

# 磁石振り子シミュレータ PEM

牧野真人

2020 年 9 月 19 日



# 目 次

|       |                            |    |
|-------|----------------------------|----|
| 第 1 章 | はじめに                       | 5  |
| 第 2 章 | 記号など                       | 7  |
| 第 3 章 | 理論                         | 9  |
| 3.1   | 基礎方程式 . . . . .            | 9  |
| 3.2   | 慣性モーメントテンソル . . . . .      | 10 |
| 3.2.1 | 一般の式 . . . . .             | 10 |
| 3.2.2 | 解析解 . . . . .              | 11 |
| 3.2.3 | 表面積分での評価 . . . . .         | 12 |
| 3.3   | トルク . . . . .              | 13 |
| 3.3.1 | 重力 . . . . .               | 13 |
| 3.3.2 | 外場と磁気ダイポールによるトルク . . . . . | 14 |
| 3.3.3 | 磁気ダイポール間のトルク . . . . .     | 14 |
| 第 4 章 | シミュレーション方法                 | 17 |
| 4.1   | 慣性モーメント . . . . .          | 17 |
| 4.2   | 時間積分 . . . . .             | 18 |
| 4.2.1 | オイラー法 . . . . .            | 18 |
| 4.2.2 | 4 次のルンゲクッタ法 . . . . .      | 18 |
| 第 5 章 | 操作例                        | 21 |
| 第 6 章 | UDF 説明                     | 23 |
| 第 7 章 | action 説明                  | 25 |
| 第 8 章 | Python 説明                  | 27 |



# 第1章 はじめに

シミュレーションエンジン PEM についての説明をする。PEM は力学に  
関してのシミュレーションを行う。力学のシミュレーションであるから、  
力  $F$  を受ける質量  $m$  の物体が加速度  $a$  で運動するニュートンの運動方  
程式

$$ma = F \quad (1.1)$$

が基礎になる。しかし、PEM では、回転の運動方程式を中心に解く。コ  
マ、振り子のように、一様重力場中で一固定点を持った剛体の回転の問題  
を解く。特に、剛体は、磁石を持つとして、磁気ダイポールをもち、  
外磁場やダイポール同士で相互作用する。

剛体の運動は、オイラー角あるいは、四元数を用いて計算されることが  
多いが PEM では、粒子固定の直交座標系  $u_1, u_2, u_3$  を計算していく。厳  
密解を解くなどの場合は、オイラー角は有用であるし、四元数は、分子動  
力学シミュレーションのような多数の多体問題を解く場合は効率が高い。  
一方で、私の感覚であるが、粒子固定の直交座標系で計算する場合は、分  
かりやすい。そのため、ここでは、粒子固定の直交座標系を用いる。

さらに、他に見られない特徴として回転微分演算子

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1,2,3} \mathbf{u}_i \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_i} \quad (1.2)$$

を用いる。



## 第2章 記号など

このマニュアルでは、スカラー量は、通常のフォントで  $A$  のように書く。ベクトル、テンソル量は太字で  $x, B$  のように書く。

基底ベクトルの添字は、 $i, j, k, \dots$  でベクトルのデカルト座標での成分はギリシャ文字  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  で表すようにする。

たとえば、ベクトル





## 第3章 理論

### 3.1 基礎方程式

図 3.1 のように実験室が基底ベクトル  $e_x, e_y, e_z$  で記述される空間とする。ここで、 $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ , ( $i, j = x, y, z$ ) である。右手系として  $e_i \times e_j = e_{ijk} e_k$  である。ある一体の剛体を考える。この剛体は剛体に固定された基底ベクトル  $u_1, u_2, u_3$  で剛体の方向を定義する。この場合も  $u_i \cdot u_j = \delta_{ij}$ , ( $i, j = 1, 2, 3$ ) である。図 3.1 の (a) は剛体が剛体の基底ベクトルで表され、同様に、振り子も固定点のまわりで運動する剛体として計算できる。

