

短时傅里叶变换 作业

计54 骆轩源 2015011340*

1 题目综述

信号:

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi 5t) + 2\sin(2\pi 15t) & 0s \leq t < 5s \\ \cos(2\pi 20t) & 5s \leq t < 10s \\ \cos(2\pi 30t) + 0.6\sin(2\pi 45t) & 10s \leq t < 15s \\ \sin(2\pi 50t) & 15s \leq t < 20s \end{cases} \quad (1)$$

$$STFT_T^W(t', f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w^*(t - t') \exp(-2j\pi ft) dt \quad (2)$$

其中:

$$w(t) = \exp \frac{-t^2}{2\delta^2} \quad (3)$$

2 对x(t)进行FT

使用matlab的fourier函数即可，得到的FT之后的 $\|F(w)\|$ 关于角频率 w 的图像为如Fig1 所示:

3 对x(t)进行STFT

使用matlab的spectrogram函数，先对输入信号进行离散采样，采样频率为 $1000HZ > 100HZ$ ，故满足奈奎斯特抽样定理，共选择三组参数 $\delta = 0.01$ (见Fig2, Fig3)， $\delta = 0.1$ (见Fig4, Fig5)和 $\delta = 1$ (见Fig6, Fig7)，分别作图。:

*luoxy15@mails.tsinghua.edu.cn

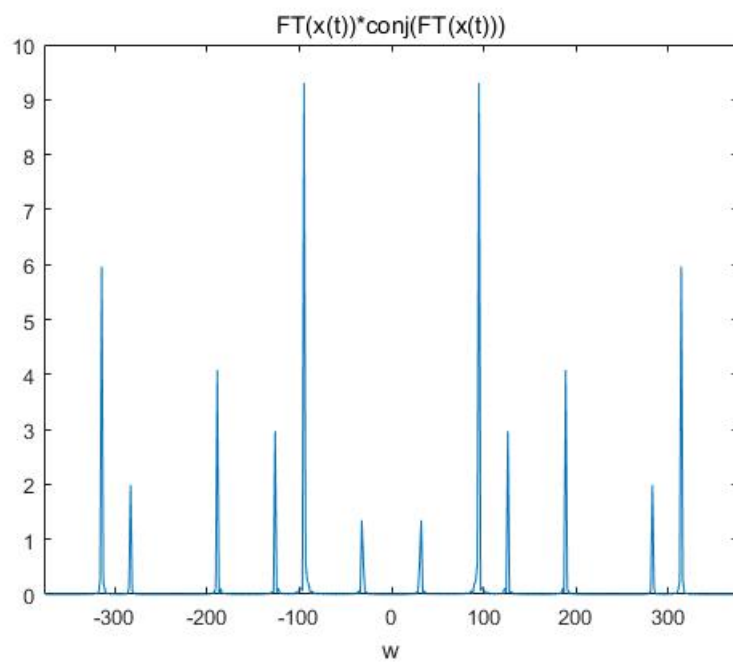


Figure 1: $FT(x(t))$ 图像

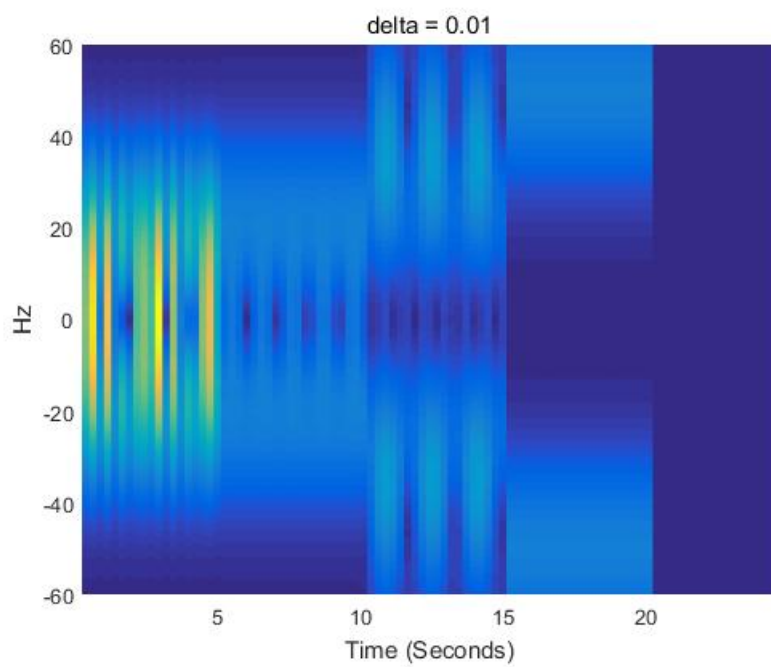


Figure 2: $STFT(x(t))$ 图像($\delta = 0.01$)

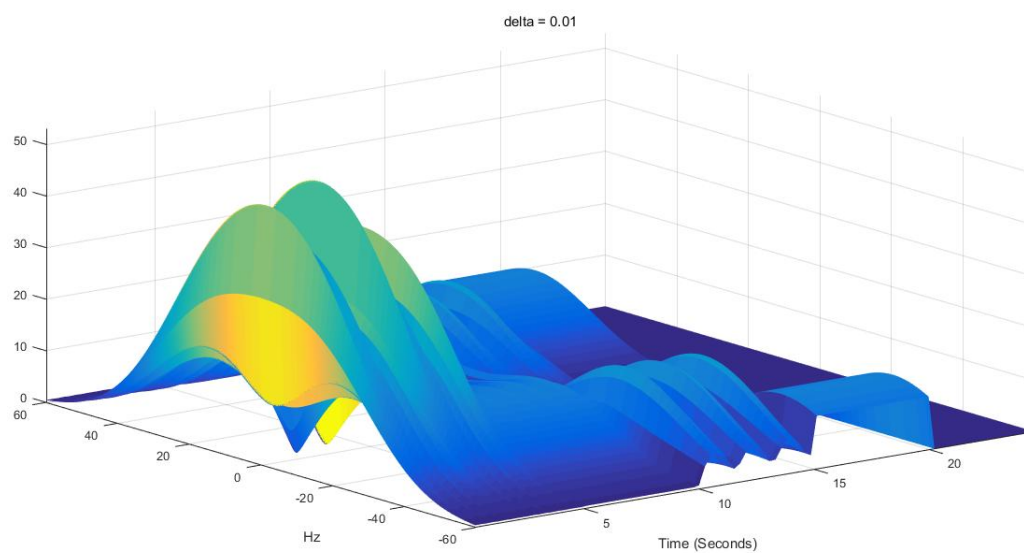


Figure 3: STFT($x(t)$)3d图像($\delta = 0.01$)

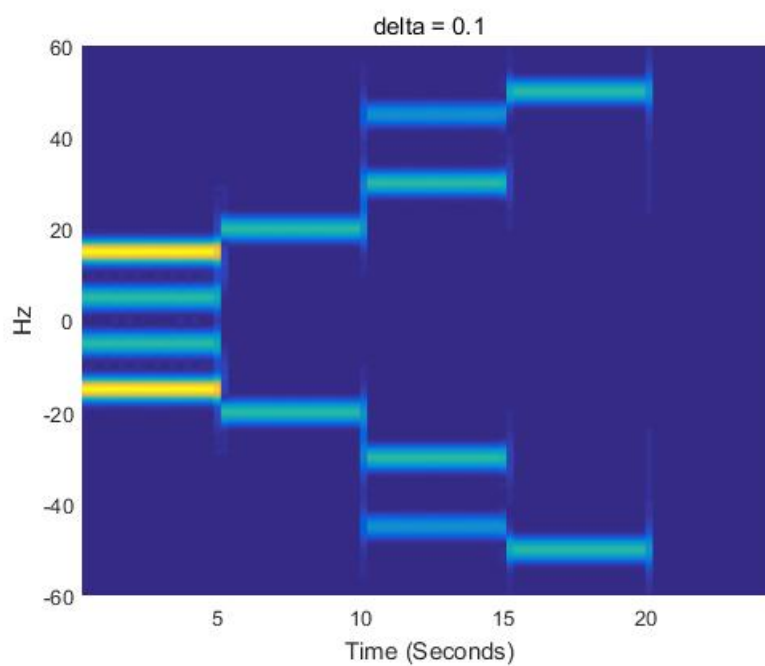


Figure 4: STFT($x(t)$)图像($\delta = 0.1$)

