Теория графов.

$G = \langle V, E \rangle$

$V \neq \varnothing$, V - конечное;

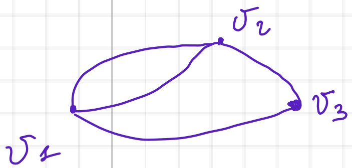
$E \subseteq V \times V$;

D. v_i и v_j - смежные, если $\exists\ (v_i, v_j) \in E$.

D. Ребро e_k инцидентно $v_i \Leftrightarrow e_k = (v_i, v_j)$, $(\subseteq V \times E)$

D. Граф с петлями - псевдограф.

D. Граф с кратными рёбрами - мультиграф $\left\{ \begin{array}{l} E \text{ - не явл-ся множеством;} \\ E \text{ - семейство} \end{array} \right\}$.



$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3)\}$.

D. Степень вершины v - число инцидентных ей рёбер

$\Rightarrow deg(v)$;

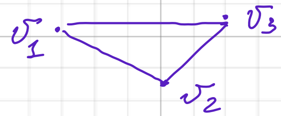
D. В случае орграфа для вершин определяем $deg_-(v)$ - исходящая степень;

$deg_+(v)$ - входящая степень,

D. Вершина v - изолированная, $deg(v) = 0$,

D. Вершина v - висячая, если $deg(v) = 1$

Лемма "О рукопожатиях": $\sum\limits_{v_i \in V} \deg(v_i) = 2|E|.$

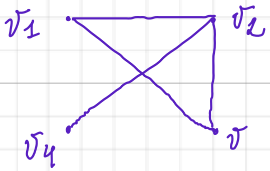


Следствие. В любом графе число вершин с нечётной степенью чётно.

Способы задания графов.

1) **Матрица смежности**: пусть $|V| = n \Rightarrow A_{n\times n}$,

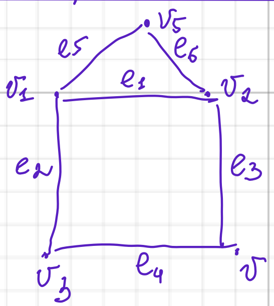
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } v_i \text{ и } v_j \text{ – смежные вершины;} \\ 0, \text{ если } v_i \text{ и } v_j \text{ – несмежные вершины;} \end{cases}$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

число "1" $= \sum\limits_i \deg(v_i) = 2|E|$;

2) **Матрица инцидентности**: $|V| = n, \ |E| = m \Rightarrow B_{n\times m}$,



$$B_{5\times 6} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix} \end{array};$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-я вершина инцид-на } j\text{-му ребру} \\ 0, \text{ else} \end{cases}$$

В случае ориентированного графа:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-я вершина – конец } j\text{-й дуги;} \\ -1, \text{ если } i\text{-я вершина – начало } j\text{-й дуги;} \\ 0, \text{ else.} \end{cases}$$

1. $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$; $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$,

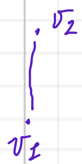
взаимно-однозначное соотв-е

G_1 изоморфен G_2 ($G_1 \cong G_2$) $\Leftrightarrow$ сущ-ет биекция $\varphi : V_1 \to V_2$:

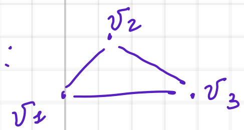
$$(v_i, v_j) \in E_1 \Leftrightarrow (\varphi(v_i), \varphi(v_j)) \in E_2.$$

Полный граф. K_n – граф с n вершинами; $\forall i \ \deg(v_i) = n-1$

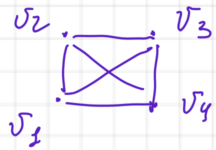
K_2 :



K_3 :

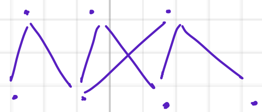


K_4 :



Если $K_n \Rightarrow |E| = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ (по лемме "о рукопожатиях")

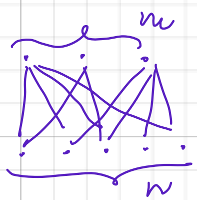
Двудольный граф:



$V = V_1 \cup V_2$;

$e \in E \Leftrightarrow e = (v_i, v_j)$, где $v_i \in V_1$;
$v_j \in V_2$;

Полный двудольный граф: $K_{m,n}$



$\Rightarrow |E| = m \cdot n.$