

## Rappel d'éléments Electrocinétiques

### Chapitre I

#### I.A] Grandeurs électriques fondamentales

Courant électrique dans un matériau [Deluz, (Com) - Analog t2 p 178]

Déf: Courant électrique = Bilan de déplacement de charges internes d'un conducteur

Bilan  $\Rightarrow$  mouvement orienté ordonné des charges libres

Pour un métal les énergies de liaison des électrons des couches périphériques sont faibles :  
Aux températures ordinaires ( $\approx 300K$ ) un  $e^-$  n'est pas rattaché à un atome donné  
et peut se déplacer tout le long du conducteur : Les  $e^-$  sont délocalisés  
Métal  $\Leftrightarrow$  réseau d'ions positifs au sein d'un gaz d'électrons libres

#### 2 façons de réaliser un mouvement ordonné

a) Déplacement du corps chargé de l'espace : on parle de courant de convection

Expérience de Tolmann et Stewart (1916) [Mounic M.  $e^-$  induit, Foucher '55] p 22

Un échantillon métallique lancé à grande vitesse est brusquement stoppé :

Une brève dd p apparaît aux bornes : les auteurs déterminent le rapport  $\frac{e}{m}$   
(charge mérique) Le retour à l'équilibre se produit par choc sur les nœuds  
cristallins devenus immobiles



b) Application d'un champ électrique dans le milieu conducteur : on parle  
alors de courant de conduction (ordonné) le courant est superposé à l'agitation  
thermoinétique des électrons caractérisée vers 300K par une vitesse moyenne  
de l'ordre de 10 km/sec : Entre 2 chocs successifs un  $e^-$  parcourt une distance  
 $\lambda \approx 10^{-10}m$ , le libre parcours moyen (de l'ordre de la période du réseau cristallin)  
Durée moyenne de parcours :  $10^{-14}sec =$  Temps de relaxation

Après chaque choc, { Direction équiprobable  $\Rightarrow \vec{v}_{moy} = 0$  si  $T \gg T_c$   
Pas de déplacement cohérent, macroscopique des charges

#### I.A.1) Porteurs de charges en mouvement cohérent

On applique un champ électrique au conducteur

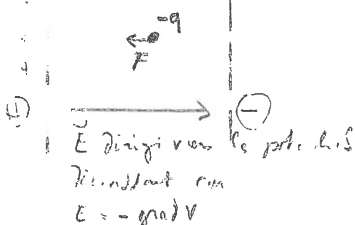
Les  $e^-$  accélérés de la direction opposée au champ : Entre 2 collisions

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = q \cdot E \Rightarrow m \cdot \frac{dv}{dt} = -e \cdot E$$

inertie opposée au déplacement      force pilotée

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} kg$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$$



Il résulte avant la collision suivante un accroissement de vitesse représentatif de la vitesse moyenne cohérente due au champ

$$v_{\text{moy}} = \delta v (dt = \tau) = \boxed{-\frac{e}{m} \cdot \tau \cdot E = v_{\text{moy}}} \quad \text{avec } v \text{ en m/s} \\ E \text{ en V/m}$$

On écrit encore  $v_{\text{moy}} = \mu \cdot E$  avec  $\mu$  mobilité du porteur de charge  $\mu = \frac{m \cdot \Delta^{-1}}{V \cdot m^{-1}} = m^2 \Delta^{-1} V$   
Le conducteur est le siège d'une dérive de l'ensemble de ses électrons

Remarques : . Ordre de grandeur

Dans un conducteur caractérisé par l'application d'un champ  $E$  unitaire 1V/m

$$v_{\text{moy}} = \frac{e \cdot \tau}{m} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-14}}{9,1 \cdot 10^{-31}} \approx \frac{2}{10} \cdot 10^{-33} \cdot 10^{31} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m/s} \\ \Rightarrow 2 \text{ mm/sec} \ll 10 \text{ km/sec}$$

Temps d'établissement  $t_{\text{rise}}$

Le mouvement cohérent apparaît quasiment simultanément en tous les points du conducteur  
le temps est celui d'établissement de  $E$  stationnaire  $t_{\text{rise}} = \frac{L}{c}$  longueur du conducteur  
vitesse de la lumière

$$\text{si } 10 \text{ V/cm} \Rightarrow 2 \text{ cm/sec}$$

$$50 \text{ V} \Rightarrow 10 \text{ m/sec}$$

$$50 \text{ kV} \Rightarrow 10 \text{ km/sec} \Rightarrow 5 \text{ kV/mm}$$

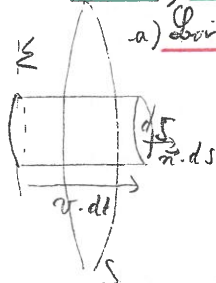
$$\boxed{5 \text{ V/mm}}$$

Un régime variable sur instationnaire pour des périodes proches de  $t_{\text{rise}} \Rightarrow$  comportement d'antenne

## I.A.2) Les lois d'ohm

### a) Loi d'ohm locale

$$n \approx 10^{29} \text{ porteurs/m}^3 \Rightarrow n \cdot e = \frac{\delta q}{\delta V} = -1,6 \cdot 10^{10} \text{ C/m}^3$$



Soit  $n$  le nombre de charge par unité de volume :  $-e \cdot n$  est la charge volumique

La quantité  $dq$  traversant un plan  $\Sigma$  sur une surface  $dS$  est définie par

$$dq = \frac{\delta q}{\delta V} \cdot dV \quad \text{ou le volume } dV = r \cdot dt \cdot dS$$

$$dq = -n \cdot e \cdot r \cdot dt \cdot dS \quad \text{soit } dq \text{ par unité de temps et de surface}$$

$$\frac{dq}{dt} \cdot \frac{1}{dS} = -n \cdot e \cdot \vec{v} = \vec{J} \quad \text{densité de courant en A/m}^2$$

$$\text{D'autre part avec } \vec{v} = -\frac{e}{m} \cdot \tau \cdot \vec{E}$$

$$\vec{J} = -n \cdot e \cdot -\frac{e}{m} \cdot \tau \cdot \vec{E}$$

$$\vec{J} = \frac{n \cdot e^2 \cdot \tau}{m} \cdot \vec{E}$$

$$\text{soit } \boxed{\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}} \quad \begin{matrix} \text{A/m}^2 & \text{V/m} \end{matrix}$$

$$\sigma = \frac{A \cdot m^{-2}}{V \cdot m^{-1}} = \frac{1}{\Omega \cdot m} = (\Omega \cdot m)^{-1}$$

$\sigma$  conductivité électrique du conducteur

Loi d'ohm locale

$$\text{Remarque : Pour une surface globale } S = \iint_S \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad \Delta Q = dt \cdot \iint_S \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad I = \frac{\Delta Q}{dt} = \iint_S \vec{J} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Pour un conducteur de section homogène les lignes de courant sont uniformément réparties, parallèles et l'étude est "monodimensionnelle"

$$I = J \cdot S$$

$$\text{Vis à vis du champ : } \vec{E} = -\vec{\nabla} V \equiv -\frac{\partial V}{\partial l} \quad \text{et } dV = -E \cdot dl \Rightarrow V_B - V_A = \int_A^B -E \cdot dl = -E \int_A^B dl = -E \cdot L \\ |dV| = E \cdot L$$

ou encore:  $\Delta V = E \cdot L$  avec  $J = \sigma E$  et  $J = \frac{I}{\Delta S}$

d'où  $\Delta V = \frac{J}{\sigma} \cdot L = \frac{I}{\sigma \Delta S} \cdot L = \underbrace{\left( \frac{L}{\sigma \Delta S} \right)}_{R \text{ ou } \Omega} \cdot I = R \cdot I$

présentation plus élégante

### 1) Loi d'Ohm pratique

On considère un conducteur de section et surface  $\Delta S$  homogène, et de longueur  $L$ .  
On \* les 2 membres de l'équation locale d'Ohm par le volume du conducteur;

Si  $J = \sigma \cdot E$   $\left( E = \frac{1}{\sigma} \cdot J \right) * (L \cdot \Delta S) \Rightarrow \underbrace{E \cdot L \cdot \Delta S}_{|\Delta V|} = \frac{1}{\sigma} \cdot L \cdot \underbrace{J \cdot \Delta S}_I$

Il vient

$$\Delta V = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{L}{\Delta S} \cdot I$$

relation de proportionnalité entre la d.d.p. mesurable aux bornes d'un conducteur et l'intensité le traversant

$$\Delta V = R \cdot I$$

La constante définit la résistance en Ohm

$$R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{L}{S}$$

avec  $\frac{1}{\sigma} = \rho$  ( $\Omega \cdot m$ ) fonction matériau exclusivement  
 $\frac{L}{S}$  facteur de forme (une forme quelconque  $\neq$  expression complexe)

Remarques: 0 Ordre de grandeur: Câbles 2 TP  $\approx 0,1 \Omega$  Résistance en techn. e-; de  $1 \Omega$  à  $10 M\Omega$

• Pour les conducteurs et plus particulièrement les métaux: si  $T \uparrow$ ,  $\rho \uparrow$

$\rho$  facile donnée en  $\mu\Omega \cdot cm \equiv \Omega \cdot m \cdot 10^{-8}$

propriété mise à profit en Capteurs (Pt 100)

• ... Dans le cas des métaux la conductivité thermique est corrélée avec la valeur de  $\sigma$

	20°C $\rho$ ( $\mu\Omega \cdot cm$ )	$\lambda_{th}$	$\lambda_{el}$	Loi de Wiedemann et Franz (1853)
Ag	1,63	429	699,27	Rapport $\frac{\lambda_{th}}{\sigma_{el}} \approx 6,2 \cdot 10^{-6} \frac{W \cdot \Omega}{K}$
Au	2,2	318	699,6	Verifiée à $\approx 10\%$ pour les métaux
Al	2,67	237	633	
Fe	10,1	80,4	812	$\frac{\lambda_{th}}{\sigma_{el}} = L \cdot T$
Mn	160	7,81	1250	$\hookrightarrow$ et de Lorentz $L = \frac{\pi^2}{3} \cdot \left( \frac{k}{e} \right)^2$
car du Hg	96	8,65	830	$k = 1,38 \cdot 10^{-23} J/K$

