Основные тождества теории множеств.

1) коммутативность: $A \cup B = B \cup A$;

$A \cap B = B \cap A$;

2) Ассоциативность:

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,

3) Дистрибутивность:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

4) Законы де Моргана:

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

5) Законы идемпотентности:

$A \cup A = A$,

$A \cap A = A$;

6) Законы поглощения:

$A \cap (A \cup B) = A$;

$A \cup (A \cap B) = A$;

7) Законы "нуля" и "единицы".

$A \cup \emptyset = A$;

$A \cap \emptyset = \emptyset$;

$A \cup I = I$;

$A \cap I = A$;

8) закон противоречия:

$A \cap \overline{A} = \emptyset$;

9) закон исключенного третьего:

$A \cup \overline{A} = I$;

10) закон двойного дополнения:

$\overline{(\overline{A})} = A$.

Пример: 1) Доказать по определению: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

а) $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$\forall x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A \,\&\, x \in (B \cup C) \Rightarrow x \in A \,\&\, (x \in B \quad x \in C) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x \in A \,\&\, x \in B) \vee (x \in A \,\&\, x \in C) \Rightarrow (x \in A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

б) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$ – аналогично в обратную сторону

2) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) = (A \cap A) \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) =$

$= A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = A \cap (\overline{B \cup C}) = A \setminus (B \cup C)$,

Декартово произведение множеств

Опр. Декартовым произведением A и B наз-ся мн-во упорядоченных пар:

$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A, y \in B \}$

Если $|A| = m$, $|B| = n \Rightarrow |A \times B| = m \cdot n$

$\{ (a_1, b_1), (a_1, b_2), \ldots \}$

$(a_2, b_1), (a_2,$

Декартов квадрат: $A \times A = \{(x,y) \mid x, y \in A\}$. A^2; $A^3 = A \times A \times A$.

$(1,2) \neq (2,1)$.

$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ – декартова плоскость.

$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

Бинарные отношения.

(Д). Бинарное отношение τ – это подмножество $A \times B$ (на мн-вах A и B)

$A = \{1,2,3,4,5\}$, на $A \times A$ задали б.о. τ: $\underbrace{a \tau b \Leftrightarrow a - b \,\vdots\, 2}_{\text{характ-е свойство}}$.

Перечисление элементов: $\tau = \{(1,3); (1,5); (2,4); (3;1); (3;5), (1,1); (2,2); (3;3); (4;4); (5,5)\}$.

Матрица б.о.: если $|A| = m$, $|B| = n \Rightarrow$ матрица имеет размер $m \times n$

$$T = \{t_{ij}\}; \quad t_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } (a_i, b_j) \in \tau, \\ 0, \text{ если } (a_i, b_j) \notin \tau, \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \end{pmatrix}$$

Свойства бинарных отношений.

пусть $\tau \subseteq A \times A$.

1) Рефлексивность: $\forall x \in A \quad x \tau x$

2) Симметричность : $\forall x, y \in A: x\tau y \Rightarrow y \tau x$

3) Транзитивность . $\forall x, y, z \in A: x \tau y, y \tau z \Rightarrow x \tau z$.

Если б.о. рефлексивно, симметрично и транзитивно $\Rightarrow$ оно является отношением эквивалентности.