

soit $\mathcal{L}g'(t) = \mathcal{L}f(t) = p\mathcal{L}.g(t) - 0$

d'où :
$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{p}.\mathcal{L}f(t)$$

L'intégration dans le domaine temps est équivalente à la division par $(p) = j\omega$ ds le domaine fréquence

7] Propriété annexe : Dérivée en p de la transformée

Rappel : la propriété de dérivabilité de réels s'étend au corps des complexes en propriété d'holomorphie

Soit $\mathcal{L}f(t) = F(p) = \int_0^\infty f(t).e^{-pt}.dt \qquad F(p)$ holomorphe $\quad p = \alpha + j\omega$

On recherche $\dfrac{d(F(p))}{dp} = \int_0^\infty f(t).(-t).e^{-pt}dt \quad \Big\} \quad \dfrac{dF(p)}{dt} = \mathcal{L}\left((-t).f(t)\right)$ et par extension

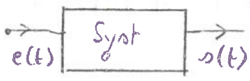
$$\frac{d^mF}{dp^m} = \mathcal{L}\left[(-t)^m.f(t)\right]$$

A la multiplication par t de f(t) la transformée de Laplace associe la dérivation en p

IV.B.3.c) Le théorème de Borel-Plancherel

La Transf. de Laplace relie le domaine temps et fréquence. D'autre part ds le D. temps uniquement les signaux d'entrée et de sortie sont reliés par l'éq. de convolution : $s(t) = \int_0^t e(\tau).h(t-\tau)d\tau$

$s(t) = e(t) * h(t)$



Notons $E(p) = \mathcal{L}e(t)$ et $H(p) = \mathcal{L}h(t)$ } On appellera fonction de transfert la transformée de la réponse impulsionnelle

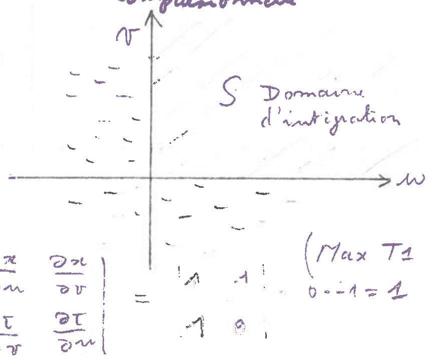
Soit à étudier, dans le D. fréquence le produit $E(p).H(p)$

$E(p).H(p) = H(p).E(p) = \mathcal{L}(h(t)).\mathcal{L}(e(t))$

$= \int_0^\infty h(\omega)e^{-p.\omega}d\omega . \int_0^\infty e(v).e^{-pv}dv$

avec ω et $v > 0$ variables muettes

$= \iint_S h(\omega).e(v)\,e^{-(\omega+v)p}.d\omega.dv$



on pose $\omega + v = x$, $v = \tau$ } On suppose le changement de variable réalisable sans aborder le Pb du calcul du Jacobien $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \omega} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial \tau}{\partial v} & \frac{\partial \tau}{\partial \omega} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ (Max T1 p108) $0 - 1 = 1$

$E(p).(H(p)) = \iint_{S'} h(x-\tau).e(\tau).e^{-px}.dx.d\tau \qquad$ avec $h(x-\tau) = 0$ si $x < \tau$ soit $x > \tau$

$= \int_0^\infty \left[\int_0^x h(x-\tau).e(\tau).d\tau\right].e^{-px}.dx$ (avec $\tau < x$) → On reconnait l'Eq. de convolution

D'où

$E(p).H(p) = \mathcal{L}\left(e(t) * h(t)\right) = \mathcal{L}(s(t)) = S(p)$ } ⇒ Domaine Fréq : $S(p) = E(p) . H(p)$

Domaine temps : $s(t) = e(t) * h(t)$ ($\Updownarrow\mathcal{L}$)

Conclusion : A l'opération de convolution dans le domaine temps, la transformation de Laplace associe la multiplication dans le domaine fréquence

En résumé le Théorème de Borel-Plancherel peut s'exprimer :

$$e(t) * h(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} E(p)\cdot H(p)$$

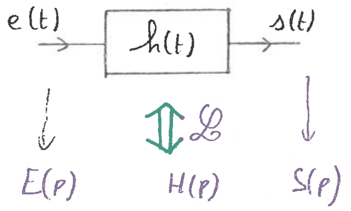
On montre de même que formellement

$$x(t)\cdot y(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} X(p) * Y(p)$$

Produit temporel $\underset{\mathcal{L}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}}$ Opérateur de Convolution

