

法律声明

□ 本课件包括演示文稿、示例、代码、题库、视频和声音等内容，小象学院和主讲老师拥有完全知识产权的权利；只限于善意学习者在本课程使用，不得在课程范围外向任何第三方散播。任何其他人或机构不得盗版、复制、仿造其中的创意及内容，我们保留一切通过法律手段追究违反者的权利。

□ 课程详情请咨询

■ 微信公众号：小象

■ 新浪微博：ChinaHadoop



主题模型



小象学院
ChinaHadoop.cn

邹博

主要内容

- 先验分布 – 共轭分布
- Beta分布 – Dirichlet分布
- 三层贝叶斯网络模型LDA
- Gibbs采样和更新规则

LDA的应用方向

☐ 信息提取和搜索

☒ 语义分析

☐ 文档分类/聚类、文章摘要、社区挖掘

☐ 基于内容的图像聚类、目标识别

☒ 以及其他计算机视觉应用

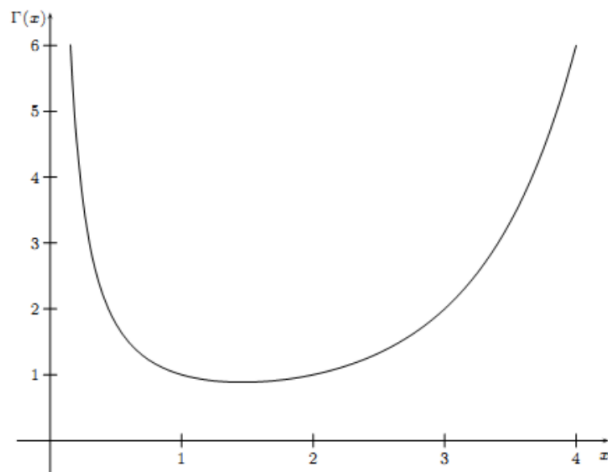
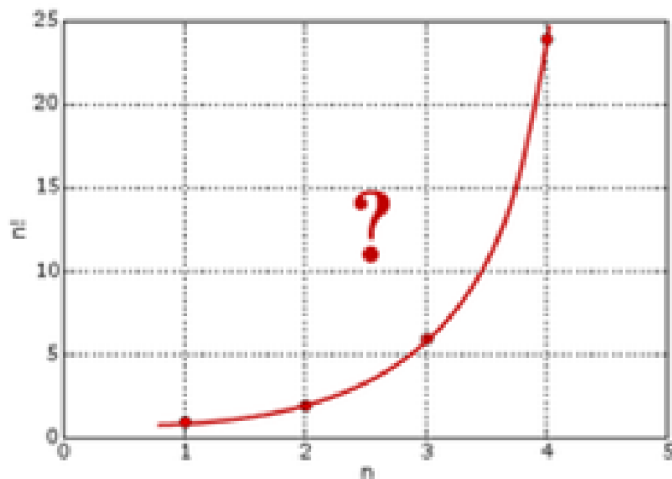
☐ 生物信息数据的应用

朴素贝叶斯的分析

- 可以胜任许多文本分类问题。
- 无法解决语料中**一词多义**和**多词一义**的问题——它更像是词法分析，而非语义分析。
- 如果使用词向量作为文档的特征，**一词多义**和**多词一义**会造成计算文档间相似度的不准确性。
- 可以通过增加“主题”的方式，一定程度的解决上述问题：
 - 一个词可能被映射到多个主题中
 - ——**一词多义**
 - 多个词可能被映射到某个主题的概率很高
 - ——**多词一义**

引：Γ函数

□ Γ函数是阶乘在实数上的推广



$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = (x-1)!$$

$$\Gamma(x) = (x-1) \cdot \Gamma(x-1) \Rightarrow \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-1)} = x-1$$

Beta分布

□ Beta分布的概率密度：
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

□ 其中系数B为：

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

□ Gamma函数看成阶乘的实数域推广：

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\Rightarrow \Gamma(n) = (n-1)! \Rightarrow B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Beta分布的期望

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, x \in [0,1]$$

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

□ 根据定义：

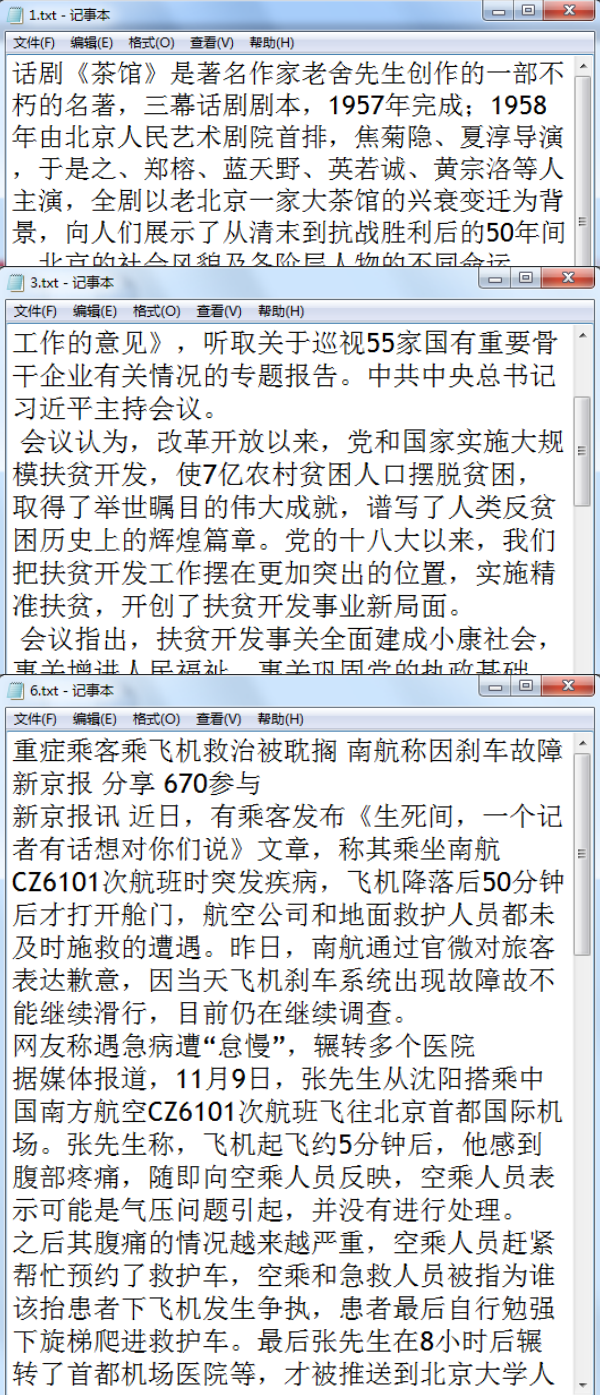
$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x \cdot \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \\ &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 x^{(\alpha+1)-1} (1-x)^{\beta-1} dx \\ &= \frac{B(\alpha+1, \beta)}{B(\alpha, \beta)} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \bigg/ \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

