短时傅里叶变换 作业

计54　骆轩源 2015011340*

1　题目综述

信号：

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi 5t) + 2\sin(2\pi 15t) & 0s \le t < 5s \\ \cos(2\pi 20t) & 5s \le t < 10s \\ \cos(2\pi 30t) + 0.6\sin(2\pi 45t) & 10s \le t < 15s \\ \sin(2\pi 50t) & 15s \le t < 20s \end{cases} \tag{1}$$

$$STFT_T^W(t', f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w^*(t - t') \exp(-2j\pi f t) dt \tag{2}$$

其中:

$$w(t) = \exp \frac{-t^2}{2\delta^2} \tag{3}$$

2　对x(t)进行FT

使用matlab的fourier函数即可，得到的FT之后的$\|F(w)\|$关于角频率w的图像为如Fig1 所示：

3　对x(t)进行STFT

使用matlab的spectrogram函数，先对输入信号进行离散采样，采样频率为$1000HZ > 100HZ$，故满足奈奎斯特抽样定理，共选择三组参数$\delta = 2$(见Fig2，Fig3)，$\delta = 5$(见Fig4，Fig5)和$\delta = 20$(见Fig6，Fig7)，分别作图。:

*luoxy15@mails.tsinghua.edu.cn

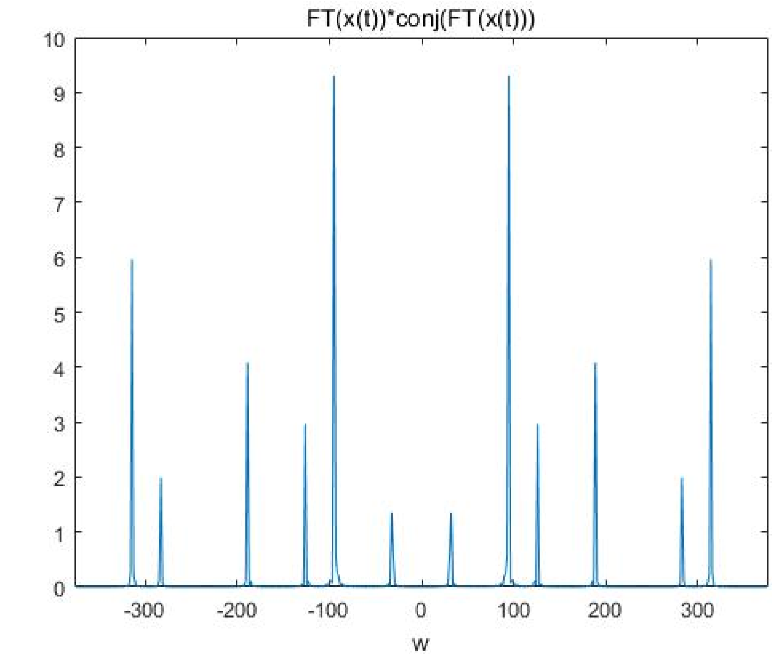

Figure 1: FT(x(t))图像

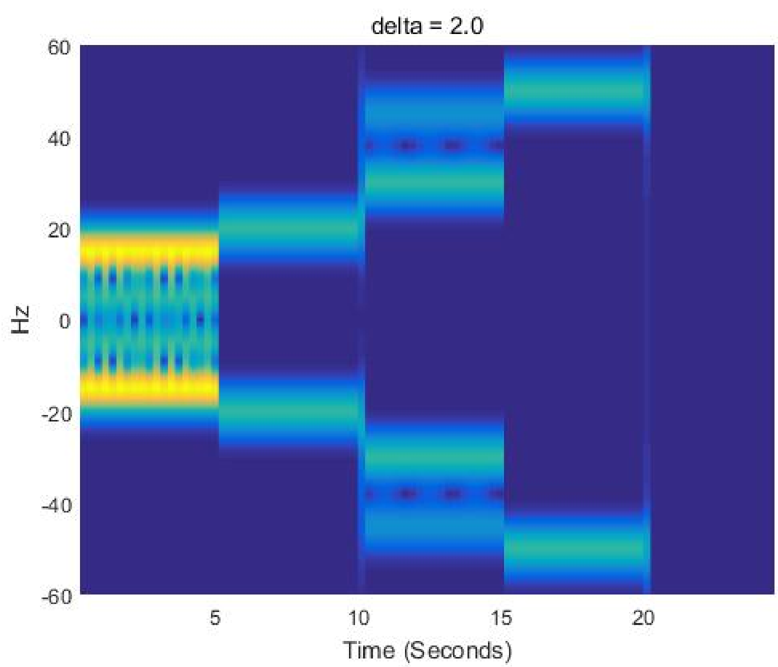

Figure 2: STFT(x(t))图像($\delta = 2$)

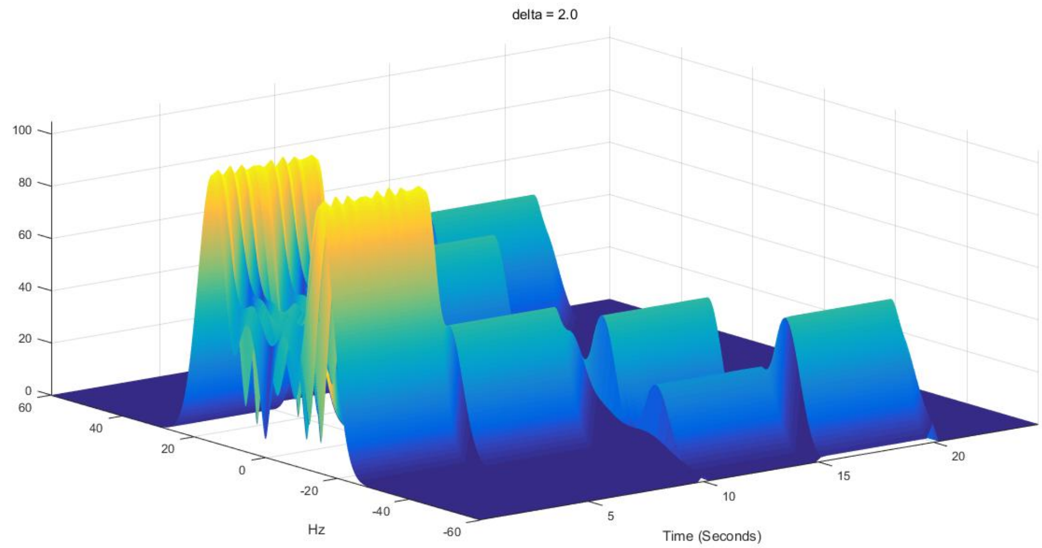

Figure 3: STFT(x(t))3d图像($\delta = 2$)

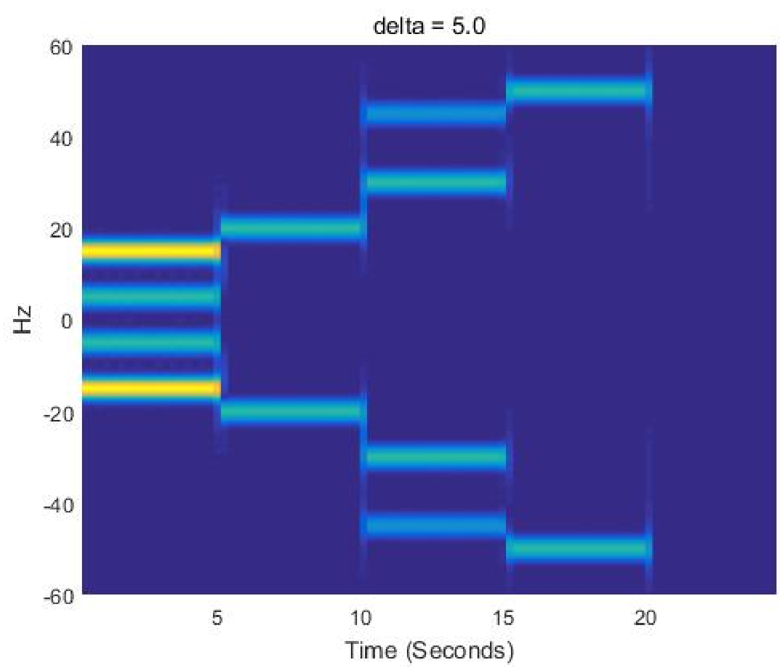

Figure 4: STFT(x(t))图像($\delta = 5$)

