[redacted]

TD n°2 Analyse de systèmes avec la Transformée de Laplace

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}.dt = \mathcal{L}(f(t))$$

Transformation des unités

Si $f(t)$ en Watt $F(p)$ en Watt • sec = Joule

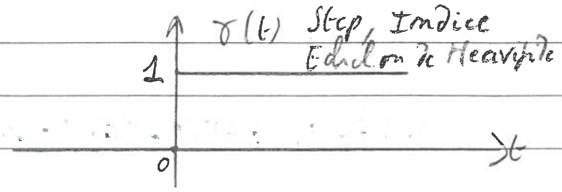
Compilation : Mimile : Dim 3 octobre 2021

I Transformée des fonctions fondamentales

a) Impulsion de Dirac $\delta(t)$ Déf : $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt$

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = \int_0^\infty \delta(t).e^{-pt} dt = \int_0^{0+\varepsilon} \delta(t) \cdot dt = 1$$

b) Echelon de Heaviside $\gamma(t)$



Calcul direct

$$\mathcal{L}(\gamma(t)) = \int_0^\infty \gamma(t) \cdot e^{-pt} dt = \int_{0^+}^\infty e^{-pt}.dt$$

$$\mathcal{L}(\gamma(t)) = \frac{-1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}.d{-pt} = -\frac{1}{p}\left[e^{-pt}\right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{p}$$ avec $d\exp x = \exp(x).dt$

• Autre méthode : Théorème de la transformée de l'intégrale $\boxed{\mathcal{L}\int_0^t f(t)\, dt = \frac{1}{p}\mathcal{L} f(t)} \Rightarrow \mathcal{L}(\gamma(t)) = \frac{1}{p}.1$

Remarque : Si $f(t) = \delta(t)$
sachant que $\gamma(t) = \int_0^{t=\varepsilon^+} \delta(t)dt + \int_{t=\varepsilon^+}^\infty \delta(t)\, dt = 1+0$ $\mathcal{L}\gamma(t) = \frac{1}{p}\mathcal{L}\delta(t) = \frac{1}{p}$

c) Rampe de pente a $f(t) = at$

Calcul direct

$$\mathcal{L}f(t) = \int_0^\infty at\, e^{-pt}.dt = -\frac{a}{p}\int_0^\infty t\left(e^{-pt}.d{-pt}\right)$$ avec $d\exp x = \exp x \cdot dx$

$$\mathcal{L}f(t) = -\frac{a}{p}\int_0^\infty \underbrace{t \cdot d\exp(-pt)}_{u\, d(v)}$$ avec $d\, u \cdot v = u\, dv + v\, du$

$$\int_x^y u\, dv = [u\, v]_x^y - \int_x^y v\, du$$

soit $\mathcal{L}f(t) = -\frac{a}{p}\left[\underbrace{\left[t.\exp{-pt}\right]_0^\infty}_{0} - \int_0^\infty e^{-pt}.dt\right]$

$$\mathcal{L}f(t) = \frac{-a}{p}\int_0^\infty e^{-pt}\, dt = \frac{a}{p}\cdot\frac{-1}{p}\int_0^\infty e^{-pt} d{-pt}$$

soit

$$\mathcal{L}f(t) = \frac{-a}{p^2}\left[e^{-pt}\right]_{t=0}^\infty = \frac{-a}{p^2}\left[0-1\right]$$

d'où $\mathcal{L}(a \cdot t) = \frac{a}{p^2}$

Autre méthode : Théorème de la transformée de l'intégrale $\mathcal{L}at = a\mathcal{L}\int_0^t \gamma(t)\, dt = a \cdot \frac{1}{p}\mathcal{L}\gamma(t) = \frac{a}{p}\cdot\frac{1}{p} =$

