Tożsamość Spitzera dla błądzeń losowych typu Kendalla

Mateusz Staniak

Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski

Będlewo, 23.05.2018

Praca z Barbarą Jasiulis-Gołdyn

Splot uogólniony typu Kendalla

Definicja 1 (Splot Kendalla)

1. $\delta_a \vartriangle_\alpha \delta_b = T_{max\{|a|,|b|\}} \left((1 - z^\alpha)\widetilde{\delta}_1 + z^\alpha \widetilde{\pi}_{2\alpha} \right),$
   gdzie $z = \frac{min\{|a|,|b|\}}{max\{|a|,|b|\}}$, $\alpha \in (0, 1]$, $\widetilde{\pi}_{2\alpha}(dx) = \frac{\alpha}{|x|^{2\alpha+1}} \mathbf{1}_{(1,\infty)}(|x|)dx.$
2. $\nu_1 \vartriangle_\alpha \nu_2(A) = \int_{\mathbb{R}^2} (\delta_x \vartriangle_\alpha \delta_y)(A)\nu_1(dx)\nu_2(dy)$

Błądzenie losowe typu Kendalla

Definicja 2 (M. Borowiecka-Olszewska, B.H. Jasiulis-Gołdyn, J.K. Misiewicz, J. Rosiński)

Błądzenie losowe typu Kendalla to proces markowski $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, $X_0 = 0$ *z prawdopodobieństwami przejścia zadanymi poprzez*

$$P_n(x, A) = P(X_{n+k} \in A | X_k = x) = \delta_x \vartriangle_\alpha \nu^{\vartriangle_\alpha n}(A)$$

gdzie miarę $\nu \in \mathcal{P}_s$ *nazywamy rozkładem pojedynczego kroku.*

Błądzenie losowe typu Kendalla

Definicja 3

Proces stochastyczny $\{X_n\colon n \in \mathbb{N}_0\}$ *jest dyskretnym błądzeniem losowym z parametrem* $\alpha > 0$ *i rozkładem kroku* $\nu \in \mathcal{P}_+$*, jeżeli istnieją:*

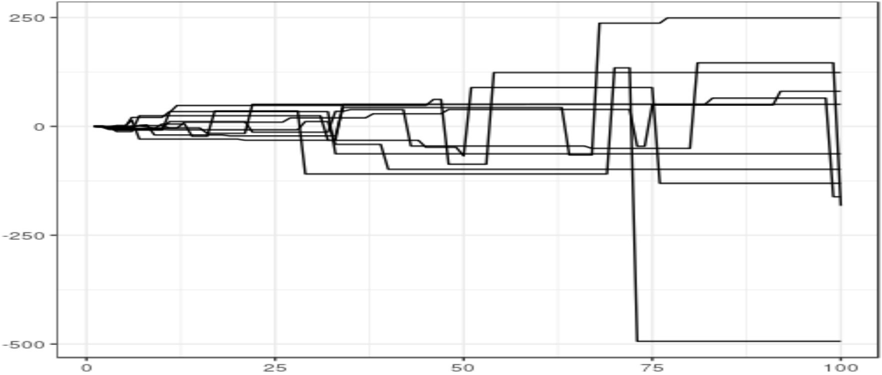
1. (T_k) *zmienne losowe i.i.d. z rozkładu* ν*,*
2. (U_k) *zmienne losowe i.i.d. z rozkładu jednostajnego na* $[0, 1]$*,*
3. (θ_k) *zmienne losowe i.i.d. z symetrycznego rozkładu Pareto o gęstości* $\widetilde{\pi}_{2\alpha}(dy) = \alpha |y|^{-2\alpha-1} \mathbf{1}_{[1,\infty)}(|y|)\, dy$*,*
4. *ciągi* (T_k)*,* (U_k) *i* (θ_k) *są niezależne,*

takie, że: $X_0 = 0, \quad X_1 = T_1,$

$$X_{n+1} = M_{n+1} r_{n+1} \left[\mathbf{1}(U_n > \varrho_{n+1}) + \theta_{n+1}\mathbf{1}(U_n < \varrho_{n+1})\right],$$

gdzie θ_{n+1} *i* M_{n+1} *są niezależne i* $r_{n+1} = \{sgn(u) : \max\{|X_n|, |T_{n+1}|\} = |u|\}$*,*
$M_{n+1} = \max\{|X_n|, |T_{n+1}|\}, \quad m_{n+1} = \min\{|X_n|, |T_{n+1}|\}, \quad \varrho_{n+1} = \frac{m_{n+1}^{\alpha}}{M_{n+1}^{\alpha}}.$