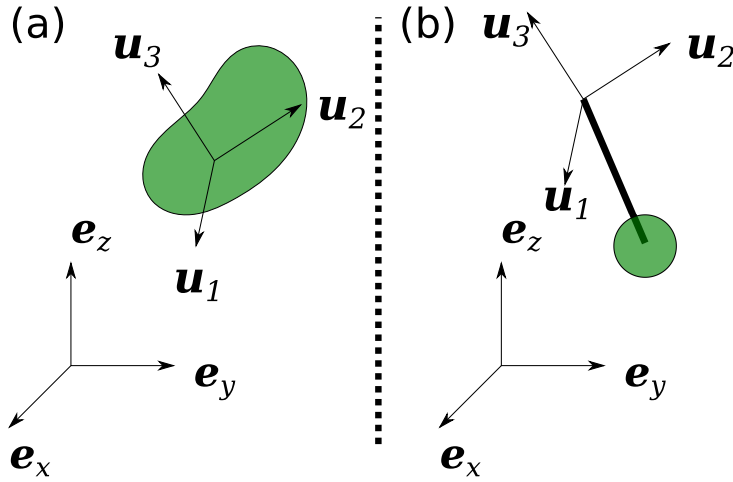


図 3.1: 実験室の基底ベクトル  $e_x, e_y, e_z$  と剛体固定基底ベクトル  $u_x, u_y, u_z$ 。(a) 剛体の場合。(b) 振り子の場合も剛体として扱う。

トルク  $T$  が与えられた際、角運動量  $L$  の時間微分で与えられる。

$$\frac{dL}{dt} = T \quad (3.1)$$

また、剛体の角速度  $\omega$  は、剛体の慣性モーメントテンソル  $I$  として

$$I \cdot \omega = L \quad (3.2)$$

となる。慣性モーメントテンソルは、時間に応じて変化する。しかし、慣性モーメントテンソルはあらかじめ、粒子に固定した座標系で計算するほ

うが便利である。そのため、慣性モーメントテンソルは、次のようにする。

$$\mathbf{I}(t) = \sum_{i,j=1,2,3} I_{ij} \mathbf{u}_i(t) \mathbf{u}_j(t) \quad (3.3)$$

$I_{ij}$  は時間に依存しない定数である。粒子固定の座標系で最初に求めておけばよい。一方で、行列  $I_{ij}$  の逆行列を  $(I^{-1})_{ij}$  とすると角速度は

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i,j=1,2,3} (I^{-1})_{ij} \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j \quad (3.4)$$

となる。これから、

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_i \quad (3.5)$$

となる。

トルク  $\mathbf{T}$  が与えられると式 (3.1) より角運動量  $\mathbf{L}$  の時間発展を計算する。次にあらかじめ計算していた慣性モーメントテンソル  $I_{ij}$  をもとに、式 (3.4) より角速度  $\boldsymbol{\omega}$  を計算する。そして、式 (3.5) より、剛体に固定された基底ベクトル  $\mathbf{u}_i$  を計算することで粒子の向きが計算されていく。このようにして、剛体の運動を計算していくのが、本シミュレータである。

## 3.2 慣性モーメントテンソル

### 3.2.1 一般の式

慣性モーメントテンソルは、一様な質量密度  $\rho$  を持つとして

$$\mathbf{I} = \rho \int_V (r^2 \boldsymbol{\delta} - \mathbf{r} \mathbf{r}) dV \quad (3.6)$$

と表される。 $\mathbf{r}$  は、回転中心からの位置ベクトルで、 $r$  は  $\mathbf{r}$  の長さである。積分は、物体の体積  $V$  に渡って行う体積積分である。

式 (3.6) は、特定の回転中心で評価される。しかし、任意の回転中心で慣性モーメントテンソル  $\mathbf{I}'$  を評価するために、力学の教科書でスタイナーの定理と呼ばれる平行移動の公式は、次のとおりとなる。移動前の慣性モーメントテンソルを  $\mathbf{I}$ 、質量を  $M$ 、原点から  $\mathbf{r}'$  の位置に平行移動すると、平行移動後のテンソル  $\mathbf{I}'$  は

$$\mathbf{I}' = \mathbf{I} + M (\mathbf{r}'^2 \boldsymbol{\delta} - \mathbf{r}' \mathbf{r}') \quad (3.7)$$

