Algorytmy Numeryczne - Zadanie 1

Mateusz Stapaj

19 marca 2022

1 Wstęp

Program napisany przeze mnie w języku Java służy do obliczania wartości funkcji $cos(x) * arctg(x)$ przy pomocy szeregu Taylora. Program automatycznie oblicza wartości funkcji z zakresu od 0 do 0.85 (co 0.0000008) i zapisuje uzyskane wyniki do pliku w formacie csv. Następnie przy pomocy języka programowania R, wykonałem odpowiednie wykresy. Do wykonania wykresów podzieliłem otrzymany milion wyników na przedziały po 10000 wartości, a następnie obliczyłem z nich średnią.

2 Obliczenia

2.1 Obliczanie wartości $cos(x)$ i $arctg(x)$

Do obliczenia wartości $cos(x)$ wykorzystałem szereg Taylora

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - ...$$

Do obliczenia wartości $arctg(x)$ wykorzystałem szereg Taylora

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - ...$$

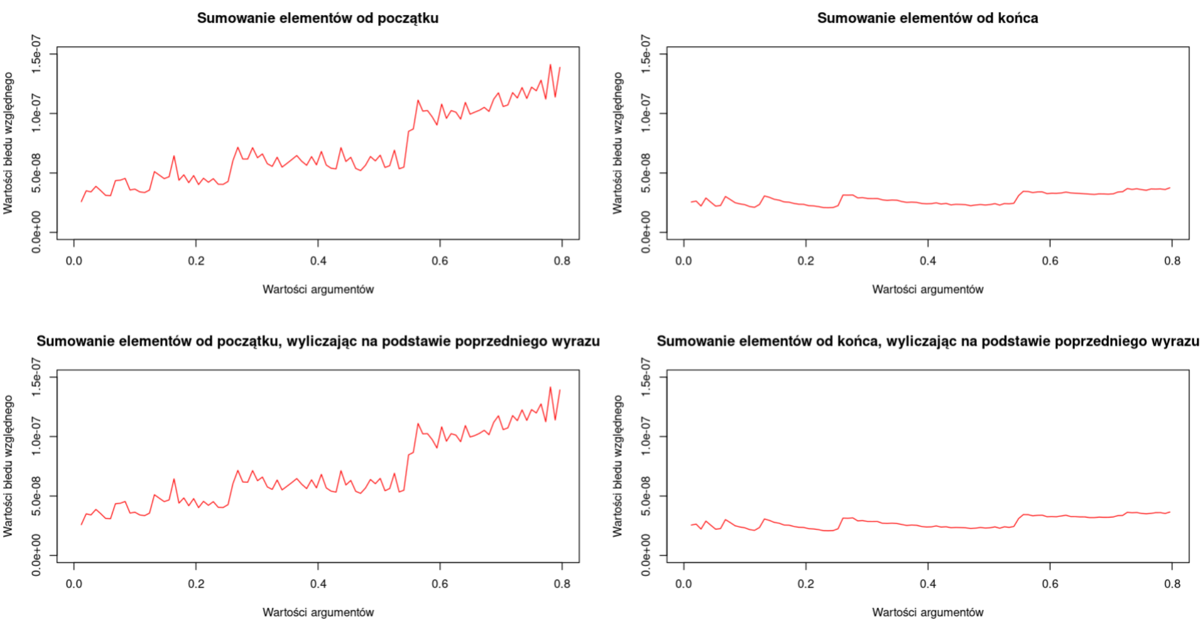
Aby policzyć wartość $cos(x)$ na podstawie poprzedniego wyrazu skorzystałem z zależności:

$$S_{n+1} = S_n * \frac{x^2}{2^k + 3 * k + 2}$$
$$k = n * 2$$

Aby policzyć wartość $arctg(x)$ na podstawie poprzedniego wyrazu skorzystałem z zależności:

$$S_{n+1} = S_n * \frac{k * x^2}{k + 2}$$
$$k = n * 2$$

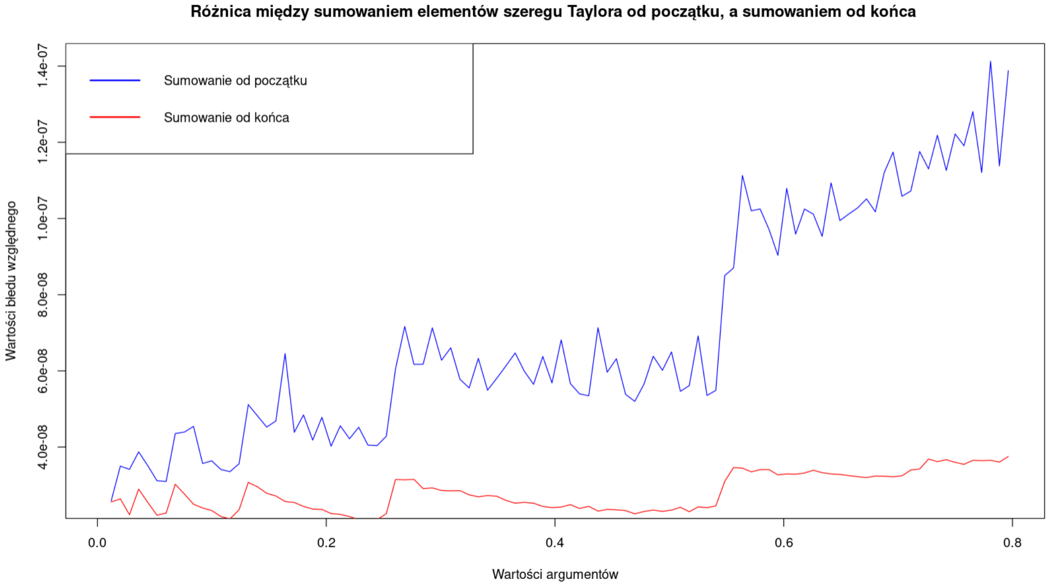
2.2 Porównanie otrzymanych wartości funkcji $cos(x) * arctg(x)$ uzyskanych z obliczeń, z wynikami uzyskanymi przy pomocy wbudowanych funkcji bibliotecznych



3 Wnioski

3.1 Weryfikacja hipotez

3.1.1 Sumowanie od końca daje dokładniejsze wyniki niż sumowanie od początku.

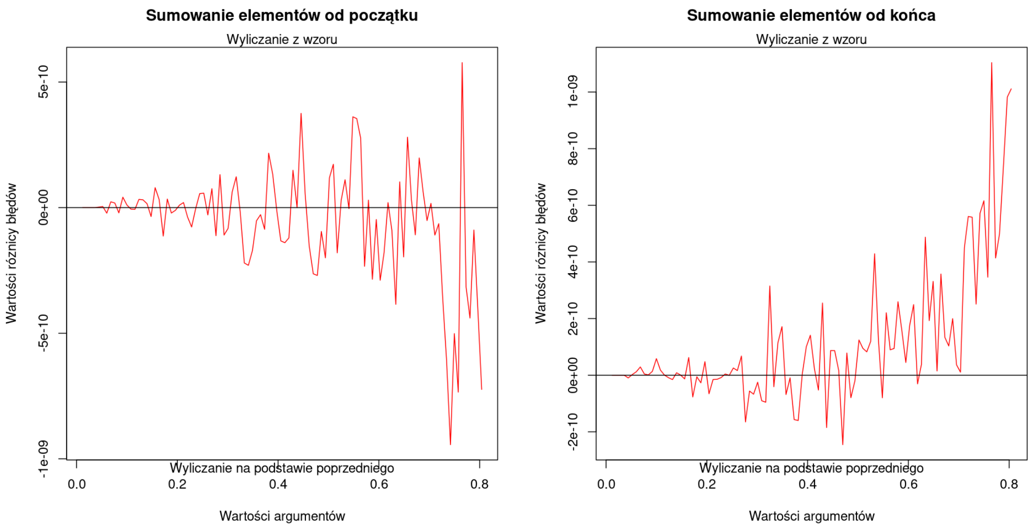


Na podstawie powyższego wykresu, wyraźnie widać, że sumowanie elementów szeregu Taylora od końca daje dokładniejsze wyniki. Są one bardziej zbliżone do wartości uzyskanych za pomocą wbudowanych funkcji bibliotecznych. Zwłaszcza przy większych wartościach sumowanie od końca jest bardziej dokładne.