文档和主题

文档 1 : 茶馆 (0.0163591635916) 社会 (0.00528905289053) 王利发 (0.00528905289053)
文档 2 : 决议 (0.0138983050847) 打击 (0.00824858757062) 安理会 (0.00824858757062)
文档 3 : 会议 (0.0124491456469) 脱贫 (0.0124491456469) 党校 (0.0108218063466)
文档 4 : 美团 (0.0306066176471) 阿里 (0.0103860294118) 业务 (0.0103860294118)
文档 5 : 户口 (0.0221347331584) 登记 (0.0195100612423) 人口 (0.0142607174103)
文档 6 : 人员 (0.0111471861472) 飞机 (0.00898268398268) 称 (0.00681818181818)
文档 7 : 号线 (0.0328544061303) 站 (0.0194444444444) 14 (0.0184865900383)
文档 8 : 支付 (0.0198394495413) 腾讯 (0.0072247706422) 支付宝 (0.0072247706422)
文档 9 : 决议 (0.0138983050847) 打击 (0.00824858757062) 安理会 (0.00824858757062)
文档 10 : 足协 (0.0186473429952) 足球 (0.0138164251208) 佩兰 (0.011884057971)

=====

主题 1 : 美团 (0.0306066176471) 阿里 (0.0103860294118) 业务 (0.0103860294118)
主题 2 : 会议 (0.0124491456469) 脱贫 (0.0124491456469) 党校 (0.0108218063466)
主题 3 : 号线 (0.0328544061303) 站 (0.0194444444444) 14 (0.0184865900383)
主题 4 : 人物 (0.00214876033058) 民族 (0.00214876033058) 资本家 (0.00214876033058)
主题 5 : 足协 (0.0186473429952) 足球 (0.0138164251208) 佩兰 (0.011884057971)
主题 6 : 户口 (0.0221347331584) 登记 (0.0195100612423) 人口 (0.0142607174103)
主题 7 : 决议 (0.0138983050847) 打击 (0.00824858757062) 安理会 (0.00824858757062)
主题 8 : 人员 (0.0111471861472) 飞机 (0.00898268398268) 称 (0.00681818181818)
主题 9 : 茶馆 (0.0163591635916) 社会 (0.00528905289053) 王利发 (0.00528905289053)
主题 10 : 支付 (0.0198394495413) 腾讯 (0.0072247706422) 支付宝 (0.0072247706422)



LDA涉及的主要问题

- 共轭先验分布
- Dirichlet分布
- LDA模型
 - Gibbs采样算法学习参数

共轭先验分布

- 由于 x 为给定样本， $P(x)$ 有时被称为“证据”，仅仅是归一化因子，如果不关心 $P(\theta|x)$ 的具体值，只考察 θ 取何值时后验概率 $P(\theta|x)$ 最大，则可将分母省去。

$$P(\theta | x) = \frac{P(x | \theta)P(\theta)}{P(x)} \propto P(x | \theta)P(\theta)$$

- 在贝叶斯概率理论中，如果后验概率 $P(\theta|x)$ 和先验概率 $p(\theta)$ 满足同样的分布律，那么，先验分布和后验分布被叫做共轭分布，同时，先验分布叫做似然函数的共轭先验分布。
- In Bayesian probability theory, if the posterior distributions $p(\theta|x)$ are in the same family as the prior probability distribution $p(\theta)$, the prior and posterior are then called conjugate distributions, and the prior is called a conjugate prior for the likelihood function.

复习：二项分布的最大似然估计

- 投硬币试验中，进行N次独立试验，n次朝上，N-n次朝下。
- 假定朝上的概率为p，使用对数似然函数作为目标函数：

$$f(n|p) = \log(p^n(1-p)^{N-n}) \xrightarrow{\Delta} h(p)$$

$$\frac{\partial h(p)}{\partial p} = \frac{n}{p} - \frac{N-n}{1-p} \xrightarrow{\Delta} 0 \Rightarrow p = \frac{n}{N}$$

二项分布与先验举例

□ 在校门口统计一定时间段内出入的男女生数目分别为 N_B 和 N_G ，估算该校男女生比例。

$$\begin{cases} P_B = \frac{N_B}{N_B + N_G} \\ P_G = \frac{N_G}{N_B + N_G} \end{cases}$$

□ 若观察到4个女生和1个男生，可以得出该校女生比例是80%吗？

□ 修正公式：

$$\begin{cases} P_B = \frac{N_B + 5}{N_B + N_G + 10} \\ P_G = \frac{N_G + 5}{N_B + N_G + 10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_B = \frac{1 + 5}{1 + 4 + 10} = 40\% \\ P_G = \frac{4 + 5}{1 + 4 + 10} = 60\% \end{cases}$$

上述过程的理论解释

- 投掷一个非均匀硬币，可以使用参数为 θ 的伯努利模型， θ 为硬币为正面的概率，那么结果 x 的分布形式为： $P(x|\theta) = \theta^x \cdot (1-\theta)^{1-x}$
- 两点分布/二项分布的共轭先验是Beta分布，它具有两个参数 α 和 β ，Beta分布形式为

$$P(\theta | \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1}, & \theta \in [0,1] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

先验概率和后验概率的关系

□ 根据似然和先验：

$$P(x|\theta) = \theta^x \cdot (1-\theta)^{1-x}$$

$$P(\theta|\alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1}$$

计算后验概率：

$$P(\theta|x) = \frac{P(x|\theta) \cdot P(\theta)}{P(x)} \propto P(x|\theta) \cdot P(\theta)$$

$$= (\theta^x (1-\theta)^{1-x}) \left(\frac{1}{B(\alpha, \beta)} \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1} \right)$$

$$\propto \theta^x (1-\theta)^{1-x} \cdot \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1}$$

$$= \theta^{(x+\alpha)-1} (1-\theta)^{(1-x+\beta)-1}$$

□ 后验概率的形式与先验概率的形式一样——后验概率是参数为 $(x+\alpha, 1-x+\beta)$ 的Beta分布，即：伯努利分布的共轭先验是Beta分布。

伪计数

□ 参数 $\alpha\beta$ 是决定参数 θ 的参数，常称之为超参数。

□ 后验概率： $P(\theta|x) \propto \theta^{x+\alpha-1} (1-\theta)^{1-x+\beta-1}$

□ Beta分布定义：

$$P(\theta | \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1}, & \theta \in [0,1] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