I En résumé

a) Transformée de l'impulsion $\mathcal{L}\delta(t) = 1$

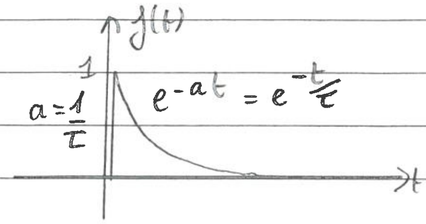
b) Transformée de l'échelon $\mathcal{L}\gamma(t) = 1/p$

c) Transformée de la rampe $\mathcal{L}at = a/p^2$

d) Transformée de la parabole $\mathcal{L}t^2 = \frac{1}{p^3}$

II] Transformées de fonctions particulières utiles

a) Signal amorti causal et éléments associés



$$f(t) = \gamma(t)\cdot e^{-at} = \gamma(t)\, e^{-t/\tau}$$

$$\mathcal{L}(e^{-at}) = \int_0^\infty e^{-at}\cdot e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty e^{-(a+p)t}\cdot dt = \frac{-1}{a+p}\int_0^\infty e^{-(a+p)t}\, d-(a+p)\cdot dt$$

$$\mathcal{L}(e^{-at}) = \ominus\frac{1}{a+p}\Big[\exp-(a+p)t\Big]_0^\infty \quad [0-1] \Rightarrow \mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{a+p} \Rightarrow \mathcal{L}\, e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{\frac{1}{\tau}+p} = \frac{\tau}{1+\tau p}$$

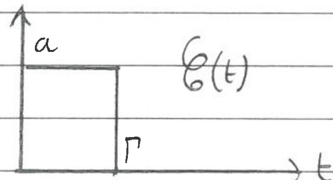
Ainsi

$$\boxed{\mathcal{L}\, e^{-\frac{t}{\tau}} = \tau\cdot\frac{1}{1+\tau p}} \quad (1) \qquad \text{soit aussi} \qquad \boxed{\mathcal{L}\,\frac{1}{\tau}\cdot e^{-t/\tau} = \frac{1}{1+\tau p}} \quad (1\text{bis})$$

c) Signal de "charge" $f(t) = \gamma(t)\left[1 - \exp-\frac{t}{\tau}\right]$

$$\mathcal{L} f(t) = \frac{1}{p} \ominus \frac{\tau}{1+\tau p} = \frac{1+\tau p - \tau p}{p(1+\tau p)} = \frac{1}{p(1+\tau p)} \quad \boxed{\mathcal{L}\,\gamma(t)(1-e^{-t/\tau}) = \frac{1}{p(1+\tau p)}} \quad (2)$$

b) Signal créneau de durée Γ et d'amplitude a



$$\mathcal{L}\,\mathcal{C}(t) = \int_0^\infty \mathcal{C}(t)\, e^{-pt}\,dt = \int_0^\Gamma a\, e^{-pt}\,dt$$

$$\mathcal{L}\,\mathcal{C}(t) = a\,\frac{-1}{p}\int_0^\Gamma e^{-pt}\, d\, e^{-pt} = \frac{-a}{p}\Big[e^{-pt}\Big]_{t=0}^{\Gamma} = \frac{-a}{p}\left[e^{-p\Gamma} - 1\right]$$

$$\boxed{\mathcal{L}\,\mathcal{C}(t) = +\frac{a}{p}\left[1 - e^{-p\Gamma}\right]} \quad (3)$$

III] Transformées de signaux périodiques

a) moyen de détermination : transformée d'un signal décalé dans le temps

Si $\mathcal{L} f(t) = F(p)$ ce signal traverse une ligne à retard $\Rightarrow$ décalage t_0

notons $f_0(t) = f(t-t_0)$ ce signal décalé $\qquad \mathcal{L} f_0(t) = \int_0^\infty f(t-t_0)\, e^{-p(t)}\,dt$

$$\mathcal{L} f_0(t) = \int_0^\infty f(t-t_0)\, e^{-p(t-t_0+t_0)}\, d(t-t_0) \quad \text{avec } dt_0 = 0$$

$$\mathcal{L} f_0(t) = e^{-pt_0}\int_0^\infty f(t-t_0)\, e^{-p(t-t_0)}\, d(t-t_0) = e^{-pt_0}\,\mathcal{L} f(t)$$

Soit $\boxed{f(t-t_0) \xrightleftharpoons[\mathcal{L}^{-1}]{\mathcal{L}} e^{-pt_0}\cdot F(p)}$

Cette propriété va permettre d'étudier le cas de tout signal périodique dont on connait la transformée du motif récurent