Błądzenie losowe typu Kendalla



Rysunek: Przykładowe trajektorie błądzenia losowego typu Kendalla z normalnym rozkładem pojedynczego kroku.

Transformata Williamsona

Definicja 4

Transformatą Williamsona nazywamy operacja $\nu \to \widehat{\nu}$ *zadana przez*

$$\widehat{\nu}(t) = \int_{\mathbb{R}} (1 - |xt|^{\alpha})_+ \, \nu(dx), \quad \nu \in \mathcal{P}_s,$$

gdzie $a_+ = a$ *dla* $a \geqslant 0$ *i* $a_+ = 0$ *w przeciwnym wypadku.*

Twierdzenie 5

Niech $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{P}_s$ *będą miarami probabilistycznymi z transformatami Williamsona* $\widehat{\nu_1}, \widehat{\nu_2}$*, odpowiednio. Wtedy*

$$\int_{\mathbb{R}} (1 - |xt|^{\alpha})_+ (\nu_1 \vartriangle_\alpha \nu_2)(dx) = \widehat{\nu_1}(t)\widehat{\nu_2}(t).$$

Odwrotna transformata Williamsona

Twierdzenie 6 (Jasiulis-Gołdyn, Misiewicz, 2017)

Odpowiedniość pomiędzy miarami $\nu \in \mathcal{P}_s$ i ich transformatami Williamsona jest jednoznaczna. Ponadto, jeśli przez F oznaczymy dystrybuantę ν, $\nu(\{0\}) = 0$ and $G(t) = \hat{\nu}(\frac{1}{t})$, mamy

$$F(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha}\left[\alpha(G(t)+1) + tG'(t)\right] & \text{if} \quad t > 0; \\ 1 - F(-t) & \text{if} \quad t < 0. \end{cases}$$

w punktach ciągłości F.

Oznaczenia

- $\tau_a^+ = \inf\{i \geqslant 0 : X_i > a\}$
- $\tau_a^- = \inf\{i \geqslant 0 : X_i < a\}$
- Konwencja: $\min \emptyset = \infty$
- G(x): transformata Williamsona rozkładu pojedynczego kroku
- $H(x) = 2F(x) - 1 - G(x)$
- $\Psi(t) = (1 - |t|^\alpha)_+$

Przydatne lematy

Lemat 7 (Jasiulis-Gołdyn, Misiewicz)

$$\begin{aligned} \delta_x \vartriangle_\alpha \delta_y(0,t) &:= \frac{1}{2}\left(1 - \left|\frac{xy}{t^2}\right|^\alpha\right) \mathbf{1}_{\{|x|<t,|y|<t\}} \\ &= \frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{x}{t}\right) + \Psi\left(\frac{y}{t}\right) - \Psi\left(\frac{x}{t}\right)\Psi\left(\frac{y}{t}\right)\right] \mathbf{1}_{\{|x|<t,|y|<t\}} \end{aligned}$$

Lemat 8 (Jasiulis-Gołdyn, Misiewicz)

$$\begin{aligned} &\delta_x \vartriangle_\alpha \nu(0,t) = P_1(x,[0,t)) \\ = \ &\left[\Psi\left(\frac{x}{t}\right)\left(F(t) - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}G(t) - \frac{1}{2}\Psi\left(\frac{x}{t}\right)G(t)\right] \mathbf{1}_{\{|x|<t\}} \\ = \ &\frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{x}{t}\right)H(t) + G(t)\right] \mathbf{1}_{\{|x|<t\}} \end{aligned}$$

Przypadek a = 0

Twierdzenie 9 (Jasiulis-Gołdyn, Misiewicz)