IV.3.3.d) Le Théorème de Borel Plancherel et son application aux systèmes physiques

Les systèmes physiques opèrent par convolution dans le domaine temps
et opèrent par multiplication dans le domaine fréquence



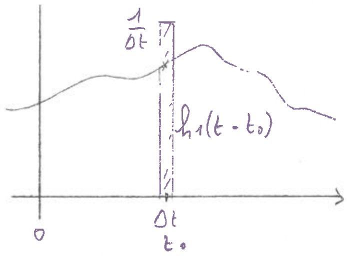
$s(t) = e(t) * h(t)$ — la sortie égale l'entrée convoluée à la réponse impulsionnelle

$S(p) = E(p)\cdot H(p)$ — Le spectre de sortie égale le produit simple du spectre d'entrée par la fonction de transfert

o Cas particulier fondamental : $e(t)$ = Impulsion de Dirac $\delta(t)$

D'une manière générale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot\delta(x-x_0)\cdot dx = f(x_0)$

$$= \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t_0)\cdot\frac{1}{\Delta t}\cdot\Delta t$$



D'où la transformée de l'impulsion

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = \int_0^{\infty} \delta(t)\cdot e^{-pt}\cdot dt \equiv \left(e^{-p\cdot 0^+}\right) = 1$$

par conséquent :

$$\mathcal{L}^{-1}(S(p)) = s(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(p)) = h(t)$$

Si $e(t) = \delta(t)$ alors $E(p) = 1$

Soit $S(p) = E(p)\cdot H(p) \Rightarrow S_\delta(p) = H(p)$

On a bien par conséquent $\boxed{h(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} H(p)}$

la fonction de transfert du système est la transformée de la réponse impulsionnelle

$\delta(t)$ ayant 1 pour transformée montre la particularité de ce signal qui contient toutes les fréquences du spectre : du Régime Permanent aux plus HF : en terme d'analyse harmonique chaque point fréquence $(p=j\omega)$ entrant à valeur unité ressort à valeur $H(p)$

Sur le plan pratique impossibilité des systèmes physiques à réagir linéairement à l'amplitude $\to\infty$ d'une impulsion de largeur $\to 0$: Dirac ne constitue qu'une idéalisation mathématique

En termes de mesures on travaille le comportement du système par la mesure d'une réponse indicielle

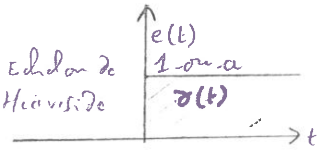
II. B. 4) Caractérisation des circuits et systèmes par la mesure de leur réponse indicielle : Identification des systèmes

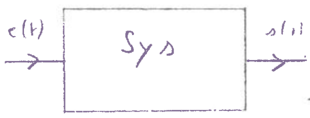
Ayant vu les contingences restrictives de mesure de la réponse impulsionnelle on voudrait cependant déterminer $h(t)$ sans imposer $\delta(t)$

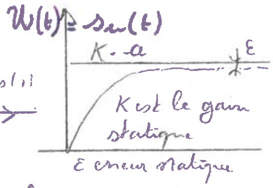
Il est en effet stratégique de connaître $h(t)$ car $h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} H(j\omega)$ } connaissance de la fonction de transfert, sans procéder à l'analyse harmonique

La réponse indicielle permet de revenir à $h(t)$

- **Mode opératoire :**



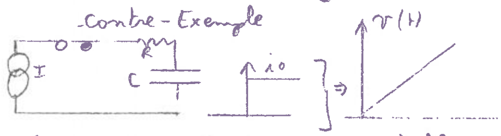




Si le système ne supprime pas la composante continue, K est le gain statique soumis à l'échelon unité

Hypothèse : Stabilité du système au sens où la réponse à un signal d'énergie finie est à énergie finie

Contre-Exemple



le système intégrateur est instable

En pratique, l'échelon n'est pas à valeur unité, mais le système est linéaire

- **Détermination formelle**

Notons $U(p)$ la réponse indicielle ds le domaine fréquence : $U(p) = S_u(p) = E(p) \cdot H(p)$ ↳ noté $\Gamma(p) = \mathcal{L}(\gamma(t))$

connaître $U(p) \Rightarrow$ calcul de $\Gamma(p)$ transformée de Laplace de $\gamma(t)$

$$\mathcal{L}(\gamma(t)) = \int_0^\infty \gamma(t) \cdot e^{-pt}\, dt = -\frac{1}{p}\left[e^{-pt}\right]_0^\infty = 1/p \Rightarrow \underset{\text{réponse indicielle en p}}{U(p)} = \frac{1}{p} \cdot H(p) \quad (1)$$

