

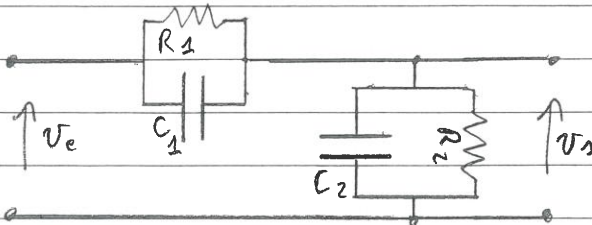
TD n°3

Thème n°1

Sonde atténuatrice compensée utilisée sur les entrées d'oscilloscope

Oscilloscope "cheap":  $Z_c \approx 1\text{M}\Omega // 10\text{pF}$

La compensation requiert l'étude du circuit suivant en régime indiciel



1) Déterminer la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{V_s(j\omega)}{V_e(j\omega)}$$

2) En déduire l'expression de la réponse indicielle pour une échelle de 1 volt

On peut noter  $Z_1 = R_1 // C_1$   
 $Z_2 = R_2 // C_2$

$$Z = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{C} \cdot \frac{RC}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{C} \cdot \frac{\tau}{1 + j\tau\omega}$$

Ainsi  $H(p) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{1 + Z_1/Z_2}$  avec  $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\frac{1}{C_1} \cdot \frac{\tau_1}{1 + j\tau_1 p}}{\frac{1}{C_2} \cdot \frac{\tau_2}{1 + j\tau_2 p}} = \frac{C_2 \cdot \tau_1}{C_1 \cdot \tau_2} \cdot \frac{1 + j\tau_2 p}{1 + j\tau_1 p} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{1 + j\tau_2 p}{1 + j\tau_1 p}$

Soit

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} \frac{(1 + j\tau_2 p)}{(1 + j\tau_1 p)}} = \frac{N}{D} \text{ avec } D = \frac{R_2(1 + j\tau_2 p) + R_1(1 + j\tau_1 p)}{R_2(1 + j\tau_1 p)} = \frac{(R_1 + R_2) + (R_1\tau_1 + R_2\tau_2)p}{R_2(1 + j\tau_1 p)}$$

D'où

$$H(p) = \frac{R_2(1 + j\tau_1 p)}{(R_1 + R_2) \left( 1 + \frac{R_1\tau_1 + R_2\tau_2}{R_1 + R_2} p \right)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + j\tau_1 p}{1 + j\tau p} \quad \text{avec } \tau = \frac{R_1\tau_1 + R_2\tau_2}{R_1 + R_2} \quad [\text{en sec}]$$

Eq. 3.1

On note  $K = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow H(p) = K \frac{1 + j\tau_1 p}{1 + j\tau p}$  Soit:  $H(p) = K \left[ \frac{1}{1 + j\tau p} + \tau_1 \cdot \frac{p}{1 + j\tau p} \right]$

Par ailleurs  $H(p) = \mathcal{L}\{h(t)\}$  et l'indice a pour forme fréquentielle  $V(p) = \frac{1}{p} \cdot H(p)$

Il en découle

$$V(p) = K \cdot \left[ \tau_1 \cdot \frac{1}{1 + j\tau p} + \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 + j\tau p} \right] \quad \text{Il en résulte (Eq 1 et 2 + Dm°2)}$$

$$v(t) = K \left[ \tau_1 \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} + (1 - e^{-t/\tau}) \right] \quad \text{pour une sollicitation unité de 1V}$$

Il en résulte par E Volt

$$v(t) = E \cdot K \left[ 1 + \left( \frac{\tau_1}{\tau} - 1 \right) e^{-t/\tau} \right] \quad \text{Soit } w(t) = E \cdot K \left[ 1 + a \exp^{-t/\tau} \right] \quad \text{Eq. 3.2}$$

où  $a = \frac{\tau_1}{\tau} - 1$

3) Indiquer en cas spécial

En cette relation il existe un régime dit de compensation lorsque  $a = 0$

$$\frac{\tau_1}{\tau} = 1 \Rightarrow \tau_1 = \frac{R_2\tau_1 + R_1\tau_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow R_1\tau_1 + R_2\tau_1 = R_1\tau_1 + R_2\tau_2 \quad \text{Soit } \tau_1 = \tau_2$$

