1. Постановка задачи

Дана замкнутая (периодическая) гладкая кривая $\gamma_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ с естественным папарметром s. Обозначим $\tau := \frac{d\gamma}{ds}$, $\kappa := \frac{d^2\gamma}{ds^2}$ соответственно касательный вектор и вектор кривизны. Пусть кривая имеет единичную длину, тогда условие периодичности запишется как: $\gamma_s = \gamma_{s+1}$, $\tau_s = \tau_{s+1}$, $\kappa_s = \kappa_{s+1}$ $\forall s \in \mathbb{R}$. Необходимо найти $n-1$ периодических гладких векторных полей $e_s^1, e_s^2, ..., e_s^{n-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, которые в каждой точке кривой γ_s образуют ортонормированный базис ортогонального дополнения вектора τ_s:

(1) $e_s^i = e_{s+1}^i$ $\forall s \in \mathbb{R}$;
(2) $\left\langle e_s^i | e_s^j \right\rangle = \delta_{ij} \forall s \in \mathbb{R}$, $\forall i, j \in 1..n-1$;
(3) $\left\langle \tau_s | e_s^j \right\rangle = 0$ $\forall s \in \mathbb{R}$, $\forall j \in 1..n-1$;
(4) $e_s^i \in C^1(\mathbb{R})$

2. Построение базиса

В силу того, что базисные вектора e_s^i вместе с касательным вектором τ_s образуют ортонормированный базис, матричная функция

$$R_s = \left(\tau_s, e_s^1, e_s^2, ..., e_s^{n-1}\right)$$

является кривой на группе ортогональных матриц. Кроме того, отражением вектора $e_s^{n-1} \mapsto -e_s^{n-1}$ всегда можно добиться, чтобы $\det R_s = 1$, тогда: $R_s : \mathbb{R} \to SO(n)$ – матрица поворота. В этих терминах, задача поиска базисных векторов сводится к поиску кривой R_s, удовлетворяющей критериям:

(1) R_s: $C^1(\mathbb{R}, SO(n))$;
(2) $\tau_s^T \cdot R_s = (1, 0, 0, ..., 0)$ $\forall s \in \mathbb{R}$;
(3) $R_s = R_{s+1}$ $\forall s \in \mathbb{R}$.

Утверждение 1. Решение R_s задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} R_s &= \kappa \wedge \tau \cdot R_s, \\ R_0 &\in \{R \in SO(n) \,|\, \tau_0 R = (1, 0, 0, ..., 0)\} \end{aligned}$$

(здесь $\kappa \wedge \tau = \kappa\tau^T - \tau\kappa^T$ – внешнее произведение) удовлетворяет критериям 1, 2.

Замечание 2. Для произвольной замкнутой кривой γ_s решение R_s не является периодическим: $R_1 \neq R_0$.

В случае, когда все собственные числа матрицы $R_1^T R_0$ отличны от -1, матричный логарифм $\log R_1^T R_0$ является кососиммерической вещественной матрицей[1]. Это позволяет ввести в рассмотрение матричную функцию

$$\Psi_s := \exp\left\{s \log R_1^T R_0\right\},$$

где $\exp\{\cdot\}$ – матричная экспонента. Рассмотрим кривую P_s, определённую как

$$P_s := R_s \Psi_s.$$

[1]Если матрица $R_1^T R_0$ имеет собственные числа равные -1, то функцию Ψ можно определить как $\Psi(s) := \exp\{2s \log X\}$, где X – одно из решений уравнения $XX = R_1^T R_0$, все собственные числа которого отличны от -1. Легко показать, используя блочно-диагональное разложение, что такое решение всегда существует.

Утверждение 3. Кривая P_s удовлетворяет критериям 1, 2, 3, следовательно, является решением исходной задачи.

Доказательство. Утверждения 1. Решением уравнения

$$\frac{d}{ds}R_s = \kappa \wedge \tau \cdot R_s \tag{2.1}$$

является функция $R_s = \exp\left\{\int_0^s \kappa_v \wedge \tau_v dv\right\} R_0$. Матрица R_s принадлежит множеству $SO(n)$ в силу того, что матрица $\kappa_v \wedge \tau_v$ является кососимметричной и R_0 принадлежит $SO(n)$. Уравнение (2.1) имеет первый интеграл $I(R,s) = \tau_s^T R$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\tau_s^T R_s &= \kappa_s^T R_s + \tau_s^T \frac{dR_s}{ds} \\ &= \kappa_s^T R_s + \tau_s^T \left(\kappa\tau^T - \tau\kappa^T\right) R_s \\ &= 0.\end{aligned}$$

Значит, $\tau_s^T R_s = \tau_0^T R_0 = (1,0,0,...,0)$. □

Доказательство. Утверждения 3. Для начала заметим, что матрица $R_1^T R_0$ имеет следующую структуру

$$R_1^T R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1\times n-1} \\ 0_{n-1\times 1} & X_{n-1\times n-1}\end{pmatrix}$$

в силу того, что первые столбцы матриц R_0 и R_1 совпадают (т.к. $\tau_0 = \tau_1$). Следовательно, матрица Ψ_s тоже является матрицей поворота и имеет аналогичную структуру. Значит, $P_s \in SO(n)$ т.к. является произведением матриц поворота и

$$\tau^T P_s = \tau^T R_s \Phi_s = (1,0,0,...,0).$$

Периодичность матрицы P_s доказывается непосредственными вычислениями. □