■ 在后验概率的最终表达式中，参数 α 、 β 和 x 一起作为参数 θ 的指数——后验概率的参数为 $(x+\alpha, 1-x+\beta)$ 。而这个指数的实践意义是：投币过程中，正面朝上的次数。 α 和 β 先验性的给出了在没有任何实验的前提下，硬币朝上的概率分配；因此， α 和 β 可被称作“伪计数”。

共轭先验的直接推广

□ 从2到K:

- 二项分布 \rightarrow 多项分布
- Beta分布 \rightarrow Dirichlet分布

Dirichlet分布

□ Beta 分布: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

■ 其中: $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$

□ Dirichlet 分布: $f(\vec{p} | \vec{\alpha}) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta(\vec{\alpha})} \prod_{k=1}^K p_k^{\alpha_k-1}, & p_k \in [0,1] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

■ 简记: $Dir(\vec{p} | \vec{\alpha}) = \frac{1}{\Delta(\vec{\alpha})} \prod_{k=1}^K p_k^{\alpha_k-1}$ 其中: $\Delta(\vec{\alpha}) = \frac{\prod_{k=1}^K \Gamma(\alpha_k)}{\Gamma\left(\sum_{k=1}^K \alpha_k\right)}$

Dirichlet分布的期望

□ 根据Beta分布的期望公司：

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, x \in [0,1] \Rightarrow E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

□ 推广得到：

$$f(\vec{p} | \vec{\alpha}) = \frac{1}{\Delta(\vec{\alpha})} \prod_{k=1}^K p_k^{\alpha_k-1}, p \in [0,1] \Rightarrow E(p_i) = \frac{\alpha_i}{\sum_{k=1}^K \alpha_k}$$

Dirichlet分布分析

$$Dir(\vec{p} | \vec{\alpha}) = \frac{1}{\Delta(\vec{\alpha})} \prod_{k=1}^K p_k^{\alpha_k - 1}$$

□ α 是参数向量，共 K 个

□ 定义在 x_1, x_2, \dots, x_{K-1} 维上

■ $x_1 + x_2 + \dots + x_{K-1} + x_K = 1$

■ $x_1, x_2, \dots, x_{K-1} > 0$

■ 定义在 $(K-1)$ 维的单纯形上，其他区域的概率密度为 0

□ α 的取值对 $Dir(p|\alpha)$ 有什么影响？

Symmetric Dirichlet distribution

- A very common special case is the **symmetric Dirichlet distribution**, where all of the elements making up the parameter **vector** have the same value. Symmetric Dirichlet distributions are often used when a Dirichlet **prior** is called for, since there typically is *no prior knowledge* favoring one component over another. Since all elements of the parameter vector have the same value, the distribution alternatively can be parametrized by a single **scalar value** α , called the **concentration parameter**(聚集参数).

对称Dirichlet分布

□ Dirichlet 分布：
$$Dir(\vec{p} | \vec{\alpha}) = \frac{1}{\Delta(\vec{\alpha})} \prod_{k=1}^K p_k^{\alpha_k - 1}$$

■ 其中：
$$\Delta(\vec{\alpha}) = \frac{\prod_{k=1}^K \Gamma(\alpha_k)}{\Gamma\left(\sum_{k=1}^K \alpha_k\right)}$$

□ 对称 Dirichlet 分布：
$$Dir(\vec{p} | \alpha, K) = \frac{1}{\Delta_K(\alpha)} \prod_{k=1}^K p_k^{\alpha - 1}$$

