Hashing

Algorithmen und Datenstrukturen
VU 186.866, 5.5h, 8 ECTS, SS 2018
Letzte Änderung: 2. Mai 2018
Vorlesungsfolien

Hashing

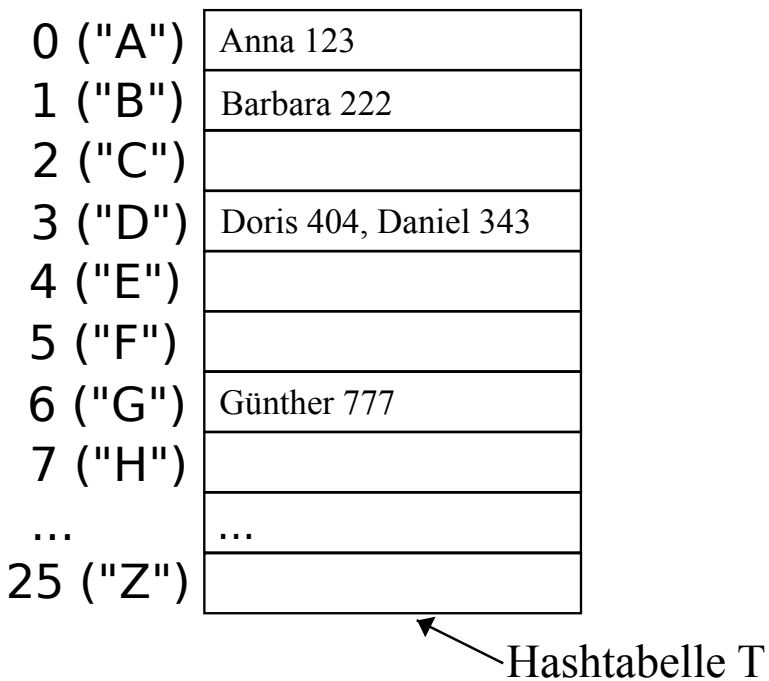
Hashing:

- Alternative Möglichkeit zum Wörterbuchproblem (siehe Kapitel über Suchbäume).
- Beobachtung: Im Allgemeinen ist lediglich eine kleine Teilmenge K aller möglichen Schlüssel $\mathcal{K}$ gespeichert.
- Idee: Statt in einer Menge von Datensätzen durch Schlüsselvergleiche zu suchen, ermittle die Position eines Elements im Speicher (bzw. einem Array) durch eine arithmetische Berechnung.

Hashing: Beispiel

Beispiel:

- Vergleich mit einem „Telefonregister“:
  Eine Seite für jeden Anfangsbuchstaben.
- Einfache (schlechte) Berechnung der Position in der Hashtabelle mit der Ordinalzahl (ord) des ersten Buchstabens im Namen s (z.B. $ord('A') = 0$, $ord('B') = 1$, ...).
- Hashfunktion h: hier $h(s) = ord(s[0])$.



Hashing: Grundlagen

Hashtabelle:

- Wir gehen davon aus, dass die Hashtabelle T mit einer vorgegebenen Tabellengröße m als Array mit den Indizes $0, \ldots, m-1$ realisiert wird.
- Für eine Hashtabelle der Größe m, die aktuell n Schlüssel speichert, ist $\alpha = \frac{n}{m}$ der Belegungsfaktor der Tabelle.

Hashfunktion:

- Wir wählen eine Hashfunktion $h : \mathcal{K} \to \{0, \ldots, m-1\}$, die jedem Schlüssel $k \in \mathcal{K}$ einen eindeutigen – aber i.A. nicht umgekehrt eindeutigen – Hashwert zuordnet.

Hashing

Vorteil: Laufzeit für die Operationen Suchen, Einfügen und Entfernen liegt im Idealfall in $\Theta(1)$, wenn wir davon ausgehen, dass $h(s)$ in konstanter Zeit berechnet werden kann.

Einschränkung:

- Gilt $h(k) = h(k')$ für $k \neq k'$, d.h., zwei verschiedene Schlüssel haben den gleichen Hashwert, so wird dies Kollision genannt.
- $\Theta(1)$ gilt nur unter der Annahme, dass die Anzahl der Kollisionen vernachlässigbar klein ist.
  - Im Erwartungsfall (bei entsprechender Konfiguration) erreichbar.
- Im Worst-Case liegt der Aufwand in $O(n)$.