Soit une forme (motif) notée $m(t)$: (Hypothèse : $m(t)$ est un signal à énergie finie)

On définit $M(p) = \mathcal{L}\, m(t)$ soit $m(t) \xrightleftharpoons[\mathcal{L}^{-1}]{\mathcal{L}} M(p)$

[redacted]

Soit la transformée de la fonction décalée de t_0

$$\mathcal{L}\left(f(t-t_0)\right) = e^{-pt_0}\,\mathcal{L}f(t) \qquad \text{(Théorème : cf doc)}$$

Soit un motif $m(t)$ dont la transformée est $M(p)$

$\mathcal{L}\,m(t) = M(p)$

Le motif est manifesté périodiquement : période (T)

Pour reproduire la périodicité on considère toutes les T unités de temps

un 1er décalage $M_1(p) = e^{-pT}\cdot M(p)$

puis 2ème décalage $M_2(p) = e^{-2pT}\cdot M(p)$

puis 3e, 4e, ... $n$ième décalage

$\Rightarrow$ On effectue la somme $\text{Signal}(p) = \sum_{i=1}^{\infty} M(p)\cdot e^{-ipT} = F(p)$

$$F(p) = M(p)\cdot\left(1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + e^{-3pT} + \dots\right)$$

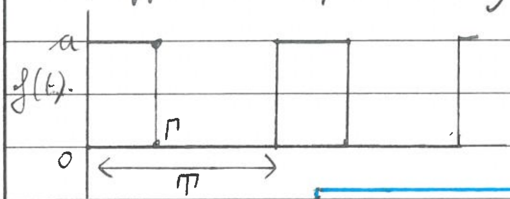
Avec par ailleurs $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$

Ainsi :

$$\boxed{F(p) = \frac{M(p)}{\left(1 - e^{-pT}\right)}}$$

Transformée d'un signal $f(t)$ de période T ayant $M(p)$ pour transformée du motif

b) Application pour un signal créneau d'amplitude a, niveau de durée $T' < T$



Nous avons montré précédemment que (Eq 3)

$$M_{f}(p) = \frac{a}{p}\left(1 - e^{-pT'}\right)$$

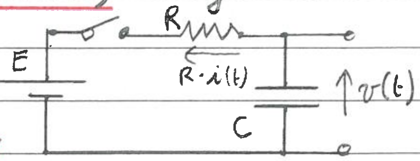
Il en résulte

$$\boxed{\mathcal{L}f(t) = \frac{a}{p}\cdot\frac{\left(1 - e^{-pT'}\right)}{\left(1 - e^{-pT}\right)}}$$

Transformée du créneau périodique

IV] Application de la transformation $\mathcal{L}$ à l'étude des circuits en régime transitoire

a) Cas de la cellule RC dite d'intégration



Le condensateur présente une charge initiale V_0

cf Notes { Théorème de la dérivée de la transformée

$$\boxed{\mathcal{L}f'(t) = p\,\mathcal{L}f(t) - f(0^+)}$$

Notons $V(p) = \mathcal{L}\,v(t)$

$\forall t$ $E(t) = Ri(t) + v(t)$ avec $i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C\frac{dv(t)}{dt}$ } $E(t) = RC\frac{dv(t)}{dt} + v(t)$ } On transforme les 2 membres $(\tau = RC)$

$$\frac{E}{p} = \tau\left[p\cdot V(p) - v_0\right] + V(p) = V(p)(1+\tau p) - \tau v_0 \;\Rightarrow\; V(p)(1+\tau p) = \frac{E}{p} + \tau v_0$$

d'où $V(p) = E\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1+\tau p} + V_0\cdot\frac{\tau}{1+\tau p}$ relation dont on prend la transformée inverse

$$v(t) = E\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{(1+\tau p)}\right) + V_0\,\mathcal{L}^{-1}\frac{\tau}{(1+\tau p)}$$

avec les identités précédemment établies Il en résulte (Eq. 1 et Eq. 2)

$$\boxed{v(t) = \underbrace{E\cdot\gamma(t)\cdot\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}_{\text{Régime de charge indicielle en tant que telle}} + \underbrace{V_0\cdot e^{-t/\tau}}_{\text{Régime de relaxation dans la résistance nulle du générateur idéal selon Thévenin}}}$$