On dispose maintenant d'une relation accédant à $h(t)$ au moyen de la réponse indicielle

$$(1) \Rightarrow \quad H(p) = p \cdot U(p) \quad \Rightarrow \text{par } \mathcal{L}^{-1} \; ; \quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}[p \cdot U(p)]$$

Le théorème de la transformée de la dérivée exprime :

$$\mathcal{L}(f'(t)) = p \cdot \mathcal{L}(f(t)) - f(0^+)$$: Si le système est au repos initialement $f_{0^+} = 0$ $\quad \mathcal{U}(0) = 0$

D'où :

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[p \cdot U(p)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left(\frac{d\,\mathcal{U}(t)}{dt}\right)\right] \Rightarrow \boxed{h(t) = \frac{d\,\mathcal{U}(t)}{dt}}$$

Identification par exploitation de la réponse indicielle

La réponse impulsionnelle est égale à la dérivée de la réponse indicielle : Une réponse indicielle se mesure facilement et ne pose pas le problème de non linéarité

L'expression directe de la recherche de $U(p)$, réponse indicielle en p fait l'objet des méthodes d'identification : (En Automatique linéaire : modèle de BROIDA, STREJC)

- De manière générale : si $s(t) = e(t) * h(t)$ on définit le principe d'une déconvolution que l'on écrit $e(t) = s(t) \,\bar{*}\, h(t)$ ou $h(t) = s(t) \,\bar{*}\, e(t)$ } Mais les Eq. de déconvolution n'ont pas toujours de solution ou en possèdent une infinité

l'identification n'est pas souvent réalisable car $s(t)$ et $e(t)$ résultent de mesures entachées d'erreur ⇒ divergence ou oscillation de solution

- propriété réciproque : La réponse indicielle est définie par l'intégrale de la réponse impulsionnelle

En effet selon (1) : $\mathcal{L}\,\mathcal{U}(t) = U(p) = E(p)\cdot H(p) = \frac{1}{p}\cdot H(p)$

Soit $\mathcal{U}(t) = \mathcal{L}^{-1}\,\frac{1}{p}\cdot H(p)$

avec d'autre part le théorème sur la transformée de l'intégrale $\mathcal{L}\int_0^t f(t)\,dt = \frac{1}{p}\cdot\mathcal{L}f(t)$

soit $\frac{1}{p}\,H(p) = \frac{1}{p}\cdot\mathcal{L}\,h(t) = \mathcal{L}\int_0^t h(t)\,dt$

d'où $\mathcal{U}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}\left(\int_0^t h(t)\,dt\right)\right) \Rightarrow \mathcal{U}(t) = \int_0^t h(t)\,dt$

IV.B.5) Transformées de Laplace essentielles

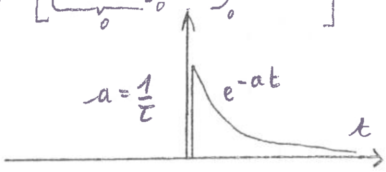
a) Dirac : déjà calculée $\rightarrow \mathcal{L}(\delta) = 1$

b) Echelon de Heaviside : déjà calculée : $\frac{1}{p}$ c'est aussi : $\mathcal{U}(t) = \int^{\infty}\delta(t)\,dt \Rightarrow \frac{1}{p}\,\mathcal{L}\delta(t) = \frac{1}{p}$ $\rightarrow \mathcal{L}\,\mathcal{U}(t) = \frac{1}{p}$

c) Rampe de pente a $f(t)=(at)$: c'est l'intégrale de $a\cdot\mathcal{U}(t) \Rightarrow \frac{1}{p}\cdot a\cdot\frac{1}{p}$ $\rightarrow \mathcal{L}(at) = \frac{a}{p^2}$

sinon : $\int_0^{\infty}(at).e^{-pt}\,dt = -\frac{a}{p}\int_0^{\infty} t\,d\,e^{-pt} = -\frac{a}{p}\left[\underbrace{\left[t\,e^{-pt}\right]_0^{\infty}}_{0} - \int_0^{\infty} e^{-pt}\,dt\right] = \frac{a}{p}\left[-\frac{1}{p}\,e^{-pt}\right]_0^{\infty} = -\frac{a}{p^2}(0-1) = \frac{a}{p^2}$

d) Signal amorti causal : $f(t) = \mathcal{U}(t)\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ $a = \frac{1}{\tau}$