Hashing

Zu klärende Punkte:

- Wie erfolgt die Kollisionsbehandlung?
  - Verkettung der Überläufer
  - Offene Hashverfahren
- Was ist eine gute Hashfunktion?
  - Divisions-Rest-Methode
  - Multiplikationsmethode
- Wie soll die Tabellengröße m gewählt werden?

Alle diese Aspekte beeinflussen die Güte/Effizienz der Hashtabelle.

Hashfunktionen

Was charakterisiert eine gute Hashfunktion?

Vor allem:

- Verwendete Schlüssel sollen möglichst gleichmäßig auf alle Plätze $0, \ldots, m-1$ der Hashtabelle aufgeteilt werden.
- Auch kleinste Änderungen im Schlüssel sollen zu einem anderen, möglichst unabhängigen Hashwert führen.

Divisions-Rest-Methode

Annahme: $k \in \mathbb{N}$

Berechnung:

$$h(k) = k \bmod m$$

Eigenschaften:

- Die Hashfunktion kann sehr schnell berechnet werden.
- Die richtige Wahl von m ist hier sehr wichtig. Eine gute Wahl für m ist eine Primzahl.

Divisions-Rest-Methode

Berechnung:

$$h(k) = k \bmod m$$

Schlechte Wahl für m:

- $m = 2^i$: Nur die letzten i Binärziffern spielen eine Rolle!
- $m = 10^i$: Analog bei Dezimalzahlen.
- $m = r^i$: Analog bei r-adischen Zahlen.
- aber auch $m = r^i \pm j$ für kleines j kann problematisch sein:
  z.B.: $m = 2^7 - 1 = 127$: Buchstaben als Zahlen interpretieren ('p' = 112 in ASCII)
  $h(\text{“pt”}) = (112 \cdot 128 + 116) \bmod 127 = 14452 \bmod 127 = 101$
  $h(\text{“tp”}) = (116 \cdot 128 + 112) \bmod 127 = 14960 \bmod 127 = 101$
  (Schlüssel in denen zwei Buchstaben vertauscht sind haben hier häufig den gleichen Hashwert)

Divisions-Rest-Methode für Strings

Schlüssel: String $s = (s_1, \ldots, s_l) \in \{0, \ldots, 127\}^l$

Berechnung: $k = 128^{l-1}s_1 + 128^{l-2}s_2 + \ldots + s_l$
Die sehr großen ganzzahligen Werte sind problematisch!

Berechnung mit Horner-Schema:

$$k = (\ldots(s_1 \cdot 128 + s_2) \cdot 128 + s_3) \cdot 128 + \ldots + s_{l-1}) \cdot 128 + s_l$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} k \bmod m = (\ldots(s_1 \cdot 128 + s_2) \bmod m) \cdot 128 + s_3) \bmod m) \cdot 128 + \ldots \\ + s_{l-1}) \bmod m) \cdot 128 + s_l) \bmod m \end{aligned}$$

Konsequenz: Keine Zwischenresultate $> (m-1) \cdot 128 + 127$
Berechnung mit üblichen integer-Typen so gut möglich.

Multiplikationsmethode

Grundlegende Idee:

- Wir nehmen wieder an: Schlüssel $k \in \mathbb{N}$
- Gegeben: irrationale Zahl A
- Berechnung:

$$h(k) = \lfloor m \underbrace{(k \cdot A - \lfloor k \cdot A \rfloor)}_{\in [0,1)} \rfloor$$

- Der Schlüssel wird mit A multipliziert, der ganzzahlige Anteil des Resultats wird abgeschnitten.
- Man erhält einen Wert in $[0, 1)$, dieser wird mit der Tabellengröße m multipliert, das Ergebnis gerundet.
- Eigenschaft, die gleichmäßige Streuung bestätigt: Für eine Schlüsselfolge 1,2,3,. . . ,i liegt $k \cdot A - \lfloor k \cdot A \rfloor$ des nächsten Schlüssels $k = i + 1$ immer in einem größten Intervall zwischen allen zuvor ermittelten Werten, 0 und 1.

Multiplikationsmethode: Wahl für A

Allgemein:

- Die Wahl von m ist hierbei unkritisch, sofern A eine irrationale Zahl ist.