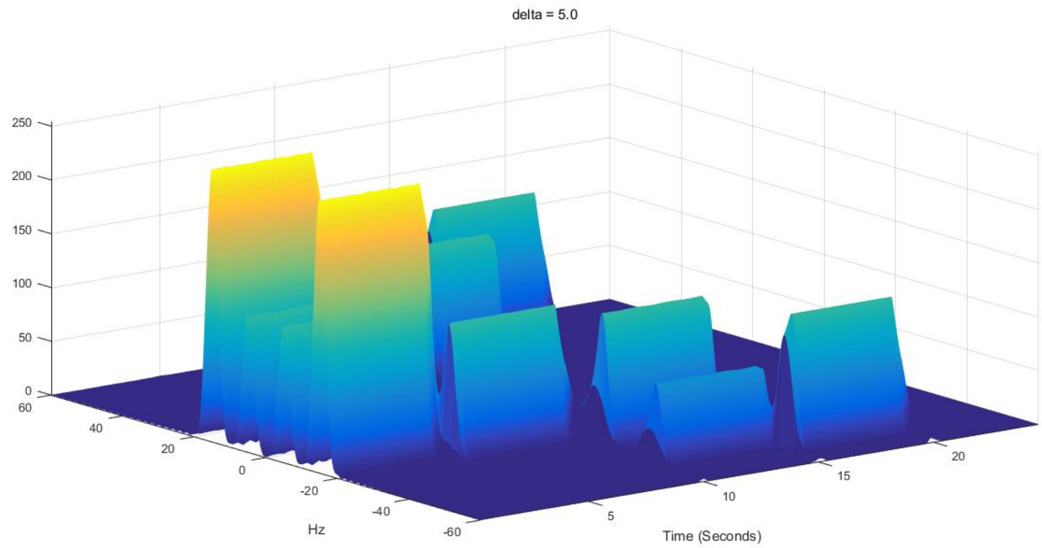

Figure 5: STFT(x(t))3d图像($\delta = 5$)

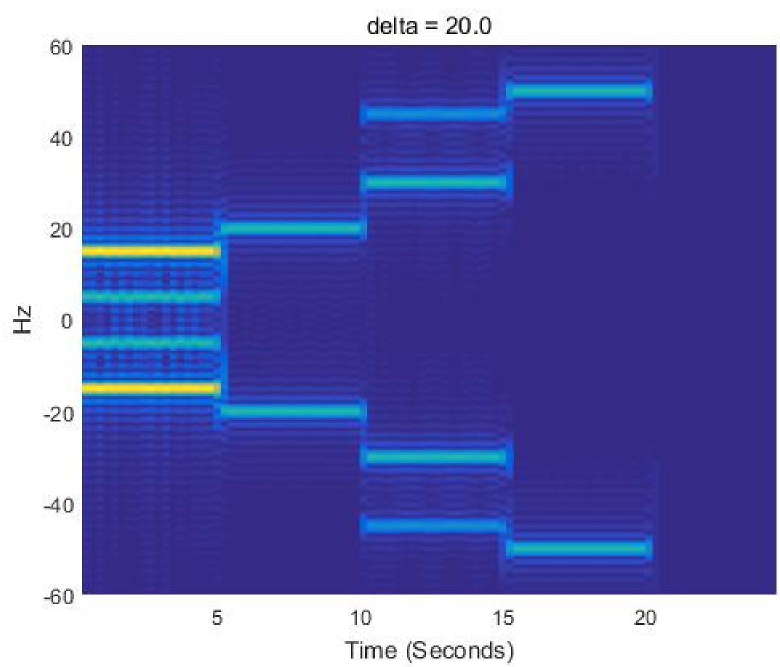

Figure 6: STFT(x(t))图像($\delta = 20$)

