# 磁石振り子シミュレータ
# PEM

牧野真人

2020 年 9 月 20 日

# 目 次

# 第1章　はじめに

シミュレーションエンジン PEM についての説明をする。PEM は力学に関してのシミュレーションを行う。力学のシミュレーションであるから、力 $F$ を受ける質量 $m$ の物体が加速度 $a$ で運動するニュートンの運動方程式

$$ma = F \tag{1.1}$$

が基礎になる。しかし、PEM では、回転の運動方程式を中心に解く。コマ、振り子のように、一様重力場中で一固定点を持った剛体の回転の問題を解く。特に、剛体は、磁石を持つとして、磁気ダイポールをもっており、外磁場やダイポール同士で相互作用する。

剛体の運動は、オイラー角あるいは、四元数を用いて計算されることが多いが PEM では、粒子固定の直交座標系 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を計算していく。厳密解を解くなどの場合は、オイラー角は有用であるし、四元数は、分子動力学シミュレーションのような多数の多体問題を解く場合は効率が高い。一方で、私の感覚であるが、粒子固定の直交座標系で計算する場合は、分かりやすい。そのため、ここでは、粒子固定の直交座標系を用いる。

さらに、他に見られない特徴として回転微分演算子

$$\boldsymbol{\mathcal{R}} = \sum_{i=1,2,3} \boldsymbol{u}_i \times \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_i} \tag{1.2}$$

を用いる。

# 第2章　記号など

このマニュアルでは、スカラー量は、通常のフォントで $A$ のように書く。ベクトル、テンソル量は太字で $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{B}$ のように書く。

基底ベクトルの添字は、$i, j, k, ...$ でベクトルのデカルト座標での成分はギリシャ文字 $\alpha, \beta, \gamma ...$ で表すようにする。

たとえば、ベクトル

# 第3章　理論

## 3.1　基礎方程式

図3.1のように実験室が基底ベクトル$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$で記述される空間とする。ここで、$\boldsymbol{e}_i{\cdot}\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}, (i,j = x,y,z)$である。右手系として$\boldsymbol{e}_i{\times}\boldsymbol{e}_j = e_{ijk}\boldsymbol{e}_k$である。ある一体の剛体を考える。この剛体は剛体に固定された基底ベクトル$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$で剛体の方向を定義する。この場合も$\boldsymbol{u}_i{\cdot}\boldsymbol{u}_j = \delta_{ij}, (i,j = 1,2,3)$である。図3.1の(a)は剛体が剛体の基底ベクトルで表され、同様に、振り子も固定点のまわりで運動する剛体として計算できる。

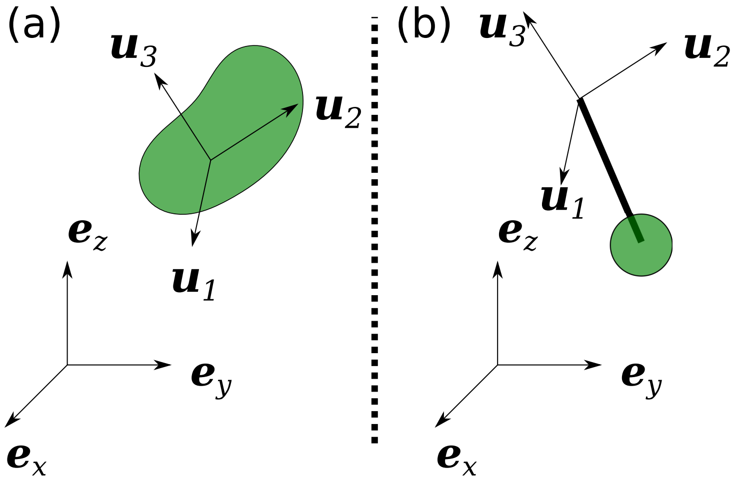


図 3.1:　実験室の基底ベクトル $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ と剛体固定基底ベクトル $\boldsymbol{u}_x, \boldsymbol{u}_y, \boldsymbol{u}_z$。(a) 剛体の場合。(b) 振り子の場合も剛体として扱う。