• On exprime aussi  $I = G \cdot \Delta V$   $G = 1/R$  est la conductance en  $\Omega^{-1}$  ou Siemens

### I.A.3) Effet Joule

#### a) Loi locale

Soit un porteur  $e^-$  à vitesse  $v_{\text{moy}}$  soumis à la force  $F = q \cdot E = -e \cdot E$

Sur un parcours élémentaire  $dl$  le porteur reçoit une énergie  $\delta W = F \cdot dl = -e \cdot E \cdot dl$

La puissance cédée par l'extérieur et reçue par le porteur  $P = \frac{\partial W}{\partial t} = -e \cdot E \cdot v_{\text{moy}}$

avec  $v_{\text{moy}} = \frac{-e}{m} \cdot T \cdot E$   $P = -e \cdot E \cdot \frac{-e}{m} \cdot T \cdot E$   $P = \frac{e^2 \cdot T}{m} \cdot E^2$

par unité de volume contenant  $n$  électrons la puissance reçue par ces électrons vaut

$\frac{\partial P}{\partial V_{el}} = n \cdot p = \frac{n \cdot e^2 \cdot T}{m} \cdot E^2 = \sigma \cdot E^2 = (\sigma \cdot E) \cdot E = J \cdot E$

$\frac{\partial P}{\partial V_{el}} = \sigma E^2 = J \cdot E$

$\frac{W}{m^3}$

Cette puissance est cédée par collisions avec le réseau cristallin en agitation thermique  
retransmise sous forme de chaleur à l'extérieur: **Phénomène dissipatif totalement inévitable**

Puissance  
Volumique

Cas particulier des Thermorésistances (Pt 100 par exemple)

si  $T \nearrow \rho \nearrow$  avec  $\rho = \frac{1}{\sigma}$  et  $\sigma = \frac{n e^2 \tau}{m}$  soit  $\rho = \frac{1}{\tau} \left( \frac{m}{n e^2} \right)$   $T \nearrow \Rightarrow \tau \searrow$

[Augmentation de la résistivité avec la Température] d'où  $T \nearrow \Rightarrow \rho \nearrow$

### 1) Loi pratique sur la dissipation Joule

Avec  $\frac{\partial P}{\partial V_L} = \vec{J} \cdot \vec{E}$  observé localement considérons un conducteur de section surface  $DS$  homogène et de longueur  $L$  : Volume  $V_L = L \cdot DS$

La puissance Joule dissipée dans le conducteur s'exprime

$$P = \vec{J} \cdot \vec{E} \cdot \Delta V_L = (J \cdot DS) \cdot (E \cdot L) = I \cdot \Delta V \quad \text{Watts}$$

D'où avec la loi d'Ohm pratique  $\Delta V = R \cdot I$

$$P = \frac{(\Delta V)^2}{R} = R \cdot I^2$$

### I.A.4) Remarque sur la circulation de charges électriques

#### I.A.4 a) Courants dans les liquides Milieu aqueux (migration)

Un électrolyte est caractérisé par 2 types de porteurs de charge mobile

les Anions chargés négativement (au contact de la cathode) ou présence

les cations chargés positivement (présence ou chargés au contact anode) se déplacent ds le sens du champ (Vers les potentiels décroissant)

Remarque: Mesure de la conductivité électrique de liquides : (pot de Harned ou 100 Hz)

#### I.A.4 b) Courants dans les gaz

Remarque: en l'absence de gaz, un courant électronique peut circuler : base de lampes principes d'émission : Thermoionique, photoélectronique

En présence de gaz, un champ intense peut déplacer les électrons périphériques

Un plasma est caractérisé par la présence de 3 types de porteurs

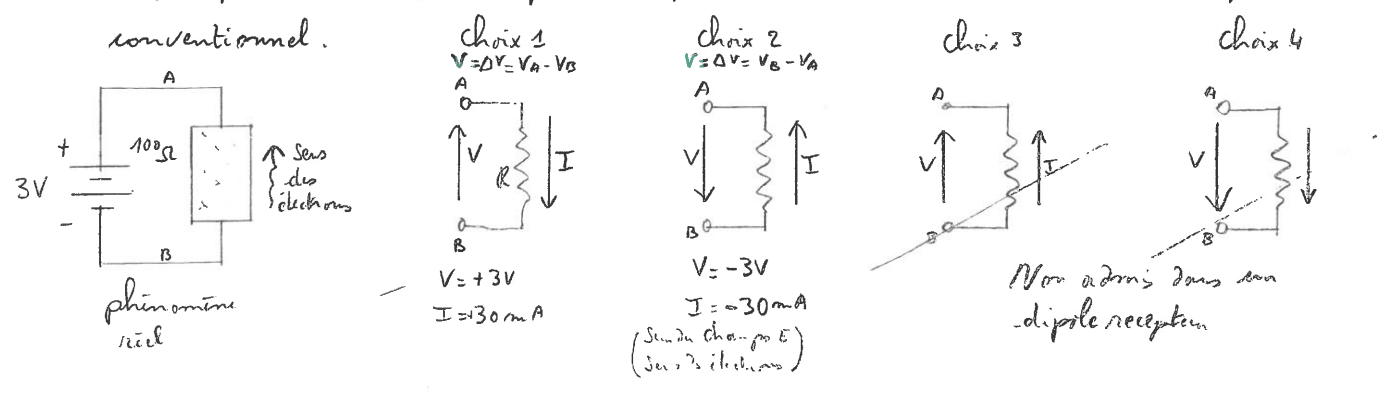
- les électrons, les ions  $\oplus$ , les ions  $\ominus$

Note: En régime stabilisé l'écartement de  $I$  entre électrodes, un volume donné du plasma est globalement neutre

### I.A.5) Les composants de base et leurs équations

#### I.A.5 a) Convention générateur et récepteur

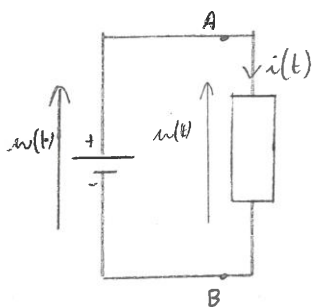
Si l'on souhaite affecter un signe à la tension et au courant les grandeurs définies deviennent algébriques et leur signe indique si la grandeur électrique est ds le même sens que le sens conventionnel.



## Convention générateur et convention récepteur

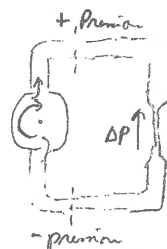
De fait, lorsqu'un générateur alimente un dipôle récepteur la conservation de charge en tout point du circuit est affectée de la règle suivante

Règle : Si un dipôle récepteur présente une  $\Delta p$  à ses bornes matérialisée par une flèche dirigée vers le potentiel le plus élevé, le sens positif du courant est dirigé en sens contraire



Analogie hydraulique

Pompe



Débit Manique conservatif

Résistance

Remarque : Le choix du sens du courant résulte de l'hypothèse initiale que la conduction résultait du mouvement de charges positives

Entre 1895 et 1897 Jean Perrin et JJ Thomson démontrent la charge négative de électrons

[M. Mounic p 12]

Voir l'expérience de Jean Perrin

l'expérience de Millikan (valeur précise de la charge)

$$N_e = 56550 \text{ Coulomb}$$

$$P = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ atome / mole}$$

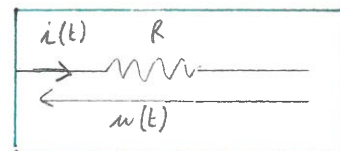
## I.A.5 b) Représentation conventionnelle des lois de fonctionnement des dipôles élémentaires

La famille de dipôles élémentaires comprend : R, C, L

R résistance : loi de fonctionnement : L'Ohm

caractérisée par la synchronicité des évolutions  $i(t)$  et  $u(t)$

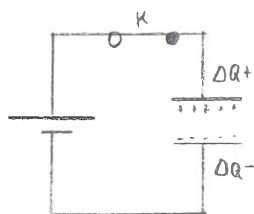
Comportement de totale dissipation énergétique



Convention récepteur

## C Condensateur de capacité C

Capacité à stocker un déséquilibre de charge : Electrodes en regard : phénomène électrostatique



$$\Delta Q = C \cdot \Delta V$$

C / Volt  
Farad

$$C = \epsilon \cdot \frac{S}{e}$$

Farad

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

permittivité du vide

$$\epsilon_r = 3 \text{ polyester}$$

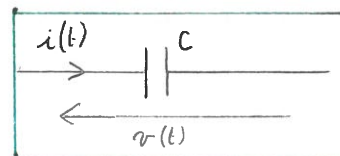
(ε<sub>0</sub> · ε<sub>r</sub> · ε<sub>0</sub> = 1) 11 rangée de tantale

En transitoire :

$$i = \frac{dQ}{dt} = C \cdot \frac{dV(t)}{dt}$$

$$\text{soit } V(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

Loi valable pour la convention récepteur

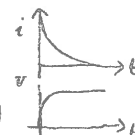


Pour un échelon de tension appliqué sur un circuit réel l'intensité anticipe la tension



$$i = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

$$v(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$$



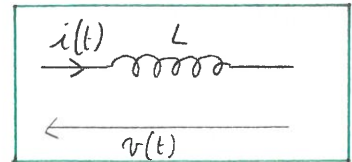


### Bolime de Self inductance L

La loi de Lenz présentant un comportement de f.c.e.m permet de représenter directement la convention récepteur :

$$v(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$\text{soit encore } i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(t) \cdot dt$$



Ces trois lois  $R, C, L$  sont valables pour tout régime (car exprimées dans le domaine temps)

### I.A.5 c) Dipôle général

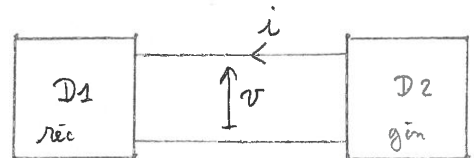
⊗ Déf : On appelle dipôle tout ensemble d'éléments actifs ou passifs reliés à l'extérieur par un accès constitué de deux bornes :

⚠ Le courant entrant par une borne ressort intégralement et instantanément par l'autre borne : (Conservation des charges)

### Ⓟ Association de Dipôles

Afin d'associer 2 dipôles entre eux il est nécessaire que l'un des 2 soit en convention générateur et l'autre en convention récepteur

Ex :  $D_1$  en gén. et  $D_2$  en rec.