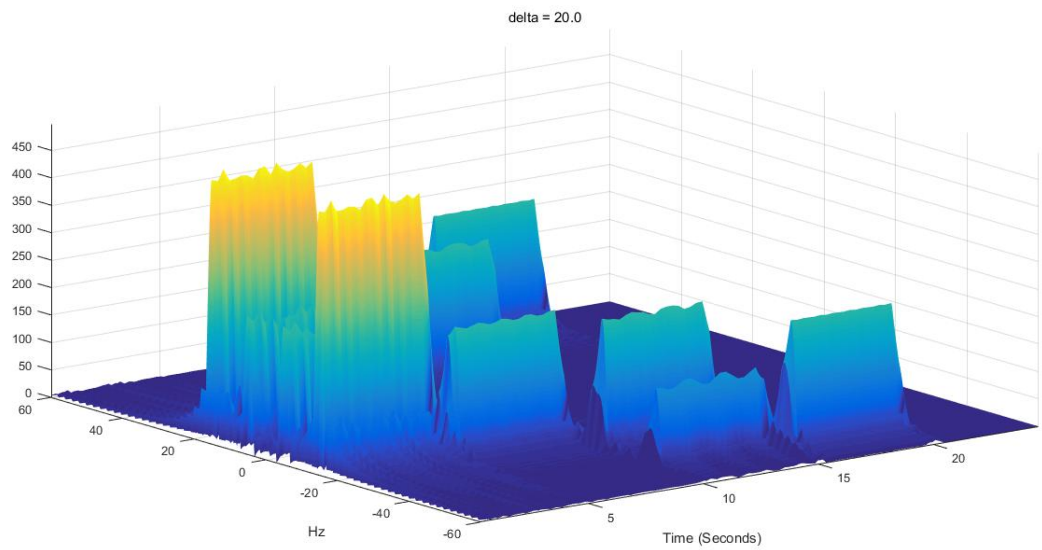

Figure 7: STFT(x(t))3d图像($\delta = 20$)

4 在实数区间FT

将积分区间变成0.1s 到1.0s，也即将原函数将原函数乘以一个只在0.1 到1.0取1的窗函数，再做FT(结果如Fig8所示)：

相当于截取原信号0.1s 到1.0s，进行了傅里叶变换，相比于原频谱，只剩下两条线，对应$f = 5$和$f = 15$。这样的操作相当于在一个小时间片上进行傅里叶变换，就可以得到在这个时间片上频谱。

5 以Gabor函数替代

这其实需要一些技巧，因为直接使用matlab，求原积分是求不出来的。所以需

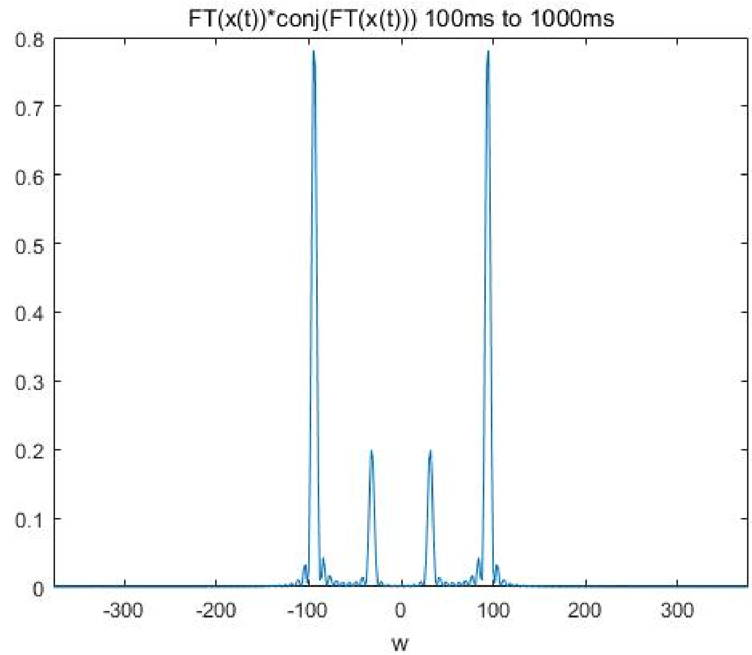

Figure 8: FT(x(t))图像(100ms 到1000ms)