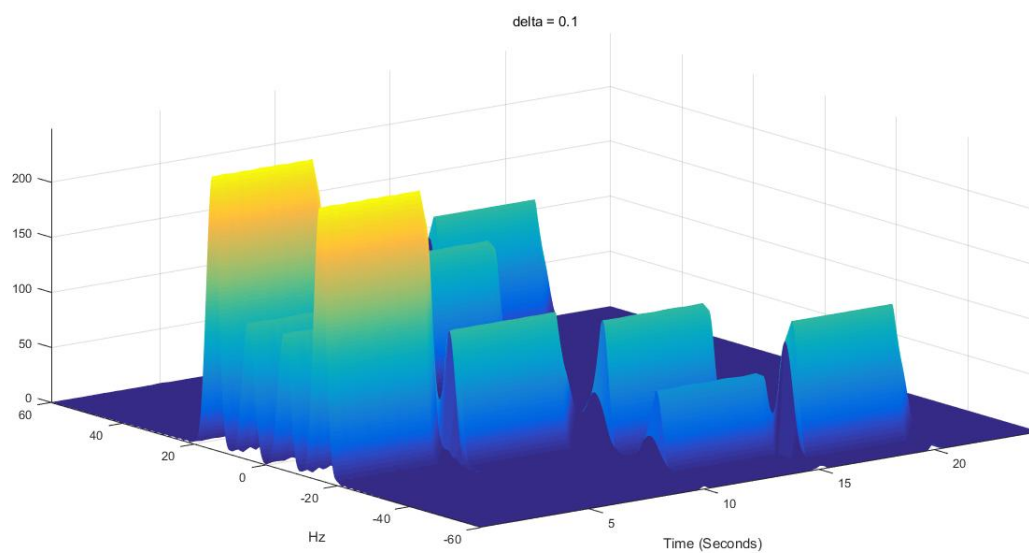


Figure 5: STFT($x(t)$)3d图像($\delta = 0.1$)

