04-04
Lissages exponentiels

Été 2021

NOUS ÉCLAIRONS.
VOUS BRILLEZ.

FORMATION CONTINUE
ET SERVICES AUX ENTREPRISES

Cégep de Sainte-Foy

Spécialisation technique en intelligence artificielle
Algorithmes d'apprentissage non supervisé — 420-A58-SF — M. Swawola, M.Sc.

Sommaire

1 Introduction

Introduction

- Les techniques de **lissage exponentiel** sont encore parmi les plus utilisées. Elles sont très faciles à mettre en oeuvre, et aisées à appréhender. De plus, il n’est pas nécessaire d’avoir beaucoup de données pour les utiliser
- Nous distinguerons essentiellement trois types de séries
  - Séries localement constantes, à un bruit près
  - Séries présentant une tendance localement linéaire
  - Séries saisonnières, avec ou sans tendance

Introduction

Séries localement constantes, à un bruit près	Lissage exponentiel simple
Séries présentant une tendance localement linéaire	Lissage de type Holt ou LED
Séries saisonnières, avec ou sans tendance	Lissage de type Winters

Introduction

Séries localement constantes, à un bruit près → Lissage exponentiel simple

Séries présentant une tendance localement linéaire → Lissage de type Holt ou LED

Séries saisonnières, avec ou sans tendance → Lissage de type Winters

Dans certains cas, on distingue également le cas additif du cas multiplicatif

2 Lissage exponentiel simple

Lissage exponentiel simple

- On considère maintenant une série temporelle **sans tendance, ni saisonnalité** : $x_1, \dots, x_{t-1}$. Un **lisseur linéaire**, noté **S**, et défini par récurrence par

  $$S(t) = S(t-1) + (1-\alpha)[x_t - S(t-1)], t \in \mathbb{Z}$$

- Ou encore

  $$S(t) = (1-\alpha)x_t + \alpha S(t-1), t \in \mathbb{Z}$$

- α est appelée **constante de lissage** et est comprise entre 0 et 1. Il s'agit d'un **hyperparamètre**

Lissage exponentiel simple

- En itérant l'équation précédente de manière récursive, il vient successivement

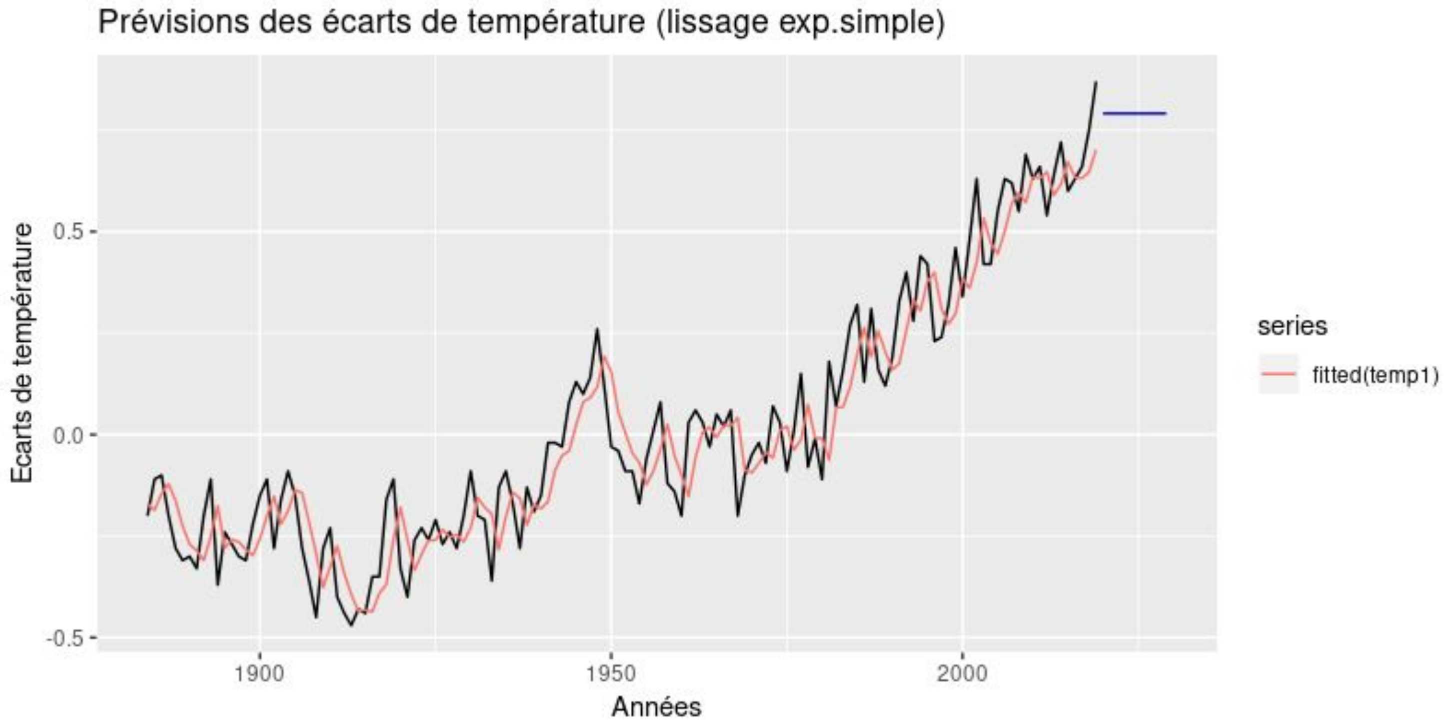
$$\begin{aligned} S(t) &= (1-\alpha)x_t + \alpha[(1-\alpha)x_{t-1} + \alpha S(t-2)] \\ &= (1-\alpha)x_t + \alpha(1-\alpha)x_{t-1} + \alpha^2 S(t-2) \end{aligned}$$