Si  $\tau_1 = \tau_2$   $w(t) = E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$  Régime de simple atténuation } avec  $R_1 C_1 = R_2 C_2 \Rightarrow C_1 = \frac{R_2}{R_1} C_2$   
 AN  $R_1 = 5\text{M}\Omega$   $R_2 = 1\text{M}\Omega$   $C_2 = 10\text{pF} \Rightarrow K = 1/10$   $C_1 \# 11\text{pF}$

4) Si  $a$  est appelée variable de compensation, donner une expression globale de  $a$  par une expression plus élégante de  $a = \frac{\tau_1}{\tau_2} - 1$

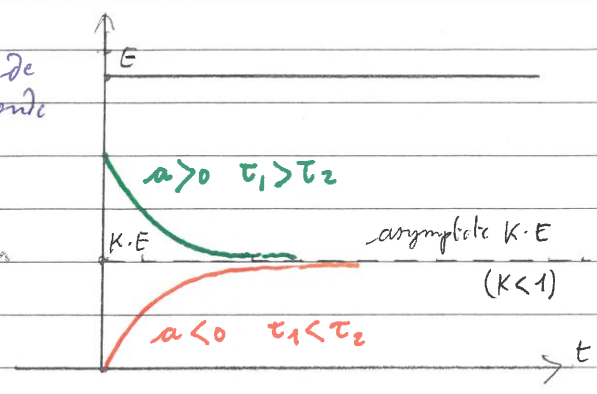
$$a = \frac{\tau_1}{\tau_2} - 1 = \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2} = \frac{R_1 C_1 - \frac{(R_1 \tau_1 + R_2 \tau_2)}{(R_1 + R_2)}}{\frac{R_2 \tau_1 + R_1 \tau_2}{(R_1 + R_2)}} = \frac{(R_1 + R_2) R_1 C_1 - (R_2 \tau_1 + R_1 \tau_2)}{R_2 \tau_1 + R_1 \tau_2}$$

$$a = \frac{R_1 R_2 C_1 + R_2 R_1 C_1 - R_2 R_1 C_1 - R_1 R_2 C_2}{R_2 \cdot R_1 C_1 + R_1 \cdot R_2 C_2} = \frac{R_1 \tau_1 - R_1 \tau_2}{\tau_1 (R_2 C_1 + R_2 C_2)}$$

Eq.3.3

$$a = \frac{\tau_1 - \tau_2}{R_2 (C_1 + C_2)}$$

Expression de la variable de compensation pour une sonde d'atténuation Oscilloscope

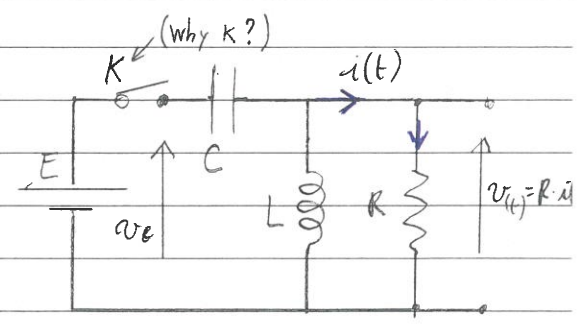


5) Représenter l'allure de la réponse indicielle pour les cas  $a=0$   $a>0$   $a<0$

Thème n°2

Comportement d'une cellule  $[C, L/R]$  où l'on s'intéresse à l'intensité dans la résistance

en termes de réponse indicielle pour une sollicitation en tension  $e(t) = \delta(t) \cdot E$



1°) A la formulation de  $K$  et/ou sans calcul des valeurs de  $i(t)$  particulières

$i(t \rightarrow 0)$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} i(t)$

pour  $t \rightarrow 0$

la transition échelon constitue un régime transitoire "abrupt" se traduisant par un spectre riche en HF (hautes fréquences)

les impédances respectives de  $C$  et de  $L$  sont:  $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$  et  $Z_L = j\omega L$

Ainsi pour  $\omega \nearrow \nearrow$   $Z_C \rightarrow 0$  (court-circuit)