■ 其中：
$$\Delta_K(\alpha) = \frac{\Gamma^K(\alpha)}{\Gamma(K \cdot \alpha)}$$

对称Dirichlet分布的参数分析

□ $\alpha=1$ 时

■ 退化为均匀分布

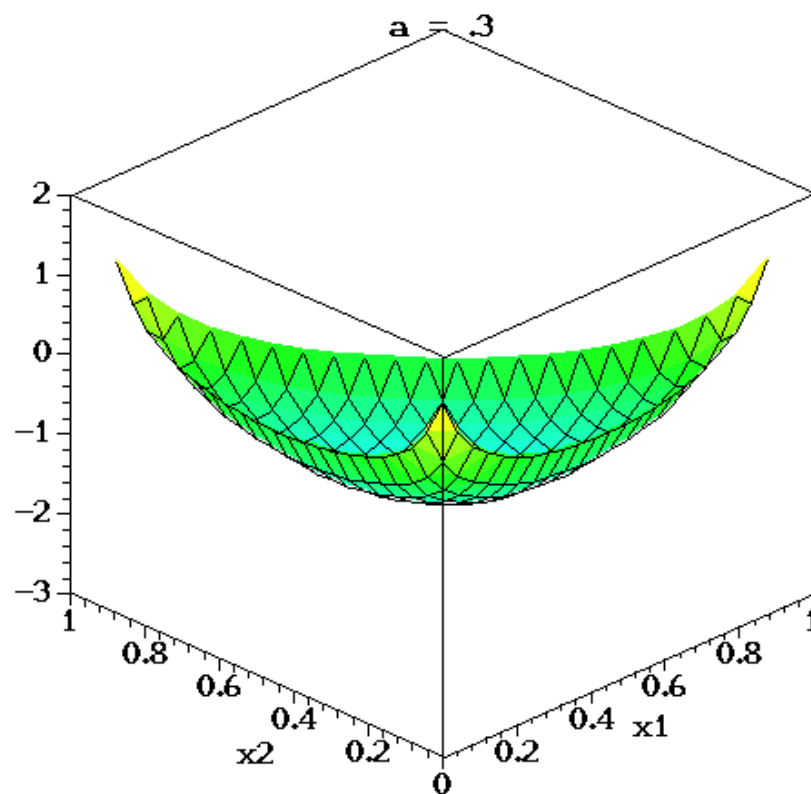
□ 当 $\alpha>1$ 时

■ $p_1=p_2=\dots=p_k$ 的概率增大

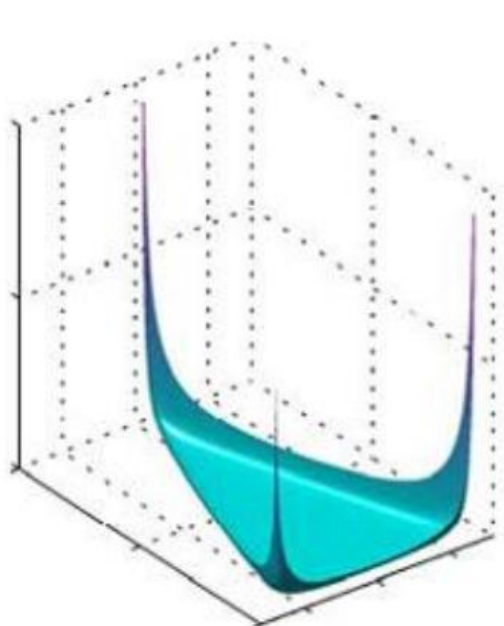
□ 当 $\alpha<1$ 时

■ $p_i=1$, $p_{\text{非}i}=0$ 的概率增大

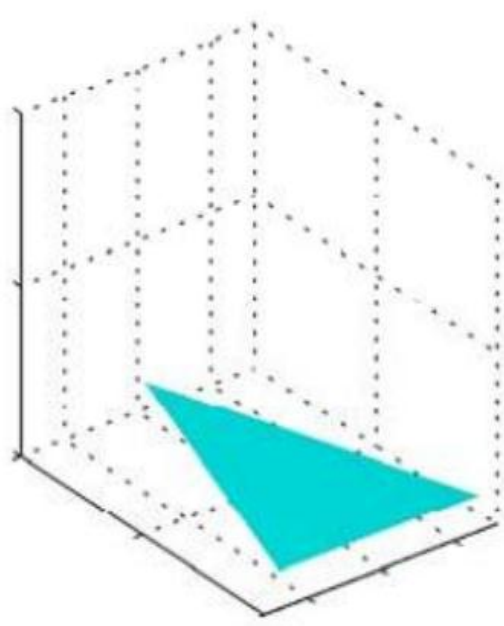
图像说明：将Dirichlet分布的概率密度函数取对数,绘制对称Dirichlet分布的图像,取 $K=3$,也就是有两个独立参数 x_1, x_2 , 分别对应图中的两个坐标轴, 第三个参数始终满足 $x_3=1-x_1-x_2$ 且 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha$, 图中反映的是 α 从0.3变化到2.0的概率对数值的变化情况。



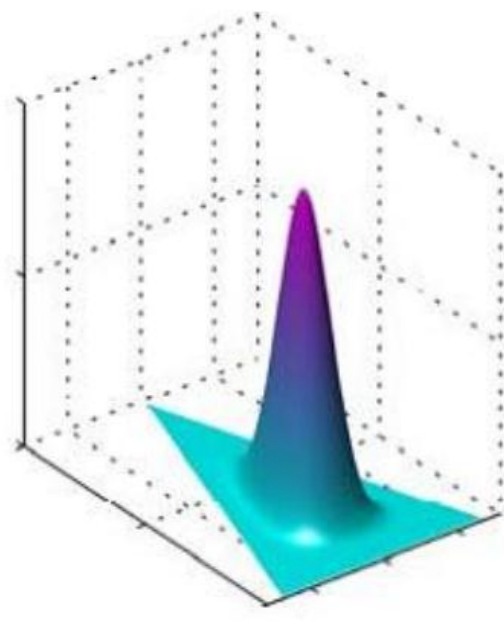
参数 α 对Dirichlet分布的影响



$$\{\alpha_k\} = 0.1$$



$$\{\alpha_k\} = 1$$



$$\{\alpha_k\} = 10$$

参数选择对对称Dirichlet分布的影响

- When $\alpha=1$, the symmetric Dirichlet distribution is equivalent to a uniform distribution over the open standard $(K-1)$ -simplex, i.e. it is uniform over all points in its support. Values of the concentration parameter above 1 prefer variants that are dense, evenly distributed distributions, i.e. all the values within a single sample are similar to each other. Values of the concentration parameter below 1 prefer sparse distributions, i.e. most of the values within a single sample will be close to 0, and the vast majority of the mass will be concentrated in a few of the values.

多项分布的共轭分布是Dirichlet分布

$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_K)$ = concentration hyperparameter

$\mathbf{p} \mid \boldsymbol{\alpha} = (p_1, \dots, p_K) \sim \text{Dir}(K, \boldsymbol{\alpha})$

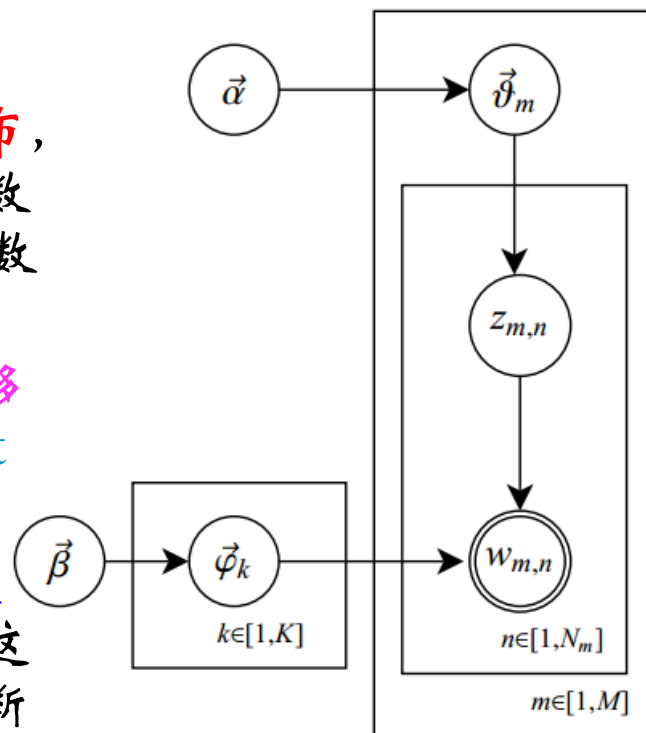
$\mathbb{X} \mid \mathbf{p} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_K) \sim \text{Cat}(K, \mathbf{p})$

$\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_K)$ = number of occurrences of category i

$\mathbf{p} \mid \mathbb{X}, \boldsymbol{\alpha} \sim \text{Dir}(K, \mathbf{c} + \boldsymbol{\alpha}) = \text{Dir}(K, c_1 + \alpha_1, \dots, c_K + \alpha_K)$

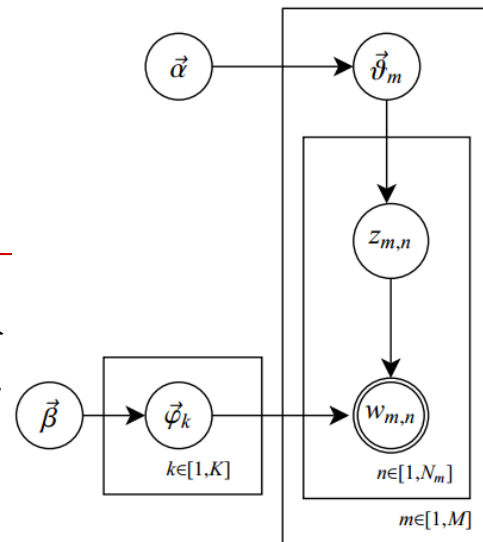
LDA的解释

- 共有 m 篇文章，一共涉及了 K 个主题；
- 每篇文章(长度为 N_m)都有各自的 **主题分布**，**主题分布**是 **多项分布**，该 **多项分布**的参数服从 **Dirichlet分布**，该 **Dirichlet分布**的参数为 α ；
- 每个 **主题**都有各自的 **词分布**，**词分布**为 **多项分布**，该 **多项分布**的参数服从 **Dirichlet分布**，该 **Dirichlet分布**的参数为 β ；
- 对于某篇文章中的第 n 个词，首先从该文章的 **主题分布**中采样一个 **主题**，然后在这个 **主题**对应的 **词分布**中采样一个词。不断重复这个随机生成过程，直到 m 篇文章全部完成上述过程。