トルク$\boldsymbol{T}$が与えられた際、角運動量$\boldsymbol{L}$の時間微分で与えられる。

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{T} \tag{3.1}$$

また、剛体の角速度$\boldsymbol{\omega}$は、剛体の慣性モーメントテンソル$\boldsymbol{I}$として

$$\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{L} \tag{3.2}$$

となる。慣性モーメントテンソルは、時間に応じて変化する。しかし、慣性モーメントテンソルはあらかじめ、粒子に固定した座標系で計算するほ

うが便利である。そのため、慣性モーメントテンソルは、次のようにする。

$$\boldsymbol{I}(t) = \sum_{i,j=1,2,3} I_{ij}\boldsymbol{u}_i(t)\boldsymbol{u}_j(t) \tag{3.3}$$

$I_{ij}$ は時間に依存しない定数である。粒子固定の座標系で最初に求めておけばよい。一方で、行列 $I_{ij}$ の逆行列を $(I^{-1})_{ij}$ とすると角速度は

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i,j=1,2,3} (I^{-1})_{ij}\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_j \tag{3.4}$$

となる。これから、

$$\frac{d\boldsymbol{u}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}_i \tag{3.5}$$

となる。

トルク $\boldsymbol{T}$ が与えられると式 (3.1) より角運動量 $\boldsymbol{L}$ の時間発展を計算する。次にあらかじめ計算していた慣性モーメントテンソル $I_{ij}$ をもとに、式 (3.4) より角速度 $\boldsymbol{\omega}$ を計算する。そして、式 (3.5) より、剛体に固定された基底ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ を計算することで粒子の向きが計算されていく。このようにして、剛体の運動を計算していくのが、本シミュレータである。

## 3.2 慣性モーメントテンソル

### 3.2.1 一般の式

慣性モーメントテンソルは、一様な質量密度 $\rho$ を持つとして

$$\boldsymbol{I} = \rho\int_V \left(r^2\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{r}\boldsymbol{r}\right)dV \tag{3.6}$$

と表される。$\boldsymbol{r}$ は、回転中心からの位置ベクトルで、$r$ は $\boldsymbol{r}$ の長さである。積分は、物体の体積 $V$ に渡って行う体積積分である。

式 (3.6) は、特定の回転中心で評価される。しかし、任意の回転中心で慣性モーメントテンソル $\boldsymbol{I}'$ を評価するために、力学の教科書でスタイナーの定理と呼ばれる平行移動の公式は、次のとおりとなる。移動前の慣性モーメントテンソルを $\boldsymbol{I}$、質量を $M$、原点から $\boldsymbol{r}'$ の位置に平行移動すると、平行移動後のテンソル $\boldsymbol{I}'$ は

$$\boldsymbol{I}' = \boldsymbol{I} + M\left(r'^2\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'\right) \tag{3.7}$$

となる。

また、複数の形状がいくつかで、一つの形状が出来ている場合、それぞれの形状での慣性モーメントテンソルを足し合わせれば良い。ただし、形状が重ねっている場合は、適切ではない。

### 3.2.2 解析解

PEM に図 3.2 の解析解の慣性モーメントを用いている。これらを平行移動の公式を用いて、さまざまな形状の振り子、コマなどのシミュレーションが出来る。

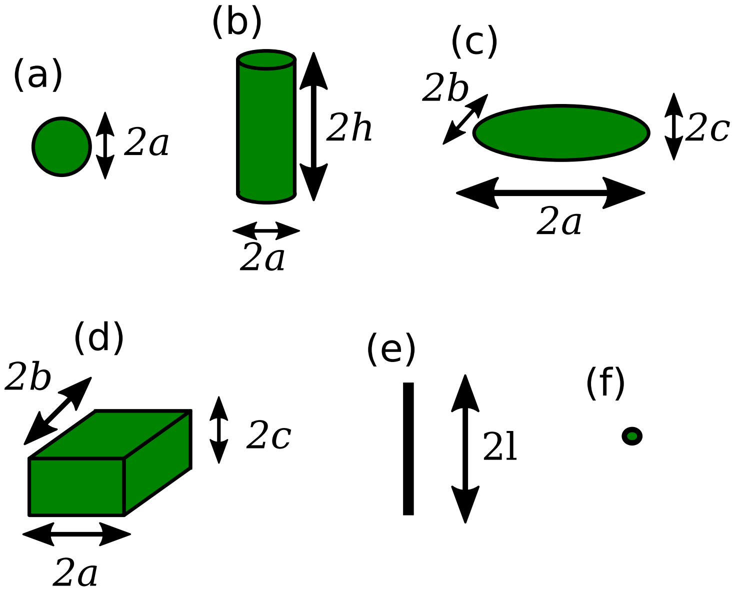


図 3.2: さまざまな形状。(a) 半径 $a$ の球。(b) 底面の半径 $a$、高さ $h$ の円筒。(c) 系の長さ $a, b, c$ の楕円体。(d) 辺の長さが $2a, 2b, 2c$ の直方体。(e) 太さのない長さ $2l$ の直線。(f) 大きさのない質点