Zmienna losowa τ_0^+ (i z symetrii błądzenia τ_0^-) ma rozkład geometryczny $P(\tau_0^+ = k) = \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, \cdots$.
Funkcja tworząca τ_0^+ jest postaci

$$\mathbf{E}s^{\tau_0^+} = \frac{\frac{s}{2}}{1 - \frac{s}{2}}, \quad 0 \leqslant s < 2.$$

Przypadek a = 0

- $\Phi_n(t) := \mathbf{P}\{X_1 \leqslant 0, \dots X_{n-1} \leqslant 0, 0 < X_n < t\} = \frac{1}{2^n}\, G(t)^{n-1}\Big[2n\Big(F(t) - \frac{1}{2}\Big) - (n-1)G(t)\Big]$

Twierdzenie 10 (Jasiulis-Gołdyn, Misiewicz)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\left\{X_{\tau_0^+} < t\right\} &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left\{X_{\tau_0^+} < t, \tau_0^+ = k\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(t) = \frac{1}{(2 - G(t))^2}\left[4F(t) - 2 - G(t)^2\right]
\end{aligned}
$$

Przypadek a = 0

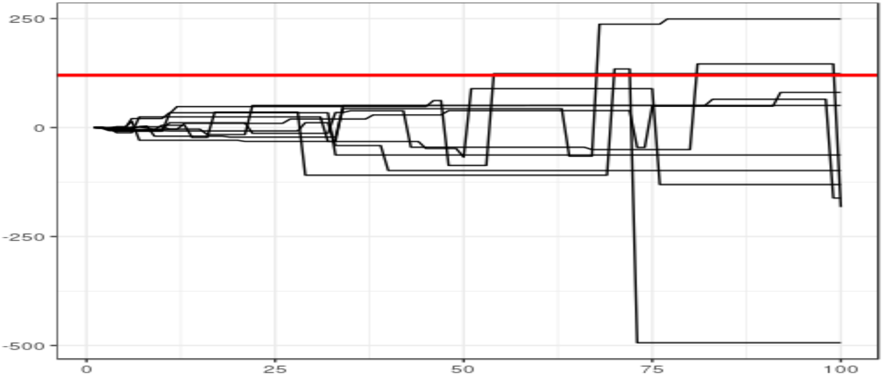
- Niech $\{X_n \colon n \in \mathbb{N}_0\}$ będzie błądzeniem losowym typu Kendalla
- Niech $N_{s/2}$ będzie zm. los. o r. geometrycznym niezależną od (X_n).
- Definiujemy złożoną geometryczną zmienną losową typu Kendalla: $Z_{s/2} = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \mathbf{1}_{\{N_{s/2}=k\}}$
- Zauważamy, że $\mathbf{E}\Psi\left(X_k/t\right) = G(t)^k$ i $\mathbf{E}\Psi(Z_{s/2}/t) = \frac{G(t)\left(1-\frac{s}{2}\right)}{1-\frac{s}{2}G(t)}$.

Twierdzenie 11 (Jasiulis-Gołdyn, Misiewicz)

Niech $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ będzie błądzeniem losowym typu Kendalla z rozkładem pojedynczego kroku $X_1 \sim F$ t. że $F(0) = \frac{1}{2}$. Wtedy

$$\mathbf{E}s^{\tau_0^+}\Psi\left(uX_{\tau_0^+}\right) = \frac{\frac{s}{2}}{1-\frac{s}{2}} \cdot \frac{(1-\frac{s}{2})G(1/u)}{1-\frac{s}{2}G(1/u)} = \mathbf{E}s^{\tau_0^+}\,\mathbf{E}\Psi\left(uZ_{s/2}\right).$$

Rozkład pierwszego momentu drabinowego



Rysunek: Ilustracja problemu poszukiwania pierwszego momentu drabinowego

Rozkład pierwszego momentu drabinowego

Twierdzenie 12 (Jasiulis-Gołdyn, Staniak)