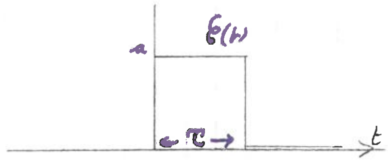
$\mathcal{L}(e^{-at}) = \int_0^{\infty} e^{-at}.\,e^{-pt}.dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+p)t}\,dt = \frac{-1}{a+p}\left[e^{-(a+p)t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{a+p}$

$\rightarrow \mathcal{L}\,e^{-at} = 1/(a+p)$

soit $\mathcal{L}\,e^{-at} = \frac{1}{a+p}$ et si $a = \frac{1}{\tau}$ $\mathcal{L}\,e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{\frac{1}{\tau}+p} = \tau\cdot\frac{1}{1+\tau p}$

$\rightarrow \mathcal{L}\,e^{-\frac{t}{\tau}} = \tau\cdot\frac{1}{1+\tau.p}$

e) Signal créneau de durée τ amplitude a

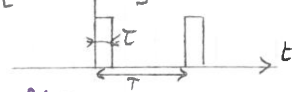


$\mathcal{L}\,\mathcal{E}(t) = \int_{+0}^{+\infty}\mathcal{E}(t)\,e^{-pt}\,dt = \int_0^{\tau} a\cdot e^{-pt}\,dt = \frac{-a}{p}\left[e^{-pt}\right]_0^{\tau}$

$= -\frac{a}{p}\left[e^{-p\tau} - 1\right] = \frac{a}{p}\left[1 - e^{-p\tau}\right]$

$\rightarrow \mathcal{L}\,\mathcal{E}(t)_{a\tau} = \frac{a}{p}\cdot(1 - e^{-p\tau})$

f) Signal créneau récurrent de période T



on établit d'abord la transformée de tout signal $f(t)$ récurrent si le motif $m(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} M(p)$

pour le 1er décalage $M_1(p) = e^{-pT}.\,M(p)$ (théorème sur le décalage de le temps)

2ème décalage $M_2(p) = e^{-2pT}.\,M(p)$

Pour toutes les composantes : $F(p) = M(p)\cdot\left(1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \cdots\right)$ avec $1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$

$$\boxed{F(p) = \frac{M(p)}{1 - e^{-pT}}}$$

transformée du signal $f(t)$ périodique de période T ayant $M(p)$ pour transformée de motif

Pour le motif créneau $M_{\mathcal{E}}(p) = \frac{a}{p}\cdot(1 - e^{-p\tau}) \Rightarrow$ signal périodique $\Rightarrow \mathcal{L}(s) = \frac{a}{p}\cdot\frac{1 - e^{-p\tau}}{1 - e^{-pT}}$

2) signaux sinus et cosinus causaux

Compte tenu de la transformée du signal amorti causal $\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{p+a}$

on pose $a = +j\omega \Rightarrow e^{-at} \longrightarrow 1/_{p+j\omega}$

$b = -j\omega \Rightarrow e^{-bt} \longrightarrow 1/_{p-j\omega}$

$e^{j\omega t} = e^{-bt} = \cos\omega t + j \sin\omega t$

$e^{-j\omega t} = e^{-at} = \cos\omega t - j\sin\omega t$

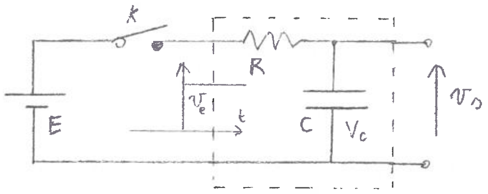
Σ et Δ

$\Sigma \Rightarrow \cos\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega}\right] = \frac{p}{p^2+\omega^2} = \mathcal{L}(\cos\omega t\cdot\gamma(t))$

$\Delta \Rightarrow \sin\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega}\right] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} = \mathcal{L}(\gamma(t)\cdot\sin\omega t)$

II·B·6) Application de Laplace à l'étude de circuit en régime transitoire

a) cellule d'intégration RC



o Réponse indicielle ds le domaine temps

Après fermeture de K : $E = R\cdot i(t) + V_c = R\cdot i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\cdot dt$

que l'on écrit en dérivant en $(0^+ = t)$ $R\cdot\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C} = 0$ ou $\frac{di(t)}{dt} + \frac{i}{RC} = 0$ } Eq. du 1er ordre à coeff constant $\Rightarrow$ Syst. du 1er ordre