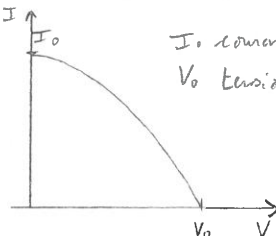
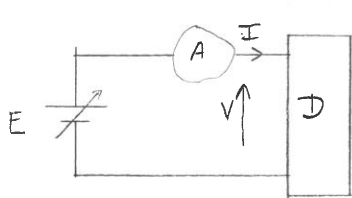


Si après analyse  $v(t) \cdot i(t) = p(t) > 0$  alors  $D_2$  est réellement générateur >  $D_1$  récepteur  
si  $v(t) \cdot i(t) < 0$  l'hypothèse était fautive :  $D_2$  est gén.  $D_1$  est Rec.

Remarque : Ceci revient à décompter positivement tout travail issu de la source : c'est à l'inverse de la convention générateur des conventions actuelles de la thermodynamique

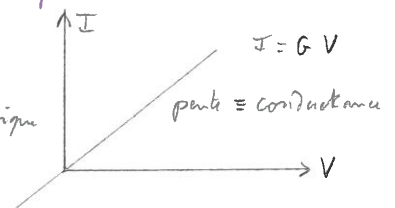
### Ⓟ Caractéristique d'un Dipôle

Déf : loi de comportement graphique  $I = f(V)$  du dipôle disposé en récepteur derrière une source de tension réelle ou virtuelle



$I_0$  : courant de Court Circuit  
 $V_0$  : tension à vide

Cas particulier de la Résistance R  
Dipôle passif Symétrique  
Sym/contre l'origine

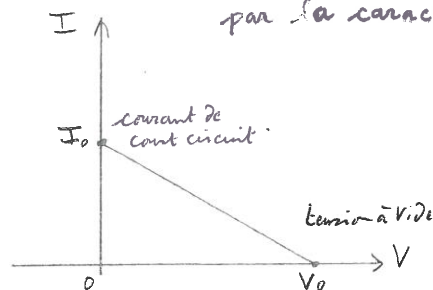


Remarque : Un dipôle est passif si sa caractéristique passe par l'origine. Dans le cas contraire le dipôle est actif

## I.B.] Sources électriques : Propriétés et caractéristiques

### I.B.1) Sources linéaires

Par simplicité, on suppose possible de représenter le comportement d'une source par la caractéristique linéaire suivante



Les 2 variables  $V$  et  $I$  conjuguées à l'énergie sont liées par une équation

de contrainte explicite soit en  $I = f(V)$

soit en  $V = f(I)$

la forme linéaire est du type

$$I = a \cdot V + b \quad \text{en } V=0 \quad I=I_0 \quad \text{soit } I = aV + I_0$$

$$\text{en } V=V_0 \quad I=0 = aV_0 + I_0 \Rightarrow a = -\frac{I_0}{V_0}$$

$$I = I_0 - \frac{I_0}{V_0} \cdot V \quad \text{soit } I = I_0 - G \cdot V \quad \text{forme } I = f(V) \quad \text{avec } G = \frac{I_0}{V_0}$$

$$I - I_0 = -\frac{I_0}{V_0} \cdot V$$

$$\text{soit } V = -\frac{V_0}{I_0} \cdot I + \frac{V_0}{I_0} \cdot I_0 \quad \Rightarrow \quad V = V_0 - \frac{V_0}{I_0} \cdot I \quad \text{soit } V = V_0 - r \cdot I \quad \text{forme } V = f(I) \quad \text{avec } r = \frac{V_0}{I_0}$$

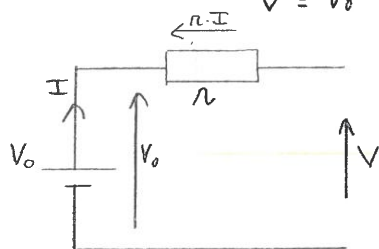
La forme  $I = f(V)$  modélise le comportement au sens d'une source de Norton

La forme  $V = f(I)$  modélise le comportement au sens d'une source de Thévenin

### I.B.1 a) Modèle générateur de tension (Thévenin)

$$V = V_0 - \frac{V_0}{I_0} \cdot I \quad \text{avec } r = \frac{V_0}{I_0} \text{ résistance interne}$$

$$V_0 = \text{f.e.m. à V.O.C. du générateur}$$

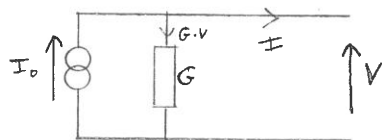


Avec la convention générateur, ce dipôle peut être représenté par l'association d'une source de tension idéale en série avec une résistance interne  $r$  : En court-circuit tout est dissipé dans  $r$  ;  $V=0$

### I.B.1 b) Modèle générateur de courant (Norton)

$$I = I_0 - \frac{I_0}{V_0} \cdot V \quad \text{avec } G = \frac{I_0}{V_0} \text{ conductance interne}$$

$$I_0 = \text{courant de C.C. du générateur; Courant Electromoteur}$$



Avec la convention générateur, ce dipôle est représenté par l'association de la source de C.e.m  $I_0$  en parallèle avec la conductance  $G$

En circuit ouvert tout est dissipé dans  $G$

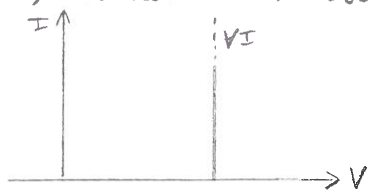
• Au plan interne il n'y a pas équivalence énergétique [feldman p128]

• Au plan comportement les 2 modèles simulent la même loi  $\Rightarrow r = \frac{1}{G}$  et  $V_0 = r \cdot I_0$

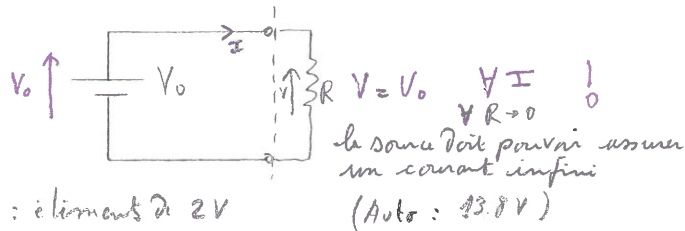
# I.B.2) Sources idéales et sources réelles

## I.B.2.a) Source idéale de tension : géné idéal de Thévenin

convention  
générateur

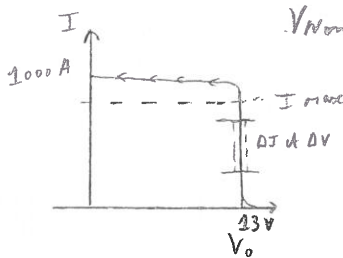


$$V = V_0 - rI = V_0 \Rightarrow r = 0 \text{ pas de résistance interne}$$



Approche réelle : Accumulateur au Pb : éléments de 2V

V nominale 12V  $r \approx 10^{-3} \Omega$

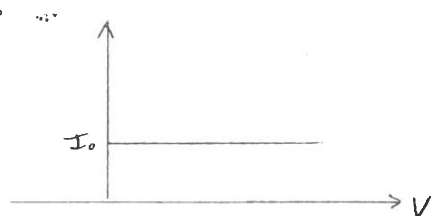


Irréversibilité en surcharge

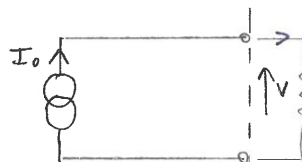
$$R_{dynamique} = \frac{\Delta V}{\Delta I} \ll \ll$$

la caractéristique dépend de l'historique antérieure des éléments

## I.B.2.b) Source idéale de courant : géné idéal de Norton



$$I = I_0 - G \cdot V = I_0 \Rightarrow G = 0 (r = \infty) \text{ résistance interne } \infty$$