要枚举公式中的m，然后就只有一个自变量f，式子如下：

$$
\begin{aligned}
G(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-0.5\frac{(t-m)^2}{s^2}} \cos(2\pi f(t-m)) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t+m) e^{-0.5\frac{t^2}{s^2}} \cos(2\pi f(t)) dt \\
&= \frac{1}{2}(\mathscr{F}\left(x(t+m)e^{-0.5\frac{t^2}{s^2}}\right) + \mathscr{F}^*\left(x(t+m)e^{-0.5\frac{t^2}{s^2}}\right))
\end{aligned} \tag{4}
$$

在[0,20]均匀取200个m，每个m做一次FFT，每次FFT在频谱上取2500个点，即可绘制图像。一共取了3组参数，$s = 0.15$(Fig9,Fig12)，$s = 0.2$(Fig10,Fig13)和$s = 2$(Fig11,Fig14)。与STFT相比，二者都可以准确地描述频率随时间变化的关系，从3d图上可以看出，Gabor变换的图像更加平滑，抖动更少，这一点也可以从俯视图看出。

STFT变换的俯视图有一个规律，就是当频率线条“变细”的时候，周围的条纹就会多(其他时间上的频域分量的干扰)，也即想要精确描述频率的时候，时间就很难测准。而Gabor变换就没有这个问题。

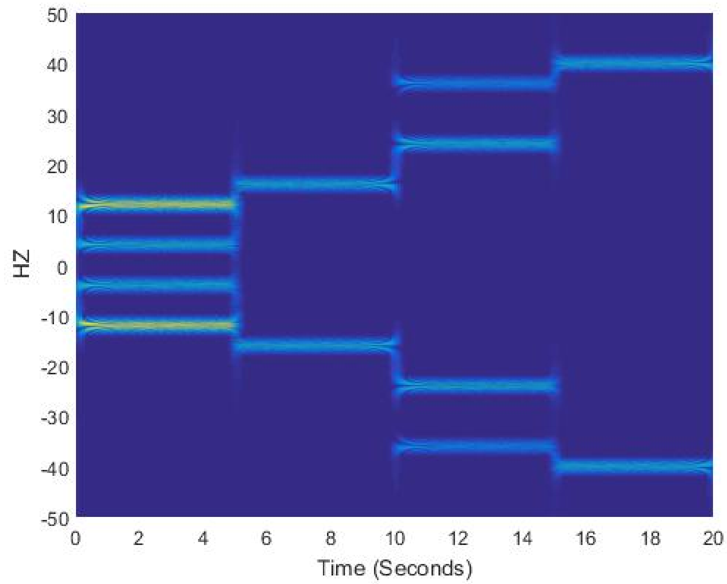

Figure 9: Gabor变换图像($s = 0.15$)