$$S(t) = (1-\alpha)\sum_{j=0}^{T-1} \alpha^j x_{t-j} + \alpha^T S(t-T)$$

- La valeur $\hat{x}_{T+h}$, prévision de x_{T+h} est donc donnée par

$$\hat{x}_{T+h} = S(T+h) = (1-\alpha)\sum_{j=0}^{T-1} \alpha^j x_{T-j}$$

Lissage exponentiel simple



Lissage exponentiel simple

- Code R

```r
temp1 <- ses(temp, h=10)
autoplot(temp) +
  autolayer(temp1, PI=FALSE) +
  autolayer(fitted(temp1)) +
  ggtitle("Prévisions des écarts de température (lissage exp.simple)") +
  ylab("Ecarts de température") +
  xlab("Années")
```

3

Lissage exponentiel double

Lissage exponentiel double

- Ce type de lissage, encore appelé **lissage de Holt**, est particulièrement adapté au cas où la série temporelle possède une tendance et peut être ajustée localement par une droite quelconque au voisinage de **T**

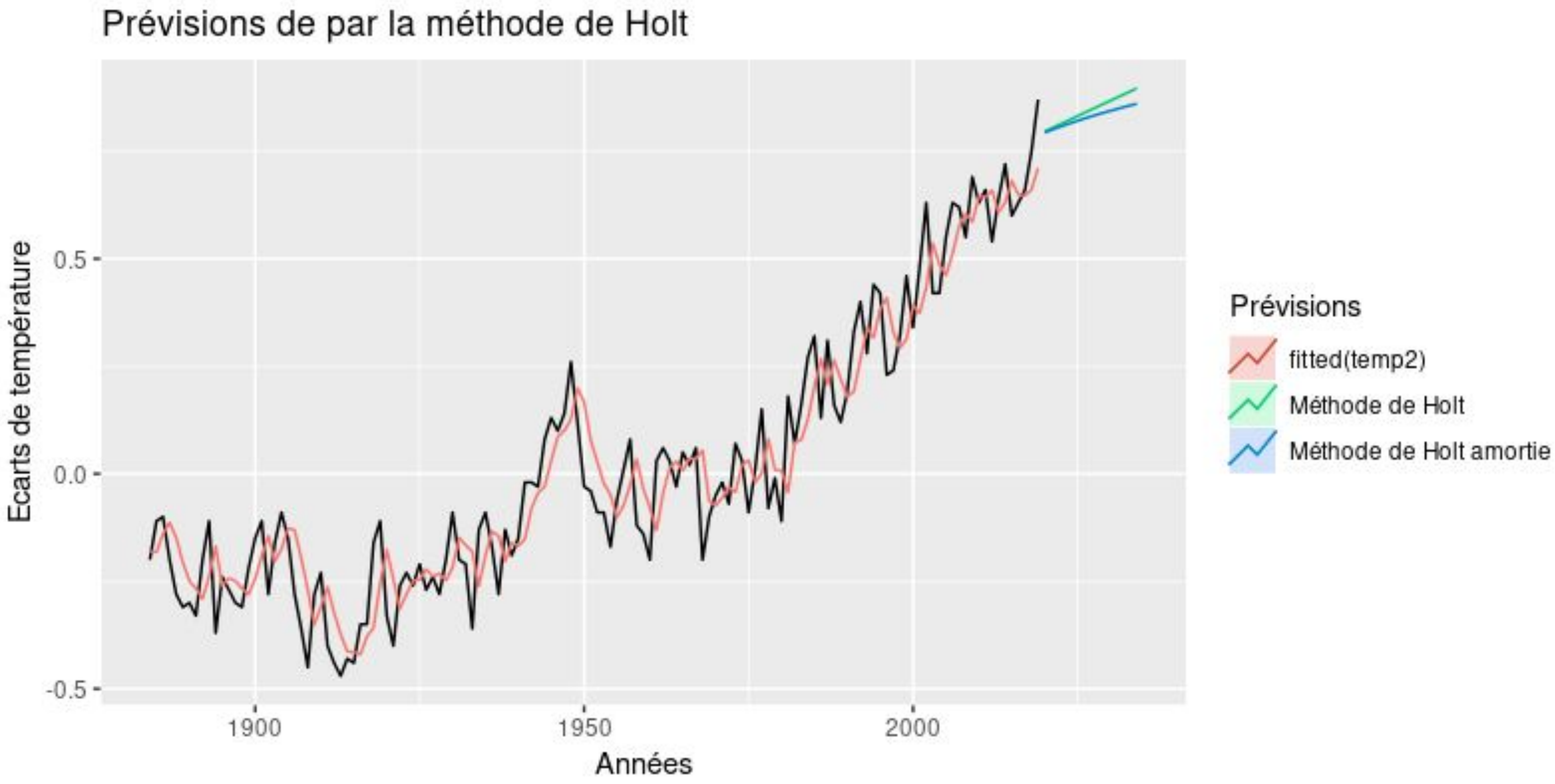
$$y_t = \alpha + (t - T)\beta$$

- Cela conduit à proposer comme prévision à l'horizon **k**

$$\hat{x}_{T+k} = \hat{\alpha}(T) + k\hat{\beta}(T)$$

Constantes à estimer

Lissage exponentiel double



Lissage exponentiel double

- Code R

```
temp2 <- holt(temp, h=15)