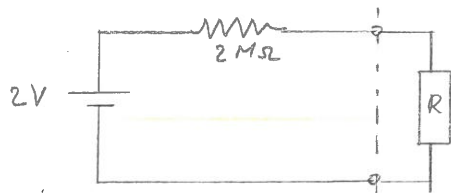


$$I = I_0 \forall \text{ charge } R$$

$$\text{si } R \rightarrow \infty \quad V \rightarrow \infty$$

la source doit pouvoir assurer une tension  $\infty$

Approche pratique : Source à impédance très élevée

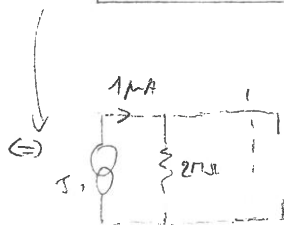


$$I_0 = I_{\text{nominale}} \text{ en C.C.} \quad I_0 = \frac{2}{2 \cdot 10^6} = 1 \mu A$$

$$I_{\text{sur}} R = 1 K\Omega = \frac{2}{2 \cdot 10^6 + 10^3} \neq 1 \mu A$$

$$I_{\text{sur}} 200 K\Omega = \frac{2}{2 \cdot 10^6 + 0.2 \cdot 10^5} \neq \frac{2}{2 \cdot 10^6} \cdot \frac{1}{1+0.1} \neq 0.9 \mu A \text{ limite } \pm 10\%$$

$$\text{Sur } 2 M\Omega \quad I = 0.5 \mu A \text{ sans intérêt}$$

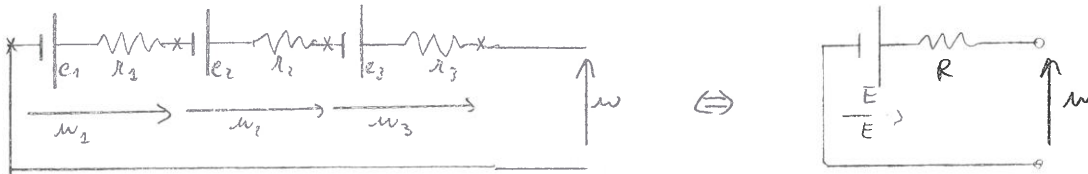


$$I_0 = G \cdot V_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{2}{2 \cdot 10^6} = 1 \mu A$$

$$G = 0.5 \mu S$$



### I. B. 2. c) Association de sources de tension en série



pour chaque source on a

$$u_1 = e_1 - r_1 \cdot i$$

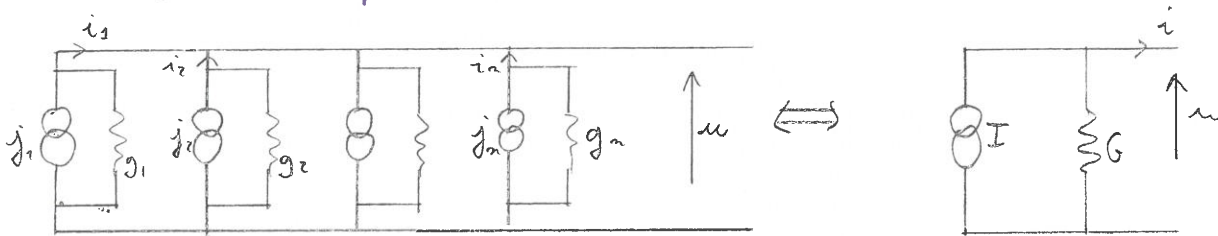
$$u_2 = e_2 - r_2 \cdot i$$

$$u_n = e_n - r_n \cdot i$$

$$u = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n (e_k - r_k \cdot i) = E - R \cdot i$$

avec  $E = \sum e_k$  et  $R = \sum r_k$  (loi de Pouillet de 1790-1868)

### I. B. 2. d) Association parallèle de sources de courant



pour chaque générateur

$$i_1 = j_1 - g_1 \cdot u \text{ et } i_k = j_k - g_k \cdot u$$

$$\text{Pour l'ensemble } i = \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n (j_k - g_k \cdot u) \Leftrightarrow I - G \cdot u \text{ avec } \left. \begin{array}{l} I = \sum j_k \\ G = \sum g_k \end{array} \right\}$$

## Chapitre II Lois et théorèmes généraux de l'électricité

### II. A.] Définitions de base

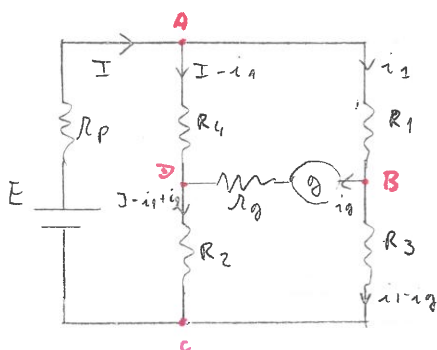
**Réseau électrique** : ensemble de dipôles reliés par des conducteurs de résistance négligeable

**Nœud** : c'est un point relié à plus de deux dipôles

**Maille** : Branche : Ensemble de dipôles montés en série entre deux nœuds

**Maille** : parcours fermé constitué de branches (on ne passe qu'une fois par un nœud donné)

Exemple de réseau



4 nœuds ; A, B, C, D

6 branches ; AB, BC, BD, AD, DC, AC

3 mailles ; ADCA, ABDA, DBCD

## II.3] Les lois de Kirchhoff

La structure d'un réseau est définie par ses mailles et ses nœuds : Elle est exprimée de manière analytique par les 2 lois de Kirchhoff qui jouent le rôle de liaisons en mécanique rationnelle

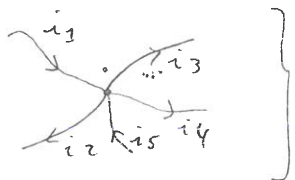
### II.3.1) Loi de K sur les courants : loi des nœuds (KCL Kirchhoff's Current Law)

Les champs électriques sont conservatifs et ne peuvent que circuler ds les conducteurs en présence de  $\partial\partial p$

Il ne peut y avoir ni annihilation, ni génération

A la jonction de plusieurs conducteurs la somme des courants qui arrivent est égale à la somme des courants qui repartent. on peut attribuer un signe

$\oplus$  aux courants arrivant et  $\ominus$  aux courants partant (convention "thermodynamique" sur les systèmes conservatifs)



$$\left. \begin{aligned} \sum i_{\text{arrivant}} &= \sum i_{\text{départ}} \\ i_1 + i_5 &= i_2 + i_3 + i_4 \end{aligned} \right\} \sum_{j=1}^n i_j = 0 \quad \text{Vt la somme algébrique de courant est nulle}$$

$$i_1 - i_2 - i_3 - i_4 + i_5 = 0$$

### II.3.2) Loi de K sur les tensions : loi des mailles (KVL Kirchhoff's Voltage Law)

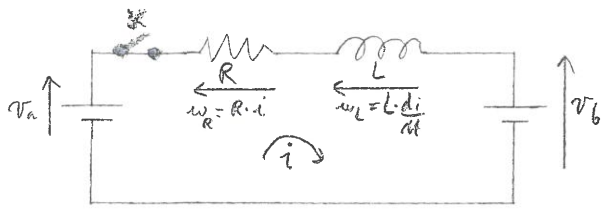
La fonction "potentiel électrique"  $V$  est une fonction d'état

Le champ électrique en dérive  $\vec{E} = -\text{grad} V$  et  $\oint \vec{E} d\alpha = -\oint \text{grad} V = 0$  un même lieu ne peut qu'être à un seul potentiel

Dans un circuit fermé, la somme algébrique de tous les  $\partial\partial p$  est nulle

La  $\sum$  des tensions appliquées = la  $\sum$  des chutes de tension

Vt



Convention: Si plusieurs sources de tension ne débient pas dans le même sens on compte positif les tensions tendant à faire circuler le courant dans le sens positif choisi pour l'intensité

Ex:  $V_a$  comptée  $\oplus$   $V_b$  comptée  $\ominus$

Application:  $\sum \partial\partial p$  appliquées =  $\sum$  chutes de tension

$$V_a - V_b = Ri + L \frac{di}{dt} \quad \text{ou} \quad \sum_{j=1}^n V_j = 0 \quad \text{en tenant ainsi compte de la convention ci-dessus}$$

c'est aussi une expression de la loi de Pouillet

Les lois de K. restent vérifiées même par des réseaux non linéaires (et même évolutifs)

On montre que  $V_{\text{circuit}}$  à la branche  $\sum_{k=1}^b I_k \cdot V_k = 0$

si  $I_k$  est un régime compatible  $K_1$  et si  $V_k$  est compatible  $K_2$  et on lui a priori avec les courants  $I_k$

## II.C) Théorème de Helmholtz ou principe de superposition

### II.C.1) Énoncé

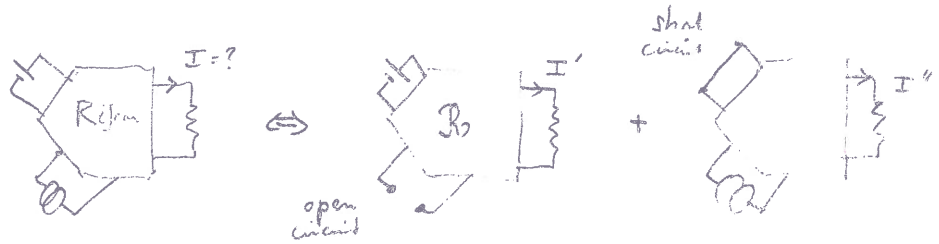
Réseau compatible Kirchhoff (KCL & KVL)

Dans un circuit linéaire contenant des sources indépendantes, le ddp aux bornes (ou le  $I$  au travers) de tout élément résulte de la somme algébrique des ddp (ou courants) considérés pour chaque source agissant séparément sur l'élément.