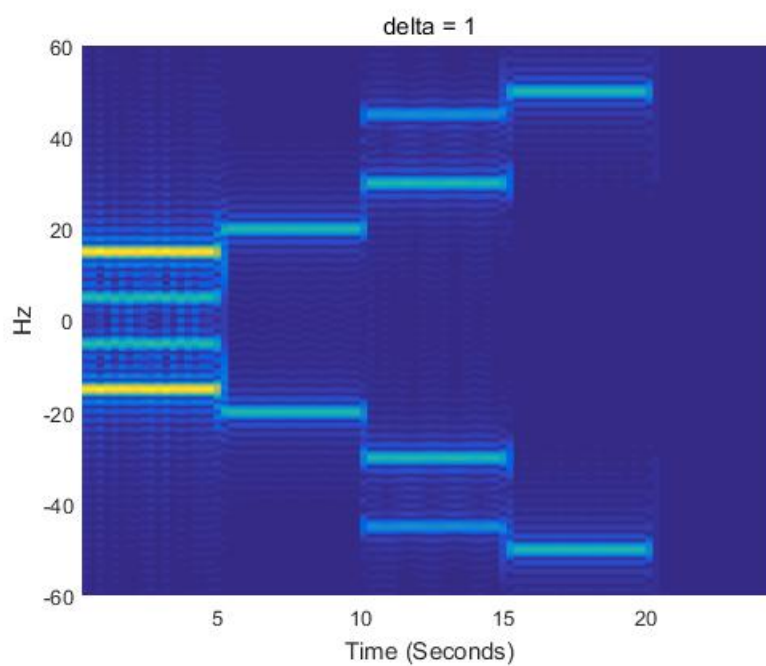
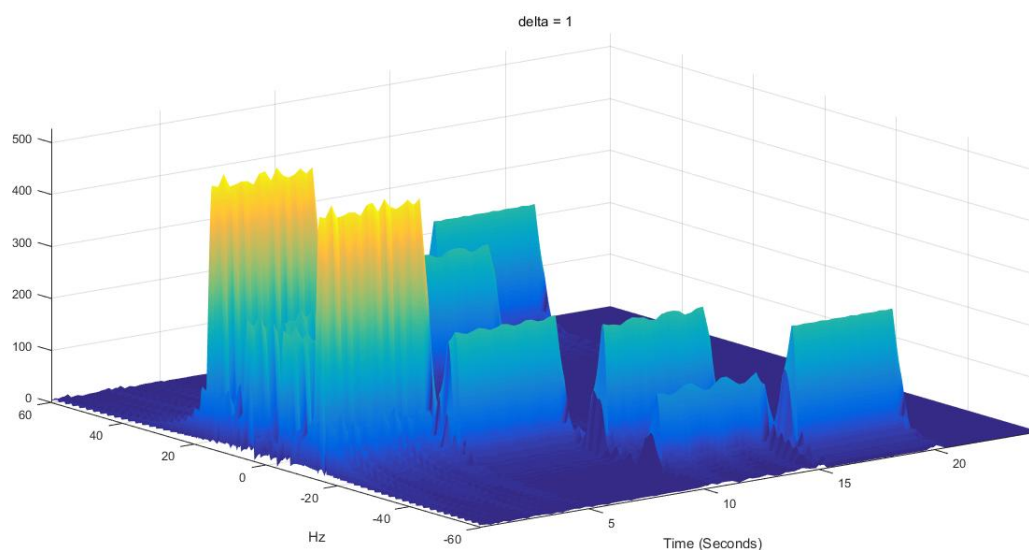


Figure 6: STFT($x(t)$)图像($\delta = 1$)

Figure 7: STFT($x(t)$)3d图像($\delta = 1$)

4 在实数区间FT

将积分区间变成0.1s 到1.0s，也即将原函数将原函数乘以一个只在0.1 到1.0取1的窗函数，再做FT(结果如图8所示)：

相当于截取原信号0.1s 到1.0s，进行了傅里叶变换，相比于原频谱，只剩下两条线，对应 $f = 5$ 和 $f = 15$ 。这样的操作相当于在一个小时间片上进行傅里叶变换，就可以得到在这个时间片上频谱。

5 以Gabor函数替代

这其实需要一些技巧，因为直接使用matlab，求原积分是求不出来的。所以需要

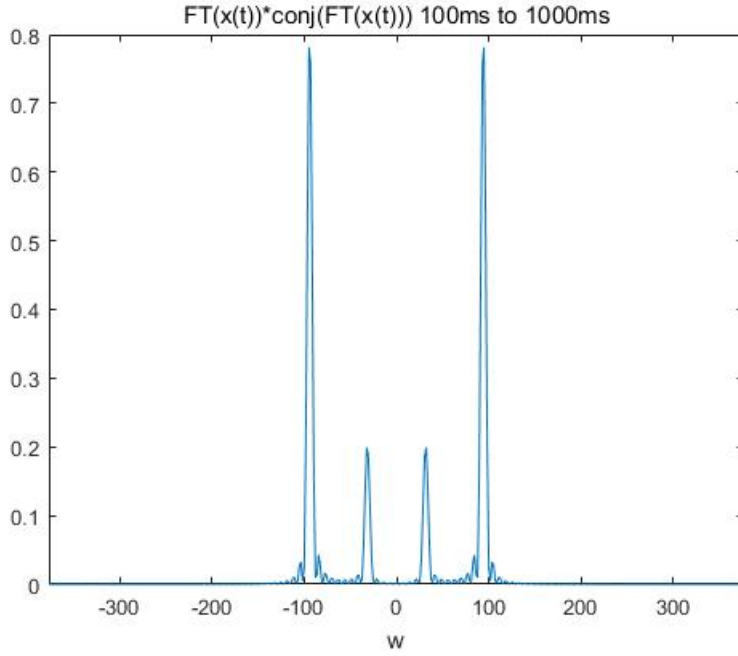


Figure 8: $FT(x(t))$ 图像(100ms 到1000ms)

