

1 B-Spline

B-Spline – функция вида

$$f(x) = \sum_j c_j B_{j,k}(x) \quad (1)$$

где $c_j \in V$ – коэффициенты сплайна (контрольные точки), а $B_{j,k} : K \rightarrow K$ – полиномы порядка k от x , определяемые рекуррентным соотношением

$$\begin{aligned} B_{j,0} &= \begin{cases} 1 & x \in [t_j, t_{j+1}) \\ 0 & \end{cases} \\ B_{j,r} &= \frac{x - t_j}{t_{j+r} - t_j} B_{j,r-1} + \frac{t_{j+r+1} - x}{t_{j+r+1} - t_{j+1}} B_{j+1,r-1}. \end{aligned}$$

Здесь $t_j \in K$ – узлы сплайна (неубывающая последовательность чисел). Узлы обычно задаются в виде последовательности

$$t = \left(\underbrace{t_0, t_0, \dots, t_0}_{k\text{-раз}}, t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \underbrace{t_n, t_n, \dots, t_n}_{k\text{-раз}} \right) \in K^{n+1+2k},$$

а коэффициенты:

$$c = (c_{-k}, \dots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, \dots, c_n) \in V^{n+1+k}.$$

Здесь V – векторное пространство над полем K . Это может быть множество матриц заданной размерности, множество вещественных чисел и т.д. Такой подход позволяет несколько упростить алгоритм вычисления значения сплайна и зафиксировать значения производных на концах.

Для конкретного x из всей суммы ненулевые значения $B_{j,k}(x) \neq 0$ имеют только $k + 1$ функций: $B_i, B_{i-1}, \dots, B_{i-k}$ (i удовлетворяет $x \in [t_i, t_{i+1})$), поэтому для вычисления выражения (1) нет необходимости считать всю сумму, достаточно вычислить лишь частичную сумму из $k + 1$ слагаемых.

1.1 Алгоритм вычисления значения сплайна в заданной точке

1. Для данного x найдём i , который удовлетворяет

$$i : x \in [t_i, t_{i+1}),$$

или если x вне интервала $[t_0, t_{\text{end}}]$

$$\begin{aligned} i &= k \quad \text{if } x < t_0 \\ i &= n - k - 2 \quad \text{if } x > t_n. \end{aligned}$$

В силу того, что последовательность монотонная, i будет единственным. Поиск будет иметь логарифмическую от длины t сложность.

2. Выберем $B_{i,0} = 1$ (все остальные $B_{j,0} = 0$, $j \neq i$), вычислим

$$\begin{aligned} B_{i,1} &= \frac{x - t_j}{t_{j+1} - t_j} B_{i,0} = \frac{x - t_j}{t_{j+1} - t_j} \\ B_{i-1,1} &= \frac{t_{i+1} - x}{t_{i+1} - t_i} B_{i,0} = \frac{t_{i+1} - x}{t_{i+1} - t_i} \end{aligned}$$

Затем $B_{j,2}$ для $j = i - 2 \dots i$, затем $B_{j,3}$ для $j = i - 3 \dots i$ и т.д. В итоге получим следующую таблицу

$$D := \begin{pmatrix} 0 & & 0 & 0 & B_{i,0} \\ 0 & \dots & 0 & B_{i-1,1} & B_{i,1} \\ & & B_{i-2,2} & B_{i-1,2} & B_{i,2} \\ & & \ddots & & \vdots \\ B_{i-k,k} & B_{i-k+1,k} & \dots & & B_{i,k} \end{pmatrix}$$

где $B_{i-\alpha,r}$ вычисляется по формуле

$$B_{i-\alpha,r} = \frac{x - t_{i-\alpha}}{t_{i-\alpha+r} - t_{i-\alpha}} B_{i-\alpha,r-1} + \frac{t_{i-\alpha+r+1} - x}{t_{i-\alpha+r+1} - t_{i-\alpha+1}} B_{i-\alpha+1,r-1}$$