Solution générale $i(t) = i_0 e^{-t/\tau}$

satisfait la condition limite $t \to 0$ $i(0^+) \to i_0 = \frac{E}{R}$ } $i(t) = \frac{E}{R}\cdot e^{-t/\tau}$ d'où $v_s = V_c = E - R\,i(t) = E - E\cdot e^{-t/\tau}$

Soit $v_s = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ réponse indicielle de la cellule RC

o Réponse indicielle ds le domaine temps par la méthode de Laplace

L'interrupteur $\Rightarrow$ indice de tension $\Rightarrow$ $\gamma(t)\cdot E = R\cdot i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\cdot dt$ } Recherche de $i(t) \Rightarrow$ on divise par R Puis on applique Laplace

D'où $\frac{1}{p}\cdot\frac{E}{R} = I(p) + \frac{1}{RC}\cdot\frac{1}{p}\cdot I(p) = I(p)\cdot\left(1+\frac{1}{\tau p}\right)$ } $\Rightarrow I(p) = \frac{E}{R}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\tau p}\right)} = \frac{E}{R}\cdot\frac{1}{\left(p+\frac{1}{\tau}\right)}$

Compte tenu de la Transformée du signal amorti causal $\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{a+p} = e^{-at} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R}\cdot e^{-t/\tau}$

Soit comme précédemment $v_s = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

o Réponse indicielle par la méthode de Laplace appliquée à la fonction de transfert

La fonction de transfert s'exprime $\frac{V_s(j\omega)}{V_e(j\omega)} = H(\omega) = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} = \frac{1}{1+jRC\omega} \Rightarrow H(p) = \frac{1}{1+\tau p}$ } transformée de la réponse impulsionnelle

La transformée de la réponse indicielle étant transformée de l'intégration de $h(t)$ } $U(p) = \frac{1}{p}\cdot H(p) = \frac{1}{p(1+\tau p)}$ } avec $U(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p(1+\tau p)}$

avec $\frac{\tau}{1+\tau p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-t/\tau} \Rightarrow \frac{1}{1+\tau p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{\tau}\cdot e^{-t/\tau}$ et $\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{(1+\tau p)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \int_0^t \frac{1}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}dt = \frac{1}{\tau}\cdot(-\tau)\left[e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^t = -1\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right)$

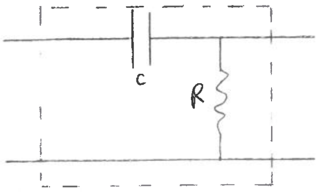
réponse à l'indice de 1 volt : $U(t) = 1\cdot\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ ◇

Nous avons mis en évidence la transformée remarquable suivante :

$$\mathcal{L}\left(\gamma(t)\cdot\left[1 - e^{-t/\tau}\right]\right) = \frac{1}{p} - \frac{\tau}{(1+\tau p)} = \frac{1+\tau p - \tau p}{p(1+\tau p)} = \frac{1}{p(1+\tau p)}$$

Remarque : La fonction de transfert $H(p) = \frac{1}{1+\tau p}$ pour $\tau p \gg 1 \rightarrow \frac{1}{\tau}\cdot\frac{1}{p} = \text{cte}\cdot\frac{1}{p}$ { d'où la terminologie cellule d'intégration

b) cellule de dérivation : traitement par la fonction de transfert pour identifier la réponse indicielle



$$H(p) = \frac{R}{R + 1/jC\omega} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{\tau p}{1 + \tau p}$$

pour $\tau p \ll 1$

$H(p) \to \tau \cdot p$ dérivateur pur

$H(p)$ est la transformée de la réponse impulsionnelle

$U(p)$ transformée de la réponse indicielle : $U(p) = \frac{1}{p} \cdot H(p)$

$$U(p) = \frac{\tau}{1+\tau p} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \frac{\tau}{1+\tau p} = e^{-t/\tau}$$ pour un indice de 1 Volt

$\mathcal{U}(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ réponse à un indice de E volt

c) Exemple de recherche d'une réponse à un signal de rampe : pour le circuit RC intégrateur

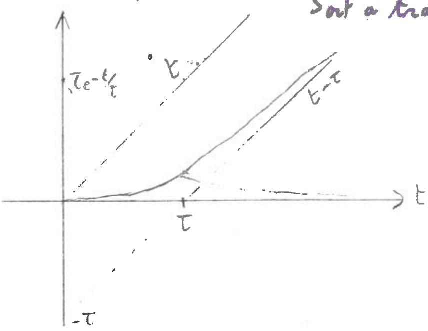
soit $e(t) = a \cdot t \Rightarrow E(p) = \frac{a}{p^2}$ avec $H(p) = \frac{1}{1+\tau p}$ et $S(p) = E(p) \cdot H(p)$

soit $S(p) = a \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{(1+\tau p)}$