Les sources de tension éteintes sont alors considérées comme des courts circuits  
Les sources de courant éteintes sont considérées comme des circuits ouverts

### II.C.2) Visualisation

$$I = I' + I''$$



### II.C.3) Formalisation Le principe résulte directement de la linéarité des équations

Soit à considérer dans un 1<sup>er</sup> régime l'action de sources  $v'_1, v'_2, v'_3$  etc et  $i'_1, i'_2, \dots$  notant  $v'$  et  $i'$  le ddp aux bornes de l'élément et le courant le traversant

$$\begin{aligned} v' &= \sum a_j v'_j + r_j i'_j \\ \text{et } i' &= \sum b_j i'_j + g_j v'_j \end{aligned} \quad \left. \begin{matrix} a_j, b_j, r_j, g_j \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{sont des constantes du} \\ \text{réseau (KCL, KVL)} \end{matrix}$$

Dans un second régime l'action de sources différents  $v''_1, v''_2, \dots, i''_1, i''_2$  entraîne

$$\begin{aligned} v'' &= \sum a_j v''_j + r_j i''_j \\ \text{et } i'' &= \sum b_j i''_j + g_j v''_j \end{aligned} \quad \left. \right\} \begin{matrix} \text{avec les mêmes constantes de contrainte} \end{matrix}$$

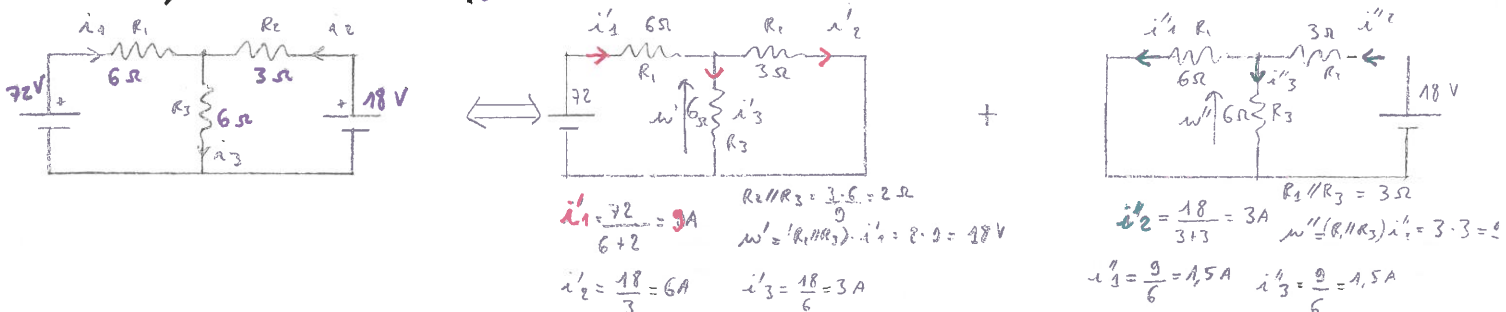
Soit un 3<sup>ème</sup> régime résultant de l'association de sources  $v_1 = v'_1 + v''_1, v_2 = v'_2 + v''_2$  etc...  
Alors la new valeur de  $v$  et  $i$  au niveau de l'élément

$$v = \sum a_j (v'_j + v''_j) + r_j (i'_j + i''_j) = v' + v''$$

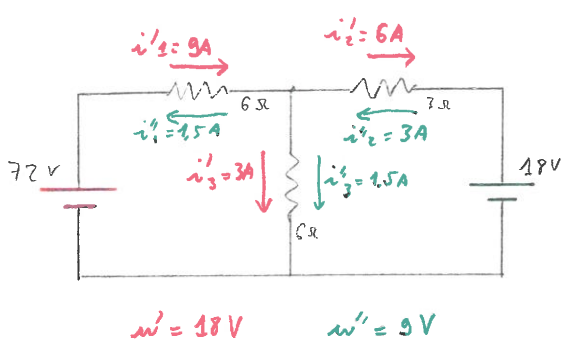
$$i = \sum b_j (i'_j + i''_j) + g_j (v'_j + v''_j) = i' + i''$$

### II.C.4) Exemples

#### a) Coexistence de sources de tension



On peut ainsi représenter la superposition des deux régimes



en rouge régime  $w'$   $i'$

en vert régime  $w''$   $i''$

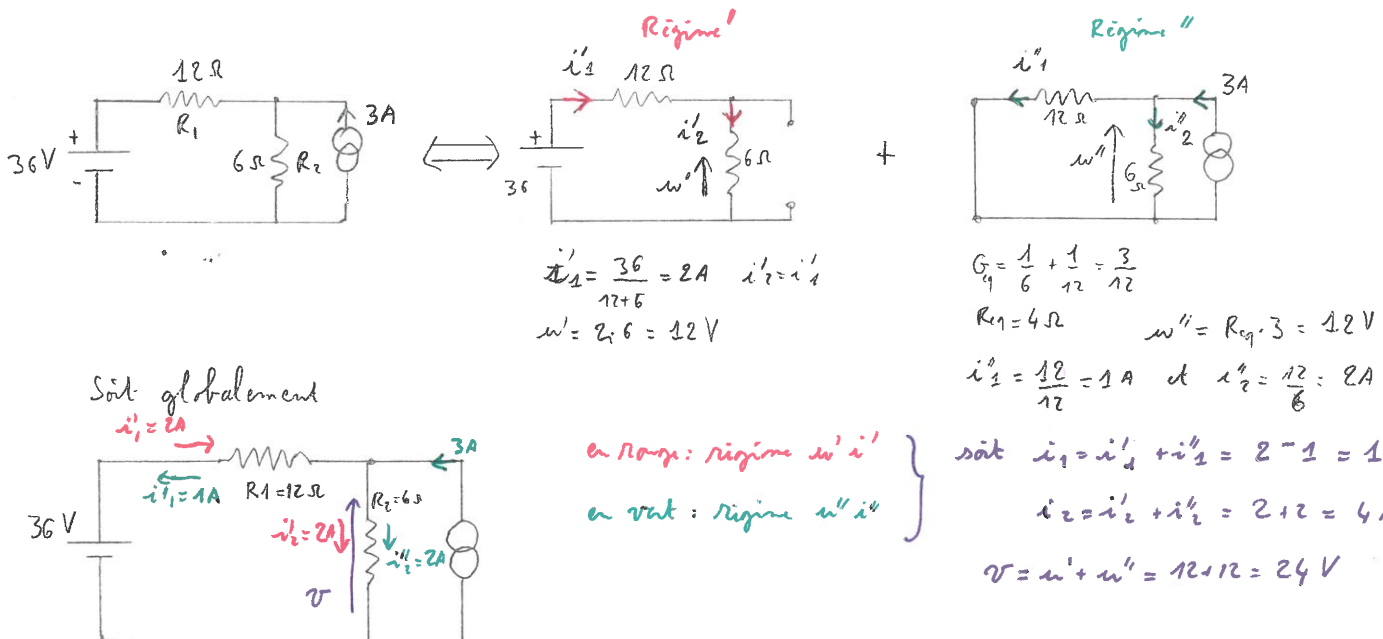
$$\text{soit } i_1 = i'_1 + i''_1 = \rightarrow 7,5A$$

$$i_2 = i'_2 + i''_2 = \rightarrow 3A$$

$$i_3 = i'_3 + i''_3 = \downarrow 4,5A$$

$$w = w' + w'' = 27V$$

b) coexistence d'une source de tension et d'une source de courant



Remarque importante: Compte tenu du caractère quadratique des grandeurs énergétiques conjuguées à l'électricité, le th de superposition est inapplicable au calcul des régimes énergétiques

Exemple: Bilan  $W$  dans la résistance  $R_2$

régime(1)  $P_{(1)} = R \cdot i_{(1)}^2 = 6 \cdot 2^2 = 24W$

régime(2)  $P_{(2)} = R \cdot i_{(2)}^2 = 6 \cdot 2^2 = 24W$

régime superposé :  $P_{(1)} + P_{(2)} = 48W$  ce qui est incorrect

Régime réel :  $P = R \cdot i^2 = 6 \cdot 4^2 = 96W$

**(TD)** + le niveau en dB

Remarque: principe de substitution : toute branche peut être substituée par une autre branche dès lors que les  $U$  aux bornes et courants la traversant sont identiques.

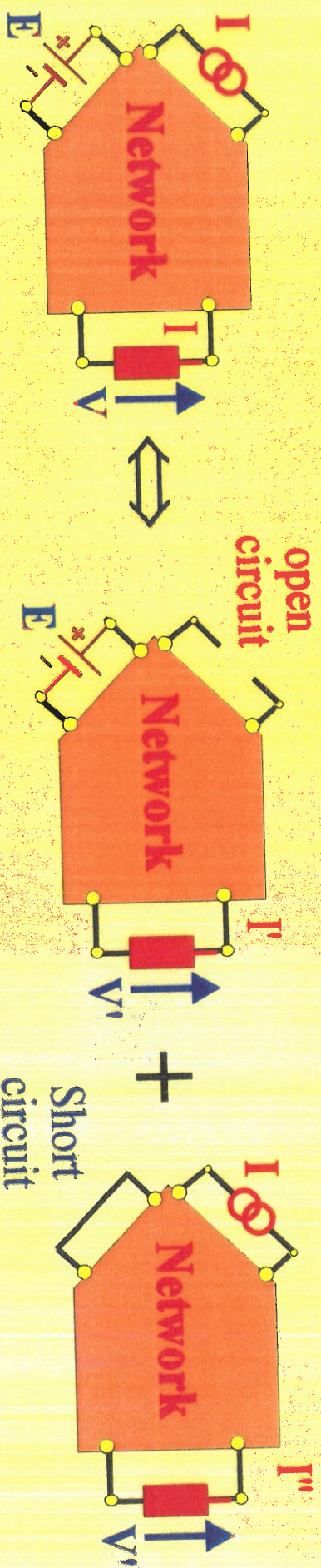


# The superposition principle (Helmholtz)

## Statement

*In a linear circuit containing independent sources, the voltage across (or the current through) any element may be obtained by adding algebraically all the individual voltages (or currents) caused by each independent voltage source acting alone, with all other independent voltage sources replaced by short circuits and all other independent current sources replaced by open circuits.*

## Illustration



Then  $I = I' + I''$  and  $V = V' + V''$

## II.D] Théorème de Thévenin

### II.D.1) Énoncé et utilité

(Dipôle)  
Tout réseau linéaire à deux bornes  $V$  peut être remplacé par l'association série d'un générateur idéal de tension  $E_{th}$  et d'une résistance interne  $R_i$ .