при $\alpha \in 1 \dots r - 1$ и для $\alpha \in \{0, r\}$ по формулам

$$\begin{aligned} B_{i-r,r} &= \frac{t_{i+1} - x}{t_{i+1} - t_{i-r+1}} B_{i-r+1,r-1} \\ B_{i,r} &= \frac{x - t_i}{t_{i+r} - t_i} B_{i,r-1} \end{aligned}$$

3. Последняя строка таблицы D содержит ненулевые функции $B_{j,k}(x)$.
Для нахождения значения сплайна в точке x достаточно вычислить

$$f(x) = \sum_{\beta=0}^k c_{i-k+\beta} B_{i-k+\beta}(x)$$

(всего $k+1$ слагаемых). Стоит отметить, что функция $B_{i,k}$ определяется $k+1$ узлами $t_i \dots t_{i+k}$, а функция $B_{i-k,k}$ — узлами $t_{i-k+1} \dots t_{i+1}$.
Значит, на значение функции $f(x)$ влияние оказывают узлы $t_{i-k+1} \dots t_{i+k}$ и коэффициенты $c_{i-k} \dots c_i$.

2 Вычисление производной сплайна

Первая производная сплайна

$$\frac{df(x)}{dx} = \sum_j c_j \frac{dB_{j,k}(x)}{dx} \quad (2)$$

определяется через производные базисных функций $\frac{dB_{j,k}}{dx}$, которые выражаются через базисные функции порядка $k-1$:

$$\frac{dB_{j,k}}{dx} = \frac{k}{t_{j+k} - t_j} B_{j,k-1} - \frac{k}{t_{j+k+1} - t_{j+1}} B_{j+1,k-1}.$$

Заметим, что значения функций $B_{i-k+1,k-1} \dots B_{i,k-1}$ содержатся в $k-1$ строке таблицы D . Значит, для вычисления первой производной достаточно заполнить таблицу D (по аналогии с предыдущим алгоритмом) до строки $k-1$, а строку k посчитать в соответствии с формулами

$$\frac{dB_{i-\alpha,k}}{dx} = \frac{k}{t_{i-\alpha+k} - t_{i-\alpha}} B_{i-\alpha,k-1} - \frac{k}{t_{i-\alpha+k+1} - t_{i-\alpha+1}} B_{i-\alpha+1,k-1}$$

для $\alpha \in 1 \dots k-1$ и

$$\begin{aligned} \frac{dB_{i-k,k}}{dx} &= -\frac{k}{t_{i+1} - t_{i-k+1}} B_{i-k+1,k-1} \\ \frac{dB_{i,k}}{dx} &= \frac{k}{t_{i+k} - t_i} B_{i,k-1} \end{aligned}$$

для $\alpha \in \{k, 0\}$ соответственно.

А для вычисления производной порядка d необходимо заполнить $k-d$ строк таблицы D , оставшиеся строки заполнить по правилу

$$B_{i-\alpha, r}^{(r-k+d)} = \frac{r}{t_{i-\alpha+r} - t_{i-\alpha}} B_{i-\alpha, r-1}^{(r-k+d-1)} - \frac{r}{t_{i-\alpha+r+1} - t_{i-\alpha+1}} B_{i-\alpha+1, r-1}^{(r-k+d-1)}$$

(для краткости введено обозначение $B_{j, r}^{(\sigma)} := \frac{dB_{j, r}^\sigma}{dx^\sigma}$) при $\alpha \in 1 \dots r-1$ и

$$B_{i-r, r}^{(r-k+d)} = -\frac{r}{t_{i+1} - t_{i-r+1}} B_{i-r+1, r-1}^{(r-k+d-1)}$$