Avec $\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{p(1+\tau p)} = 1 - e^{-t/\tau} \Rightarrow \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p(1+\tau p)} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\rightsquigarrow} \int_0^t (1 - e^{-t/\tau})\, dt = t - \int_0^t e^{-t/\tau} dt = t - \left(-\tau\left[e^{-t/\tau}\right]_0^t\right) = t - \left(-\tau(e^{-t/\tau} - 1)\right)$
$= t - \left(\tau(1 - e^{-t/\tau})\right)$

D'où $\mathcal{L}^{-1} \frac{a}{p^2(1+\tau p)} = a\left(t - \tau + \tau \cdot e^{-t/\tau}\right)$

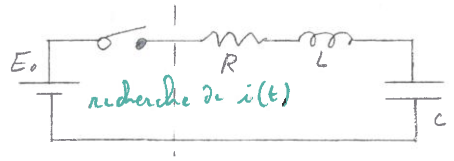
Soit à tracer l'évolution pour $a = 1V/sec$ ($s(t)$ en Volts)



$s(t) \equiv (t - \tau) + (\tau\, e^{-t/\tau})$

on peut s'aider en considérant les conditions limites

$t \to 0 \Rightarrow s(t) \to 0 \qquad t \to \infty \Rightarrow s(t) \rightsquigarrow t - \tau$, droite asymptotique



d) Réponse indicielle du circuit RLC série

signal d'entrée : indice de tension
signal de sortie : courant $i(t)$

$$I(p) = \frac{E(p)}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$ avec $E(p) = \frac{1}{p}$ $\quad I(p) = \frac{E_0}{p\left(R + Lp + \frac{1}{Cp}\right)}$

$$I(p) = \frac{E_0}{L} \frac{1}{\left(p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC}\right)} \equiv \frac{E_0}{L} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{(p+a)\cdot(p+b)}\right)}_{K(p)} = \frac{E_0}{L} \cdot \left(\frac{A}{(p+a)} + \frac{B}{(p+b)}\right)$$

$\lim_{p \to -a} K(p) \cdot (p+a) = A = \frac{1}{(b-a)}$

$\lim_{p \to -b} K(p) \cdot (p+b) = B = \frac{1}{(a-b)}$

D'où $I(p) = \frac{E_0}{L} \frac{1}{(a-b)} \cdot \left[\frac{1}{(p+b)} - \frac{1}{(p+a)}\right] \Rightarrow i(t) = \frac{E_0}{L} \frac{1}{(a-b)} \cdot \left(e^{-bt} - e^{-at}\right)$

avec (a, b) réels ou complexes

$\Delta \geq 0 \Rightarrow R \geq 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Considérant le dénominateur de $K(p)$: si $\Delta = \left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} > 0$ soit $\frac{R}{L} > \frac{2}{\sqrt{LC}}$ alors a et b réels et

$a = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}\right)$

$b = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} - \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}\right)$

$(a-b) = \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}$

$L \cdot (a-b) = \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}$

Soit pour a et b réels $i(t) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 - 4L/C}} \cdot \left(e^{-bt} - e^{-at}\right)$

Si $\Delta < 0 \quad \Delta = -1 \cdot -\Delta$
$\Delta = j^2 \cdot -\Delta \Rightarrow$

$a = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + j\sqrt{\frac{4}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}\right)$

$b = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} - j\sqrt{\frac{4}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}\right)$

$L \cdot (a-b) = j\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}$

$$i(t) = \frac{E_0}{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}} \cdot \frac{1}{j}\left(e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot e^{j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} t} - e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot e^{-j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \cdot t}\right)$$

$$i(t) = \frac{E_0}{\sqrt{\frac{4L - R^2C}{C}}} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \frac{1}{j}\left(e^{j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t} - e^{-j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\cdot t}\right)$$ avec $\frac{1}{j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right) = 2\sin x$

$$i(t) = E_0 \cdot \sqrt{\frac{C}{4L - R^2C}} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot (2) \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2} \cdot t\right)$$

D'où $i(t) = E_0 \cdot \sqrt{\frac{C/L}{1 + \frac{R^2C}{4L}}} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{1 + \frac{R^2C}{4L}} \cdot t\right)$