Sploty uogólnione w teorii prawdopodobieństwa

Mateusz Staniak

Uniwersytet Wrocławski

Oblicze 2017

Fundusze Europejskie Inteligentny Rozwój

Fundacja na rzecz Nauki Polskiej

Unia Europejska Europejski Fundusz Rozwoju Regionalnego

Oznaczenia

- $\mathcal{P}$: klasa wszystkich miar na $\mathrm{Bor}(\mathbb{R})$
- $\mathcal{P}_+$: klasa wszystkich miar na $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}_+)$
- $X_1, \ldots, X_n$: ciąg niezależnych zmiennych losowych o dystrybuancie F
- $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$
- $M_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\{X_1, \ldots, X_n\}$
- $\tilde{\mu}$: symetryzacja miary μ
- $\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$
- $T_c\mu(A) = \begin{cases} \mu(c^{-1}A), & c \neq 0, \\ \delta_0(A), & c = 0. \end{cases}$

Wprowadzenie. Klasyczne problemy

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \longrightarrow ?$$

$$\frac{\max\{X_1, \ldots, X_n\} - b_n}{a_n} \longrightarrow ?$$

Wprowadzenie. Klasyczne rozwiązania

Mocne prawo wielkich liczb

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P.1} \mathbb{E}X_1$$

Centralne twierdzenie graniczne

$$\frac{S_n - n\mathbb{E}X_1}{\sqrt{nVarX_1}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$$

Twierdzenie Fishera-Tippetta-Gnedenki

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{GEV}(\mu, \sigma, \kappa)$$

Pewne uogólnienia

- (S_n): proces Markowa
- (S_n): martyngał
- (S_n): proces stacjonarny
- Funkcjonalne twierdzenia graniczne (tw. Donskera)

Splot uogólniony Urbanika

$\diamond : \mathcal{P}_+ \times \mathcal{P}_+ \to \mathcal{P}_+$

- $\lambda \diamond \delta_0 = \lambda$
- $(p\lambda_1 + (1-p)\lambda_2) \diamond \lambda = p(\lambda_1 \diamond \lambda) + (1-p)(\lambda_2 \diamond \lambda), \;\; p \in [0,1]$
- $T_a(\lambda_1 \diamond \lambda_2) = (T_a\lambda_1) \diamond (T_a\lambda_2)$
- $\lambda_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \lambda \implies \lambda_n \diamond \nu \to \lambda \diamond \nu$
- $T_{c_n}\delta_1^{\diamond n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \nu \neq \delta_0$

Splot uogólniony

$\diamond : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$

- $\lambda \diamond \delta_0 = \lambda$
- $(p\lambda_1 + (1-p)\lambda_2) \diamond \lambda = p(\lambda_1 \diamond \lambda) + (1-p)(\lambda_2 \diamond \lambda), \;\; p \in [0,1]$
- $T_a(\lambda_1 \diamond \lambda_2) = (T_a\lambda_1) \diamond (T_a\lambda_2)$
- $\lambda_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \lambda, \implies \lambda_n \diamond \nu \xrightarrow{\mathcal{D}} \lambda \diamond \nu$

Własności

Jądro probabilistyczne: $\rho_{x,y} = \delta_x \diamond \delta_y$

- $\rho_{x,0} = \delta_x$,
- $\rho_{x,y} = \rho_{y,x}$,
- $T_c \rho_{x,y} = \rho_{cx,cy}$,
- $\rho_{x,y} = T_v \rho_{z,1}$, gdzie $v = max(|x|, |y|)$, $z = \frac{min(|x|,|y|)}{max(|x|,|y|)}$,
- $$\lambda_1 \diamond \lambda_2(A) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \rho_{x,y}(A) \lambda_1(dx) \lambda_2(dy)$$