$$B_{i, r}^{(r-k+d)} = \frac{r}{t_{i+r} - t_i} B_{i, r-1}^{(r-k+d-1)}$$

при $\alpha \in \{r, 0\}$ соответственно. Получим таблицу вида

$$D^d := \begin{pmatrix} 0 & & 0 & 0 & B_{i,0} \\ 0 & \dots & 0 & B_{i-1,1} & B_{i,1} \\ & & B_{i-k+d, k-d} & B_{i-k+d+1, k-d} & \dots & B_{i, k-d} \\ & \frac{dB_{i-k+d-1, k-d+1}}{dx} & \frac{dB_{i-k+d, k-d+1}}{dx} & & \dots & \frac{dB_{i, k-d+1}}{dx} \\ & & & & \vdots & \\ \frac{d^d B_{i-k, k}}{dx^d} & \frac{d^d B_{i-k+1, k}}{dx^d} & & & \dots & \frac{d^d B_{i, k}}{dx^d} \end{pmatrix}$$

Используя эту таблицу легко вычислить значение производной функции – для этого достаточно вычислить сумму

$$\frac{d^d f(x)}{dx^d} = \sum_{\beta=0}^k c_{i-k+\beta} \frac{d^d B_{i-k+\beta}(x)}{dx^d}$$

3 Алгоритм Де Бура

3.1 Значение функции

Создаём массив из $k+1$ элементов d_0, d_1, \dots, d_k , заполняя его значениями

$$d_j^0 = c_{i-k+j} \quad \text{for } j = 0..k$$

Пробегаемся по массиву справа налево, перезаписывая $d_j^0 \mapsto d_j^1$ по правилу

$$\begin{aligned}\alpha_j^r &= \frac{x - t_{i-k+j}}{t_{i+j+1-r} - t_{i-k+j}} \\ d_j^1 &= (1 - \alpha_j^1) d_{j-1}^0 + \alpha_j^1 d_j^0\end{aligned}$$

для всех $j = k..1$.

$$d_j^r = (1 - \alpha_j^r) d_{j-1}^{r-1} + \alpha_j^r d_j^{r-1}$$

3.2 Производная

4 Сплайн аппроксимация

Необходимо найти сплайн (его коэффициенты c , узлы заданы изначально), который минимизирует критерий качества

$$\begin{aligned}\Phi &= \sum_i \left[\|y_i - f(c, x_i)\|^2 + s \int_0^T \|f''(c, x)\|^2 dx \right] \\ c &= \arg \min_c \Phi(c)\end{aligned}$$

для заданного набора пар (x_i, y_i) . Рассмотрим случай $x_i, y_i \in \mathbb{R}$.

4.1 Случай $s = 0$

Применяем МНК

$$\begin{aligned}\Phi &= \sum_i \left(\sum_j c_j B_{j,k}(x_i) - y_i \right)^2 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial c_l} &= 2 \sum_i \left(\sum_j c_j B_{j,k}(x_i) - y_i \right) B_{l,k}(x_i)\end{aligned}$$

получаем СЛАУ

$$\sum_j \left[\sum_i B_{j,k}(x_i) B_{l,k}(x_i) \right] c_j = \sum_i y_i B_{l,k}(x_i)$$

в матричном виде

$$\begin{aligned} Ac &= h, \\ A_{lj} &= \sum_i B_{j,k}(x_i) B_{l,k}(x_i), \\ h_l &= \sum_i y_i B_{l,k}(x_i). \end{aligned}$$

4.2 Случай $s \neq 0$

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_i \left(\sum_j c_j B_{j,k}(x_i) - y_i \right)^2 + s \int_0^T \left(f''(c, x) \right)^2 dx \\ \frac{\partial \Phi}{\partial c_l} &= 2 \sum_i \left(\sum_j c_j B_{j,k}(x_i) - y_i \right) B_{l,k}(x_i) + 2s \sum_j \left[\int_0^T B_{l,k}''(x) B_{j,k}''(x) dx \right] c_j \end{aligned}$$

получаем СЛУ

$$\sum_j \left[\sum_i B_{j,k}(x_i) B_{l,k}(x_i) \right] c_j + s \sum_j \left[\int_0^T B_{l,k}''(x) B_{j,k}''(x) dx \right] c_j = \sum_i y_i B_{l,k}(x_i)$$