temp3 <- holt(temp, damped=TRUE, phi=0.97, h=15)
autoplot(temp) +
  autolayer(fitted(temp2)) +
  autolayer(temp2, series="Méthode de Holt", PI=FALSE) +
  autolayer(temp3, series="Méthode de Holt amortie", PI=FALSE) +
  ggtitle("Prévisions de par la méthode de Holt") + xlab("Années") +
  ylab("Ecarts de température") +
  guides(colour=guide_legend(title="Prévisions"))
```

4

Méthode de Holt-Winters

Méthode de Holt-Winters

- La méthode de **Holt-Winters** <u>sans saisonnalité</u> est également adaptée au cas où la série temporelle est localement ajustable à une droite d'équation

$$y_t = a_1 + (t - T)a_2$$

- Holt et Winters proposent les formules de mise à jour suivantes

$$\hat{a}_1(T) = (1-\alpha)x_T + \alpha[\hat{a}_1(T-1) + \hat{a}_2(T-1)]$$
$$\hat{a}_2(T) = (1-\gamma)[\hat{a}_1(T) - \hat{a}_1(T-1)] + \gamma\hat{a}_2(T-1)$$

- α et γ sont des hyperparamètres compris entre 0 et 1

Méthode de Holt-Winters

- La prévision est données par

$$\hat{x}_{T+h} = \hat{a}_1(T) + h\hat{a}_2(T)$$

- On remarque que cette méthode est plus flexible que la méthode LED car elle fait intervenir deux hyperparamètres au lieu d'un seul