$\omega \nearrow \nearrow$   $Z_L \rightarrow \infty$  (circuit ouvert)

A la mise sous tension tout se passe comme si le condensateur était "strappé" (court-circuit) et comme si la bobinage (self) était débranché

Il en résulte  $\lim_{t \rightarrow 0} i(t) = \frac{E}{R}$

pour  $t \rightarrow \infty$

On est alors en régime permanent où le condensateur se charge à pleine charge et on conduit plus  $\left( \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{j\omega C} = \infty \right)$  circuit ouvert

$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0$

Remarque:

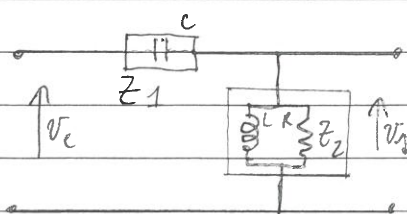
Par ailleurs, en régime permanent la self constitue un court-circuit ( $\lim_{\omega \rightarrow 0} j\omega L = 0$ )

2°) Etudier  $H(\omega)$  la fonction de transfert  $\frac{V_o(j\omega)}{V_e(j\omega)} = H(j\omega)$  de la cellule



## 2°) Fonction de transfert de la cellule

Le schéma peut se représenter dans le domaine fréquentiel où  $p \rightarrow j\omega$



$$\text{Ici } Z_1 = \frac{1}{j\omega C} \quad \text{et } Z_2 = R // j\omega L = \frac{j\omega RL\omega}{R + j\omega L}$$

$$H(j\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{1 + Z_1/Z_2} \quad \text{avec } \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{R + j\omega L}{j\omega RL\omega}$$

$$\text{avec } p = j\omega \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1}{pC} \cdot \frac{(R + Lp)}{RLp} = \frac{R}{p^2 LC} + \frac{Lp}{p^2 LC}$$

$$\text{Soit } \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1}{p^2 LC} + \frac{1}{pRC}$$

d'où

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{p^2 LC} + \frac{1}{pRC}}$$

on multiplie par  $p^2 LC$  le numérateur et le dénominateur

$$H(p) = \frac{p^2 LC}{p^2 LC + 1 + \frac{p^2 LC}{pRC}}$$

d'où il résulte

$$H(p) = \frac{p^2 LC}{1 + p \cdot \frac{L}{R} + p^2 LC} \quad \left. \begin{array}{l} \text{fonction de} \\ \text{Transfert} \\ \text{Eq. A} \end{array} \right\}$$

3°) Déterminer  $I(p)$  et exprimer le résultat sous la forme

canonique suivante :

(on identifie  $I_0$ ,  $\omega_0$  et  $m$ )

$$\text{Avec } V_0(p) = H(p) \cdot V_e(p) \quad \text{et } V_e(p) = \frac{E}{p} \quad (\text{échelon})$$

$$I(p) = \frac{V_0(p)}{R} = \frac{1}{R} \cdot H(p) \cdot \frac{E}{p}$$

$$I(p) = \frac{E}{R} \cdot \frac{p^2 LC}{1 + p \frac{L}{R} + p^2 LC}$$

Résultat dont il résulte par identification

$$\boxed{I_0 = \frac{E}{R}} \quad LC = \frac{1}{\omega_0^2} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

enfin au dénominateur à l'ordre 1 :  $\frac{L}{R} = \frac{2m}{\omega_0}$ 

$$\text{soit } m = \frac{L\omega_0}{2R} = \frac{L}{2R} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \boxed{m = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

(on peut alors re-exprimer

(sans dimension) ce qui se voit au dénominateur de  $F(p)$ 

Eq. B.1

$$I(p) = \frac{I_0}{\omega_0^2} \cdot p \cdot \frac{1}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad \text{notée } F(p)$$

$$I(p) = \frac{I_0}{\omega_0^2} \cdot p \cdot F(p) \quad \text{Eq. B.2}$$

4°) On pose  $E = 8V$ ,  $L = 25mH$  et  $R = 4k\Omega$ 

Calculer les paramètres  $I_0$ ,  $\omega_0$  et  $m$  avant de déterminer l'original de  $F(p)$   
de telle sorte que  $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  : on exprimera  $f(t)$  à l'aide d'une table