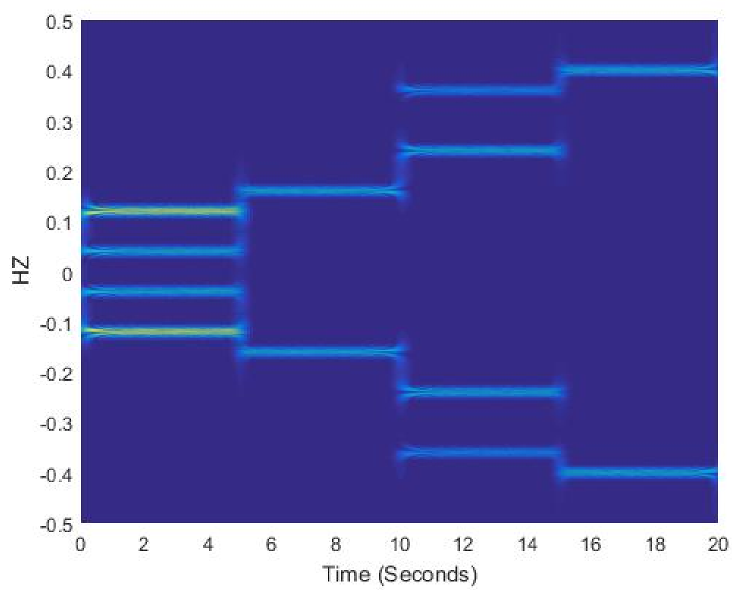

Figure 10: Gabor变换图像($s = 0.2$)

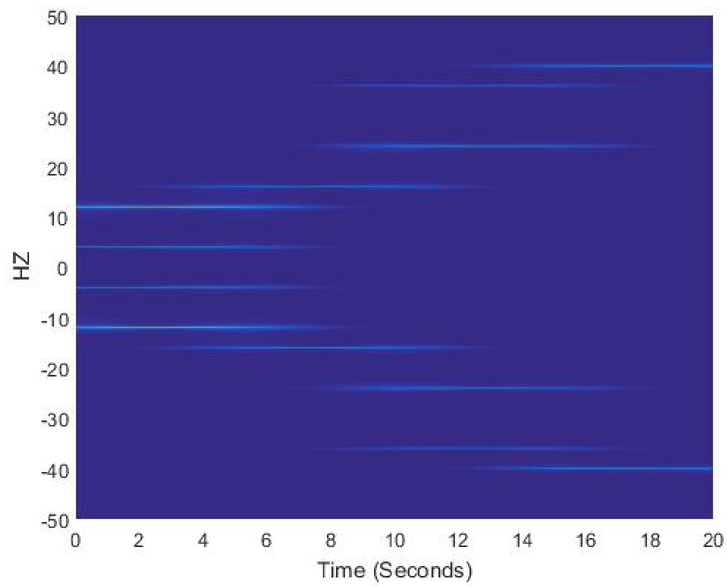

Figure 11: Gabor变换图像($s = 2$)

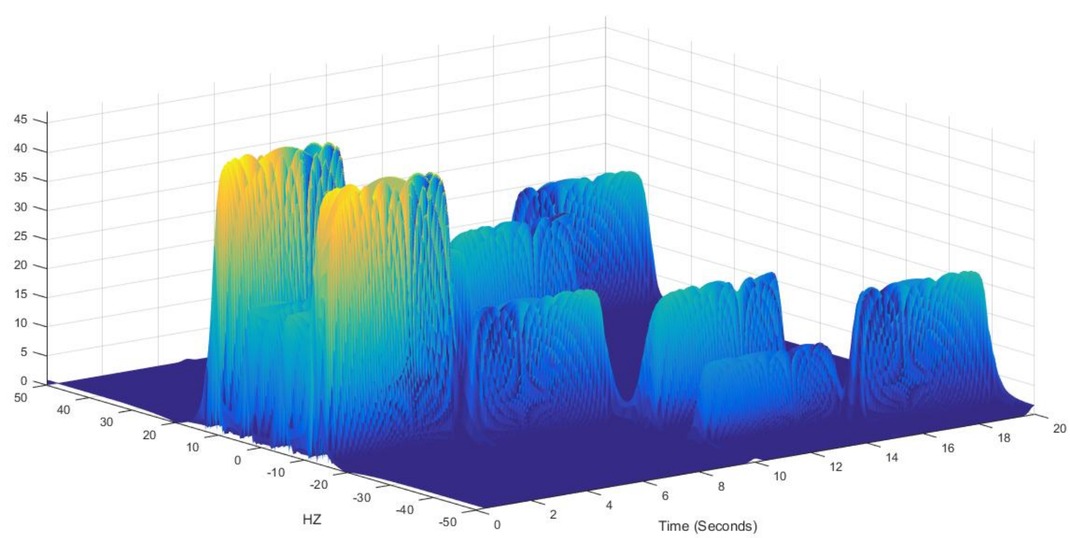

Figure 12: Gabor变换3d图像($s = 0.15$)