$E_{th}$  a pour valeur la tension mesurée "à vide" aux bornes du dipôle

$R_i$  a pour valeur la résistance présentée par le dipôle, les sources de tension et/ou amprimées à des court-circuités, les sources de courant, à des circuits ouverts. (On dit alors que les sources sont "annulées")

⚠ Les dipôles sources doivent être indépendants (sources non liées) pour l'application directe de ce théorème

Utilité, intérêt : Ce théorème permet d'isoler une partie du réseau pour la remplacer par une source de tension imparfaite :



### II.D.2) Exemple

#### a) Dipôle comprenant une source de tension seule

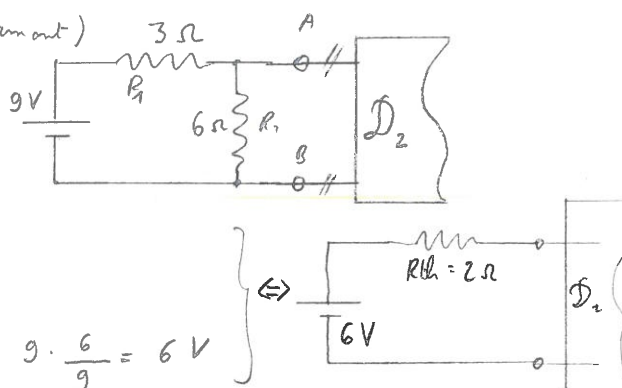
Soit à chercher l'Eq. Thévenin du circuit suivant (penché avant)  
- On débarrasse la charge (pt A et B)

⊗  $R_{th}$  est défini avec les 9V strappés  $\Rightarrow R_1 // R_2$

$$3\Omega // 6\Omega \Rightarrow \frac{3 \cdot 6}{6 + 3} = \frac{18}{9} = 2\Omega$$

⊕  $E_{th}$  résulte de la tension aux bornes de  $R_2$

$$E_{th} = V_{AB}(V_{id}) = R_2 \cdot I = R_2 \cdot \frac{9}{R_1 + R_2} = 9 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 9 \cdot \frac{6}{9} = 6V$$



#### b) Dipôle comprenant une source de courant seule

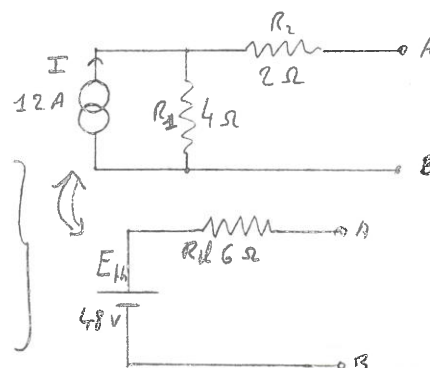
Soit à chercher l'Eq. Thévenin du circuit suivant

⊗  $R_{th}$  est définie avec le générateur de courant en circuit ouvert 12A

$$R_{th} = 4 + 2 = 6\Omega$$

⊕  $E_{th}$  résulte de  $V_{AB} = 4V(R_1)$  avec  $i = 0$  dans  $R_2$

$$E_{th} = R_1 \cdot I = 4 \cdot 12 = 48V$$





## c) Dipôle comportant une source de tension et une source de courant

Soit à chercher l'équivalent Thévenin du circuit suivant

### (2) Recherche de $R_{th}$

$E_0$  court-circuité et  $I$  en circuit ouvert

$$R_{th} = R_3 + R_1 // R_2 = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 3 + \frac{12 \cdot 6}{12 + 6} = 3 + \frac{12}{3} = 7 \Omega$$

### (1) Recherche de $E_{th}$

Par application du théorème de superposition

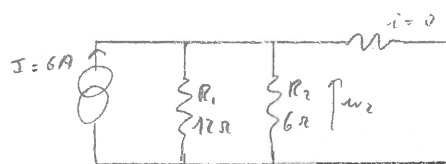
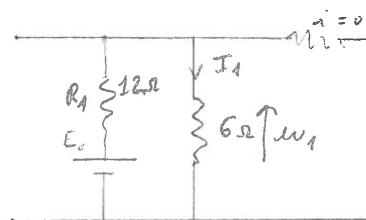
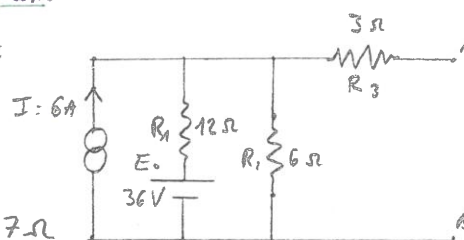
Régime (1)  $I$  débranché circuit ouvert

$$I_1 = \frac{E_0}{R_1 + R_2} = \frac{36}{12 + 6} = 2 A \quad V_1 = 6 \cdot 2 = 12 \text{ Volts}$$

Régime (2)  $E_0$  en court-circuit

$$V_2 = (R_1 // R_2) \cdot I \Rightarrow \frac{12 \cdot 6}{12 + 6} = \frac{12 \cdot 1}{3} = 4 \Omega \cdot 6 A = 24 V$$

$$E_{th} = V_1 + V_2 = 12 + 24 = 36 V$$



## II.E) Théorème de NORTON

### II.E.1) Énoncé

Tout réseau linéaire à deux bornes peut être remplacé par un générateur type source de courant fermé sur une conductance ( $G$  en //)

On parle alors de modèle source de courant, par dualité avec le modèle de Thévenin

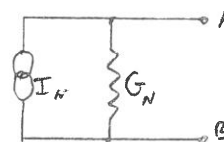
#### o Intérêt

Le théorème permet d'isoler une partie d'un réseau pour la remplacer par une source de courant

#### o Modalités de détermination

(a) recherche de la conductance  $G_N$  par annulation de toutes les sources ( $G_N = 1/R_N$ )

(b) recherche de  $I_N$ , courant de court-circuit en remplaçant toutes les sources ( $I_N$ , courant d'électromoteur)  
Le schéma de la source équivalente est alors défini



Remarque: le principe de substitution permet de

passer linéairement du modèle de Thévenin à celui de Norton

Relations fondamentales :  $\frac{1}{G_N} = R_N = R_{th}$

et  $I_N = \frac{E_{th}}{R_{th}}$  (courant de court-circuit)

## II.E.2) Exemple d'application du Th. de Norton

(Reprise des mêmes exemples que précédemment)

### a) source de tension seule

Soit à rechercher le modèle de Norton du schéma

⊗ recherche de  $G_N$  (représenté  $R_N$ ):  $E_0$  strappée

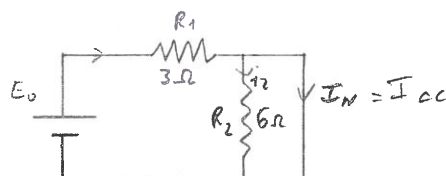
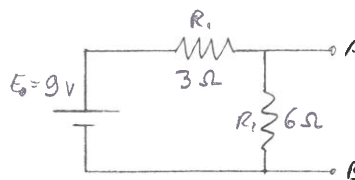
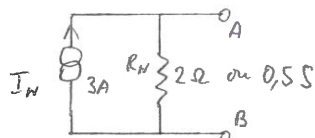
$$R_N = R_1 // R_2 = \frac{3 \cdot 6}{3+6} = 2 \Omega \Rightarrow G_N = \frac{1}{R_N} = 0,5 S$$

⊕ recherche de  $I_N$  courant électromoteur

$E_0$  est rebranchée et AB strappé

$$i_2 = 0 \quad I_N = \frac{E_0}{R_1} = \frac{9}{3} = 3 A$$

Soit



### 1) source de courant seule

Soit à rechercher le modèle de Norton du schéma

⊗ recherche de  $R_N$ :  $I_0$  en circuit ouvert

$$R_N = 6 \Omega \quad G_N = \frac{1}{6} S$$

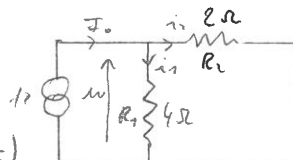
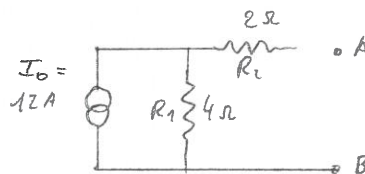
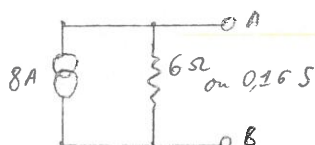
⊕ recherche de  $I_N$  courant électromoteur

$I_0$  est rebranché

$$u = (R_1 // R_2) \cdot I_0 = R_1 i_1 = R_2 i_2 \quad (\text{Diviseur de courant})$$

$$\text{soit } i_2 = I_0 \cdot \frac{R_1 // R_2}{R_2} = I_0 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 (R_1 + R_2)}$$

Soit



$$i_2 = I_N$$

$$I_N = I_{cc}$$

$$i_1 = I_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$i_2 = I_0 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$i_N = I_0 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 12 \cdot \frac{4}{4+2} = 8 A$$

### c) source de courant et source de tension

Soit à rechercher le modèle de Norton du schéma

⊗ calcul de  $R_N$

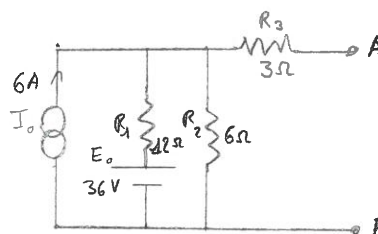
$E_0$  strappée,  $I_0$  ouvert

$$R_N = R_3 + R_1 // R_2 = 3 + \frac{6 \cdot 12}{6+12} = 3 + \frac{6 \cdot 12}{18} = 3 + \frac{12}{3} = 7 \Omega$$

⊕ Recherche du  $I_N$  courant électromoteur

on court-circuite A et B puis on calcule  $I_N = I_1 + I_2$  de la super pour 2 régimes superposés

(Th de superposition appliqué à la combinaison successive de chaque source)