#### 球

図 3.2(a) は、半径 $a$ の球である。この慣性モーメント $\boldsymbol{I}$ は等方的で

$$\boldsymbol{I} = \frac{2}{5} M a^2 \boldsymbol{\delta} \tag{3.8}$$

となる。

#### 円柱

図 3.2(b) は底面の円の半径が $a$ で、長さが $2h$ の円柱である。円柱の軸の方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{d}$ とすると慣性モーメントテンソル $\boldsymbol{I}$ は

$$\boldsymbol{I} = M \left( \frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{48} \right) (\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{dd}) + M \frac{a^2}{2} \boldsymbol{dd} \tag{3.9}$$

となる。

### 楕円体

図 3.2(c) は径の長さが $a, b, c$ の楕円体である。それぞれの径の方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ とする。このときの慣性モーメントテンソル $\boldsymbol{I}$ は

$$\boldsymbol{I} = \frac{M}{5}\left\{\left(b^2+c^2\right)\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1 + \left(a^2+c^2\right)\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2 + \left(a^2+b^2\right)\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}_3\right\} \tag{3.10}$$

となる。

### 直方体

図 3.2(d) は辺の長さが $2a, 2b, 2c$ の直方体である。それぞれの方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ とする。このときの慣性モーメントテンソル $\boldsymbol{I}$ は

$$\boldsymbol{I} = \frac{M}{3}\left\{\left(b^2+c^2\right)\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1 + \left(a^2+c^2\right)\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2 + \left(a^2+b^2\right)\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}_3\right\} \tag{3.11}$$

となる。

### 直線

図 3.2(e) は長さが $2l$ で太さのない直線である。この直線の方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{d}$ とすると慣性モーメントテンソルは

$$\boldsymbol{I} = \frac{Ml^2}{48}\left(\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}\right) \tag{3.12}$$

となる。

### 点

図 3.2(f) は大きさのない質量 $M$ のみの質点である。慣性モーメントはゼロである。

## 3.2.3 表面積分での評価

一般の形状の場合、体積積分ではなく表面積分で慣性モーメント等が表されていると便利である。物体の体積 $V$ は

$$\begin{aligned} V &= \int_V dV \\ &= \frac{1}{3}\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{r}dV \\ &= \frac{1}{3}\int_S \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}dS \end{aligned} \tag{3.13}$$

となる。ここで最後の式は表面 $S$ に渡っての表面積分で、$\boldsymbol{n}$ は表面 $S$ においての法線単位ベクトルである。重心 $\boldsymbol{R}_G$ は、密度が一様として、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_G &= \frac{1}{V}\int_V \boldsymbol{r} dV \\
&= \frac{1}{2V}\int_V \nabla r^2 dV \\
&= \frac{1}{2V}\int_S r^2 \boldsymbol{n} dS
\end{aligned} \tag{3.14}$$

となる。慣性モーメント $\boldsymbol{I}$ は式 (3.6) から、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{I} &= \frac{\rho}{5}\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{r}r^2\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{rrr})dV \\
&= \frac{\rho}{5}\int_S \left(r^2\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{rr}\right)\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}dS
\end{aligned} \tag{3.15}$$

となる。

## 3.3 トルク

ここでは、シミュレーションに用いるトルクをあげる。

### 3.3.1 重力

重力加速度を $\boldsymbol{g}$ とし物体の質量を $M$、回転の中心から見た物体の重心の位置を $\boldsymbol{R}_G = \sum_{i=1,2,3} R_{Gi}\boldsymbol{u}_i$ とする。重力による位置エネルギーは、

$$U = -M\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{R}_G \tag{3.16}$$

となる。回転微分演算子

$$\boldsymbol{\mathcal{R}} = \sum_{i=1,2,3} \boldsymbol{u}_i \times \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_i} \tag{3.17}$$