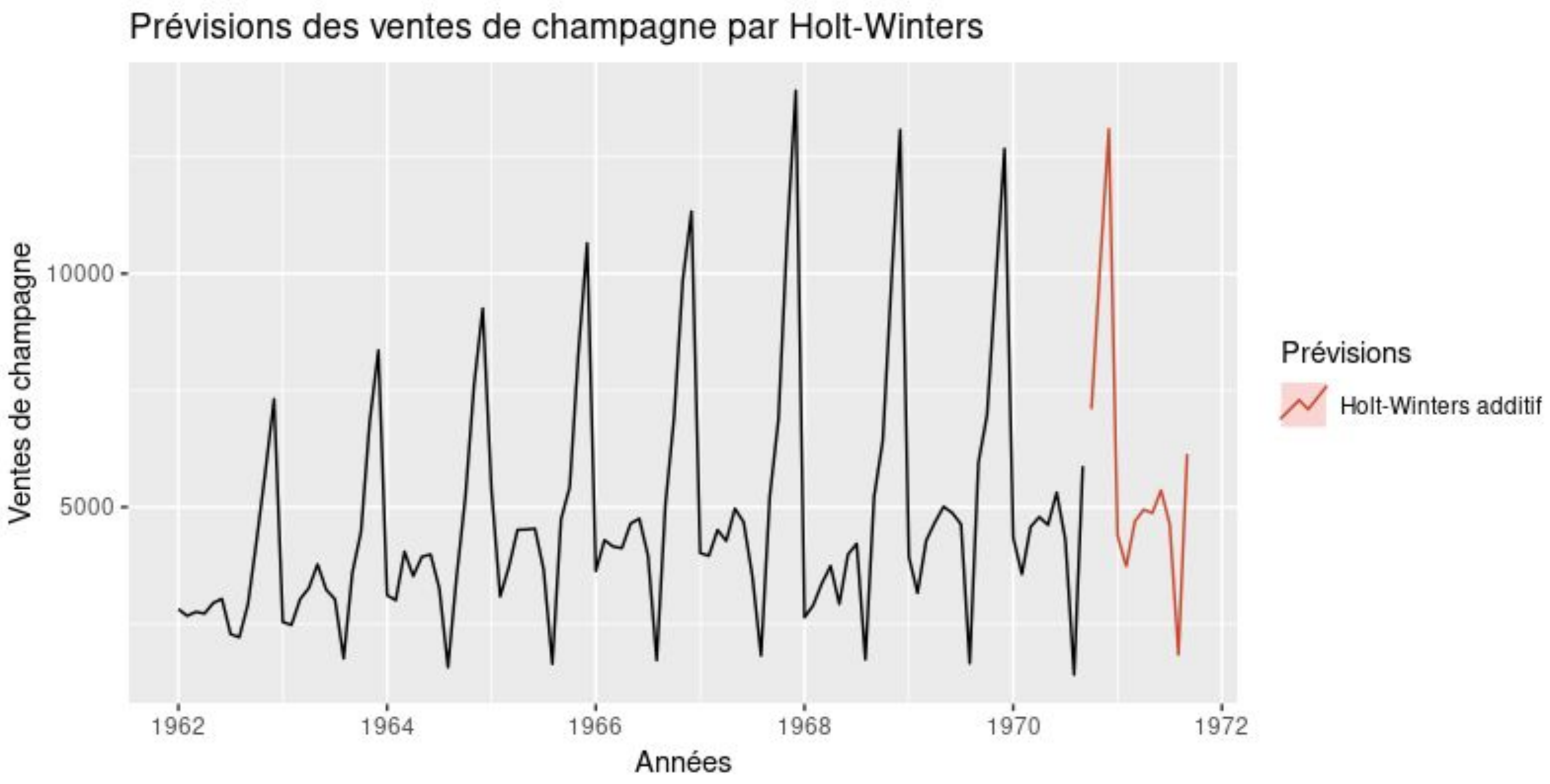
Méthode Holt-Winters additive

- Elle s'applique quand la série peut être approchée localement, au voisinage de **T**, par

$$a_1 + a_2(t - T) + S_t$$

Composante saisonnière !