详细解释

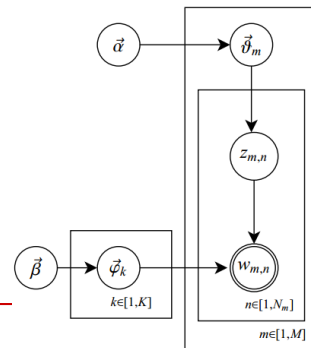
- 字典中共有V个term(不可重复), 这些term出现在具体的文章中, 就是word——在具体某文章中的word当然是有可能重复的。
- 语料库中共有m篇文档 $d_1, d_2 \dots d_m$;
- 对于文档 d_i , 由 N_i 个word组成, 可重复;
- 语料库中共有K个主题 $T_1, T_2 \dots T_k$;
- α 和 β 为先验分布的参数, 一般事先给定: 如取0.1的对称Dirichlet分布——表示在参数学习结束后, 期望每个文档的主题不会十分集中。
- θ 是每篇文档的**主题分布**
 - 对于第i篇文档 d_i 的主题分布是 $\theta_i = (\theta_{i1}, \theta_{i2}, \dots, \theta_{iK})$, 是长度为K的向量;
- 对于第i篇文档 d_i , 在主题分布 θ_i 下, 可以确定一个具体的主题 $z_{ij} = k$, $k \in [1, K]$,
- ϕ_k 表示第k个主题的**词分布**, $k \in [1, K]$
 - 对于第k个主题 T_k 的词分布 $\phi_k = (\phi_{k1}, \phi_{k2}, \dots, \phi_{kv})$, 是长度为v的向量
- 由 z_{ij} 选择 $\phi_{z_{ij}}$, 表示由词分布 $\phi_{z_{ij}}$ 确定term, 即得到观测值 w_{ij} 。



详细解释

- 图中 K 为主题个数， M 为文档总数， N_m 是第 m 个文档的单词总数。 β 是每个Topic下词的多项分布的Dirichlet先验参数， α 是每个文档下Topic的多项分布的Dirichlet先验参数。
 z_{mn} 是第 m 个文档中第 n 个词的主题， w_{mn} 是 m 个文档中的第 n 个词。两个隐含变量 θ 和 ϕ 分别表示第 m 个文档下的Topic分布和第 k 个Topic下词的分布，前者是 k 维(k 为Topic总数)向量，后者是 v 维向量(v 为词典中term总数)

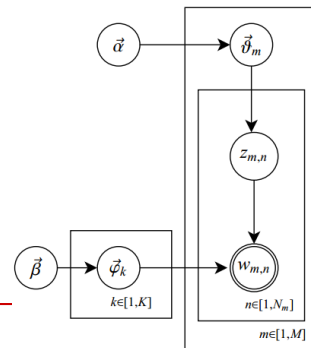
参数的学习



□ 给定一个文档集合， w_{mn} 是可以观察到的已知变量， α 和 β 是根据经验给定的先验参数，其他的变量 z_{mn} 、 θ 、 ϕ 都是未知的隐含变量，需要根据观察到的变量来学习估计的。根据LDA的图模型，可以写出所有变量的联合分布：

$$p(\vec{w}_m, \vec{z}_m, \vec{\vartheta}_m, \underline{\Phi} | \vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \prod_{n=1}^{N_m} p(w_{m,n} | \vec{\varphi}_{z_{m,n}}) p(z_{m,n} | \vec{\vartheta}_m) \cdot p(\vec{\vartheta}_m | \vec{\alpha}) \cdot p(\underline{\Phi} | \vec{\beta})$$

似然概率



□ 一个词 w_{mn} 初始化为一个词 t 的概率是

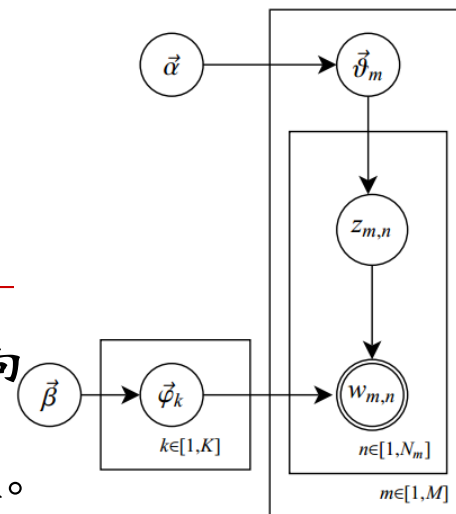
$$p(w_{m,n}=t|\vec{v}_m, \underline{\Phi}) = \sum_{k=1}^K p(w_{m,n}=t|\vec{\varphi}_k) p(z_{m,n}=k|\vec{v}_m)$$

□ 每个文档中出现主题 k 的概率乘以主题 k 下出现词 t 的概率，然后枚举所有主题求和得到。
整个文档集合的似然函数为：

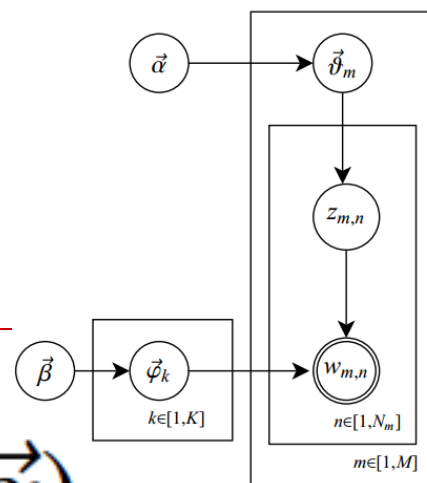
$$p(\mathcal{W}|\underline{\Theta}, \underline{\Phi}) = \prod_{m=1}^M p(\vec{w}_m|\vec{v}_m, \underline{\Phi}) = \prod_{m=1}^M \prod_{n=1}^{N_m} p(w_{m,n}|\vec{v}_m, \underline{\Phi})$$