となる。

また、複数の形状がいくつかで、一つの形状が出来ている場合、それぞれの形状での慣性モーメントテンソルを足し合わせれば良い。ただし、形状が重なっている場合は、適切ではない。

### 3.2.2 解析解

PEM に図 3.2 の解析解の慣性モーメントを用いている。これらを平行移動の公式を用いて、さまざまな形状の振り子、コマなどのシミュレーションが出来る。

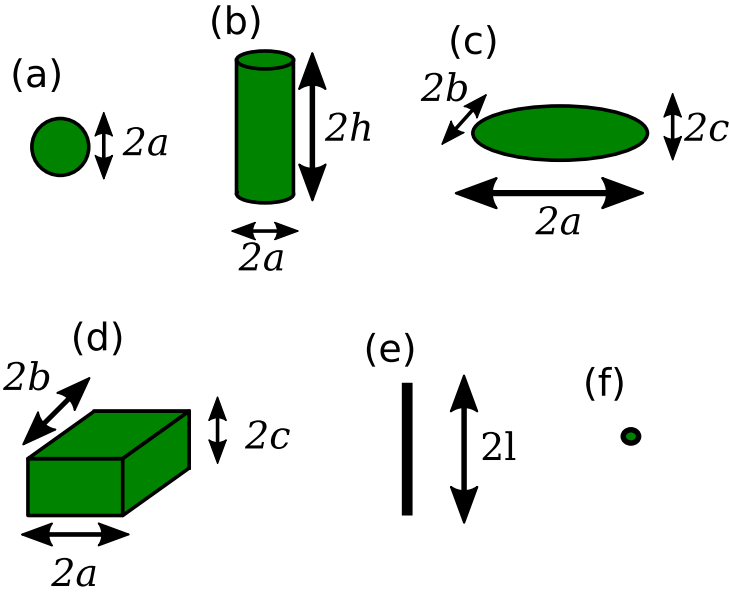


図 3.2: さまざまな形状。(a) 半径  $a$  の球。(b) 底面の半径  $a$ 、高さ  $h$  の円筒。(c) 系の長さ  $a, b, c$  の楕円体。(d) 辺の長さが  $2a, 2b, 2c$  の直方体。(e) 太さのない長さ  $2l$  の直線。(f) 大きさのない質点

球

図 3.2(a) は、半径  $a$  の球である。この慣性モーメント  $I$  は等方的で

$$I = \frac{2}{5} M a^2 \delta \quad (3.8)$$

となる。

円柱

図 3.2(b) は底面の円の半径が  $a$  で、長さが  $2h$  の円柱である。円柱の軸の方向の単位ベクトルを  $d$  とすると慣性モーメントテンソル  $I$  は

$$I = M \left( \frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{48} \right) (\delta - dd) + M \frac{a^2}{2} dd \quad (3.9)$$

となる。

### 楕円体

図 3.2(c) は径の長さが  $a, b, c$  の楕円体である。それぞれの径の方向の単位ベクトルを  $u_1, u_2, u_3$  とする。このときの慣性モーメントテンソル  $I$  は

$$I = \frac{M}{5} \{ (b^2 + c^2) u_1 u_1 + (a^2 + c^2) u_2 u_2 + (a^2 + b^2) u_3 u_3 \} \quad (3.10)$$

となる。

### 直方体

図 3.2(d) は辺の長さが  $2a, 2b, 2c$  の直方体である。それぞれの方向の単位ベクトルを  $u_1, u_2, u_3$  とする。このときの慣性モーメントテンソル  $I$  は

$$I = \frac{M}{3} \{ (b^2 + c^2) u_1 u_1 + (a^2 + c^2) u_2 u_2 + (a^2 + b^2) u_3 u_3 \} \quad (3.11)$$