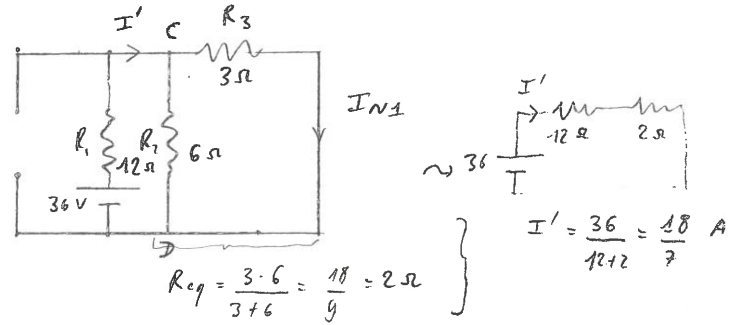


o Régime 1 : Source de tension seule  
 $I_0$  en circuit ouvert

$$V_{CD} = (R_1 // R_3) \cdot I'$$

$$= 2 \cdot \frac{18}{7} = \frac{36}{7} \text{ Volts}$$

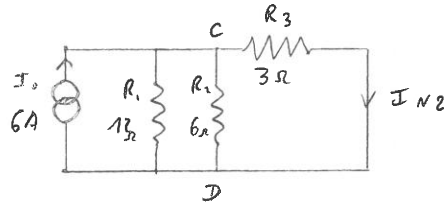
$$I_{N1} = \frac{V_{CD}}{R_3} = \frac{36}{3 \cdot 7} = \frac{12}{7} \text{ A}$$



o Régime 2 : Source de courant seule  
 $E_0$  en court circuit

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + G_3 = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$$

$$G = \frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12} \text{ S}$$

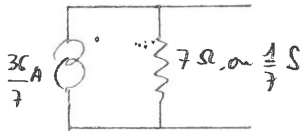


$$V_{CD} = R_{eq} \cdot I_0 = \frac{12}{7} \cdot 6 = \frac{72}{7} \text{ V}$$

$$I_{N2} = \frac{V_{CD}}{R_3} = \frac{72}{7 \cdot 3} = \frac{24}{7} \text{ A}$$

$$\text{Soit } I_N = I_{N1} + I_{N2} = \frac{12}{7} + \frac{24}{7} = \frac{36}{7} \text{ A}$$

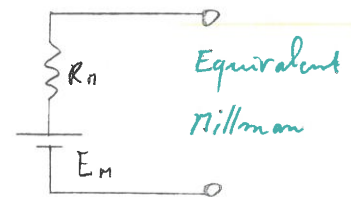
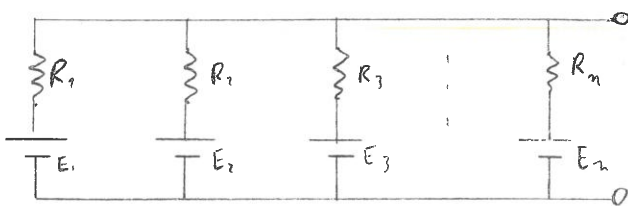
Soit



## II.F] Théorème de Millman

### II.F.1] Énoncé du théorème

Un ensemble de générateurs de tension imparfaits disposés en parallèle possède un équivalent Thévenin défini par  $E_M$  et  $R_M$



$$R_M = 1 / \sum 1/R_i$$

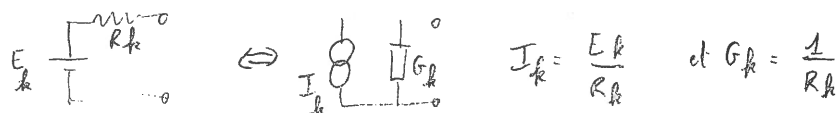
répond à une vue en sens du Thévenin

$$\text{et } E_M = R_M \cdot \sum \frac{E_i}{R_i}$$

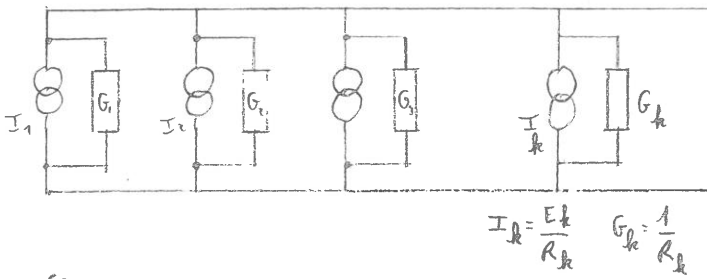
Somme des générateurs de courant circuit

### II.F.2] Démonstration

a) par transcription des modèles Thévenin en modèles de Norton pour chaque source



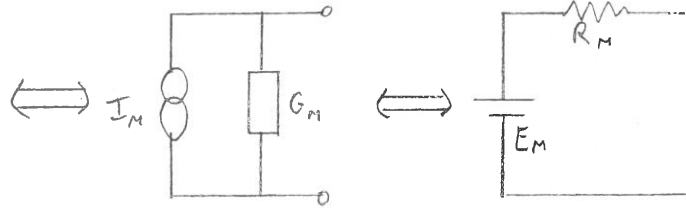
L'ensemble devient alors :



La retransposition en modèle de Thévenin entraîne

$$\left. \begin{aligned} R_M &= \frac{1}{G_M} = \frac{1}{\sum_k \frac{1}{R_k}} & \textcircled{\alpha} \\ E_M &= R_M \cdot I_M = R_M \cdot \sum_k \frac{E_k}{R_k} & \textcircled{\beta} \end{aligned} \right\} \diamond$$

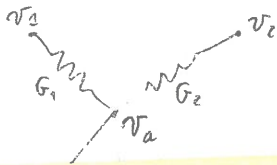
Retransposition en modèle de Thévenin



$$\begin{aligned} I_M &= \sum I_k = \sum \frac{E_k}{R_k} & \text{somme des courants partiels} \\ G_M &= \sum G_k = \sum \frac{1}{R_k} \end{aligned}$$

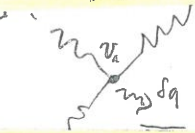
Remarque 1: la Résistance de Millman  $\textcircled{\alpha}$  résulte de l'aspect dissipatif dû à l'action de la source initiale et transfert propre à chacun des générateurs imparfaits de Thévenin

Remarque 2: Autre façon d'énoncer le Th de Millmann: le potentiel en un nœud quelconque d'un circuit résulte de la moyenne de potentiels de nœuds voisins pondérée par la valeur de conductance des différents branches



$$V_a = \frac{\sum V_k \cdot G_k}{\sum G_k} \quad \text{As before} \quad = \frac{\sum \frac{E_k}{R_k}}{\sum \frac{1}{R_k}}$$

ma dirait moi-même car en fin j'ai dit  
 $V_a = R_{eq} \sum i_k$  et je stipule  $i_k = \frac{V_k - V_a}{R_k}$  au lieu de  $i_k = \frac{V_k - V_a}{R_k}$



ça va peut-être mieux si on dit

$$\delta W_1 = (V_k - V_a) \delta q$$

l'approche démonstrative (Th de Travaux virtuels)

stipule une "équivalence" entre source réelle et source à caractéristique (équivalente)

superposition de 2 transferts virtuels <sup>opérés</sup> équivalent à l'état statique (p-cycle à l'échelle réelle)

$\delta W_1$  de la source réelle vers son équivalent (transfert virtuel)

Extraction de  $\delta W_2$  par un transfert de  $\delta q$  coulomb au potentiel  $V_a$

$$\delta W_2 = \ominus V_a \cdot \delta q \quad \text{avec } \delta q = \sum i_k \cdot dt$$

$$\delta W_1 = \ominus V_a \cdot \sum_k i_k \cdot dt$$

le retour virtuel de  $\delta q$  au potentiel  $V_a$  via la  $R_{eq}$  de Millman

$$||R|| \dots = \frac{1}{\sum \frac{1}{R_{eq}}}$$

$$V_a \cdot \delta q$$

$$\text{avec } \delta q = i_M \cdot dt = \frac{V_a}{R_{eq}} \cdot dt \quad \delta W_2 = + \frac{V_a^2}{R_{eq}} \cdot dt$$

nul du p-cycle

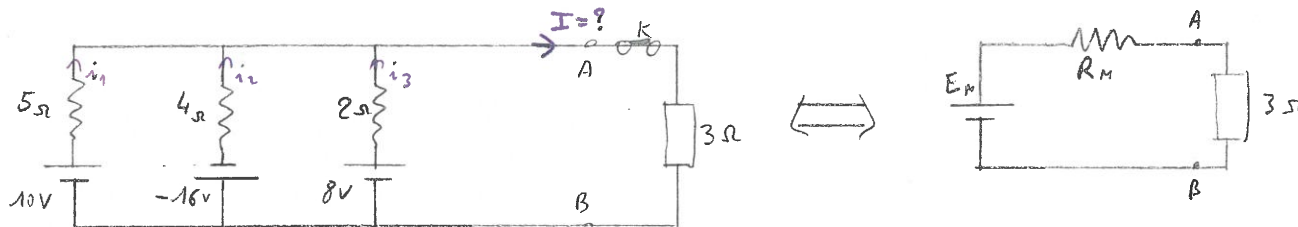
$$\left. \begin{aligned} \delta W = \delta W_1 + \delta W_2 = 0 & \\ \text{conservation de l'énergie} & \end{aligned} \right\} \delta W_1 + \delta W_2 = 0 = -V_a \sum_k i_k \cdot dt + \frac{V_a^2}{R_{eq}} \cdot dt = 0 \Rightarrow V_a = R_{eq} \cdot \sum i_k = \frac{1}{\sum \frac{1}{R_k}} \cdot \sum \frac{V_k}{R_k} = V_a \quad \diamond$$

Remarque : intérêt du théorème

Le théorème de Millman permet de calculer l'intensité dans une branche d'un circuit sans recourir aux lois de Kirchhoff ni au th de superposition

### II. F. 3] Exemple d'application

Soit à déterminer l'intensité dans la charge connectée entre A et B



① recherche de la résistance équivalente de Millman (identique à la V.ij du th de Thévenin)

$$\frac{1}{R_1} = 0,2 \text{ Siemen} \quad \frac{1}{R_2} = 0,25 \text{ Siemen} \quad \frac{1}{R_3} = 0,5 \text{ Siemen} \quad G_N = \sum \frac{1}{R_k} = 0,95 \text{ Siemen}$$

$$R_N = \frac{1}{\sum 1/R_k} = \frac{1}{0,95} \Omega$$

② recherche du potentiel de Millman en A (Kouvert)