Gibbs Sampling

- Gibbs Sampling算法的运行方式是每次选取概率向量的一个维度，给定其他维度的变量值采样当前维度的值。不断迭代直到收敛输出待估计的参数。
- 初始时随机给文本中的每个词分配主题 $z^{(0)}$ ，然后统计每个主题 z 下出现词 t 的数量以及每个文档 m 下出现主题 z 的数量，每一轮计算 $p(z_i|z_{-i}, \mathbf{d}, \mathbf{w})$ ，即排除当前词的主题分布：
 - 根据其他所有词的主题分布估计当前词分配各个主题的概率。
- 当得到当前词属于所有主题 z 的概率分布后，根据这个概率分布为该词采样一个新的主题。
- 用同样的方法更新下一个词的主题，直到发现每个文档的主题分布 θ_i 和每个主题的词分布 ϕ_j 收敛，算法停止，输出待估计的参数 θ 和 ϕ ，同时每个单词的主题 z_{mn} 也可同时得出。
- 实际应用中会设置最大迭代次数。每一次计算 $p(z_i|z_{-i}, \mathbf{d}, \mathbf{w})$ 的公式称为Gibbs updating rule。



联合分布

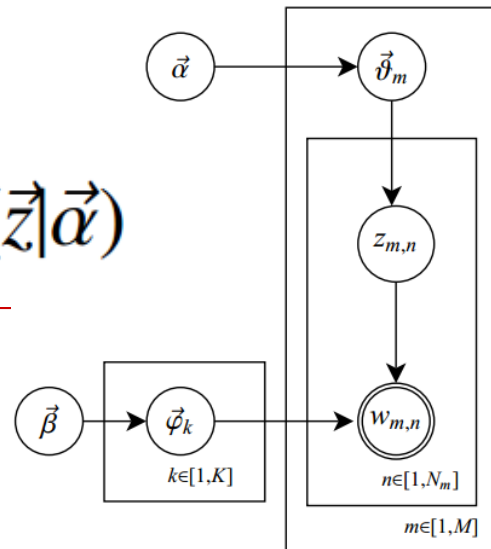


$$p(\vec{w}, \vec{z} | \vec{\alpha}, \vec{\beta}) = p(\vec{w} | \vec{z}, \vec{\beta}) p(\vec{z} | \vec{\alpha})$$

- 第一项因子是给定主题采样词的过程
- 后面的因子计算， $n_z^{(t)}$ 表示词 t 被观察到分配给主题 z 的次数， $n_m^{(k)}$ 表示主题 k 分配给文档 m 的次数。

计算因子 $p(\vec{w}, \vec{z} | \vec{\alpha}, \vec{\beta}) = p(\vec{w} | \vec{z}, \vec{\beta}) p(\vec{z} | \vec{\alpha})$

$$p(\vec{w} | \vec{z}, \vec{\beta}) = \int p(\vec{w} | \vec{z}, \underline{\Phi}) p(\underline{\Phi} | \vec{\beta}) d\underline{\Phi}$$



$$= \int \prod_{z=1}^K \frac{1}{\Delta(\vec{\beta})} \prod_{t=1}^V \varphi_{z,t}^{n_z^{(t)} + \beta_t - 1} d\vec{\varphi}_z$$

$$= \prod_{z=1}^K \frac{\Delta(\vec{n}_z + \vec{\beta})}{\Delta(\vec{\beta})}, \quad \vec{n}_z = \{n_z^{(t)}\}_{t=1}^V$$

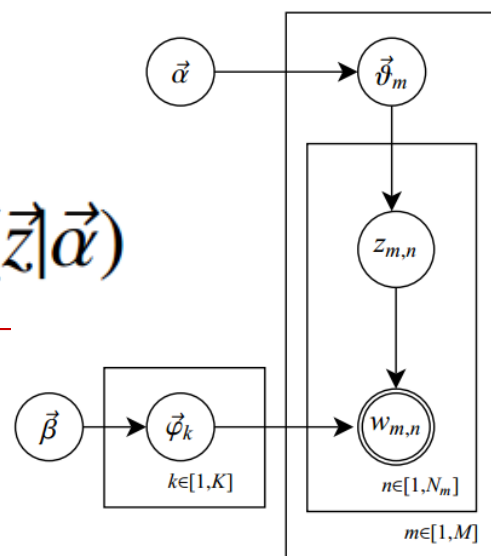
$$\int_{\vec{p}} \prod_{k=1}^K p_k^{\alpha_k - 1} d\vec{p} = \Delta(\vec{\alpha})$$

计算因子 $p(\vec{w}, \vec{z} | \vec{\alpha}, \vec{\beta}) = p(\vec{w} | \vec{z}, \vec{\beta}) p(\vec{z} | \vec{\alpha})$

$$p(\vec{z} | \vec{\alpha}) = \int p(\vec{z} | \underline{\Theta}) p(\underline{\Theta} | \vec{\alpha}) d\underline{\Theta}$$

$$= \int \prod_{m=1}^M \frac{1}{\Delta(\vec{\alpha})} \prod_{k=1}^K \vartheta_{m,k}^{n_m^{(k)} + \alpha_k - 1} d\vec{\vartheta}_m$$

$$= \prod_{m=1}^M \frac{\Delta(\vec{n}_m + \vec{\alpha})}{\Delta(\vec{\alpha})}, \quad \vec{n}_m = \{n_m^{(k)}\}_{k=1}^K$$



$$\int_{\vec{p}} \prod_{k=1}^K p_k^{\alpha_k - 1} d\vec{p} = \Delta(\vec{\alpha})$$