3.1.2 Używając rozwinięcia wokół 0 (szereg MacLaurina), przy tej samej liczbie składników szeregu dokładniejsze wyniki uzyskujemy przy małych argumentach.

Dla sumowania elementów szeregu Taylora od początku wyraźnie widać, że wartość błędu względnego jest mniejsza dla wartości początkowych. Natomiast dla sumowania szeregów Taylora od końca można zauważyć, że wartość błędu względnego jest bardziej stała dla tego przedziału i nie jest mniejsza dla małych wartości.

3.1.3 Sumowanie elementów obliczanych na podstawie poprzedniego daje dokładniejsze wyniki niż obliczanych bezpośrednio ze wzoru.



Powyższe wykresy przedstawiają różnice między błędem względnym przy wyliczaniu ze wzoru, a błędem przy wyliczaniu na podstawie poprzedniego wyrazu. Na podstawie powyższych wykresów można zauważyć, że różnica między wartościami uzyskanymi bezpośrednio ze wzoru, a wynikami uzyskanymi na podstawie poprzedniego wyrazu jest niewielka, więc nie można stwierdzić czy hipoteza jest prawdziwa. Aby uzyskać dokładniejsze wyniki, wykonałem dalsze obliczenia.

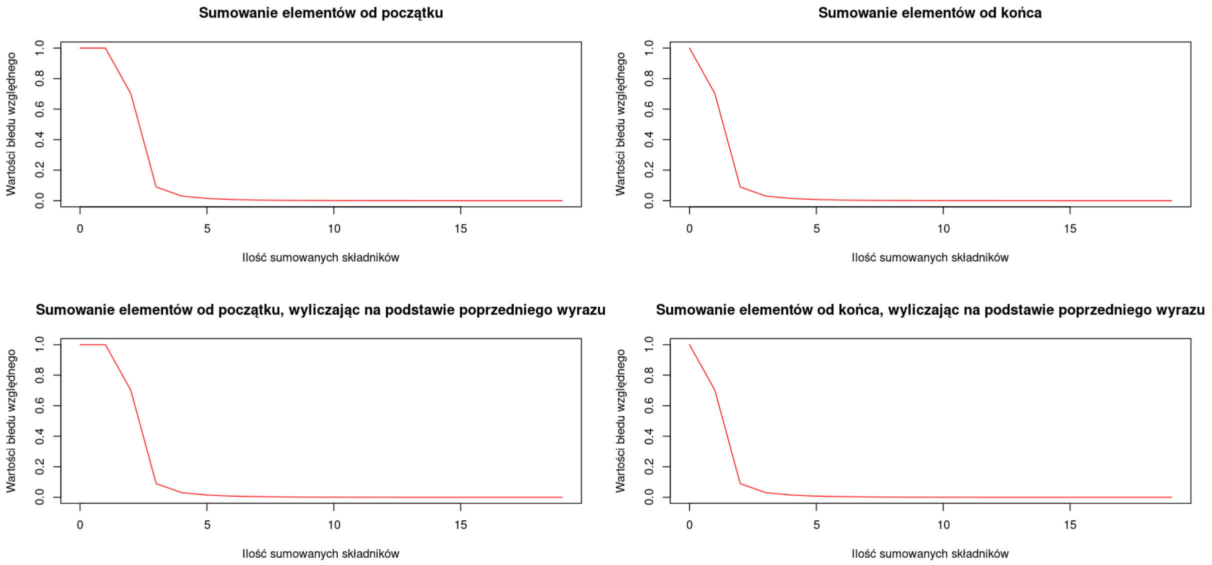
Ilość większych błędów przy sumowaniu od początku:
- dla wyliczania ze wzoru: 29184
- dla wyliczania na podstawie poprzedniego wyrazu: 29931