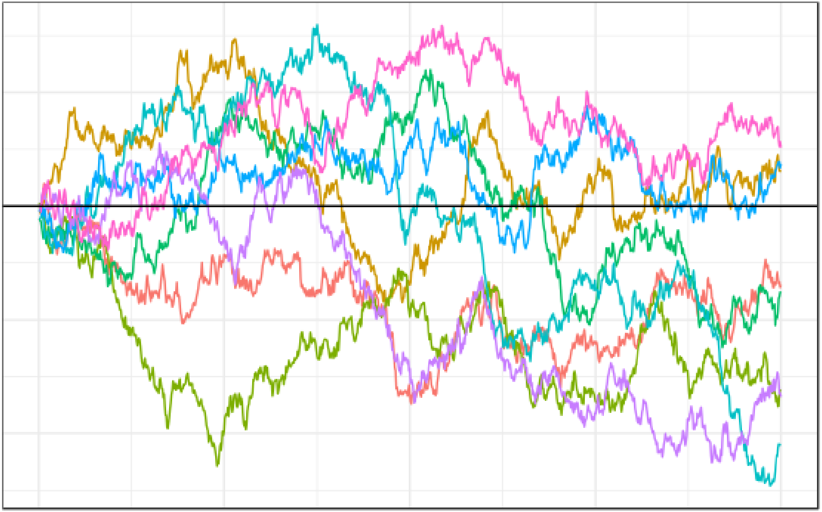
Błądzenia losowe względem splotów uogólnionych

- (X_i): niezależnie zmienne losowe o rozkładzie ν
- $S_n \sim \nu \diamond \ldots \diamond \nu = \nu^{\diamond n}$
- $(S_n, n \in \mathbb{N})$ jest procesem Markowa z prawdopodobieństwami przejścia $\mathbb{P}(S_n \in A | X_k = x) = \delta_x \diamond \nu^{\diamond n-k}(A)$

Przykłady. Klasyczny splot

- $\delta_x * \delta_y = \delta_{x+y}$
- $\delta_1 * \delta_1 = \delta_2$
- $S_n = X_1 + \ldots + X_n$
- $\frac{S_n - n\mathbb{E}X_1}{\sqrt{nVarX_1}} \to \mathcal{N}(0, 1)$

Przykłady. Klasyczny splot. Ilustracja

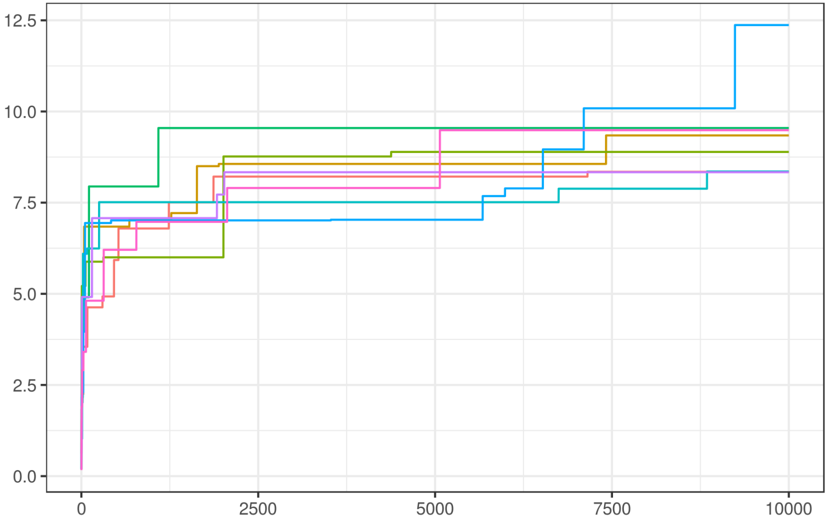


Przykłady. Splot maksimum

- $\delta_x \overset{*}{\infty} \delta_y = \delta_{\max\{x,y\}}$
- $\delta_1 \overset{*}{\infty} \delta_1 = \delta_1$
- $S_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$
- $\frac{S_n - b_n}{a_n} \to \mathrm{GEV}(\mu, \sigma, \kappa)$

$$F(x) = \begin{cases} \exp\left(-(1+\kappa\frac{x-\mu}{\sigma})^{\frac{-1}{\kappa}}\right), & 1+\kappa\frac{x-mu}{\sigma} > 0, \kappa \neq 0, \\ \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-mu}{\sigma}\right)\right), & x \in \mathbb{R}, \kappa = 0. \end{cases}$$