Cela peut être analysé comme la superposition de deux régimes

En ces études, si $p = \alpha + j\omega$, ici pour $\alpha \to 0$ On pose en pratique $p = j\omega$

V] Cellules (RC, RL ...) étudiées avec la méthode de Laplace appliquée aux fonctions de transfert

Pour un système linéaire $e(t) \to \boxed{SYS} \to s(t)$ — $h(t)$ réponse impulsionnelle

(cf notes) $s(t) = e(t) * h(t)$ en domaine temps : convolution par la réponse impulsionnelle

$S(p) = \mathcal{L}(e(t)) \cdot H(p)$ ($\forall$ entrée $e(t)$) en domaine fréquence $E(p) = \mathcal{L}(e(t))$

Cas particulier de $e(t) = \gamma(t)$ l'indice : Alors $S(p)$ notée $U(p) = \frac{1}{p} \cdot H(p)$

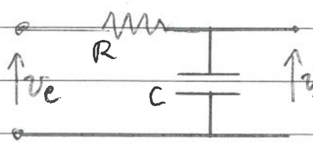
$U(p)$ est ainsi la réponse indicielle exprimée en domaine fréquence } c'est aussi la transformée de l'intégrale de $h(t)$

$$\boxed{\text{Ainsi : } h(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftharpoons}} H(p) \quad \text{et} \quad u(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftharpoons}} U(p) = \frac{1}{p} H(p)}$$

réponse impulsionnelle — réponse indicielle

a) Cas de la cellule RC en intégration

On recherche la réponse indicielle à partir de la fonction de transfert



$Z(R) = R$

$Z(C) = \frac{1}{jC\omega}$

$$H(p) = H(j\omega) = \frac{v_s(j\omega)}{v_e(j\omega)} = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \Rightarrow H(p) = \frac{1}{(1+\tau p)}$$

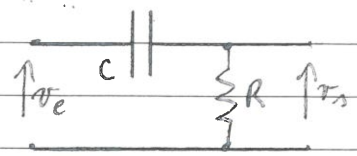
- Avec $U(p) = \frac{1}{p} \cdot H(p)$ il vient : $U(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{(1+\tau p)}$ (à identifier avec Eq. 2)

(Eq. 2) $\mathcal{L}\, \gamma(t)(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1+\tau p}$ } $\Rightarrow \boxed{u(t) = E \cdot (1 - e^{-t/\tau})}$ } Pour un échelon de E Volt à l'entrée

Remarque : pour $p >> 1$ $U(p) \to \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{p^2}$ soit transformée d'une rampe $\left(\frac{1}{\tau} \cdot t = f(t)\right)$ } justifie le terme cellule d'intégration

b) Cas de la cellule RC en dérivation

Même principe que précédemment



$$H(p) = H(j\omega) = \frac{v_s(j\omega)}{v_e(j\omega)} = \frac{R}{\frac{1}{jC\omega} + R} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{\tau p}{1 + \tau p}$$

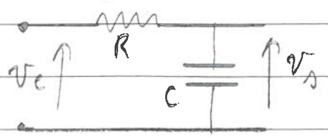
Remarque : si $\tau p << 1$ $H(p) \to \tau \cdot p$ comportement dérivateur pur

Pour la réponse indicielle

$U(p) = \frac{1}{p} \cdot H(p) \Rightarrow U(p) = \tau \cdot \frac{1}{1+\tau p}$ (à identifier avec Eq. 1)

(Eq. 1) $\mathcal{L}\, e^{-\frac{t}{\tau}} = \tau \cdot \frac{1}{(1+\tau p)}$ } $\Rightarrow \boxed{u(t) = E \cdot e^{-t/\tau}}$ } Pour un échelon de E Volt présenté à l'entrée

c) Recherche d'une réponse à un signal de rampe $f(t) = at$ avec $\mathcal{L}(at) = \frac{a}{p^2}$ pour une cellule RC d'intégration



$$H(p) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{1/jC\omega}{R+1/jC\omega} = \frac{1}{1+j\omega RC} = \frac{1}{1+\tau p}$$