要枚举公式中的 m ，然后就只有一个自变量 f ，式子如下：

$$\begin{aligned}
 G(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-0.5 \frac{(t-m)^2}{s^2}} \cos(2\pi f(t-m)) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t+m) e^{-0.5 \frac{t^2}{s^2}} \cos(2\pi f(t)) dt \\
 &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{F} \left(x(t+m) e^{-0.5 \frac{t^2}{s^2}} \right) + \mathcal{F}^* \left(x(t+m) e^{-0.5 \frac{t^2}{s^2}} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{4}$$

在 $[0,20]$ 均匀取200个 m ，每个 m 做一次FFT，每次FFT在频谱上取2500个点，即可绘制图像。一共取了3组参数， $s = 0.15$ (Fig9, Fig12)， $s = 0.2$ (Fig10, Fig13)和 $s = 2$ (Fig11, Fig14)。与STFT相比，二者都可以准确地描述频率随时间变化的关系，从3d图上可以看出，Gabor变换的图像更加平滑，抖动更少，这一点也可以从俯视图看出。

STFT变换的俯视图有一个规律，就是当频率线条“变细”的时候，周围的条纹就会多(其他时间上的频域分量的干扰)，也即想要精确描述频率的时候，时间就很难测准。而Gabor变换就没有这个问题。

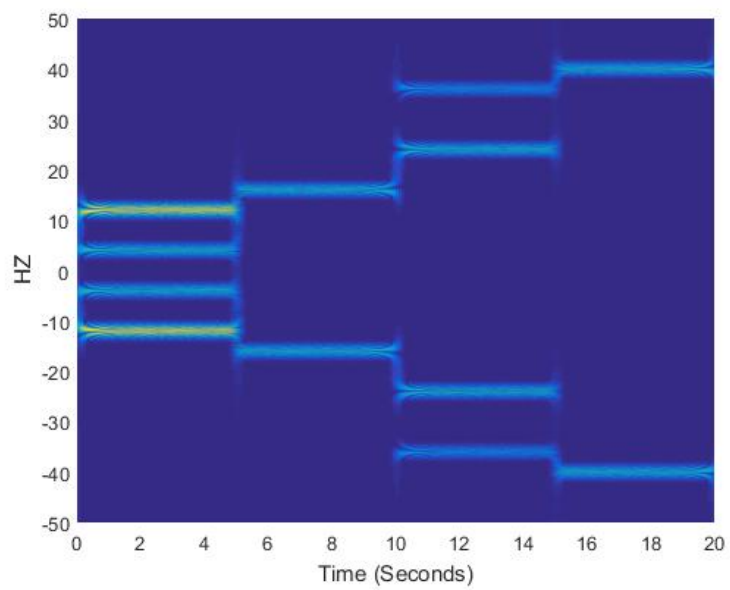


Figure 9: Gabor变换图像($s = 0.15$)

