

# 外場におけるダイポールを持った剛体

牧野真人

2020 年 9 月 22 日

## 1 理論

図 1 のように、 $x-y$  平面に磁気ダイポール  $\mathbf{p} = p \cos \theta \mathbf{e}_x + p \sin \theta \mathbf{e}_y$  をもつ剛体を考える。ここで  $\theta$  は  $x$  軸とダイポールがなす角度で時間の関数である。 $x-y$  平面に垂直な軸のまわりの剛体の慣性モーメントは  $I$  とする。一定磁場  $\mathbf{B} = B \cos \alpha \mathbf{e}_x + B \sin \alpha \mathbf{e}_y$  にあるとする。 $\alpha$  は  $x$  軸と磁場がなす角度である。(べつに  $x$  軸と並行 ( $\alpha = 0$ ) でもいいんですけど) たとえば、方位磁石が摩擦もない場合、北を向くがその場合の振動を考える。

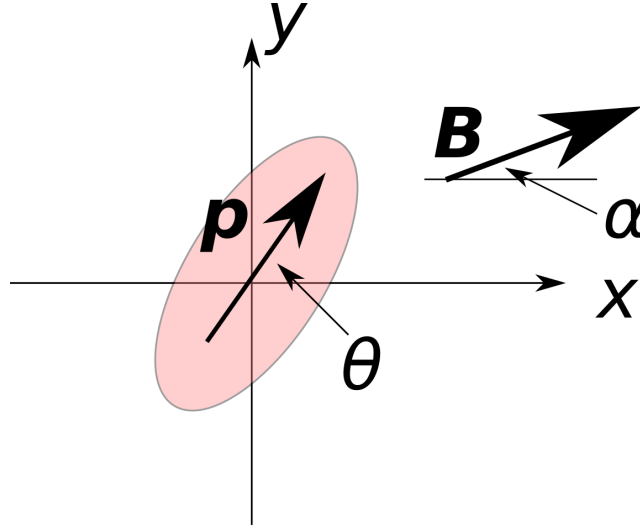


図 1: 一定磁場  $B$  における磁気ダイポール  $p$  を持った剛体。

回転の方程式は、

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = p \cos \theta B \sin \alpha - p \sin \theta B \cos \alpha \quad (1)$$

より、

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\omega^2 \sin(\theta - \alpha) \quad (2)$$

ここで、 $\omega^2 = pB/I$  である。この方程式の解は、

$$\theta = 2 \sin^{-1} k \operatorname{sn} \left( \omega \left( t + \frac{T}{4} \right), k \right) + \alpha \quad (3)$$

となる。 $\operatorname{sn}$  は楕円関数で、母数を

$$k^2 = \sin^2 \frac{\theta_0 - \alpha}{2} \quad (4)$$

とする。ここで  $\theta_0$  は、初期の  $\theta$  の値で、このときは、 $d\theta/dt = 0$  とする。この議論は、単振り子の運動と同じである。

## 2 シミュレーション

dipole.udf

dipole\_o.udf

が入力、出力の udf である。GOURMET より、

input\_pendulums.py

を使って入力 udf の剛体の初期の角度  $\theta_0$  や磁場の角度  $\alpha$  などを変更できる。

output\_angle.py

を GOURMET より使って、時間と角度  $\theta$  を出力して、

plot\_angle.py

を gourmetterm から、時間  $t$  と角度  $\theta$  および、解析解をプロット出来る。図 2 のとおりであり、シミュレーションと解析解が一致しているのが分かる。

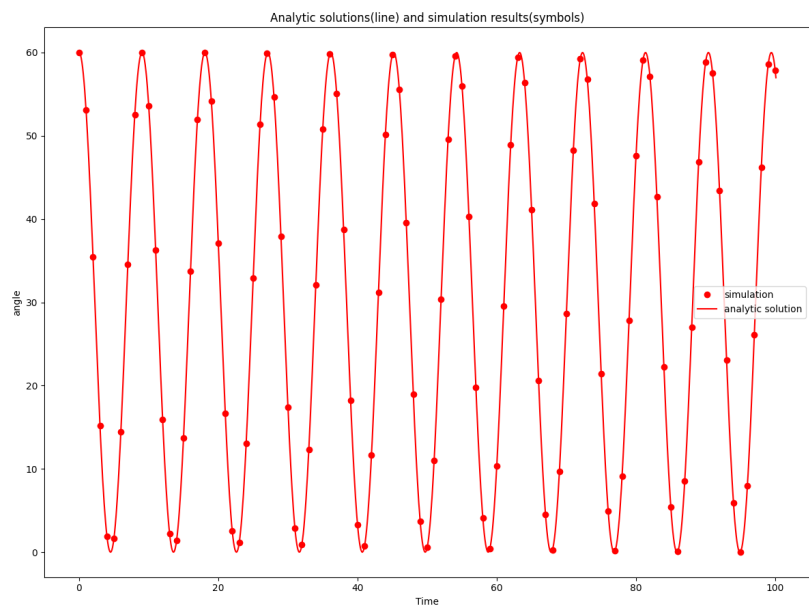


図 2: 時間  $t$  に対する角度  $\theta$ 。実線は解析解。