D'une façon générale pour E(p) en entrée : $S(p) = E(p)\cdot H(p)$

Soit ici $S(p) = \frac{a}{p^2}\cdot\frac{1}{(1+\tau p)}$ peut être vu comme $S(p) = a\cdot\left(\frac{1}{p}\cdot\underbrace{\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{(1+\tau p)}}_{Eq.2}\right)$

Avec Eq.2 nous avons vu que :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p(1+\tau p)}\right) = \gamma(t)(1-e^{-t/\tau})$$

$$\boxed{\mathcal{L}\int_0^t f(t)\cdot dt = \frac{1}{p}\mathcal{L}f(t)}$$

le Théorème de la transformée de l'intégrale de f(t) ⇒

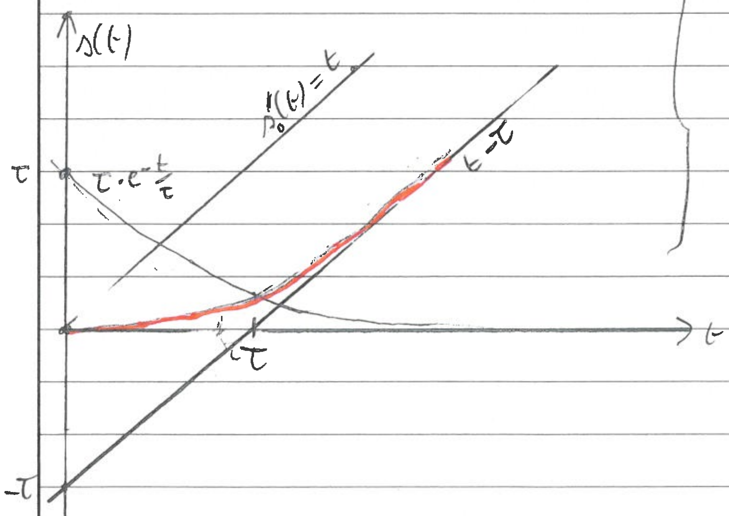
$$\frac{1}{p}\cdot\left(\frac{1}{p(1+\tau p)}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \int_0^t (1-e^{-t/\tau})\,dt = \int_0^t dt \ominus \int_0^t e^{-t/\tau}\,dt$$

$$= [t]_0^t \ominus -\tau\int_0^t e^{-t/\tau}\,d\frac{-t}{\tau} = t + \tau\left[e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^t$$

$$= t + \tau e^{-t/\tau} - \tau = (t-\tau) + \tau e^{-t/\tau}$$

D'où $\boxed{s(t) = \mathcal{L}^{-1}(S(p)) = a\left[(t-\tau) + \tau\cdot e^{-t/\tau}\right]}$ réponse à la rampe de la cellule RC en intégration

Si l'on considère une rampe de pente unité $a = 1V/sec$
le tracé de l'évolution de s(t) peut être illustré :



$s(t) = (t-\tau) + \tau e^{-t/\tau}$

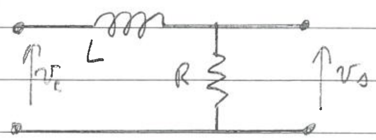
Les conditions limites aident à faire le tracé

$t \to 0 \Rightarrow s(t) \Rightarrow 0$

$t \to \infty \Rightarrow s(t) \to (t-\tau)$ droite asymptotique

d) Réponse à l'indice du circuit LR (intégrateur)

$$H(p) = \frac{R}{R+jL\omega} = \frac{1}{1+j\frac{L}{R}\omega} = \frac{1}{1+\tau p} \quad \left(\text{avec } \tau = L/R \;\; H(p) \to \frac{1}{\tau p} \text{ si } \tau p \gg 1\right)$$



Si source E (indice) ⇒ $U(p) = \frac{E}{p}\cdot H(p) = E\cdot\frac{1}{p(1+\tau p)}$ soit $u(t) = E\cdot\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p(1+\tau p)}$ (cf Eq.2)

D'où $u(t) = E\cdot\gamma(t)\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Rightarrow \boxed{u(t) = E\cdot\left(1-e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right)}$