$$I_0 = \frac{E}{R} = \frac{8}{4 \cdot 10^3} = 2mA$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{25 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-9}}} = \frac{1}{10^{-6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{250}} = \frac{10^6}{5 \cdot \sqrt{10}} = 6,37 \cdot 10^4 \frac{1}{s}$$

$$\omega_0 : 2\pi f_0$$

$$f_0 = 10^4 Hz$$

$$m = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 10^3} \cdot \sqrt{\frac{25 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-9}}} = \frac{1}{8 \cdot 10^3} \cdot \sqrt{\frac{25 \cdot 10^6}{10}} = \frac{5 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = 0,197 \neq 0,2 < 1$$

AN

$$I_0 = 2mA \quad f_0 = 10^4 Hz \quad \text{et } m \neq 0,2$$

le fait que  $m < 1$  influence la forme de la solution  $f(t)$

On considère maintenant  $F(p)$  avec une table standard de transformations (4)

$$F(p) = \frac{1}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} = \frac{1}{D}$$

Sachant que la table donne

$$\mathcal{L}\left(\frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{\beta - \alpha}\right) = \frac{1}{(p - \alpha)(p - \beta)} \quad \text{Eq. C}$$

Il convient d'exprimer  $D$  sous une forme binomiale factorisée

$$D = ap^2 + bp + c = a(p - \alpha) \cdot (p - \beta)$$

avec  $a = \frac{1}{\omega_0^2}$   $b = \frac{2m}{\omega_0}$  et  $c = 1$

Il faut ainsi déterminer les deux racines  $\alpha$  et  $\beta$

On recherche le discriminant  $D = b^2 - 4ac = \frac{4m^2}{\omega_0^2} - \frac{4}{\omega_0^2} = \frac{4}{\omega_0^2} (m^2 - 1)$  avec  $m = \eta$

Les racines  $\alpha$  et  $\beta$  sont grandeurs complexes conjuguées  $\Delta < 0$

avec  $\sqrt{-\Delta} = \frac{2}{\omega_0} \sqrt{1 - m^2}$

$$\alpha = \frac{-b + j\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \alpha = \frac{\omega_0^2}{2} \left( \frac{-2m}{\omega_0} + j \frac{2}{\omega_0} \sqrt{1 - m^2} \right)$$

$$\beta = \frac{-b - j\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \beta = \frac{\omega_0^2}{2} \left( \frac{-2m}{\omega_0} - j \frac{2}{\omega_0} \sqrt{1 - m^2} \right)$$

notant  $1 - m^2 = \omega$   $\alpha = -\omega_0 m + j\omega_0 \sqrt{\omega}$   
 $\beta = -\omega_0 m - j\omega_0 \sqrt{\omega}$

Nous avons ainsi :  $(\beta - \alpha) = \ominus 2j\omega_0 \sqrt{\omega}$

De cette manière ; on peut reprendre  $F(p)$

$$F(p) = \frac{1}{ap^2 + bp + c} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(p - \alpha)(p - \beta)} = \omega_0^2 \cdot \frac{1}{(p - \alpha)(p - \beta)}$$

où l'on connaît les valeurs  $\alpha$  et  $\beta$

Il en résulte

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} F(p) = \omega_0^2 \cdot \frac{1}{\beta - \alpha} \cdot [e^{\beta t} - e^{\alpha t}] = \frac{\omega_0^2}{\ominus 2j\omega_0 \sqrt{\omega}} \cdot (e^{\beta t} - e^{\alpha t}) = \frac{\omega_0}{2j\sqrt{\omega}} (e^{\alpha t} - e^{\beta t})$$

$$f(t) = \frac{\omega_0}{2j\sqrt{\omega}} \cdot \left[ e^{-\omega_0 m t} \cdot e^{j\omega_0 \sqrt{\omega} t} - e^{-\omega_0 m t} \cdot e^{-j\omega_0 \sqrt{\omega} t} \right]$$

$$f(t) = \frac{\omega_0 \cdot e^{-\omega_0 m t}}{\sqrt{\omega}} \cdot \frac{1}{2j} \left[ e^{j\omega_0 \sqrt{\omega} t} - e^{-j\omega_0 \sqrt{\omega} t} \right]$$

type  $e^{jx} - e^{-jx}$

où l'on remarque que  
 $e^{jx} = \cos x + j \sin x$   
 $e^{-jx} = \cos x - j \sin x$   
 $e^{jx} - e^{-jx} = 2j \sin x$