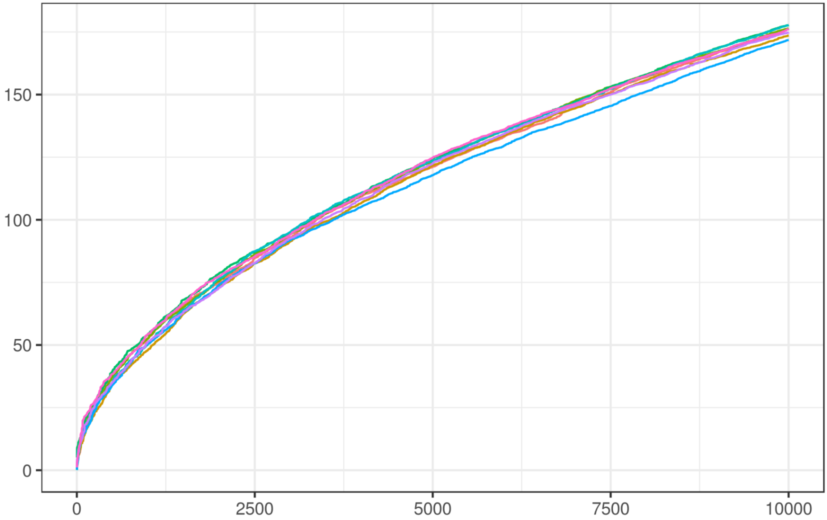
Przykłady. Splot maksimum. Ilustracja



Przykłady. α-splot

- $\delta_x \diamond \delta_y = \delta_z \quad z^\alpha = x^\alpha + y^\alpha$
- $\delta_1 \diamond \delta_1 = \delta_{2^{\frac{1}{\alpha}}}$
- $S_n = (X_1^\alpha + \ldots + X_n^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$
- Zachowanie graniczne: otwarty problem

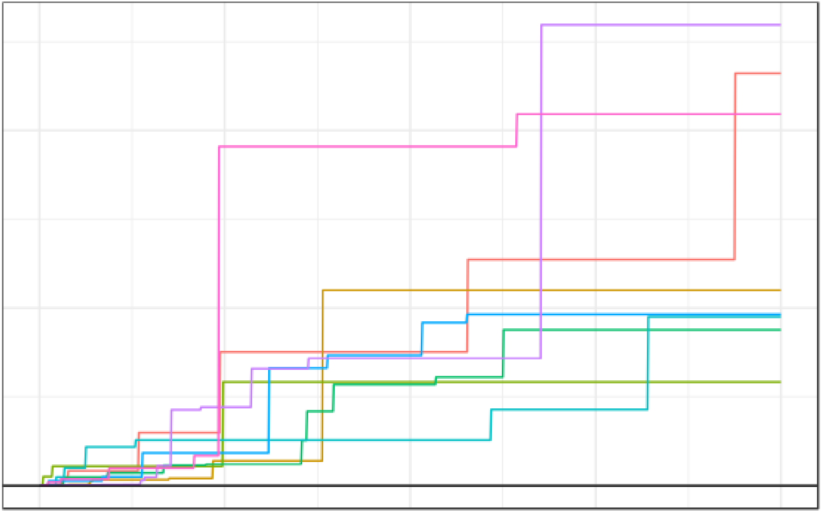
Przykłady. α-splot. Ilustracja



Przykłady. Splot Kendalla

- $\delta_x \overset{\Delta}{\alpha} \delta_y = \left(1 - \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha\right) \delta_y + \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha \pi_{2\alpha}, 0 \leqslant x \leqslant y$
- $\delta_1 \overset{\Delta}{\alpha} \delta_1 = \pi_{2\alpha}$
$$f_{\pi_{2\alpha}}(x) = \frac{2\alpha}{x^{2\alpha+1}}, \quad x \geqslant 1$$
- $n^{-\frac{1}{\alpha}} S_n \longrightarrow ?$