A l'aide des courants partiels

$$i_1 = \frac{10}{5} = 2A \quad i_2 = \frac{-16}{4} = -4A \quad i_3 = \frac{8}{2} = 4A \quad \left. \begin{array}{l} I_N = \sum i_k = 2A \\ \text{Enfin } E_N = R_N \cdot I_N = \frac{1}{0,95} \cdot 2 \Rightarrow \end{array} \right\}$$

③ Détermination de I de la charge :  $I = \frac{E_N}{R_N + 3} = \frac{2/0,95}{\frac{1}{0,95} + 3} = 0,51A$

Vision globale (K fermé)

$R_{\text{globale}}$

$$\frac{1}{R_1} = 0,2 \text{ Siemen} \quad \frac{1}{R_2} = 0,25 \text{ Siemen}$$

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{3}$$

$$G_N = 0,95 + 0,33 = 1,28$$

$$i_1 = 2A \quad i_2 = -4A \quad i_3 = 4A$$

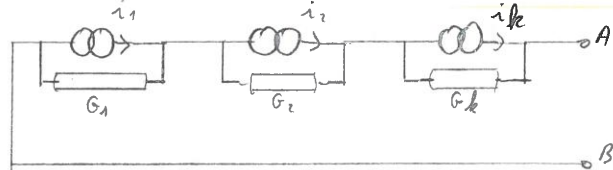
$$i_R = 0A \quad \sum i_k = 2A$$

$$V_A = \frac{2}{0,95 + 1/3} = 1,5584V$$

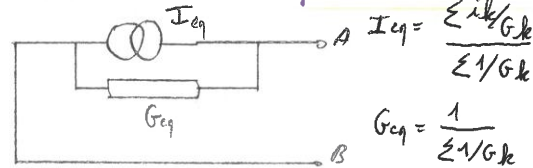
### II. F. 4] Réciproque du Théorème de Millman

a) Énoncé

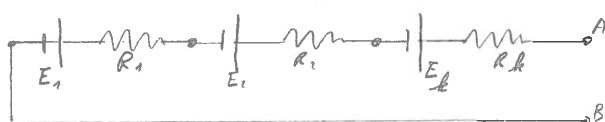
Un ensemble de générateurs de courant disposés en série possède un équivalent Norton défini par :



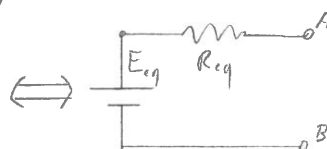
$\Leftrightarrow$



b) Démonstration par transport à jini de Thévenin équivalents

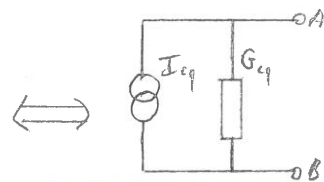


$$R_k = \frac{1}{G_k} \quad E_k = \frac{i_k}{G_k}$$



$$E_{eq} = \sum E_k = \sum \frac{i_k}{G_k}$$

$$R_{eq} = \sum R_k = \sum \frac{1}{G_k}$$

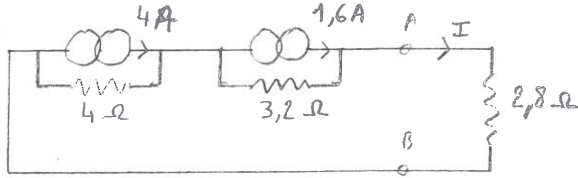


$$I_{eq} = \frac{E_{eq}}{R_{eq}} = \frac{\sum i_k / G_k}{\sum 1/G_k}$$

$$G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{\sum 1/G_k}$$

### c) Exemple d'application

Déterminer la tension et l'intensité dans la charge entre A et B



⊙ Recherche de la Résistance équivalente en Amont de A B

$$R = 4\Omega + 3,2\Omega = 7,2\Omega$$

⊙ Recherche de  $E_{eq}$  par les tensions pontilles

$$E_1 = \frac{14}{0,4} = 14 \cdot 0,4 = 16V \quad E_2 = 3,2 \cdot 1,6 = 5,12V$$

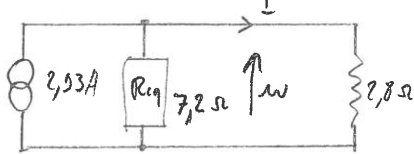
$$E = E_1 + E_2 = 21,12V$$

Remarque:

donne immédiatement  $w$  et  $I$

$$I = \frac{21,12}{7,2 + 2,8} = 2,12A$$

Soit au sens de la réciprocité de Millman  $I = \frac{21,12}{7,2} = 2,93A$



$$w = (R_1 \parallel 2,8\Omega) \cdot 2,93 = \frac{7,2 \cdot 2,8}{7,2 + 2,8} \cdot 2,93 = 5,9V$$

$$\text{et } I = \frac{w}{2,8} = 2,12A$$

## II.6] Le théorème de réciprocité (Th de Maxwell)

### II.6.1] Hypothèses et énoncé ; visualisation

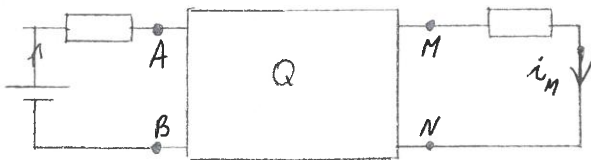
Hyp: Soit un réseau linéaire ne comprenant que une seule source

Énoncé: Si une source insérée dans une branche d'un réseau linéaire passif produit un courant  $i_M$  dans une autre branche, réciproquement, cette même source insérée dans la seconde branche produira le même courant  $i_M$  dans la première branche

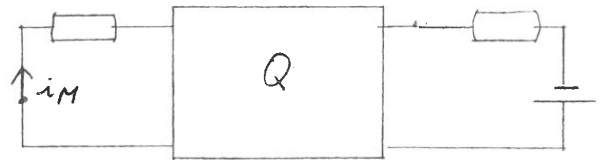
Remarque:

Pour appliquer ce théorème sans difficultés il faut que la polarité de la source de tension corresponde au sens du courant parcourant chacune des branches.

cas initial



cas réciproque



cf Fldmann p 78 : Théorie des réseaux et systèmes linéaires

Ce Théorème ne relève pas de l'évidence... La réciprocité physique en générale traduit

l'invariance du système vis à vis de l'inversion du sens du temps (réseau concrètement réciproque)

(Travaux de Conjugaison)

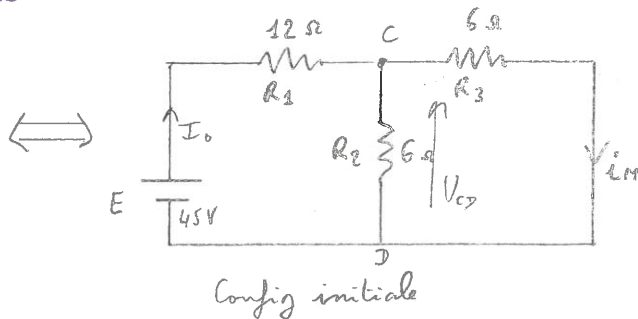
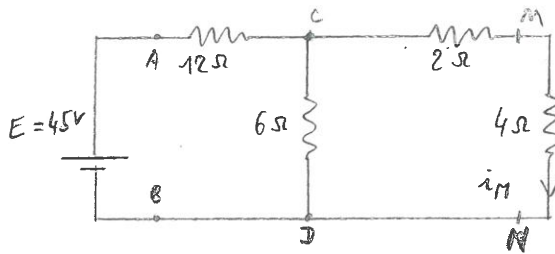
o Ext du Théorème: Et réseau passif ne comportant pas d'aimant permanent et concrètement réciproque

o La démonstration II.6.1 demande l'application du Théorème de puissances virtuelles (Tellegen)



## II.6.2) Exemple simple d'application du Théorème de réciprocité

Soit la configuration suivante de réseau



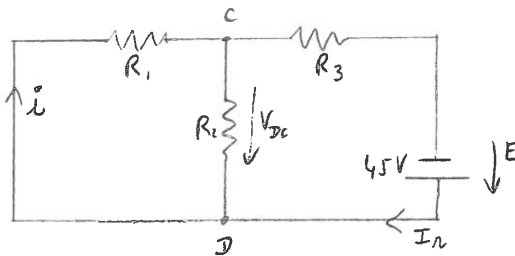
Soit  $I_0$  de la config initiale

$$I_0 = \frac{E}{R_1 + R_2 \parallel R_3} = E \cdot \frac{1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \quad \text{et} \quad V_{CD} = (R_2 \parallel R_3) \cdot I_0 = E \cdot \frac{R_2 R_3 / (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 R_3 / (R_2 + R_3)} = E \cdot \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

$$\text{Soit } i_M = \frac{V_{CD}}{R_4} = E \cdot \frac{R_2}{R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3} \quad \left. \begin{array}{l} I_0 = 3A \\ V_{CD} = 9V \\ i_M = 1,5A \end{array} \right\} \text{On a après A-N}$$

La source, extraite de sa branche initiale est disposée dans la branche où l'on a calculé  $i_M$

La configuration réciproque a pour schéma :



E délivre dans  $R_3$  série  $(R_1 \parallel R_2)$

$$I_N = \frac{E}{R_3 + R_1 \parallel R_2} \quad \text{et} \quad V_{DC} = (R_1 \parallel R_2) \cdot I_N = E \cdot \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

$$V_{DC} = E \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3} \quad \text{Donc } i = \frac{V_{DC}}{R_1}$$

$$i = E \cdot \frac{R_2}{R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3}$$

On constate  $i = i_M$  conformément au théorème de réciprocité