となる。

### 直線

図 3.2(e) は長さが  $2l$  で太さのない直線である。この直線の方向の単位ベクトルを  $d$  とすると慣性モーメントテンソルは

$$I = \frac{Ml^2}{48} (\delta - dd) \quad (3.12)$$

となる。

### 点

図 3.2(f) は大きさのない質量  $M$  のみの質点である。慣性モーメントはゼロである。

### 3.2.3 表面積分での評価

一般の形状の場合、体積積分ではなく表面積分で慣性モーメント等が表されていると便利である。物体の体積  $V$  は

$$\begin{aligned} V &= \int_V dV \\ &= \frac{1}{3} \int_V \nabla \cdot \mathbf{r} dV \\ &= \frac{1}{3} \int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (3.13)$$

となる。ここで最後の式は表面  $S$  に渡っての表面積分で、 $\mathbf{n}$  は表面  $S$  における法線単位ベクトルである。重心  $\mathbf{R}_G$  は、密度が一様として、

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_G &= \frac{1}{V} \int_V \mathbf{r} dV \\ &= \frac{1}{2V} \int_V \nabla r^2 dV \\ &= \frac{1}{2V} \int_S r^2 \mathbf{n} dS\end{aligned}\quad (3.14)$$

となる。慣性モーメント  $I$  は式 (3.6) から、

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &= \frac{\rho}{5} \int_V \nabla \cdot (\mathbf{r} r^2 \boldsymbol{\delta} - \mathbf{r} \mathbf{r} \mathbf{r}) dV \\ &= \frac{\rho}{5} \int_S (r^2 \boldsymbol{\delta} - \mathbf{r} \mathbf{r}) \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS\end{aligned}\quad (3.15)$$

となる。

### 3.3 トルク

ここでは、シミュレーションに用いるトルクをあげる。

#### 3.3.1 重力

重力加速度を  $\mathbf{g}$  とし物体の質量を  $M$ 、回転の中心から見た物体の重心の位置を  $\mathbf{R}_G = \sum_{i=1,2,3} R_{Gi} \mathbf{u}_i$  とする。重力による位置エネルギーは、

$$U = -M \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_G \quad (3.16)$$

となる。回転微分演算子

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1,2,3} \mathbf{u}_i \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_i} \quad (3.17)$$

を用いて、トルク  $\mathbf{T}$  は

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= -\mathcal{R}U \\ &= \sum_i \mathbf{u}_i \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_i} M \mathbf{g} \cdot \sum_j R_{Gj} \mathbf{u}_j\end{aligned}\quad (3.18)$$

となる。

$$\begin{aligned}
\left\{ \sum_i \mathbf{u}_i \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_i} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{u}_j) \right\}_\alpha &= \sum_i e_{\alpha\beta\gamma} u_{i\beta} \frac{\partial}{\partial u_{i\gamma}} g_\delta u_{j\delta} \\
&= \sum_i e_{\alpha\beta\gamma} u_{i\beta} g_\gamma \delta_{ij} \delta_{\gamma\delta} \\
&= e_{\alpha\beta\gamma} u_{j\beta} g_\gamma \\
&= (\mathbf{u}_j \times \mathbf{g})_\alpha
\end{aligned} \tag{3.19}$$

となることから、トルク  $\mathbf{T}$  は、

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} &= M \sum_j R_{Gj} (\mathbf{u}_j \times \mathbf{g}) \\
&= M \mathbf{R}_G \times \mathbf{g}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

となる。

### 3.3.2 外場と磁気ダイポールによるトルク

外磁場  $\mathbf{B}$  のもとで、粒子が磁気ダイポール  $\mathbf{p}$  を持つとき、ポテンシャルは

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{B} \tag{3.21}$$

となる。 $\mathbf{p} = \sum_i p_i \mathbf{u}_i$  となることから、先の重力の場合と同様にして、トルク  $\mathbf{T}$  は

$$\mathbf{T} = \mathbf{p} \times \mathbf{B} \tag{3.22}$$

となる。

### 3.3.3 磁気ダイポール間のトルク

図 3.3 のように、2 つの剛体に位置  $\mathbf{r}_a$  と  $\mathbf{r}_b$  に磁気ダイポール  $\mathbf{p}_a$  と  $\mathbf{p}_b$  の相互作用を考える。

