外場におけるダイポールを持った剛体

牧野真人

2020 年 9 月 22 日

1　理論

図 1 のように、$x-y$ 平面に磁気ダイポール $\boldsymbol{p} = p\cos\theta \boldsymbol{e}_x + p\sin\theta \boldsymbol{e}_y$ をもつ剛体を考える。ここで θ は x 軸とダイポールがなす角度で時間の関数である。$x-y$ 平面に垂直な軸のまわりの剛体の慣性モーメントは I とする。一定磁場 $\boldsymbol{B} = B\cos\alpha \boldsymbol{e}_x + B\sin\alpha \boldsymbol{e}_y$ にあるとする。α は x 軸と磁場がなす角度である。(べつに x 軸と並行 $(\alpha = 0)$ でもいいんですけど) たとえば、方位磁石が摩擦もない場合、北を向くがその場合の振動を考える。

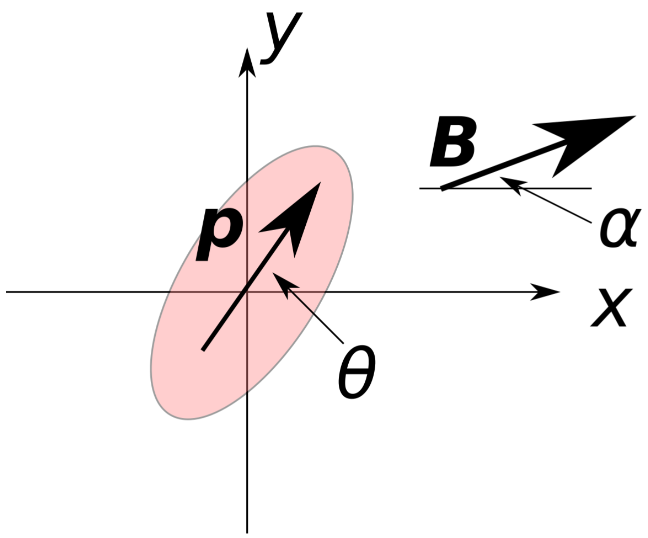

図 1: 一定磁場 $\boldsymbol{B}$ における磁気ダイポール $\boldsymbol{p}$ を持った剛体。

回転の方程式は、

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = p\cos\theta B\sin\alpha - p\sin\theta B\cos\alpha \tag{1}$$

より、

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\sin(\theta-\alpha) \tag{2}$$

ここで、$\omega^2 = pB/I$ である。この方程式の解は、

$$\theta = 2\sin^{-1} k\mathrm{sn}\left(\omega\left(t + \frac{T}{4}\right), k\right) + \alpha \tag{3}$$

となる。sn は楕円関数で、母数を

$$k^2 = \sin^2 \frac{\theta_0 - \alpha}{2} \tag{4}$$

とする。ここで θ_0 は、初期の θ の値で、このときは、$d\theta/dt = 0$ とする。この議論は、単振り子の運動と同じである。

2 シミュレーション

```
dipole.udf
dipole_o.udf
```

が入力、出力の udf である。GOURMET より、

```
input_pendulums.py
```

を使って入力 udf の剛体の初期の角度 θ_0 や磁場の角度 α などを変更できる。

```
output_angle.py
```

を GOURMET より使って、時間と角度 θ を出力して、

```
plot_angle.py
```

を gourmetterm から、時間 t と角度 θ および、解析解をプロット出来る。図 2 のとおりであり、シミュレーションと解析解が一致しているのが分かる。

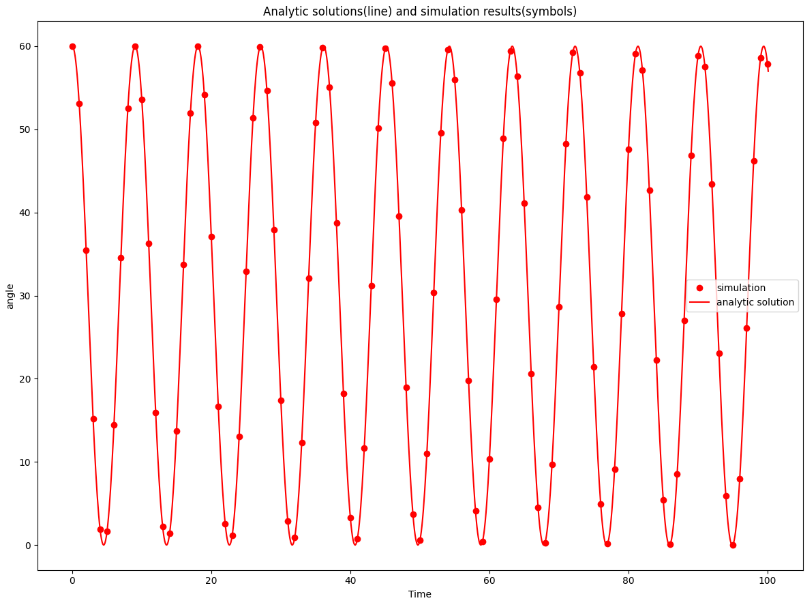

図 2: 一定磁場 $\boldsymbol{B}$ における磁気ダイポール $\boldsymbol{p}$ を持った剛体。