Rozkład τ_a^+ jest postaci

$$\mathbb{P}(\tau_a^+ = n) = A(a)\mathbb{P}(\tau_0^+ = n) + B(a)n(1 - G(a))^2 G(a)^{n-1} \\ + C(a)G(a)^{n-1}(1 - G(a))$$

gdzie

$$\begin{cases} A(a) & = 1 + \frac{H(a)}{(2G(a)-1)^2} - \frac{G(a)}{(2G(a)-1)} \\ B(a) & = \frac{H(a)}{(2G(a)-1)(1-G(a))} \\ C(a) & = \frac{G(a)}{2G(a)-1} - \frac{H(a)}{(2G(a)-1)^2}\frac{G(a)}{(1-G(a))}. \end{cases}$$

Jest to zatem kombinacja wypukła dwóch rozkładów geometrycznych (z par. $\frac{1}{2}$ i $G(a)$) i przesuniętego r. ujemnego dwumianowego (z par. 2 i $G(a)$).

Dowód

- $\mathbb{P}(\tau_a^+ = n) = \mathbb{P}(X_0 \leqslant a, X_1 \leqslant a, \dots, X_{n-1} \leqslant a, X_n > a)$
  $= \int_{-\infty}^{a} \dots \int_{-\infty}^{a} \int_{a}^{\infty} P_1(x_{n-1}, dx_n) P_1(x_{n-2}, dx_{n-1}) \dots P_1(0, dx_1)$
- Definiujemy
  $I_1 = \int_a^\infty P_1(x_{n-1}, dx_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\Psi(\frac{x_{n-1}}{a}) H(a) + G(a)\right] \mathbf{1}(|x_{n-1}| < a)$

Dowód: zależności rekurencyjne

- Załóżmy, że I_j jest postaci
  $I_j = A_j + \mathbf{1}(|x_{n-j}| < a)\left[\Psi\left(\frac{x_{n-j}}{a}\right)H(a)B_j + C_jG(a)\right]$
- $I_{j+1} = \int_{-\infty}^{a} I_j \; (\delta_{x_{n-j-1}} \vartriangle_\alpha \nu)(d_{x_{n-j}})$
- $\begin{cases} A_{j+1} = & \frac{1}{2}A_j, \\ B_{j+1} = & \frac{1}{2}A_j + G(a)(B_j + C_j), \\ C_{j+1} = & \frac{1}{2}A_j + C_jG(a) \end{cases}$
- $A_1 = \frac{1}{2}$, $B_1 = C_1 = -\frac{1}{2}$

Rozwiązania

- $$A_j = \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

- $$B_j = G(a)^{j-1}B_1 + \sum_{m=2}^{j} G(a)^{j-m}\left(\frac{1}{2}\right)^m + \sum_{m=1}^{j-1} G(a)^{j-m}C_m$$
$$= \sum_{m=1}^{j} G(a)^{j-m}C_m$$

- $$C_j = G(a)^{j-1}C_1 + \sum_{m=2}^{j} G(a)^{j-m}\left(\frac{1}{2}\right)^m = \sum_{m=1}^{j} G(a)^{j-m}\left(\frac{1}{2}\right)^m - G(a)^{j-1}$$

Rozwiązania w zwartej postaci

- $A_j = (\frac{1}{2})^j$
- $B_j = G(a)^{j-1}\frac{(1-G(a)(2G(a)-1)-G(a)}{(2G(a)-1)^2}j + \left(\frac{1}{2}\right)^j \frac{1}{(2G(a)-1)^2}$
- $C_j = \frac{G(a)^{j-1}(1-G(a))-2^{-j}}{2G(a)-1} = G(a)^{j-1}\frac{1-G(a)}{2G(a)-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^j \frac{-1}{2G(a)-1}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau_a^+ = n) = A(a)\mathbb{P}(\tau_0^+ = n) + B(a)n(1-G(a))^2 G(a)^{n-1} \\ + C(a)G(a)^{n-1}(1-G(a))\end{aligned}$$

Przydatny lemat

Lemat 13 (Jasiulis-Gołdyn, Staniak)

Przy oznaczeniu $M(a,t) = H(a)\Psi\left(\frac{a}{t}\right) + \left(1 - \Psi\left(\frac{a}{t}\right)\right) G(a)$ *zachodzi poniższa tożsamość*