Méthode Holt-Winters additive



Méthode Holt-Winters additive

- Code R

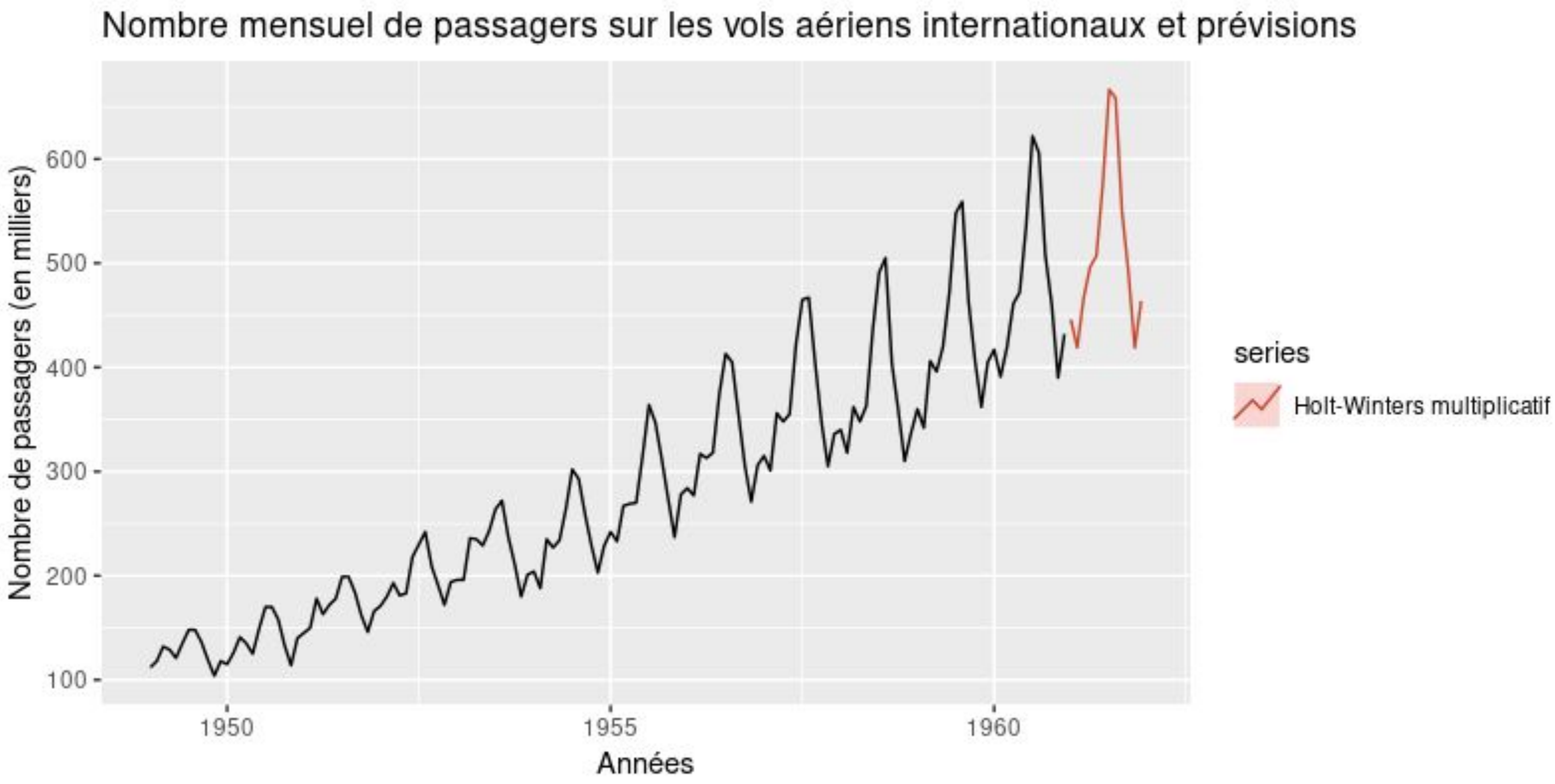
```
champ <- scan("champ.dat")
champ <- ts(champ, start=c(1962,1), frequency=12)
champ1 <- hw(champ, seasonal="additive", h=12)
autoplot(champ) +
  autolayer(champ1, series="Holt-Winters additif", PI=FALSE) +
  xlab("Années") +
  ylab("Ventes de champagne") +
  ggtitle("Prévisions des ventes de champagne par Holt-Winters") +
  guides(colour=guide_legend(title="Prévisions"))
```

Méthode Holt-Winters multiplicative

- Elle s'applique quand la série peut être approchée localement, au voisinage de **T**, par

$$[a_1 + a_2(t - T)]S_t$$

Méthode Holt-Winters multiplicative



Méthode Holt-Winters multiplicative

- Code R

```
airlinemult <- hw(airline, seasonal="multiplicative", h=12)
summary(airlinemult)
autoplot(airline) +
  autolayer(airlinemult, series="Holt-Winters multiplicatif", PI=FALSE) +
  ggtitle("Nombre mensuel de passagers sur les vols aériens internationaux et prévisions") +
  xlab("Années") +
  ylab("Nombre de passagers (en milliers)")
```

5

Références

Références

[1] Cours “R et la prévision de séries temporelles” de Michel Carbon - Université Laval