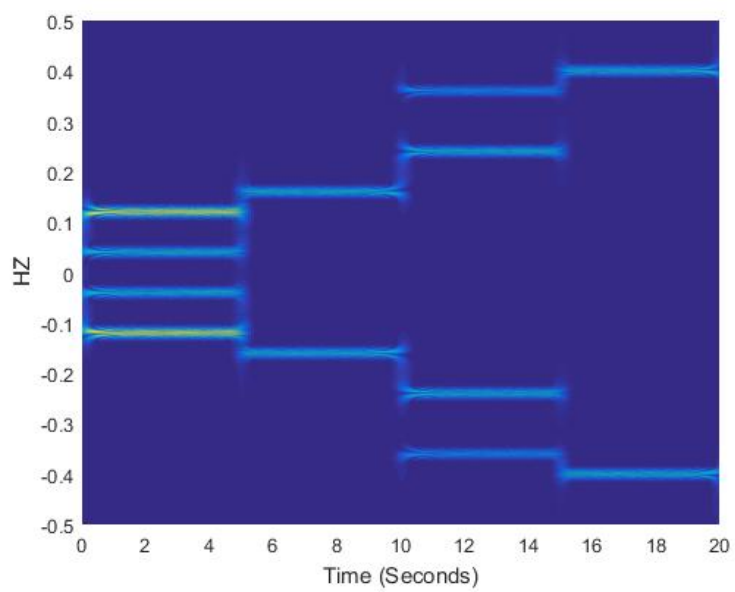


Figure 10: Gabor变换图像($s = 0.2$)

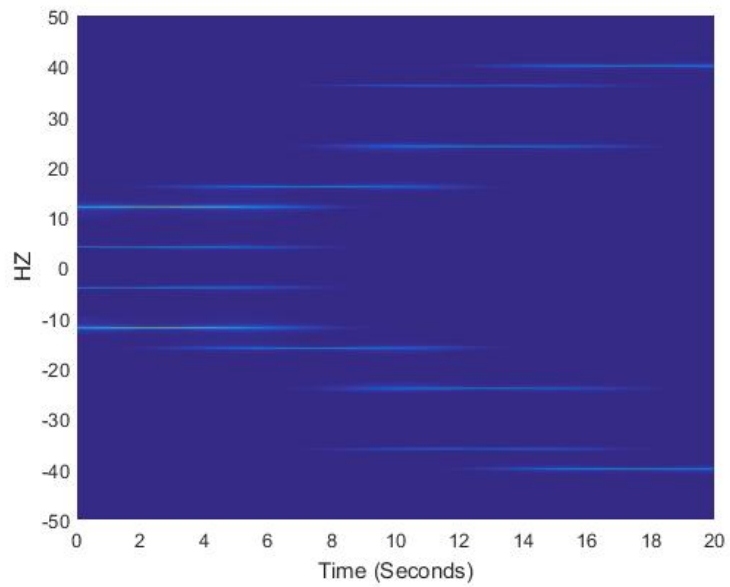


Figure 11: Gabor变换图像($s = 2$)

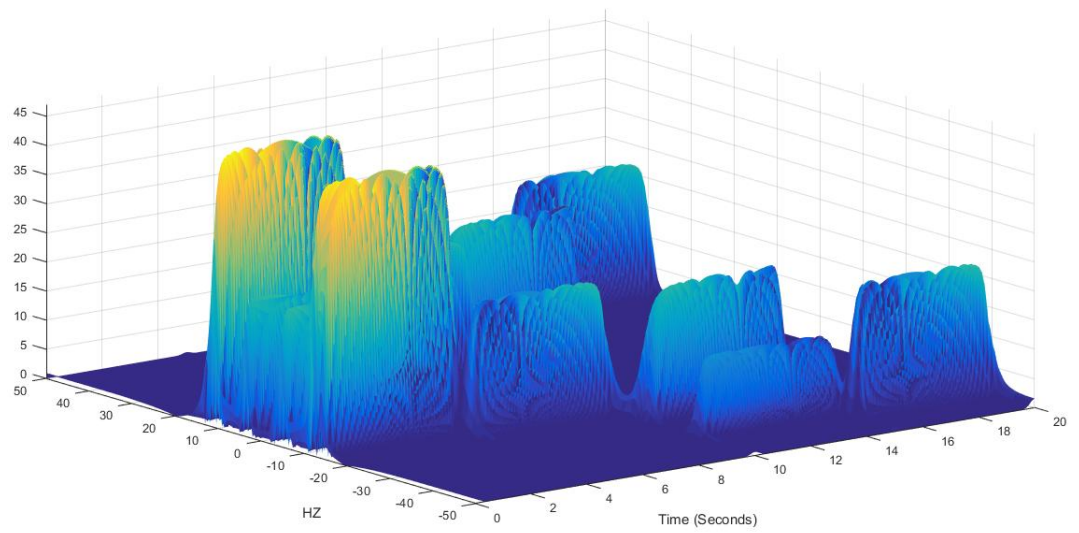


Figure 12: Gabor变换3d图像($s = 0.15$)