を用いて、トルク $\boldsymbol{T}$ は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T} &= -\boldsymbol{\mathcal{R}}U \\
&= \sum_i \boldsymbol{u}_i \times \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_i} M\boldsymbol{g}\cdot\sum_j R_{Gj}\boldsymbol{u}_j
\end{aligned} \tag{3.18}$$

となる。

$$
\begin{aligned}
\left\{\sum_i \boldsymbol{u}_i \times \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_i}(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{u}_j)\right\}_\alpha &= \sum_i e_{\alpha\beta\gamma} u_{i\beta} \frac{\partial}{\partial u_{i\gamma}} g_\delta u_{j\delta} \\
&= \sum_i e_{\alpha\beta\gamma} u_{i\beta} g_\gamma \delta_{ij} \delta_{\gamma\delta} \\
&= e_{\alpha\beta\gamma} u_{j\beta} g_\gamma \\
&= (\boldsymbol{u}_j \times \boldsymbol{g})_\alpha
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

となることから、トルク $\boldsymbol{T}$ は、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{T} &= M \sum_j R_{Gj} (\boldsymbol{u}_j \times \boldsymbol{g}) \\
&= M \boldsymbol{R}_G \times \boldsymbol{g}
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

となる。

### 3.3.2 外場と磁気ダイポールによるトルク

外磁場 $\boldsymbol{B}$ のもとで、粒子が磁気ダイポール $\boldsymbol{p}$ を持つとき、ポテンシャルは

$$
U = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{B} \tag{3.21}
$$

となる。$\boldsymbol{p} = \sum_i p_i \boldsymbol{u}_i$ となることから、先の重力の場合と同様にして、トルク $\boldsymbol{T}$ は

$$
\boldsymbol{T} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{B} \tag{3.22}
$$

となる。

### 3.3.3 磁気ダイポール間のトルク

図 3.3 のように、2 つの剛体に位置 $\boldsymbol{r}_a$ と $\boldsymbol{r}_b$ に磁気ダイポール $\boldsymbol{p}_a$ と $\boldsymbol{p}_b$ の相互作用を考える。

位置 $\boldsymbol{r}_a$ は、回転の中心のベクトル $\boldsymbol{R}_a$ と回転からの中心から磁気ダイポールまでのベクトルを $\boldsymbol{r}'_a$ とする。すなわち $\boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{R}_a + \boldsymbol{r}'_a$ である。また、$\boldsymbol{r}'_a$ および $\boldsymbol{p}_a$ は、剛体 $a$ の向き $\boldsymbol{u}_{a1}, \boldsymbol{u}_{a2}, \boldsymbol{u}_{a3}$ に依存する。

$$
\boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{R}_a + \sum_{i=1,2,3} r'_{ai} \boldsymbol{u}_{ai} \tag{3.23}
$$

$$
\boldsymbol{p}_a = \sum_{i=1,2,3} p_{ai} \boldsymbol{u}_{ai} \tag{3.24}
$$

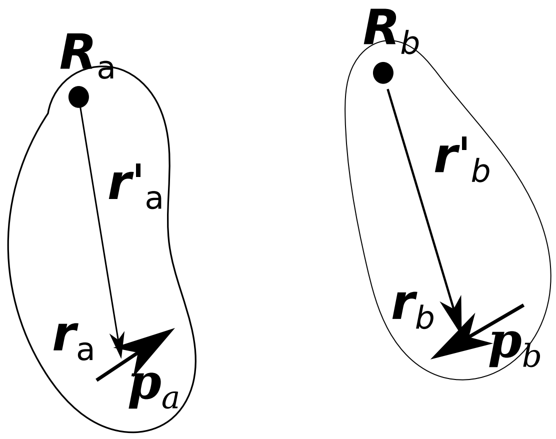


図 3.3: 磁気ダイポールの相互作用。位置 $\boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{R}_a + \boldsymbol{r}'_a$ と $\boldsymbol{r}_b = \boldsymbol{R}_b + \boldsymbol{r}'_b$ に磁気ダイポール $\boldsymbol{p}_a$ および $\boldsymbol{p}_b$ がある。