Beste Wahl für A: Der goldene Schnitt

$$A = \Phi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.6180339887...$$

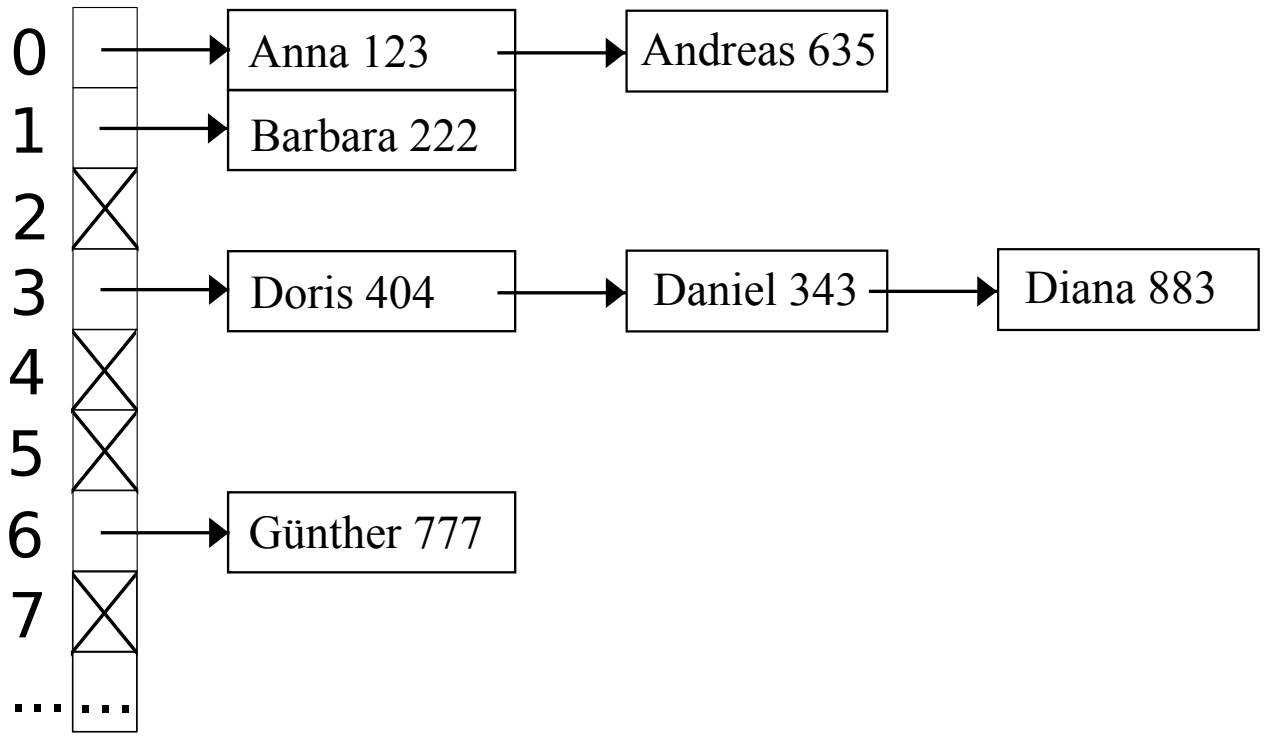
Dabei gilt, dass $\Phi^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n}$, wobei F_n die n-te Fibonacci-Zahl ist.

Eine Begründung dafür findet sich in:
D.E. Knuth: The Art of Computer Programming, Vol.3: Sorting and Searching, Addison-Wesley, 1973.

Kollisionsbehandlung
Verkettung der Überläufer

Verkettung der Überläufer

Idee: Jedes Element der Hashtabelle ist eine verkettete Liste.



Initialisierung

Eingabe: Hashtabelle T = Array von m Verweisen auf die jeweils ersten Elemente.

Ergebnis: Initialisierte Hashtabelle.

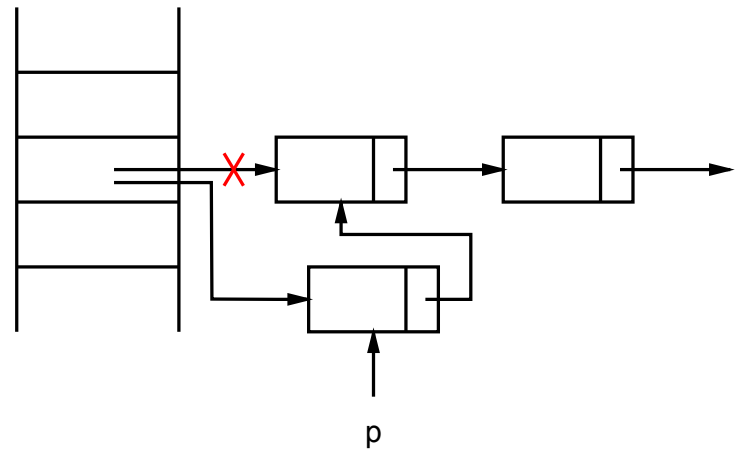
```
Initialize(T, m):
for i ← 0 bis m − 1
    T[i] = null
```

Einfügen

Eingabe: Hashtabelle T und einzufügendes Element p.