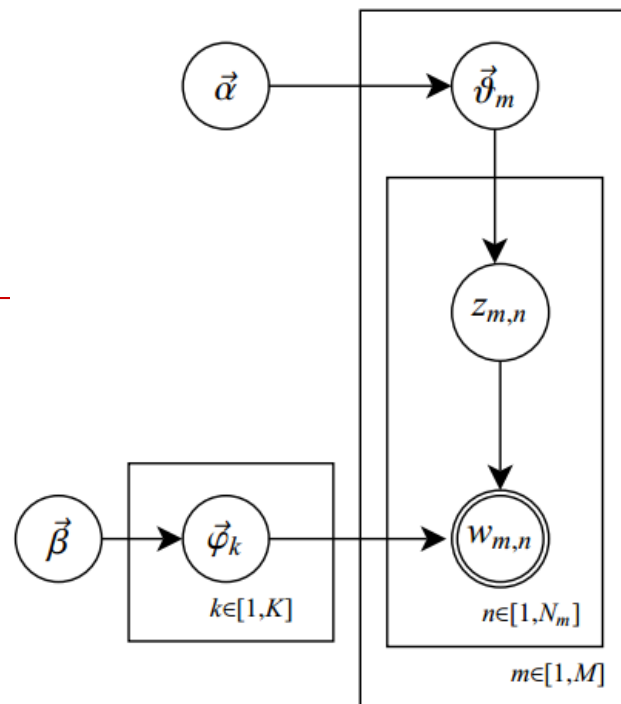
Gibbs updating rule

$$\begin{aligned} p(z_i=k|\vec{z}_{\neg i}, \vec{w}) &= \frac{p(\vec{w}, \vec{z})}{p(\vec{w}, \vec{z}_{\neg i})} = \frac{p(\vec{w}|\vec{z})}{p(\vec{w}_{\neg i}|\vec{z}_{\neg i})p(w_i)} \cdot \frac{p(\vec{z})}{p(\vec{z}_{\neg i})} \\ &\propto \frac{\Delta(\vec{n}_z + \vec{\beta})}{\Delta(\vec{n}_{z,\neg i} + \vec{\beta})} \cdot \frac{\Delta(\vec{n}_m + \vec{\alpha})}{\Delta(\vec{n}_{m,\neg i} + \vec{\alpha})} \\ &= \frac{\Gamma(n_k^{(t)} + \beta_t) \Gamma(\sum_{t=1}^V n_{k,\neg i}^{(t)} + \beta_t)}{\Gamma(n_{k,\neg i}^{(t)} + \beta_t) \Gamma(\sum_{t=1}^V n_k^{(t)} + \beta_t)} \cdot \frac{\Gamma(n_m^{(k)} + \alpha_k) \Gamma(\sum_{k=1}^K n_{m,\neg i}^{(k)} + \alpha_k)}{\Gamma(n_{m,\neg i}^{(k)} + \alpha_k) \Gamma(\sum_{k=1}^K n_m^{(k)} + \alpha_k)} \\ &= \frac{n_{k,\neg i}^{(t)} + \beta_t}{\sum_{t=1}^V n_{k,\neg i}^{(t)} + \beta_t} \cdot \frac{n_{m,\neg i}^{(k)} + \alpha_k}{[\sum_{k=1}^K n_m^{(k)} + \alpha_k] - 1} \\ &\propto \frac{n_{k,\neg i}^{(t)} + \beta_t}{\sum_{t=1}^V n_{k,\neg i}^{(t)} + \beta_t} (n_{m,\neg i}^{(k)} + \alpha_k) \end{aligned}$$

词分布和主题分布

$$\varphi_{k,t} = \frac{n_k^{(t)} + \beta_t}{\sum_{t=1}^V n_k^{(t)} + \beta_t}$$

$$\vartheta_{m,k} = \frac{n_m^{(k)} + \alpha_k}{\sum_{k=1}^K n_m^{(k)} + \alpha_k}$$



$$p(\vec{\vartheta}_m | \vec{z}_m, \vec{\alpha}) = \frac{1}{Z_{\vartheta_m}} \prod_{n=1}^{N_m} p(z_{m,n} | \vec{\vartheta}_m) \cdot p(\vec{\vartheta}_m | \vec{\alpha}) = \text{Dir}(\vec{\vartheta}_m | \vec{n}_m + \vec{\alpha})$$

$$p(\vec{\varphi}_k | \vec{z}, \vec{w}, \vec{\beta}) = \frac{1}{Z_{\varphi_k}} \prod_{\{i: z_i=k\}} p(w_i | \vec{\varphi}_k) \cdot p(\vec{\varphi}_k | \vec{\beta}) = \text{Dir}(\vec{\varphi}_k | \vec{n}_k + \vec{\beta})$$

Gibbs采样算法

Algorithm LdaGibbs($\{\vec{w}\}, \alpha, \beta, K$)

Input: word vectors $\{\vec{w}\}$, hyperparameters α, β , topic number K

Global data: count statistics $\{n_m^{(k)}\}, \{n_k^{(i)}\}$ and their sums $\{n_m\}, \{n_k\}$, memory for full conditional array $p(z_i|\cdot)$

Output: topic associations $\{\vec{z}\}$, multinomial parameters $\underline{\Phi}$ and $\underline{\Theta}$, hyperparameter estimates α, β

// initialisation

zero all count variables, $n_m^{(k)}, n_m, n_k^{(i)}, n_k$

for all documents $m \in [1, M]$ **do**

for all words $n \in [1, N_m]$ in document m **do**

 sample topic index $z_{m,n} = k \sim \text{Mult}(1/K)$

 increment document–topic count: $n_m^{(k)} += 1$

 increment document–topic sum: $n_m += 1$

 increment topic–term count: $n_k^{(i)} += 1$

 increment topic–term sum: $n_k += 1$

// Gibbs sampling over burn-in period and sampling period

while not finished **do**

for all documents $m \in [1, M]$ **do**

for all words $n \in [1, N_m]$ in document m **do**

 // for the current assignment of k to a term t for word $w_{m,n}$:

 decrement counts and sums: $n_m^{(k)} -= 1; n_m -= 1; n_k^{(i)} -= 1; n_k -= 1$

 // multinomial sampling acc. to Eq. 78 (decrements from previous step):

 sample topic index $\tilde{k} \sim p(z_i|\vec{z}_{-i}, \vec{w})$

 // for the new assignment of $z_{m,n}$ to the term t for word $w_{m,n}$:

 increment counts and sums: $n_m^{(\tilde{k})} += 1; n_m += 1; n_k^{(i)} += 1; n_{\tilde{k}} += 1$

 // check convergence and read out parameters

if converged and L sampling iterations since last read out **then**

 // the different parameters read outs are averaged.

 read out parameter set $\underline{\Phi}$ according to Eq. 81

 read out parameter set $\underline{\Theta}$ according to Eq. 82

代码实现

□ 数目：

- 文档数目：M
- 词数目：V(非重复的, “term”)
- 主题数目：K

□ 记号：

- 用d表述第几个文档，k表示主题，w表示词汇(term)，n表示词(word)

三个矩阵和三个向量

- $z[d][w]$: 第d篇文档的第w个词来自哪个主题。M行, X列, X为相应文档长度: 即词(可重复)的数目。
- $nw[w][t]$: 第w个词是第t个主题的次数。word-topic矩阵, 列向量 $nw[][t]$ 表示主题t的词频数分布; V行K列
- $nd[d][t]$: 第d篇文档中第t个主题出现的次数, doc-topic矩阵, 行向量 $nd[d]$ 表示文档d的主题频数分布。M行, K列。
- 辅助向量:
 - $ntSum[t]$: 第t个主题在所有语料出现的次数, K维
 - $ndSum[d]$: 第d篇文档中词的数目(可重复), M维;
 - $P[t]$: 对于当前计算的某词属于主题t的概率, K维。