と書くと便利である。また、剛体 $b$ に関しても同様であるし、剛体に複数のダイポールがある場合に拡張は容易である。

２つの磁気ダイポール $\boldsymbol{p}_a, \boldsymbol{p}_b$ の相互作用によるポテンシャルエネルギー $U$ は、以下のとおりである。

$$U = -\frac{\mu_0}{4\pi r_{ab}^3}\left(3\frac{\boldsymbol{r}_{ab}\boldsymbol{r}_{ab}}{r_{ab}^2} - \boldsymbol{\delta}\right) : (\boldsymbol{p}_a\boldsymbol{p}_b) \tag{3.25}$$

ここで $\mu_0$ は透磁率で

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{ab} &= \boldsymbol{r}_b - \boldsymbol{r}_a \\ &= \boldsymbol{R}_b + \sum_i r'_{bi}\boldsymbol{u}_{bi} - \boldsymbol{R}_a - \sum_i r'_{ai}\boldsymbol{u}_{ai}\end{aligned} \tag{3.26}$$

である。剛体 $a$ に働くトルク $\boldsymbol{T}_a$ は、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_a &= -\boldsymbol{\mathcal{R}}_a U \\ &= -(\boldsymbol{\mathcal{R}}_a\boldsymbol{r}_{ab})\cdot\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_{ab}} - (\boldsymbol{\mathcal{R}}_a\boldsymbol{p}_a)\cdot\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{p}_a}\end{aligned} \tag{3.27}$$

で計算される。ここで

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}_a = \sum_{i=1,2,3}\boldsymbol{u}_{ai}\times\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_{ai}} \tag{3.28}$$

である。

$$\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_{ab}} = -\frac{3\mu_0}{4\pi r_{ab}^5}\left(-5\frac{(\boldsymbol{r}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)(\boldsymbol{r}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)\boldsymbol{r}_{ab}}{r_{ab}^2} + (\boldsymbol{p}_b\cdot\boldsymbol{r}_{ab})\boldsymbol{p}_a + (\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{r}_{ab})\boldsymbol{p}_b + (\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{p}_b)\boldsymbol{r}_{ab}\right) \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{p}_a} = -\frac{\mu_0}{4\pi r_{ab}^3}\left(3\frac{(\boldsymbol{r}_{ab}\boldsymbol{p}_b)\boldsymbol{r}_{ab}}{r_{ab}^2} - \boldsymbol{p}_b\right) \tag{3.30}$$

$$\mathcal{R}_{a\alpha} r_{ab\beta} = -\sum_i e_{\alpha\gamma\beta} u_{ai\gamma} r'_{ai} \tag{3.31}$$

$$\mathcal{R}_{a\alpha} p_{ab\beta} = \sum_i e_{\alpha\gamma\beta} u_{ai\gamma} p_{ai} \tag{3.32}$$

と計算されることから、

$$\boldsymbol{T}_a = -\boldsymbol{\mathcal{R}}_a U = \boldsymbol{r}'_a \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_{ab}} - \boldsymbol{p}_a \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{p}_a} \tag{3.33}$$

となる。

# 第4章　シミュレーション方法

## 4.1　慣性モーメント

剛体の回転運動を計算する前に、剛体の慣性モーメントテンソルを見積もる必要がある。図 4.1(c) の形の剛体の慣性モーメントテンソルを (a),(b) と計算して (c) を見積もる。(a) では、慣性モーメントテンソルを式 (3.8) および式 (3.9) から見積もる。ここでは、重心のまわりでの慣性モーメントテンソルとなる。(b) で、平行移動の公式 (3.7) を用いて目的の回転中心に移動した慣性モーメントテンソルを求める。(c) で、２つの慣性モーメントを足し合わせて目的の慣性モーメントテンソルとなる。

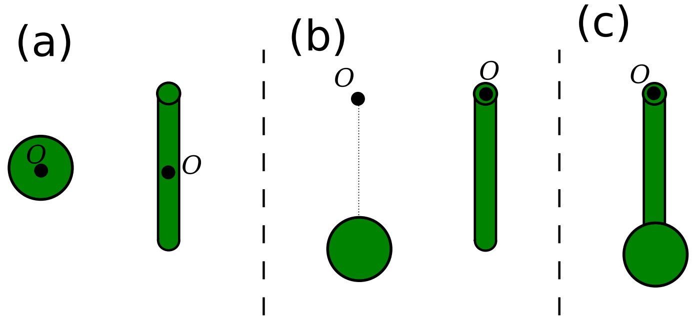


図 4.1: 慣性モーメントテンソルの評価。(a) それぞれの重心のまわりで慣性モーメントテンソルを計算。(b) 平行移動の定理で平行移動した後のテンソルを評価。(c) 平行移動したテンソルを足し合わせる。