Przykłady. Splot Kendalla. Ilustracja



Transformata Williamsona

$$\hat{\nu}(t) = \int_{\mathbb{R}_+} (1 - t^{\alpha})_+ \, \nu(dt)$$

- $$\widehat{\nu \vartriangle_{\alpha} \mu}(t) = \hat{\nu}(t)\hat{\mu}(t)$$
- $$F(t) = G(t) + \frac{t}{\alpha} G'(t)$$

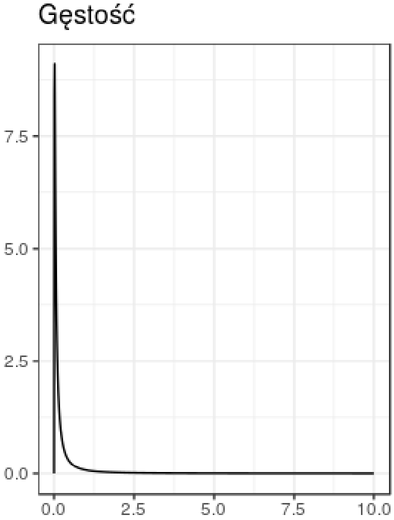
  gdzie $G(t) = \hat{\nu}(\frac{1}{t})$.

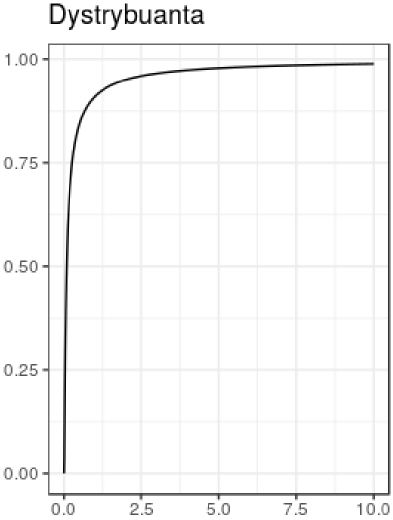
CTG dla błądzenia losowego Kendalla

- $m_\alpha = \mathbb{E}X_1^\alpha < \infty$
- Przykładowo dla $X_1 \sim \delta_1$
- $n^{\frac{-1}{\alpha}} S_n \sim \hat{\nu}\left(n^{-1/\alpha} t\right)^n$
- $\hat{\nu}\left(n^{-1/\alpha} t\right)^n = \left(1 - \left(n^{-1/\alpha}\right)^\alpha\right)_+^n \to \exp(-t^\alpha)$
- $F(t) = \exp\left(-t^{-\alpha}\right)\left(1 + t^{-\alpha}\right)$
- W ogólności $F(t) = \exp\left(-m_\alpha t^{-\alpha}\right)\left(1 + m_\alpha t^{-\alpha}\right)$

Rozkład graniczny

Krok: δ_1, $\alpha = 0.5$





Pożytek z badań nad splotami uogólnionymi

- Analogia z klasyczną teorią
- Uogólnienie symetrycznych rozkładów α-stabilnych
- Kodowanie informacji
- Nowe klasy parametryczne rozkładów ciężkoogonowych
- Związek z teorią kopuł (badanie zależności)
- Procesy Markowa o ciągłej przestrzeni stanów

Otwarte problemy. Trwające badania

- Twierdzenia graniczne (**MPWL**)
- Teoria fluktuacji błądzenia losowego Kendalla
- Teoria odnowy

Literatura