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{a} \Psi\left(\frac{x}{t}\right) (\delta_y \vartriangle_\alpha \nu)(dx) \\ = \quad & \frac{1}{2}\Psi\left(\frac{y}{a}\right) \left[H(a)\Psi\left(\frac{a}{t}\right) + \left(1 - \Psi\left(\frac{a}{t}\right)\right) G(a)\right] \\ + \quad & \frac{1}{2}G(a)\Psi\left(\frac{a}{t}\right) \mathbb{1}(|y| < a) + \frac{1}{2}\Psi\left(\frac{y}{t}\right) G(t) \\ = \quad & \frac{1}{2}\Psi\left(\frac{y}{a}\right) M(a,t) + \frac{1}{2}G(a)\Psi\left(\frac{a}{t}\right) \mathbb{1}(|y| < a) + \frac{1}{2}\Psi\left(\frac{y}{t}\right) G(t). \end{aligned}$$

Rozkład pierwszej wysokości drabinowej

$$\mathbb{P}(X_{\tau_a^+} \leqslant t) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X_k \leqslant t, \tau_a^+ = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_n^a(t)$$

$$\Phi_n^a(t) = \frac{H_1(t)}{2} I(n,a,t) + \frac{G(t)}{2} II(n,a,t) - \frac{H_1(a)}{2} I(n,a,a) - \frac{G(a)}{2} II(n,a,a)$$

dla

$$\begin{aligned} I(n,a,t) &:= \int_{-\infty}^{a} \dots \int_{-\infty}^{a} \Psi\left(\frac{x_{n-1}}{t}\right) (\delta_{x_{n-2}} \vartriangle_\alpha \nu)(dx_{n-1}) \dots \nu(dx_1), \\ II(n,a,t) &:= \int_{-\infty}^{a} \dots \int_{-\infty}^{a} \mathbb{1}(|x_{n-1}| < t)(\delta_{x_{n-2}} \vartriangle_\alpha \nu)(dx_{n-1}) \dots \nu(dx_1) \end{aligned}$$

Równania rekurencyjne

Dla $I(k,a,t)$ definiujemy

$$\begin{cases} I_1 & := I_1(x_2) = \int_{-\infty}^{a} \Psi\left(\frac{x_{n-1}}{t}\right)(\delta_{x_{n-2}} \triangle_\alpha \nu)(dx_{n-1}), \\ I_{j+1} & := I_{j+1}(x_{n-j-2}) = \int_{-\infty}^{a} I_j \, (\delta_{x_{n-j-2}} \triangle_\alpha \nu)(dx_{n-j-1}), \ 1 \leqslant j \leqslant n-2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_j &= \frac{1}{2} M(a,t) \Psi\left(\frac{x_{k-j-1}}{a}\right) A_j^I + \frac{1}{2} G(a) H(a) \Psi\left(\frac{a}{t}\right) \Psi\left(\frac{x_{n-j-1}}{a}\right) B_j^I \\ &+ \frac{1}{2} G(a) \Psi\left(\frac{a}{t}\right) \mathbb{1}(|x_{n-j-1}| < a) C_j^I + \Psi\left(\frac{x_{n-j-1}}{t}\right) D_j^I \end{aligned}$$

Równania rekurencyjne

$$\begin{cases} A^l_{j+1} & = G(a)A^l_j + D^l_j, \\ B^l_{j+1} & = G(a)B^l_j + C^l_j, \\ C^l_{j+1} & = G(a)C^l_j + D^l_j, \\ D^l_{j+1} & = \left(\frac{G(t)}{2}\right) D^l_j. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I(n,a,t) &= G(a)^{n-1}\Bigg[(n-1)\frac{H(a)\Psi\left(\frac{a}{t}\right)}{2G(a)-G(t)} + \frac{G(a)+H(a)\Psi\left(\frac{a}{t}\right)}{2G(a)-G(t)} \\ &- \frac{2G(a)H(a)\Psi\left(\frac{a}{t}\right)}{(2G(a)-G(t))^2}\Bigg] \\ &+ \left(\frac{G(t)}{2}\right)^{n-1}\left[1 - \frac{G(a)+H(a)\Psi\left(\frac{a}{t}\right)}{2G(a)-G(t)} + \frac{2G(a)H(a)\Psi\left(\frac{a}{t}\right)}{(2G(a)-G(t))^2}\right] \end{aligned}$$