Ergebnis: Hashtabelle T mit neu eingetragenem Element p.

```
Insert(T, p):
pos ← h(p.key)
p.next ← T[pos]
T[pos] ← p
```



Hinweis: Der Hashwert (und damit die Position in der Hashtabelle) für $p.key$ wird mit der Funktion h berechnet.

Suchen

Eingabe: Hashtabelle T und gesuchter Schlüssel k.

Rückgabewert: Gesuchtes Element p.

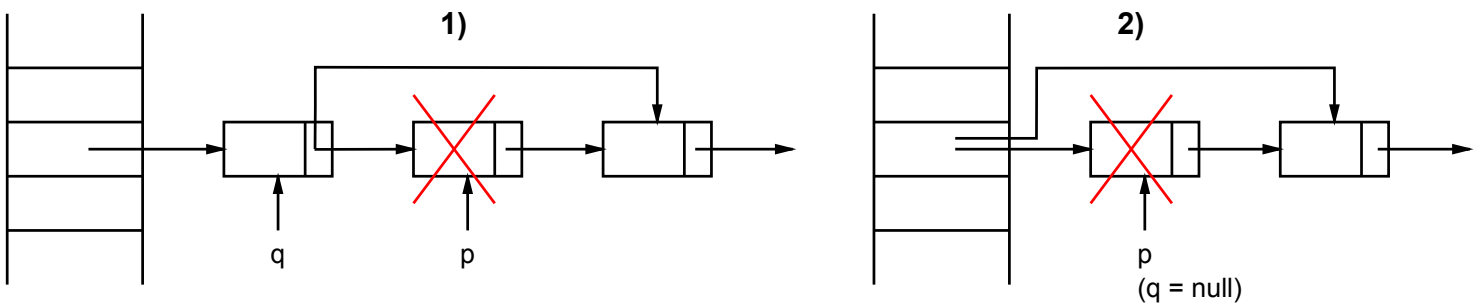
```
Search(T, k):
p =T[h(k)]
while p ≠ null und p.key ≠ k
      p ← p.next
return p
```

Entfernen eines Elements

Eingabe: Hashtabelle T und Schlüssel k des zu entfernenden Elements (wir gehen davon aus, dass ein Element mit dem gesuchten Schlüssel in T enthalten ist).

Ergebnis: Element mit dem Schlüssel k wurde aus T entfernt.

```
Remove(T, k):
pos ← h(k)
q ← null
p ← T[pos]
while p.key ≠ k
      q ← p
      p ← p.next
if q = null
      T[pos] ← T[pos].next
else
      q.next ← p.next;
```



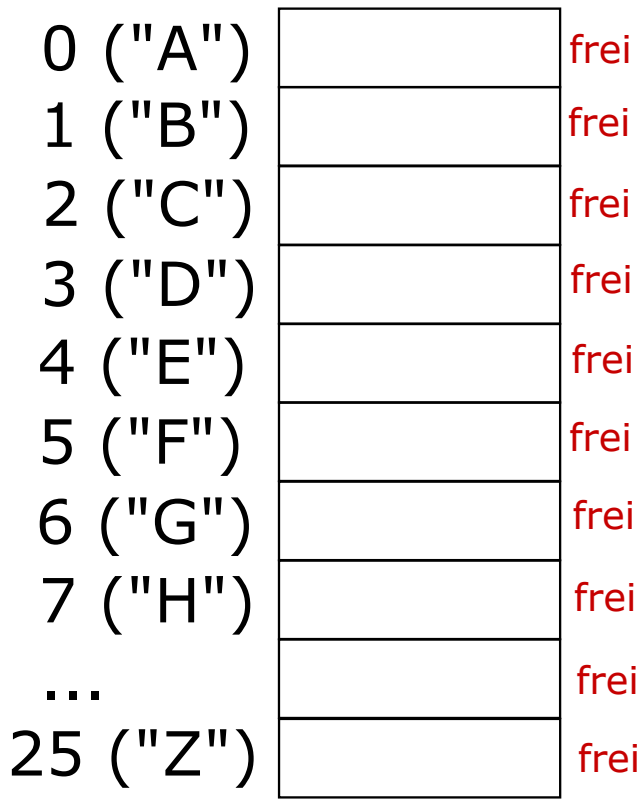
Kollisionsbehandlung
Offene Hashverfahren