Code

```
if __name__ == "__main__":
    doc_num = 10 # 文档数目
    # 载入停止词库
    stop_words = load_stopwords()
    dic = {}
    doc = read_document(doc_num, stop_words, dic)

    # LDA
    term_num = len(dic) # 词汇的数目
    # nt[w][t]: 第term个词属于第t个主题的次数
    nt = [[0 for t in range(topic_number)] for term in range(term_num)]
    # nd[d][t]: 第d个文档中出现第t个主题的次数
    nd = [[0 for t in range(topic_number)] for d in range(doc_num)]
    # nt_sum[t]: 第t个主题出现的次数(nt矩阵的第t列)
    nt_sum = [0 for t in range(topic_number)]
    # nd_sum[d]: 第d个文档的长度(nd矩阵的第d行)
    nd_sum = [0 for d in range(doc_num)]
    z = init_topic(doc, nt, nd, nt_sum, nd_sum, dic)
    theta, phi = lda(z, nt, nd, nt_sum, nd_sum, dic, doc)
    show_result(theta, phi, dic) # 输出每个文档的主题和每个主题的关键字
```

Code

```
def lda(z, nt, nd, nt_sum, nd_sum, dic, doc):
    doc_num = len(z)
    for time in range(50):
        for m in range(doc_num):
            doc_length = len(z[m])
            for i in range(doc_length):
                term = dic[doc[m][i]] # 词语 -> 词汇
                gibbs_sampling(z, m, i, nt, nd, nt_sum, nd_sum, term)
    theta = calc_theta(nd, nd_sum) # 计算每个文档的主题分布
    phi = calc_phi(nt, nt_sum) # 计算每个主题的词分布
    return theta, phi
```

Code

```
def calc_theta(nd, nd_sum):    # 每个文档的主题分布
    doc_num = len(nd)
    topic_alpha = topic_number * alpha
    theta = [[0 for t in range(topic_number)] for d in range(doc_num)]
    for m in range(doc_num):
        for k in range(topic_number):
            theta[m][k] = (nd[m][k] + alpha) / (nd_sum[m] + topic_alpha)
    return theta

def calc_phi(nt, nt_sum):    # 每个主题的词分布
    term_num = len(nt)
    term_beta = term_num * beta
    phi = [[0 for w in range(term_num)] for t in range(topic_number)]
    for k in range(topic_number):
        for term in range(term_num):
            phi[k][term] = (nt[term][k] + beta) / (nt_sum[k] + term_beta)
    return phi
```


文档和主题

文档 1 : 茶馆 (0.0163591635916) 社会 (0.00528905289053) 王利发 (0.00528905289053)
文档 2 : 决议 (0.0138983050847) 打击 (0.00824858757062) 安理会 (0.00824858757062)
文档 3 : 会议 (0.0124491456469) 脱贫 (0.0124491456469) 党校 (0.0108218063466)
文档 4 : 美团 (0.0306066176471) 阿里 (0.0103860294118) 业务 (0.0103860294118)
文档 5 : 户口 (0.0221347331584) 登记 (0.0195100612423) 人口 (0.0142607174103)
文档 6 : 人员 (0.0111471861472) 飞机 (0.00898268398268) 称 (0.00681818181818)
文档 7 : 号线 (0.0328544061303) 站 (0.0194444444444) 14 (0.0184865900383)
文档 8 : 支付 (0.0198394495413) 腾讯 (0.0072247706422) 支付宝 (0.0072247706422)
文档 9 : 决议 (0.0138983050847) 打击 (0.00824858757062) 安理会 (0.00824858757062)
文档 10 : 足协 (0.0186473429952) 足球 (0.0138164251208) 佩兰 (0.011884057971)

=====

主题 1 : 美团 (0.0306066176471) 阿里 (0.0103860294118) 业务 (0.0103860294118)
主题 2 : 会议 (0.0124491456469) 脱贫 (0.0124491456469) 党校 (0.0108218063466)
主题 3 : 号线 (0.0328544061303) 站 (0.0194444444444) 14 (0.0184865900383)
主题 4 : 人物 (0.00214876033058) 民族 (0.00214876033058) 资本家 (0.00214876033058)
主题 5 : 足协 (0.0186473429952) 足球 (0.0138164251208) 佩兰 (0.011884057971)
主题 6 : 户口 (0.0221347331584) 登记 (0.0195100612423) 人口 (0.0142607174103)
主题 7 : 决议 (0.0138983050847) 打击 (0.00824858757062) 安理会 (0.00824858757062)
主题 8 : 人员 (0.0111471861472) 飞机 (0.00898268398268) 称 (0.00681818181818)
主题 9 : 茶馆 (0.0163591635916) 社会 (0.00528905289053) 王利发 (0.00528905289053)
主题 10 : 支付 (0.0198394495413) 腾讯 (0.0072247706422) 支付宝 (0.0072247706422)

超参数的确定

- 交叉验证
- α 表达了不同文档间主题是否鲜明， β 度量了有多少近义词能够属于同一个类别。
- 主题数目 K ，词项数目为 W ，可以使用：
 - $\alpha=50/K$
 - $\beta=200/W$
 - 注：不一定普遍适用

一种迭代求超参数的方法

□ Digamma函数: $\Psi(x) = \frac{d \ln \Gamma(x)}{dx} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$

□ 迭代公式: (T. Minka)

$$\alpha_k = \frac{\left(\left(\sum_{m=1}^M \Psi(n_m^{(k)} + \alpha_k) \right) - M \cdot \Psi(\alpha_k) \right)}{\left(\sum_{m=1}^M \Psi\left(n_m + \sum_{j=1}^K \alpha_j\right) \right) - M \cdot \Psi\left(\sum_{j=1}^K \alpha_j\right)} \cdot \alpha_k$$

LDA总结

- 由于在词和文档之间加入的**主题**的概念，可以较好的解决**一词多义**和**多词一义**的问题。
- 在实践中发现，LDA用于**短文档**往往效果不明显——这是可以解释的：因为一个词被分配给某个主题的次数和一个主题包括的词数目尚未收敛。往往需要通过其他方案“**连接**”成长文档。
 - 用户评论/Twitter/微博
- LDA可以和其他算法**相结合**。首先使用LDA将长度为 N_i 的文档**降维**到 K 维(主题的数目)，同时给出每个主题的概率(主题分布)，从而可以使用if-idf继续分析或者直接作为文档的特征进入**聚类**或者**标签传播算法**——用于**社区发现**等问题。

参考文献

- David M. Blei, Andrew Y. Ng, Michael I. Jordan, *Latent Dirichlet Allocation*, 2003
- Gregor Heinrich, *Parameter estimation for text analysis*. 2008
- Matthew D. Hoffman, David M. Blei, Francis Bach. *Online learning for Latent Dirichlet Allocation*. 2010
- http://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_distribution
- http://en.wikipedia.org/wiki/Conjugate_prior

我们在这里

□ <http://wenda.ChinaHadoop.cn>

■ 视频/课程/社区

□ 微博

■ @ChinaHadoop

■ @邹博_机器学习

□ 微信公众号

■ 小象

■ 大数据分析挖掘



感谢大家！

恳请大家批评指正！