位置  $\mathbf{r}_a$  は、回転の中心のベクトル  $\mathbf{R}_a$  と回転からの中心から磁気ダイポールまでのベクトルを  $\mathbf{r}'_a$  とする。すなわち  $\mathbf{r}_a = \mathbf{R}_a + \mathbf{r}'_a$  である。また、 $\mathbf{r}'_a$  および  $\mathbf{p}_a$  は、剛体  $a$  の向き  $\mathbf{u}_{a1}, \mathbf{u}_{a2}, \mathbf{u}_{a3}$  に依存する。

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{R}_a + \sum_{i=1,2,3} r'_{ai} \mathbf{u}_{ai} \tag{3.23}$$

$$\mathbf{p}_a = \sum_{i=1,2,3} p_{ai} \mathbf{u}_{ai} \tag{3.24}$$

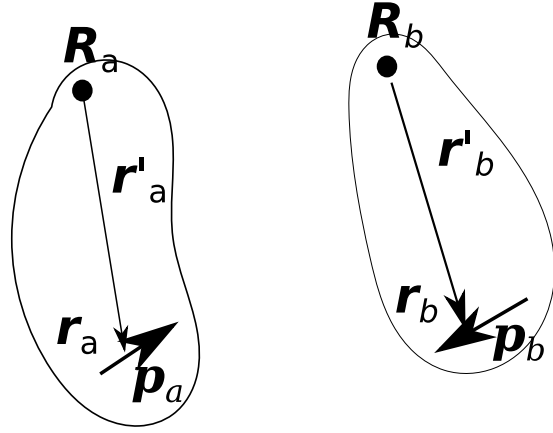


図 3.3: 磁気ダイポールの相互作用。位置  $\mathbf{r}_a = \mathbf{R}_a + \mathbf{r}'_a$  と  $\mathbf{r}_b = \mathbf{R}_b + \mathbf{r}'_b$  に磁気ダイポール  $\mathbf{p}_a$  および  $\mathbf{p}_b$  がある。

と書くとも便利である。また、剛体  $b$  に関しても同様であるし、剛体に複数のダイポールがある場合に拡張は容易である。

2つの磁気ダイポール  $\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b$  の相互作用によるポテンシャルエネルギー  $U$  は、以下のとおりである。

$$U = -\frac{\mu_0}{4\pi r_{ab}^3} \left( 3 \frac{\mathbf{r}_{ab} \mathbf{r}_{ab}}{r_{ab}^2} - \delta \right) : (\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b) \quad (3.25)$$

ここで  $\mu_0$  は透磁率で

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{ab} &= \mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a \\ &= \mathbf{R}_b + \sum_i \mathbf{r}'_{bi} \mathbf{u}_{bi} - \mathbf{R}_a - \sum_i \mathbf{r}'_{ai} \mathbf{u}_{ai} \end{aligned} \quad (3.26)$$

である。剛体  $a$  に働くトルク  $\mathbf{T}_a$  は、

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_a &= -\mathcal{R}_a U \\ &= -(\mathcal{R}_a \mathbf{r}_{ab}) \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_{ab}} - (\mathcal{R}_a \mathbf{p}_a) \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{p}_a} \end{aligned} \quad (3.27)$$

で計算される。ここで

$$\mathcal{R}_a = \sum_{i=1,2,3} \mathbf{u}_{ai} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{ai}} \quad (3.28)$$