Il en découle :

Eq. D.1.  $f(t) = \frac{\omega_0 \cdot e^{-\omega_0 m t}}{\sqrt{1 - m^2}} \cdot \sin(\omega_0 \sqrt{1 - m^2} \cdot t)$

résultat intermédiaire (hors sens physique)

La solution est de type oscillatoire amortie et il est l'usage de noter

- pseudo-fréquence angulaire  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - m^2} \Rightarrow \omega = 2\pi f$  où  $f$  pseudo-fréquence
- constante de décroissance logarithmique :  $\tau = 1/m\omega_0$

De cette manière  $f(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - m^2}} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \sin(\omega \cdot t)$  Eq. D.2

Il sera maintenant possible de revenir à l'étude de  $i(t)$  dans le cadre de la dernière question (5°)



Nous avons obtenu en résultat intermédiaire (5)

$$f(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-m^2}} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \sin(\omega t) \quad (\text{Eq D.2})$$

$$\text{avec } \tau = 1/m\omega_0 \text{ et } \omega = \omega_0 \sqrt{1-m^2}$$

Remarque:  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$  du fait de  $\sin(\omega \cdot 0)$

### 5) Déterminer l'expression de $i(t)$

Revenant à l'expression Eq B.2  $I(p) = \frac{I_0}{\omega_0^2} \cdot p \cdot F(p)$  } Par ailleurs, avec le théorème de la transformée de la fonction dérivée

$$\mathcal{L}f'(t) = p \mathcal{L}f(t) \Leftrightarrow f(0^+) = p \cdot F(p) \text{ si } f(0^+) = 0$$

Ainsi  $p \cdot F(p)$  a pour origine  $f'(t)$

Il en résulte :

$$i(t) = \frac{I_0}{\omega_0^2} \cdot f'(t) \quad \text{avec } f(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-m^2}} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \sin(\omega t) \quad \left. \begin{array}{l} \omega = \omega_0 \sqrt{1-m^2} \\ \tau = 1/m\omega_0 \end{array} \right\}$$

$$\text{On note } f(t) = k e^{at} \cdot \sin bt$$

$$a = -\frac{1}{\tau} = -m\omega_0, \quad b = \omega$$

$$d e^{at} = a \cdot e^{at}$$

$$d \sin bt = b \cdot \cos bt$$

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( k e^{at} \cdot \sin bt \right) = k \left( a e^{at} \cdot \sin bt + e^{at} \cdot b \cos bt \right)$$

$$\frac{d f(t)}{dt} = k \left[ e^{at} \cdot b \cdot \cos bt + a \cdot e^{at} \cdot \sin bt \right]$$

$$f'(t) = k \cdot e^{at} (b \cdot \cos bt + a \sin bt)$$

$$i(t) = \frac{I_0}{\omega_0^2} \cdot f'(t) = \frac{I_0}{\omega_0^2} \cdot \frac{\omega_0}{\sqrt{1-m^2}} \cdot e^{at} \left[ \omega_0 \sqrt{1-m^2} \cdot \cos \omega t + m \omega_0 \sin \omega t \right]$$

Eq. E

$$i(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left[ \cos \omega t + \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \cdot \sin \omega t \right]$$

$$\text{avec } \omega = \omega_0 \sqrt{1-m^2}$$

$$\text{et } \tau = \frac{1}{m\omega_0}$$

Ce résultat décrit la

Reponse indicielle en intensité dans la résistance pour une sollicitation en entrée par un indice de tension  $v_e = E \cdot \delta(t)$ .

TD Science n° 3

A propos du problème traité

filtre [RC \* RC] (Thème 1)

**SONDES ATTÉNUATRICES  
COMPENSÉES POUR OSCILLOSCOPES**

Comme signalé au Chap. III, § 3.11, des sondes à forte impédance sont souvent utilisées en oscilloscopie.

Leur schéma est indiqué à la fig. (VII, 23).