Równania rekurencyjne

For $II(n, a, t)$ we define

$$\begin{cases} J_1 & := J_1(x_{n-2}) = \int_{-\infty}^{a} \mathbb{1}(|x_{n-1}| < t)(\delta_{x_{n-2}} \triangle_\alpha \nu)(dx_{n-1}), \\ J_{j+1} & := J_{j+1}(x_{n-j-2}) = \int_{-\infty}^{a} J_j \ (\delta_{x_{n-j-2}} \triangle_\alpha \nu)(dx_{n-j-1}), \ 1 \leqslant j \leqslant n-2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} J_j &= \frac{1}{2} H(t) \Psi\left(\frac{x_{k-j-1}}{t}\right) A_j^J + \frac{1}{2} G(t) \mathbb{1}(|x_{k-j-1}| < t) B_j^J \\ &+ \Psi\left(\frac{x_{k-j-1}}{a}\right) C_j^J + \frac{1}{2} G(a) \mathbb{1}(|x_{k-j-1}| < a) D_j^J. \end{aligned}$$

Równania rekurencyjne

$$
\begin{cases}
A_{j+1}^J & = \frac{G(t)}{2}\left(A_j^J + B_j^J\right), \\
B_{j+1}^J & = \frac{G(t)}{2} B_j^J, \\
C_{j+1}^J & = \frac{1}{2}H(t)\frac{1}{2}M(a,t)A_j^J + \frac{1}{2}H(a)\frac{1}{2}G(t)B_j^J + C_j^J G(a) + \frac{1}{2}G(a)H(a)D_j^J, \\
D_{j+1}^J & = \frac{1}{2}H(t)\Psi\left(\frac{a}{t}\right)A_j^J + \frac{G(t)}{2}B_j^J + G(a)D_j^J.
\end{cases}
$$

Równania rekurencyjne

$$
\begin{aligned}
II(n,a,t) &= \frac{H(t)}{2}(n-1)\left(\frac{G(t)}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{G(t)}{2}\right)^{n-1} \\
+ \quad & G(a)^{n-2}\left[\frac{H(a)}{2} + (n-2)A(a,t) + \frac{2B(a,t)}{2G(a)-G(t)} + \frac{4C(a,t)G(a)}{(2G(a)-G(t))^2}\right] \\
- \quad & \left(\frac{G(t)}{2}\right)^{n-2}\left[\frac{2B(a,t)}{2G(a)-G(t)} + 2C(a,t)\left(\frac{G(t)}{(2G(a)-G(t))^2} + \frac{n-1}{2G(a)-G(t)}\right)\right] \\
+ \quad & \frac{G(a)}{2}\left[G(a)^{n-1}\left[\frac{2}{2G(a)-G(t)} + \frac{2H(t)\Psi\left(\frac{a}{t}\right)}{(2G(a)-G(t))^2}\right]\right. \\
+ \quad & \left.\left(\frac{G(t)}{2}\right)^{n-2}\left[\frac{G(t)(G(t)-H(t)\Psi\left(\frac{a}{t}\right)-2G(a))}{(2G(a)-G(t))^2} - (n-1)\frac{H(t)\Psi\left(\frac{a}{t}\right)}{2G(a)-G(t)}\right]\right]
\end{aligned}
$$

