

Раскраска графа Хроматическое число.

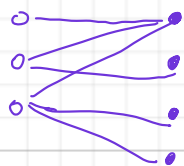
1. $G = (V, E)$. Раскраска - это отображение $\rho: V \rightarrow \underbrace{\{1, 2, \dots, k\}}$,
 $(u, v) \in E \Rightarrow \rho(u) \neq \rho(v)$.

$\chi(G)$ - хроматическое число \rightarrow мин-я мощность; $1 \leq \chi(G) \leq |V|$

1) $\chi(G) = 2$: а) $\chi(G) = 2 \Leftrightarrow$ в графе нет циклов нечётной длины.

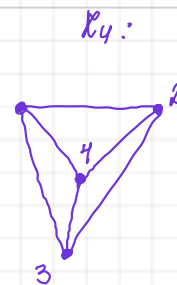


б) $\chi(G) = 2 \Leftrightarrow G$ - двудольный граф. ($|V| \geq 2$);

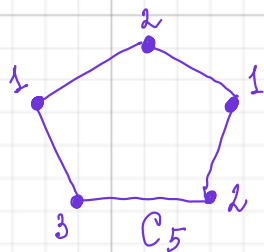


2) $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, где $\Delta(G) = \max_{v_i \in V} \{\deg v_i\}$.

Примеры. 1) $G = K_n \Rightarrow \Delta(G) = n-1, \chi(G) = n$.



2) $G = C_{2m+1}$ - простой цикл нечётной длины,



$$\Delta(G) = 2;$$
$$\chi(G) = 3;$$

3) Улучшение оценки.

I. Пусть G - связный граф, если $\exists v \in V: \deg v < \Delta(G) \Rightarrow \chi(G) \leq \Delta(G)$.

II Пусть G - связный граф; $\Delta(G) \geq 3$; $G \neq K_n \Rightarrow \chi(G) \leq \Delta(G)$.

Полная раскраска графа.

Пустой подграф (независимое мн-во; внутренне устойчивое множество) - мн-во вершин графа такое, что при добавлении хотя бы одной вершины образуется ребро.

$G = (V, E)$; G' - подграф, если $G' = (V', E')$, где

$$V' \subseteq V; \quad E' = E \cap (V' \times V');$$



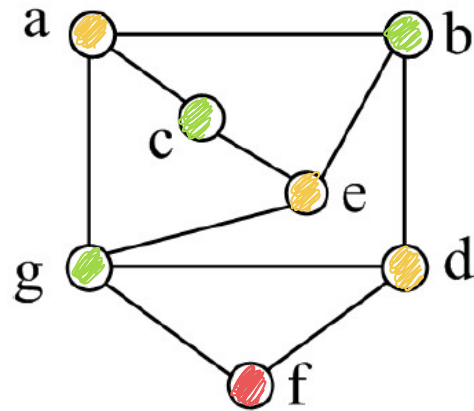
и $V' = \{a, c\}$ - пустой подграф

β_0 - число вершинной независимости \rightarrow наиб-я мощность внутренне устойчивого мн-ва

Алгоритм.

- 1) Строим мн-во пустых подграфов;
- 2) Строим таблицу; по строкам - пустые подграфы; по столбцам вершины. В клетке "1", если $v \in$ данному пустому подграфу.
"0", если $v \notin$ \nearrow
- 3) Строим покрытие таблицей (столбцов строками), которое покрытие определит раскраску графа,

матрица-связности $\chi(G)$



Система непротиворечива: $\{a, e, d\};$

$\{a, e, f\};$

$\{b, c, f\};$

$\{b, e, g\};$

$\{c, d\};$

$$\Delta(G) = 4;$$

$$\Rightarrow 3 \leq \chi(G) \leq 4,$$

	a	b	c	d	e	f	g	
$\rightarrow \{a, e, d\}$	1			1	1			m
$\{a, e, f\}$	1				1			n
$\rightarrow \{b, c, f\}$		1	1			1		p
$\{b, e, g\}$		1	1					s
$\{c, d\}$			1	1				t

$$(m \vee n)(\underline{p \vee s})(\underline{p \vee s \vee t})(m \vee t)(n \vee p)s$$

$$(m \vee n)(m \vee t)(n \vee p)s = mns \vee mps \vee \cancel{mts} \vee \cancel{mfs} \vee \cancel{nts} \vee \cancel{nps} \vee \cancel{mfs} \vee \cancel{nts} \vee \cancel{nps} = mns \vee mps \vee nts,$$