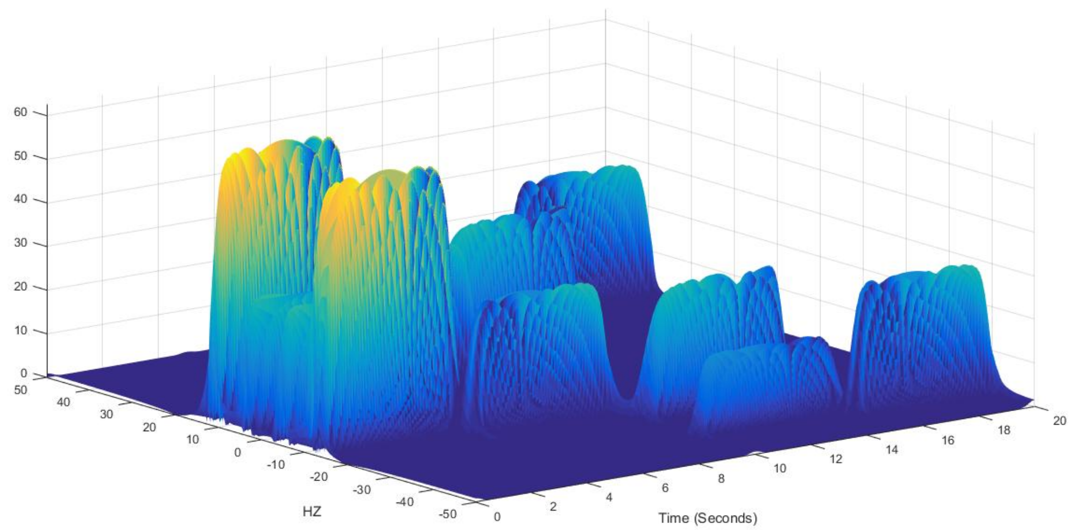

Figure 13: Gabor变换3d图像($s = 0.2$)

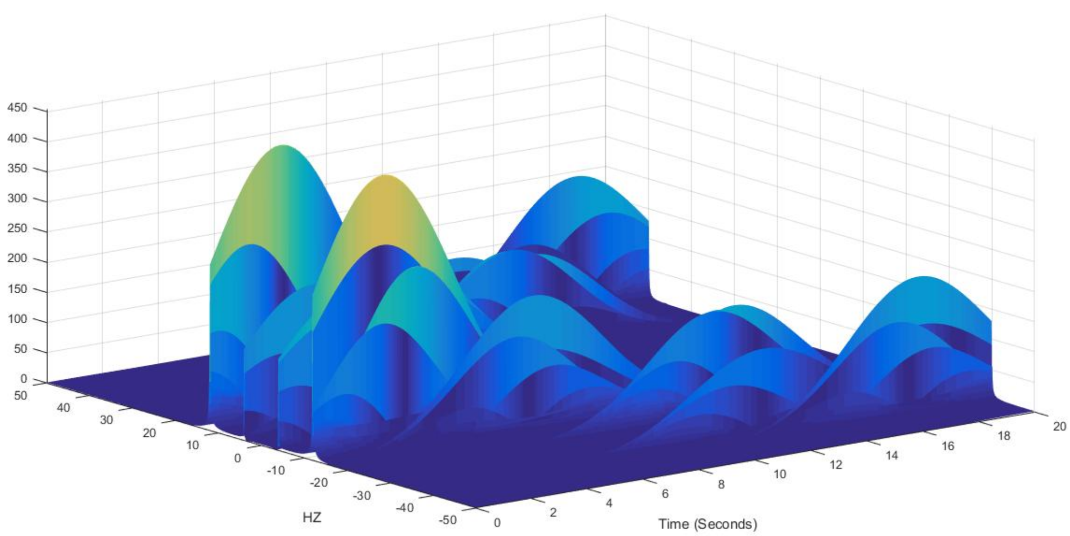

Figure 14: Gabor变换3d图像($s = 2$)