Offene Hashverfahren: Grundlegende Idee

Alle Datensätze werden direkt in einem einfachen Array gespeichert, pro Platz ein Flag $f_i \in \{\textit{frei}, \textit{besetzt}, \textit{wieder frei}\}$.

Kollisionsbehandlung: Wenn ein Platz belegt ist werden in einer bestimmten Reihenfolge weitere Plätze betrachtet (sondiert).

Beispiel: Alle Plätze sind anfangs frei.



Offene Hashverfahren: Grundlegende Idee

Beispiel:

- Hashfunktion: Ordinalzahl des ersten Buchstabens im Namen
- Sondierreihenfolge: einfach die nächste Position
- Zwei Einträge, die auf Position 0 gespeichert werden sollten, einer (Albert) wird an der nächsten Position gespeichert.
- Eine neuer Eintrag **Andreas 635** würde an Position 2 gespeichert werden, **Armin 999** danach an Position 4.

0 ("A")	Anna 123	besetzt
1 ("B")	Albert 127	besetzt
2 ("C")		frei
3 ("D")	Doris 404	besetzt
4 ("E")		frei
5 ("F")		frei
6 ("G")	Günther 777	besetzt
7 ("H")		frei
...		frei
25 ("Z")		frei

Offene Hashverfahren: Grundlegende Idee

Beispiel:

- Entfernen: Flag wird auf *wieder frei* gesetzt, im Beispiel wird Anna entfernt.
- Würde $f_0 = \textit{frei}$ gesetzt werden, so würde Albert nicht mehr gefunden werden da die Sondierung bei Position 0 abbricht!
- Ein neuer Eintrag **Andreas 635** würde wieder an Position 0 gespeichert werden.

0 ("A")	Anna 123	wieder frei
1 ("B")	Albert 127	besetzt
2 ("C")		frei
3 ("D")	Doris 404	besetzt
4 ("E")		frei
5 ("F")		frei
6 ("G")	Günther 777	besetzt
7 ("H")		frei
...		frei
25 ("Z")		frei

Offene Hashverfahren: Im Detail

Prinzip: Alle Elemente werden – im Gegensatz zur Verkettung der Überläufer – direkt im Array gespeichert.

Kollisionsbehandlung: Wenn ein Platz belegt ist, so werden in einer bestimmten Reihenfolge weitere Plätze in Betracht gezogen.

Sondierungsreihenfolge (*probing*): Reihenfolge der auszuprobierenden Plätze.

$\rightarrow$ Die Hashfunktion wird zu einer Sondierungsfunktion $h(k, i)$ für Schlüssel k und Positionen $i = 0, 1, \ldots, m-1$ erweitert, die Sonderiungsreihenfolge ist dann $h(k, 0),\ h(k, 1), \ldots, h(k, m-1)$.

Offene Hashverfahren: Sondierung

- Zu jedem Platz $i = 0, \ldots, m-1$ wird ein Flag $f_i \in \{\textit{frei}, \textit{besetzt}, \textit{wieder frei}\}$ gespeichert.
- In der anfangs leeren Tabelle gilt für alle i $f_i = \textit{frei}$.
- Beim Einfügen wird das neue Element am ersten mit *frei* oder *wieder frei* markierten Platz eingefügt, das Flag wird auf *besetzt* gesetzt.
- Die Suche durchmustert alle Plätze bis der gesuchte Schlüssel entweder gefunden wird oder ein Platz als *frei* markiert ist (Schlüssel nicht enthalten).
- Das Entfernen setzt das Flag für das zu entfernende Element auf *wieder frei*.