である。

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_{ab}} = -\frac{3\mu_0}{4\pi r_{ab}^5} \left( -5 \frac{(\mathbf{r}_{ab} \cdot \mathbf{p}_a)(\mathbf{r}_{ab} \cdot \mathbf{p}_b) \mathbf{r}_{ab}}{r_{ab}^2} + (\mathbf{p}_b \cdot \mathbf{r}_{ab}) \mathbf{p}_a + (\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{r}_{ab}) \mathbf{p}_b + (\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b) \mathbf{r}_{ab} \right) \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{p}_a} = -\frac{\mu_0}{4\pi r_{ab}^3} \left( 3 \frac{(\mathbf{r}_{ab} \mathbf{p}_b) \mathbf{r}_{ab}}{r_{ab}^2} - \mathbf{p}_b \right) \quad (3.30)$$

$$\mathcal{R}_{a\alpha} r_{ab\beta} = - \sum_i e_{\alpha\gamma\beta} u_{ai\gamma} r'_{ai} \quad (3.31)$$

$$\mathcal{R}_{a\alpha} p_{ab\beta} = \sum_i e_{\alpha\gamma\beta} u_{ai\gamma} p_{ai} \quad (3.32)$$

と計算されることから、

$$\mathbf{T}_a = -\mathcal{R}_a U = \mathbf{r}'_a \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_{ab}} - \mathbf{p}_a \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{p}_a} \quad (3.33)$$

となる。



## 第4章 シミュレーション方法

### 4.1 慣性モーメント

剛体の回転運動を計算する前に、剛体の慣性モーメントテンソルを見積もる必要がある。図 4.1(c) の形の剛体の慣性モーメントテンソルを (a),(b) と計算して (c) を見積もる。(a) では、慣性モーメントテンソルを式 (3.8) および式 (3.9) から見積もる。ここでは、重心のまわりでの慣性モーメントテンソルとなる。(b) で、平行移動の公式 (3.7) を用いて目的の回転中心に移動した慣性モーメントテンソルを求める。(c) で、2 つの慣性モーメントを足し合わせて目的の慣性モーメントテンソルとなる。

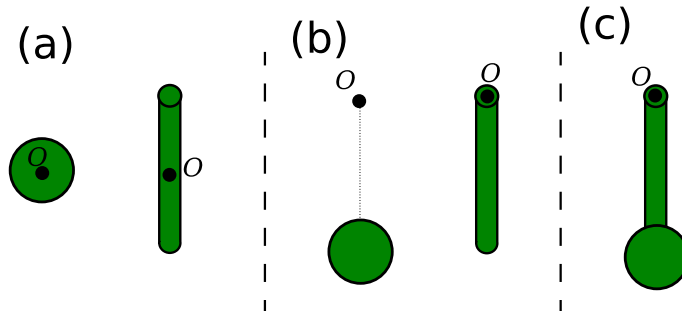


図 4.1: 慣性モーメントテンソルの評価。(a) それぞれの重心のまわりで慣性モーメントテンソルを計算。(b) 平行移動の定理で平行移動した後のテンソルを評価。(c) 平行移動したテンソルを足し合わせる。

式 (3.4) で、慣性モーメントテンソルの逆行列を計算する必要がある。ただし、たとえば、大きさのない質点からなる振り子などでは、固有値がゼロになる場合があり、逆行列が計算できない。慣性モーメントテンソルをスペクトル分解して、

$$I = \sum_{i=1,2,3} \lambda_i \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i \quad (4.1)$$

と出来る。ここで、 $\lambda_i$  は、固有値で、 $\mathbf{n}_i$  そのときの単位固有ベクトルが

$n_i$  である。逆行列の計算は、

$$I^{-1} = \sum_{\lambda_i \neq 0} \frac{1}{\lambda_i} n_i n_i \quad (4.2)$$

と固有値がゼロの場合を除いて計算する。

## 4.2 時間積分

時間  $t$  の剛体の向きから、時間  $t + \Delta t$  の剛体の向きを計算する。

### 4.2.1 オイラー法

式 (3.1) を差分で

$$L(t + \Delta t) = L(t) + T(t)\Delta t \quad (4.3)$$

と計算する。式 (3.4) から、角速度  $\omega(t)$  を計算する。式 (3.5) から、

$$u_i(t + \Delta t) = u_i(t) + \omega(t) \times u_i(t)\Delta t \quad (4.4)$$

となる。このように時間発展を計算することで、剛体の向き  $u_i$  を計算できる。

### 4.2.2 4 次のルンゲクッタ法

先のオイラー法では、十分な計算精度を確保するために、 $\Delta t$  の値を小さくする必要がある。そのため、ここでは、4 次のルンゲクッタ法で計算する方法を述べる。 $t^1 = t$  として、

$$T^1 = T(t^1), \quad \omega_1 = \omega(t^1), \quad u_i^1 = u_i(t^1) \quad (4.5)$$