式 (3.4) で、慣性モーメントテンソルの逆行列を計算するが必要がある。ただし、たとえば、大きさのない質点からなる振り子などでは、固有値がゼロになる場合があり、逆行列が計算できない。慣性モーメントテンソルをスペクトル分解して、

$$\boldsymbol{I} = \sum_{i=1,2,3} \lambda_i \boldsymbol{n}_i \boldsymbol{n}_i \tag{4.1}$$

と出来る。ここで、$\lambda_i$ は、固有値で、$\boldsymbol{n}_i$ そのときの単位固有ベクトルが

$\boldsymbol{n}_i$ である。逆行列の計算は、

$$\boldsymbol{I}^{-1} = \sum_{\lambda_i \neq 0} \frac{1}{\lambda_i} \boldsymbol{n}_i \boldsymbol{n}_i \tag{4.2}$$

と固有値がゼロの場合を除いて計算する。

## 4.2 時間積分

時間 $t$ の剛体の向きから、時間 $t + \Delta t$ の剛体の向きを計算する。

### 4.2.1 オイラー法

式 (3.1) を差分で

$$\boldsymbol{L}(t + \Delta t) = \boldsymbol{L}(t) + \boldsymbol{T}(t)\Delta t \tag{4.3}$$

と計算する。式 (3.4) から、角速度 $\boldsymbol{\omega}(t)$ を計算する。式 (3.5) から、

$$\boldsymbol{u}_i(t + \Delta t) = \boldsymbol{u}_i(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{u}_i(t)\Delta t \tag{4.4}$$

となる。このように時間発展を計算することで、剛体の向き $\boldsymbol{u}_i$ を計算できる。

### 4.2.2 4 次のルンゲクッタ法

先のオイラー法では、十分な計算精度を確保するために、$\Delta t$ の値を小さくする必要がある。そのため、ここでは、4 次のルンゲクッタ法で計算する方法を述べる。$t^1 = t$ として、

$$\boldsymbol{T}^1 = \boldsymbol{T}(t^1), \quad \boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}(t^1), \quad \boldsymbol{u}_i^1 = \boldsymbol{u}_i(t^1) \tag{4.5}$$

とする。次に

$$\Delta \boldsymbol{L}^1 = \boldsymbol{T}^1 \Delta t, \quad \Delta \boldsymbol{u}_i^1 = (\boldsymbol{\omega}^1 \times \boldsymbol{u}_i^1)\Delta t \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{L}^2 = \boldsymbol{L}^1 + \frac{1}{2}\Delta \boldsymbol{L}^1, \quad \boldsymbol{u}_i^2 = \boldsymbol{u}_i^1 + \frac{1}{2}\Delta \boldsymbol{u}_i^1 \tag{4.7}$$

$$\boldsymbol{\omega}^2 = \sum_{i,j=1,2,3} (I^{-1})_{ij} \boldsymbol{L}^2 \cdot \boldsymbol{u}_i^2 \boldsymbol{u}_j^2 \tag{4.8}$$

と計算する。これらから、$t^2 = t^1 + \Delta t/2$ のトルク $\boldsymbol{T}^2$ を計算する。同様に

$$\Delta \boldsymbol{L}^2 = \boldsymbol{T}^2 \Delta t, \quad \Delta \boldsymbol{u}_i^2 = (\boldsymbol{\omega}^2 \times \boldsymbol{u}_i^2)\Delta t \tag{4.9}$$

$$\boldsymbol{L}^3 = \boldsymbol{L}^1 + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{L}^2, \quad \boldsymbol{u}_i^3 = \boldsymbol{u}_i^1 + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{u}_i^2 \tag{4.10}$$

$$\boldsymbol{\omega}^3 = \sum_{i,j=1,2,3} (I^{-1})_{ij}\boldsymbol{L}^3 \cdot \boldsymbol{u}_i^3\boldsymbol{u}_j^3 \tag{4.11}$$