Lineares Sondieren

Gegeben: Eine normale Hashfunktion:

$$h' : \mathcal{K} \to \{0, 1, \ldots, m-1\}.$$

Lineares Sondieren: Wir definieren für $i = 0, 1, \ldots, m-1$:

$$h(k, i) = (h'(k) + i) \bmod m.$$

Lineares Sondieren: Beispiel

Beispiel: $m = 8$, $h'(k) = k \bmod m$

Schlüssel und Wert der Hashfunktion:

k	10	19	31	22	14	16
$h'(k)$	2	3	7	6	6	0

Belegung der Hashtabelle:

0	1	2	3	4	5	6	7
14	16	10	19			22	31

Durchschnittliche Zeit: Für eine erfolgreiche Suche $\frac{9}{6} = 1,5$ (siehe Tabelle).

k	10		19		31		22		14		16		
	1	+	1	+	1	+	1	+	3	+	2	=	9

Lineares Sondieren: Probleme

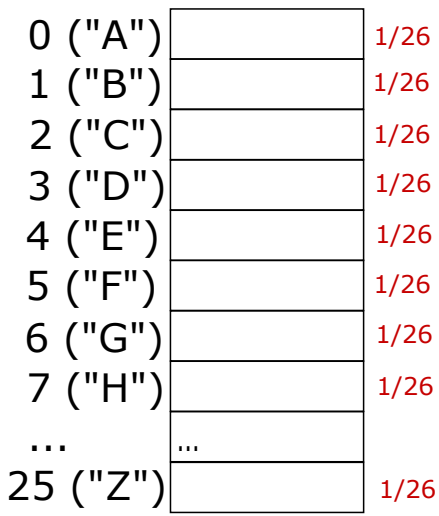
Problem:

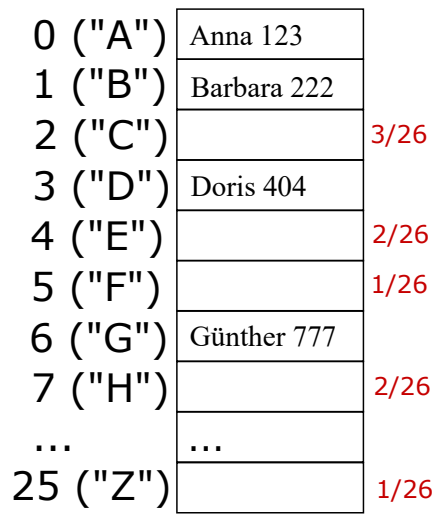
- Nach dem Einfügen ist die Wahrscheinlichkeit für einen neu einzufügenden Schlüssel in der Hashtabelle an einer gewissen Hashadresse gespeichert zu werden für die verschiedenen Hashadressen unterschiedlich.
- Wird ein Platz belegt, dann verändert sich die Wahrscheinlichkeit für das Einfügen an seinem nachfolgenden Platz.

Lineares Sondieren: Probleme

Beispiel:

- In der leeren Tabelle haben alle Plätze die gleiche Wahrscheinlichkeit.
- Nach dem Einfügen von verschiedenen Schlüsseln verändern sich die Wahrscheinlichkeiten. Z.B. werden auf der rechten Seite im Eintrag T[2] nach dem Einfügen von Anna und Barbara alle Schlüssel k mit $h(k) = 0$ oder $h(k) = 1$ oder $h(k) = 2$ gespeichert, im Eintrag T[5] dagegen nur alle Schlüssel k mit $h(k) = 5$.





Lineares Sondieren: Probleme

Probleme:

- Lange belegte Teilstücke der Hashtabelle haben eine stärkere Tendenz zu wachsen als kurze.
- Dieser Effekt wird noch verstärkt, weil lange belegte Teilstücke zu größeren zusammenwachsen, wenn die Lücken zwischen ihnen geschlossen werden.
- Als Folge dieses Phänomens der primären Häufung (*primary clustering*) verschlechtert sich die Effizienz des linearen Sondierens drastisch, sobald sich der Belegungsfaktor α dem Wert 1 nähert.

Uniform Hashing

Uniform Hashing:

- Idealform des Sondierens.
- Jeder Schlüssel erhält mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine bestimmte der $m!$ Permutationen von $0, 1, \ldots, m-1$ als Sondierungsreihenfolge zugeordnet.
- Ist in der Praxis schwierig zu implementieren und wird daher mit den nachfolgenden Verfahren approximiert.

Quadratisches Sondieren

Idee: Um die primäre Häufung des linearen Sondierens zu vermeiden, wird beim quadratischen Sondieren für Schlüssel k von $h(k)$ aus mit quadratisch wachsendem Abstand nach einem freien Platz gesucht.