Rozkład pierwszej wysokości drabinowej

$$
\begin{aligned}
&\frac{H(a)}{2(1-G(a))(2G(a)-G(t))}\left[H(a)\Psi\left(\frac{a}{t}\right)+G(a)-\frac{2G(a)H(a)\Psi\left(\frac{a}{t}\right)}{2G(a)-G(t)}\right]\\
+\quad&\frac{H(a)G(t)}{(2G(a)-G(t))^2}\left[1-\frac{G(a)+H(a)\Psi\left(\frac{a}{t}\right)}{2G(a)-G(t)}+\frac{2G(a)H(a)\Psi\left(\frac{a}{t}\right)}{(2G(a)-G(t))^2}\right]\\
+\quad&\frac{2G(t)}{(2-G(t))^2}\left[\frac{H(t)}{2}-\frac{2C(a,t)}{2G(a)-G(t)}-\frac{H(t)\Psi\left(\frac{a}{t}\right)}{(2G(a)-G(t))^2}\right]\\
+\quad&\frac{2}{2-G(t)}\left[\frac{G(t)}{2}+\frac{G(a)G(t)(G(t)-H(t)\Psi\left(\frac{a}{t}\right)-2G(a)}{2(2G(a)-G(t))^2}\right.\\
-\quad&\left.\frac{2}{2G(a)-G(t)}\left(B(a,t)+\frac{C(a,t)G(t)}{2G(a)-G(t)}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Rozkład pierwszej wysokości drabinowej

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \frac{(2G(a)-1)G(t)A(a,t)}{2G(a)(1-G(a))^2} + \frac{1}{G(a)(1-G(a))}\left[\frac{H(a)G(t)}{2}\right.\\
&+ \quad \frac{G(t)}{2G(a)-G(t)}\left(B(a,t) + \frac{2C(a,t)G(a)}{2G(a)-G(t)}\right)\\
&+ \quad \left.\frac{G(t)G(a)^2}{2(2G(a)-G(t))}\left(1 + \frac{H(t)\Psi\left(\frac{a}{t}\right)}{2G(a)-G(t)}\right)\right]\\
&+ \quad \frac{G(a)H(a)\Psi\left(\frac{a}{t}\right)}{2(1-G(a))^2(2G(a)-G(t))} - \left[\frac{G(a)H(a)}{2(1-G(a))^2} + \frac{H(a)+G(a)}{2(1-G(a))}\right]
\end{aligned}
$$

Rozkład maksimum błądzenia

Lemat 14

Niech $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *oznacza błądzenie losowe typu Kendalla. Wtedy rozkład* $M_n = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} X_i$ *jest dany poprzez*

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(M_n \leqslant t) \\
&= A(t)\mathbb{P}(\tau_0^+ = n) + B(t)\frac{G(t)}{1-G(t)}(1-G(t))^2 nG(t)^{n-1} \\
&+ (B(t)+C(t))\frac{G(t)}{1-G(t)}G(t)^{n-1}(1-G(t))
\end{aligned}
$$

dla funkcji A, B *i* C *zdefiniowanych wcześniej i* $t > 0$.

Jak zobaczyć błądzenia losowe Kendalla

https://github.com/mstaniak/kendallRandomPackage

Finansowanie

Fundusze Europejskie Inteligentny Rozwój

FNP Fundacja na rzecz Nauki Polskiej

Unia Europejska Europejski Fundusz Rozwoju Regionalnego

- **First order Kendall maximal autoregressive processes and their applications**
- dr Barbara Jasiulis-Gołdyn

Bibliografia

1. **A. Lachal**, *A note on Spitzer identity for random walk*, *Statistics & Probability Letters*, **78**(2), 97-–108, 2008.
2. **T. Nakajima**, *Joint distribution of first hitting time and first hitting place for random walk*, *Kodai Math. J.* **21**, 192–200, 1998.
3. **B.H. Jasiulis-Gołdyn, J.K. Misiewicz**, *Kendall random walk, Williamson transform and the corresponding Wiener-Hopf factorization*, in press: *Lith. Math. J.*, 2016, arXiv: http://arxiv.org/pdf/1501.05873.pdf.
4. **B.H. Jasiulis-Gołdyn, M. Staniak**, *Spitzer identity for Kendall random walk*, 2018, in preparation.
5. **M. Borowiecka-Olszewska, B.H. Jasiulis-Gołdyn, J.K. Misiewicz, J. Rosiński**, *Lévy processes and stochastic integrals in the sense of generalized convolutions*, *Bernoulli*, **21**(4), 2513–2551, 2015.

Podziękowanie

Dziękuję za uwagę