と計算する。また、$t^3 = t^1 + \Delta t/2$ として、トルク $\boldsymbol{T}^3$ を計算する。さらに、

$$\Delta\boldsymbol{L}^3 = \boldsymbol{T}^3\Delta t, \quad \Delta\boldsymbol{u}_i^3 = (\boldsymbol{\omega}^3 \times \boldsymbol{u}_i^3)\Delta t \tag{4.12}$$

$$\boldsymbol{L}^4 = \boldsymbol{L}^1 + \Delta\boldsymbol{L}^3, \quad \boldsymbol{u}_i^4 = \boldsymbol{u}_i^1 + \Delta\boldsymbol{u}_i^3 \tag{4.13}$$

$$\boldsymbol{\omega}^4 = \sum_{i,j=1,2,3} (I^{-1})_{ij}\boldsymbol{L}^4 \cdot \boldsymbol{u}_i^4\boldsymbol{u}_j^4 \tag{4.14}$$

これから、やはりトルク $\boldsymbol{T}^4$ を計算する。

$$\Delta\boldsymbol{L}^4 = \boldsymbol{T}^4\Delta t, \quad \Delta\boldsymbol{u}_i^4 = (\boldsymbol{\omega}^4 \times \boldsymbol{u}_i^4)\Delta t \tag{4.15}$$

これらから、

$$\boldsymbol{L}(t+\Delta t) = \boldsymbol{L}^1 + \frac{1}{6}(\Delta\boldsymbol{L}^1 + 2\Delta\boldsymbol{L}^2 + 2\Delta\boldsymbol{L}^3 + \Delta\boldsymbol{L}^4) \tag{4.16}$$

$$\boldsymbol{u}_i(t+\Delta t) = \boldsymbol{u}_i^1 + \frac{1}{6}(\Delta\boldsymbol{u}_i^1 + 2\Delta\boldsymbol{u}_i^2 + 2\Delta\boldsymbol{u}_i^3 + \Delta\boldsymbol{u}_i^4) \tag{4.17}$$

$$\boldsymbol{\omega}(t+\Delta t) = \sum_{i,j=1,2,3} (I^{-1})_{ij}\boldsymbol{L}(t+\Delta t) \cdot \boldsymbol{u}_i(t+\Delta t)\boldsymbol{u}_j(t+\Delta t) \tag{4.18}$$

と計算する。

図 4.2 で、オイラー法と 4 次のルンゲクッタ法の比較である。楕円体の重心のまわりでの自由回転である。エネルギー保存と角運動量保存から、剛体から見た角運動量の軌跡は閉じたものになる。特に不安定な軌跡を選んで比較した。図の左はオイラー法の軌跡で、最初の軌跡から計算の誤差から別の閉じた軌跡に移動している。図の右は、ルンゲクッタ法の結果で閉じた軌跡になっている。この結果の通り、精度によっては、間違った結果となるのを気をつける必要がある。

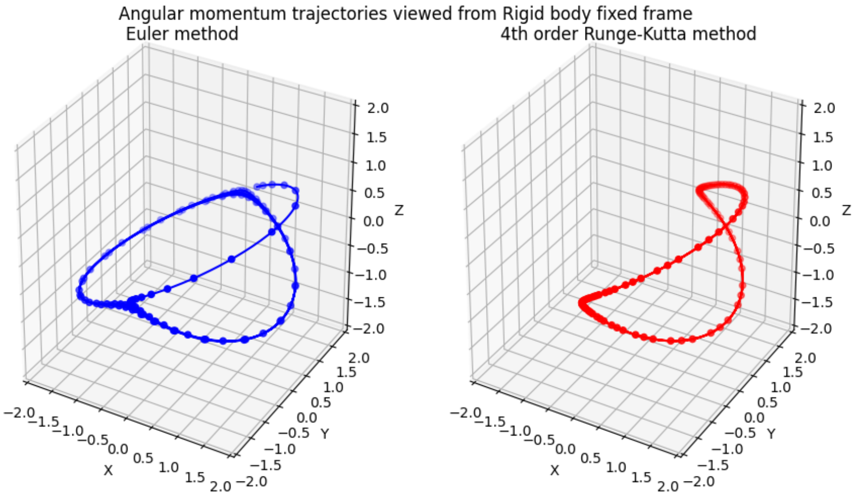


図 4.2: オイラー法と 4 次のルンゲクッタ法との比較。左がオイラー法、右が 4 次のルンゲクッタ法。

# 第 5 章　操作例

# 第 6 章　UDF 説明

# 第7章　action 説明

# 第8章　Python説明