Ilość większych błędów przy sumowaniu od końca:
- dla wyliczania ze wzoru: 18575
- dla wyliczania na podstawie poprzedniego wyrazu: 16715

Na podstawie powyższych obliczeń można stwierdzić, że dla sumowania wyrazów od początku, większe błędy wychodzą przy obliczaniu na podstawie poprzedniego wyrazu. Zatem dokładniejsze jest wyliczanie ze wzoru. Natomiast dla sumowania wyrazów od końca, większe błędy wychodziły przy obliczaniu za pomocą wzoru, więc wyliczanie na podstawie poprzedniego wyrazu jest dokładniejsze.

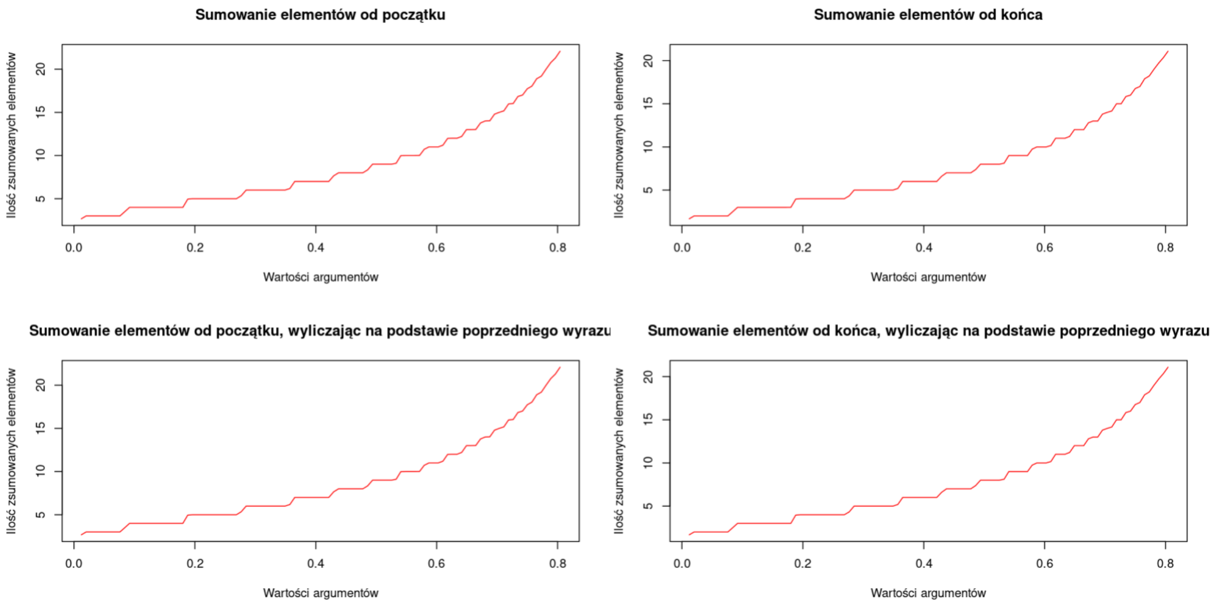
3.2 Odpowiedzi na pytania

3.2.1 Jak zależy dokładność obliczeń (błąd) od liczby sumowanych składników?



Wykresy przedstawiają wartość błędu względnego dla różnej ilości sumowanych składników dla argumentu 0.8. Na podstawie powyższych wykresów można zauważyć, że błąd względny maleje wraz z wzrostem ilości sumowanych składników. To oznacza, że dokładność obliczeń rośnie wraz ze wzrostem ilości sumowanych składników.

3.2.2 Ile składników w zależności od argumentu należy sumować aby otrzymać dokładność 10^{-6}?



Wykresy przedstawiają ile składników szeregu Taylora należy zsumować, aby otrzymać dokładność 10^{-6} dla danego argumentu. Na podstawie powyższych wykresów można zauważyć, że ilość składników, które należy zsumować, aby otrzymać dokładność 10^{-6} rośnie wraz ze wzrostem wielkości argumentu.