Gegeben: Eine normale Hashfunktion:

$$h' : \mathcal{K} \to \{0, 1, \ldots, m-1\}.$$

Quadratisches Sondieren: Sondierungsfunktion lautet nun:

$$h(k, i) = (h'(k) + c_1 i + c_2 i^2) \bmod m$$

Dabei sind c_1 und c_2 geeignet gewählte Konstanten.

Quadratisches Sondieren: Beispiel

Beispiel: $m = 8$, $h'(k) = k \bmod m$, $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, gleiche Schlüssel wie vorhin.

Schlüssel und Wert der Hashfunktion:

k	10	19	31	22	14	16
$h'(k)$	2	3	7	6	6	0

0	1	2	3	4	5	6	7
		10	**19**			**22**	**31**

$$14 \to 6 \quad \to \quad 6 + \frac{1}{2}(1 + 1^2) \bmod 8 = 7$$

$$\to \quad 6 + \frac{1}{2}(2 + 2^2) \bmod 8 = 1$$

0	1	2	3	4	5	6	7
16	**14**	**10**	**19**			**22**	**31**

Quadratisches Sondieren: Beispiel und Analyse

0	1	2	3	4	5	6	7
16	14	10	19			22	31

Durchschnittliche Zeit: Für eine erfolgreiche Suche $\frac{8}{6} \approx 1.33$.

k	10		19		31		22		14		16		
	1	+	1	+	1	+	1	+	3	+	1	=	8

Probleme: Primäre Häufungen werden vermieden, aber ein anderes Phänomen, die sekundären Häufungen (*secondary clustering*) können auftreten.

Güte von Kollisionsbehandlungen

Theoretische Analyseergebnisse:

Durchschnittliche Anzahl der Sondierungen (für große m, n):

α	Verkettung		offene Hashverfahren					
			lineares S.		quadr. S.		unif. hashing	
	erfolgreich	erfolglos	er	el	er	el	er	el
0.5	1.250	0.50	1.5	2.5	1.44	2.19	1.39	2
0.9	1.450	0.90	5.5	50.5	2.85	11.40	2.56	10
0.95	1.475	0.95	10.5	200.5	3.52	22.05	3.15	20
1.0	1.500	1.00	—	—	—	—	—	—

er: erfolgreiche Suche, el: erfolglose Suche

Ergebnisse von D.E. Knuth: The Art of Computer Programming, Vol.3: Sorting and Searching, Addison-Wesley, 1973.

Double Hashing

Idee: Die Effizienz des uniformen Sondierens wird bereits annähernd erreicht, wenn man statt einer zufälligen Permutation für die Sondierungsfolge eine zweite Hashfunktion verwendet.

Gegeben: Zwei Hashfunktionen:

$$h_1, h_2 : \mathcal{K} \to \{0, 1, \ldots, m-1\}.$$

Double Hashing: Wir definieren für $i = 0, 1, \ldots, m-1$:

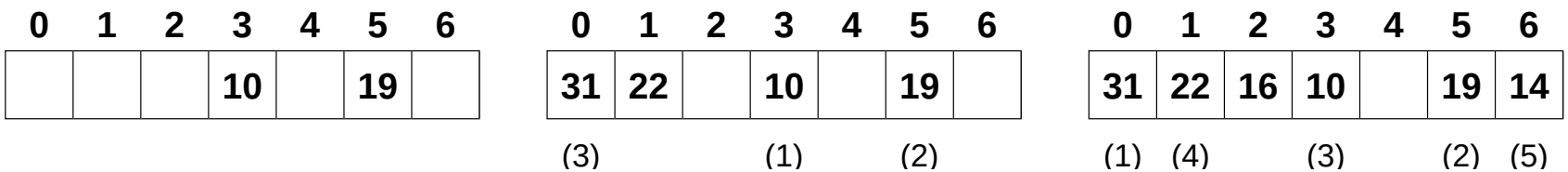
$$h(k, i) = (h_1(k) + ih_2(k)) \bmod m.$$

Wahl von $h_2(k)$: Für alle Schlüssel k muss die Sondierungsfolge alle Plätze $0, \ldots, m$ erreichen. Das bedeutet, dass $h_2(k) \neq 0$ sein muss und m nicht teilen darf. m sollte eine Primzahl sein, h_2 sollte unabhängig von h_1 gewählt werden.