とする。次に

$$\Delta L^1 = T^1 \Delta t, \quad \Delta u_i^1 = (\omega^1 \times u_i^1) \Delta t \quad (4.6)$$

$$L^2 = L^1 + \frac{1}{2} \Delta L^1, \quad u_i^2 = u_i^1 + \frac{1}{2} \Delta u_i^1 \quad (4.7)$$

$$\omega^2 = \sum_{i,j=1,2,3} (I^{-1})_{ij} L^2 \cdot u_i^2 u_j^2 \quad (4.8)$$

と計算する。これらから、 $t^2 = t^1 + \Delta t/2$  のトルク  $T^2$  を計算する。同様に

$$\Delta L^2 = T^2 \Delta t, \quad \Delta u_i^2 = (\omega^2 \times u_i^2) \Delta t \quad (4.9)$$

$$\mathbf{L}^3 = \mathbf{L}^1 + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{L}^2, \quad \mathbf{u}_i^3 = \mathbf{u}_i^1 + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{u}_i^2 \quad (4.10)$$

$$\boldsymbol{\omega}^3 = \sum_{i,j=1,2,3} (I^{-1})_{ij} \mathbf{L}^3 \cdot \mathbf{u}_i^3 \mathbf{u}_j^3 \quad (4.11)$$

と計算する。また、 $t^3 = t^1 + \Delta t/2$  として、トルク  $T^3$  を計算する。さらに、

$$\Delta\mathbf{L}^3 = \mathbf{T}^3\Delta t, \quad \Delta\mathbf{u}_i^3 = (\boldsymbol{\omega}^3 \times \mathbf{u}_i^3)\Delta t \quad (4.12)$$

$$\mathbf{L}^4 = \mathbf{L}^1 + \Delta\mathbf{L}^3, \quad \mathbf{u}_i^4 = \mathbf{u}_i^1 + \Delta\mathbf{u}_i^3 \quad (4.13)$$

$$\boldsymbol{\omega}^4 = \sum_{i,j=1,2,3} (I^{-1})_{ij} \mathbf{L}^4 \cdot \mathbf{u}_i^4 \mathbf{u}_j^4 \quad (4.14)$$

これから、やはりトルク  $T^4$  を計算する。

$$\Delta\mathbf{L}^4 = \mathbf{T}^4\Delta t, \quad \Delta\mathbf{u}_i^4 = (\boldsymbol{\omega}^4 \times \mathbf{u}_i^4)\Delta t \quad (4.15)$$

これらから、

$$\mathbf{L}(t + \Delta t) = \mathbf{L}^1 + \frac{1}{6}(\Delta\mathbf{L}^1 + 2\Delta\mathbf{L}^2 + 2\Delta\mathbf{L}^3 + \Delta\mathbf{L}^4) \quad (4.16)$$

$$\mathbf{u}_i(t + \Delta t) = \mathbf{u}_i^1 + \frac{1}{6}(\Delta\mathbf{u}_i^1 + 2\Delta\mathbf{u}_i^2 + 2\Delta\mathbf{u}_i^3 + \Delta\mathbf{u}_i^4) \quad (4.17)$$

$$\boldsymbol{\omega}(t + \Delta t) = \sum_{i,j=1,2,3} (I^{-1})_{ij} \mathbf{L}(t + \Delta t) \cdot \mathbf{u}_i(t + \Delta t) \mathbf{u}_j(t + \Delta t) \quad (4.18)$$

と計算する。



## 第5章 操作例



## 第6章 UDF 説明





## 第7章 action 説明



## 第8章 Python説明