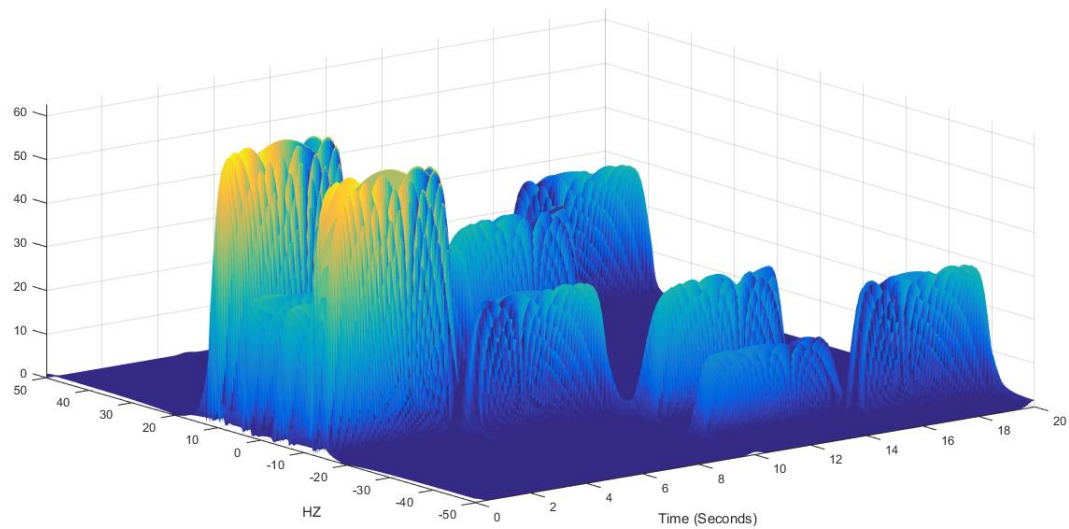


Figure 13: Gabor变换3d图像($s = 0.2$)

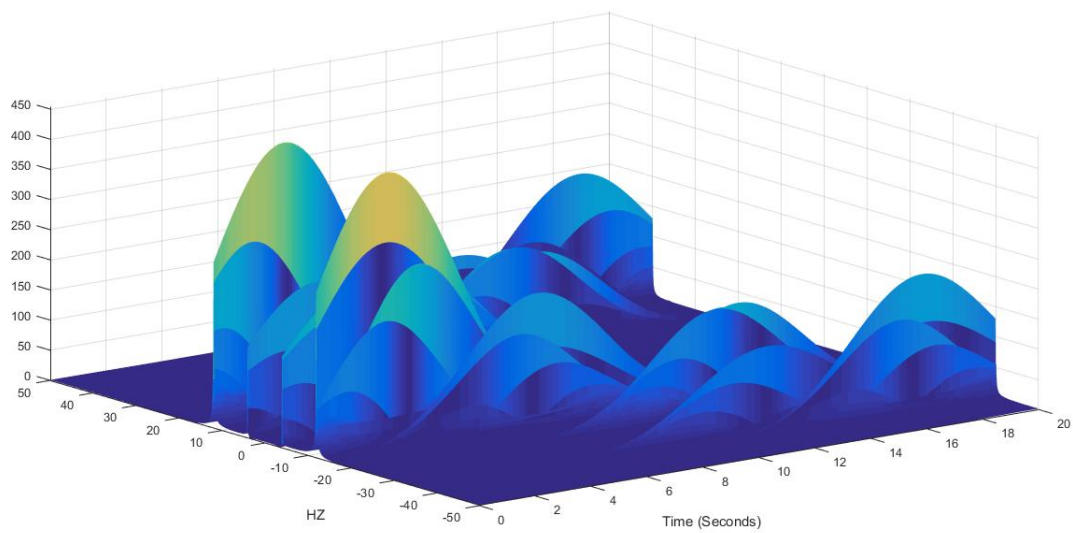


Figure 14: Gabor变换3d图像($s = 2$)