Double Hashing

Beispiel: $m = 7$, $h_1(k) = k \bmod 7$, $h_2(k) = 1 + (k \bmod 5)$

k	10	19	31	22	14	16
$h_1(k)$	3	5	3	1	0	2
$h_2(k)$	1	5	2	3	5	2



Durchschnittliche Zeit: Für eine erfolgreiche Suche ist $\frac{12}{6} = 2$. Dies ist jedoch ein untypisch schlechtes Beispiel für Double Hashing.

k	10		19		31		22		14		16		
	1	+	1	+	3	+	1	+	5	+	1	=	12

Double Hashing

- Im Allgemeinen ist Double Hashing effizienter als quadratisches Hashing.
- In der Praxis entsprechen die Ergebnisse von Double Hashing nahezu denen von uniformen Hashing.

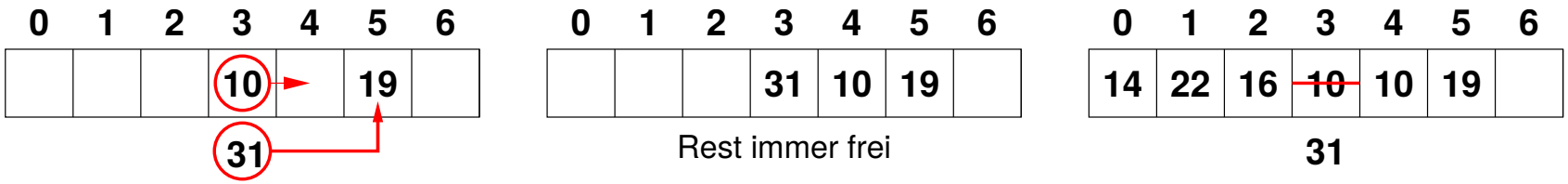
Verbesserung nach Brent [1973]

Idee: Wenn beim Einfügen eines Schlüssels ein sondierter Platz j ist mit $k' = T[j].key$ belegt ist, setze

$$j_1 = (j + h_2(k)) \bmod m$$
$$j_2 = (j + h_2(k')) \bmod m.$$

Ist nun j_1 besetzt aber j_2 frei, verschiebe k' auf j_2 um für k auf j Platz zu machen.

Angewendet auf unser Beispiel:



Durchschnittliche Zeit: Für eine erfolgreiche Suche ist $\frac{7}{6} \approx 1.17$.

k	10		19		31		22		14		16		
	2	+	1	+	1	+	1	+	1	+	1	=	7

Einfügen nach Brent

Eingabe: Hashtabelle T und neuer Schlüssel k.

```
Insert-Brent(T, k):
j ← h_1(k)
while T[j].status = used
    k' ← T[j].key
    j_1 ← (j + h_2(k)) mod m
    j_2 ← (j + h_2(k')) mod m
    if T[j_1].status ≠ used oder T[j_2].status = used
        j ← j_1
    else
        T[j] ← k
        k ← k'
        j ← j_2
T[j] ← k
T[j].status ← used
```

Analyseergebnis zur Verbesserung nach Brent

Anzahl der Sondierungen: Im Durchschnitt (für große m und n):

- Erfolglose Suche $\approx \frac{1}{1-\alpha}$
- Erfolgreiche Suche < 2.5 (unabhängig von α für $\alpha \leq 1$).

Vorteil: Durchschnittlicher Aufwand einer erfolgreichen Suche liegt selbst im Extremfall $\alpha = 1$ in $\Theta(1)$.

Offene Hashverfahren: Eignung und Reorganisation

- Bei offenen Hashverfahren ist der Belegungsfaktor $\alpha = \frac{n}{m}$ immer kleiner (max. gleich) 1, offensichtlich können nicht mehr als m Elemente gespeichert werden.
- Belegungsfaktoren sehr nahe 1 sind i.A. ungünstig, da die Anzahl der zu sondierenden Positionen sehr groß werden kann!
- Gegebenenfalls ist eine Reorganisation notwendig, d.h., dass eine gänzlich neue Hashtabelle z.B. mit doppelter Größe aufgebaut wird, wenn mehr als die ursprünglich erwartete Anzahl an Elementen zu speichern ist (Aufwand i.A. $\Theta(n)$).
- Generell sind offene Hashverfahren besser geeignet, wenn die Anzahl der zu speichernden Elemente vorab bekannt ist und selten oder gar nicht Elemente entfernt werden. Häufiges Entfernen bewirkt, dass sich die Sondierungsketten für die Suche verlängern; eine regelmäßige Reorganisation kann dann ebenfalls sinnvoll bzw. notwendig werden.