Le rapport de réduction est :  $A = \frac{R_e}{R_e + R_s}$ ;

$R_e$  étant la résistance interne de l'oscilloscope et  $R_s$  une résistance fixe placée dans la sonde.

Pour  $R_e = 1 \text{ M}\Omega$  et  $A = 1/10$ ,  $R_s = 9 \text{ M}\Omega$ .

L'inconvénient est qu'avec la capacité parasite  $C_e$  de l'oscilloscope plus  $C_s$ , celle du câble blindé, on constitue un montage analogue à celui de la fig. (VII, 10). Par exemple, des signaux rectangulaires appliqués à l'entrée de la sonde, apparaissent arrondis à l'écran : fig. (VII, 12).

Il y a distorsion des signaux par la sonde.

En introduisant une capacité ajustable  $C_s$  dans la sonde : voir fig. (VII, 23) il est possible de compenser cette distorsion.

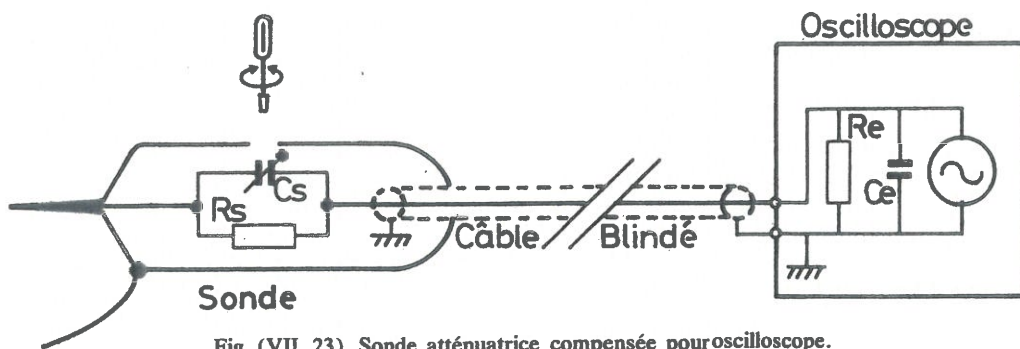


Fig. (VII, 23). Sonde atténuatrice compensée pour oscilloscope.

Le réglage de  $C_s$  se fait de la manière suivante : on applique des signaux rectangulaires à l'entrée de la sonde : signal  $S_o$  de la fig. (VII, 24).

Si la valeur de  $C_s$  est insuffisante, les signaux à l'écran sont arrondis : courbe SSC fig. (VII, 24).

Il y a **sous-compensation**.

Si cette valeur est trop élevée, les signaux présentent des pointes : signal SRC. Il y a **sur-compensation**.

Un petit trou est prévu sur le corps de la sonde pour que l'on puisse régler l'ajustable  $C_s$  à l'aide d'un petit tournevis.

On démontre que, dans les conditions de réglage optimum :

$$R_s \cdot C_s = R_e \cdot (C_e + C_s)$$

que la résistance d'entrée de la sonde vaut :

$$R_e/A \quad (10 R_e \text{ pour } A = 1/10)$$

et que la capacité d'entrée se réduit alors à :

$$A \cdot (C_e + C_s) \quad (C_e + C_s)/10 \text{ pour } A = 1/10.$$

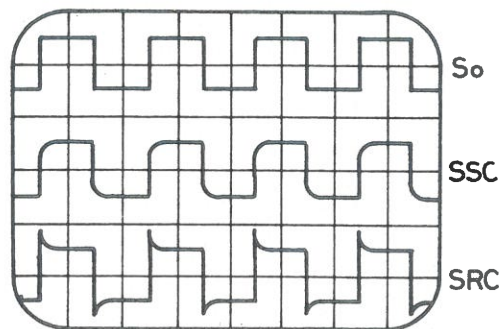


Fig. (VII, 24). Signaux de réglage d'une sonde compensée.

$S_o$  : Signal appliqué à l'entrée de la sonde.

SSC : Signal en sous-compensation.

SRC : Signal en sur-compensation.

Extrait de "Electronique pratique", J.-M. Fanchot, A. Perez-mas  
Ed. Dunod, 1996, ISBN 2-10-003248-8