単純な振り子

牧野真人

2020 年 9 月 11 日

1　理論

長さ l で重力場 g にある平面内にある振り子は、重力と振り子がなす角度を θ とすると次の方程式で書ける。

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \tag{1}$$

1.1　線形の解

角度 θ が十分に小さければ、

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta \tag{2}$$

となる。定数 k を

$$k^2 = \frac{\theta_0^2}{4} \tag{3}$$

とする。ただし初期の角度は θ_0 で、このときの速度はゼロとする。振り子の周期 T は、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{4}$$

で、角度 θ は

$$\theta = 2k\sin\left\{\sqrt{\frac{g}{l}}\left(t+\frac{T}{4}\right)\right\} \tag{5}$$

となる。

1.2 厳密解

式 (1) の厳密解は、定数 k や周期 T を

$$k^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\theta_0\right) \tag{6}$$

および

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K(k) \tag{7}$$

として

$$\theta = 2\sin^{-1}\left[k\mathrm{sn}\left\{\sqrt{\frac{g}{l}}\left(t + \frac{T}{4}\right), k\right\}\right] \tag{8}$$

となる。ここで $K(k)$ は、母数 k の第 1 種完全楕円積分であり、$\mathrm{sn}(u,k)$ は、母数 k におけるヤコビの sn 楕円関数である。

2 シミュレーション