

Lista de Exercícios 2

Questão 1: (2 pontos)

Exatamente um dos problemas abaixo é semi-decidível. Diga qual problema é/não é semi-decidível justificando sua resposta.

Instância: Uma máquina de Turing M .

Pergunta: $ACEITA(M)$ contém pelo menos 20 palavras?

Instância: Uma máquina de Turing M .

Pergunta: $ACEITA(M)$ contém menos do que 20 palavras?

Usando o teorema de Rice, temos que, toda propriedade não-trivial sobre uma linguagem enumerável recursivamente é indecidível. Logo, é possível verificar que a propriedade sobre a linguagem do primeiro problema é ela conter pelo menos 20 palavras e ela é não-trivial - assim como a propriedade do segundo problema que, por sinal, é o complemento do primeiro.

De fato, é possível verificar que existem linguagens que não contém essa propriedade - a linguagem vazia, por exemplo - e existem linguagens que contém - a linguagem que contém todos os símbolos do sistema de numeração vigesimal.

Portanto, como a propriedade é não-trivial, então o problema é indecidível.

Visto isso, é possível que exista uma máquina de Turing T que recebe uma máquina de Turing M e realiza o seguinte processo:

1. Atribua a c o valor 0, a t o valor 0 e a l a lista vazia.
2. Acrescente a l simulações de M com todas as palavras de tamanho t .
3. Avance um passo em todas simulações existentes.
4. Veja se alguma simulação parou. Se sim, exclua ela da lista de simulações existentes (l) e, se parou aceitando, incremente c .
5. Verifique se $c = 20$. Se sim, pare aceitando M . Senão, incremente t e volte ao passo 2.

Dessa maneira, a máquina T sempre para para qualquer entrada M tal que $|ACEITA(M)| \geq 20$, pois como essas palavras têm tamanho finito e a máquina T verifica todas as palavras de tamanho finito como entrada para essas máquinas, então T irá parar aceitando. Ademais, T entra em loop sempre que receber uma máquina M' tal que $|ACEITA(M')| < 20$. Portanto, como T é uma máquina que semi-decide o primeiro problema, então o primeiro problema é semi-decidível.

Considerando que os problemas são exatamente o complemento um do outro, visto que, se, dada uma máquina de Turing M tal que $|ACEITA(M)| < 20$, então $P_1(M) = false$ e $P_2(M) = true$. Já, se $|ACEITA(M)| \geq 20$, então $P_1(M) = true$ e $P_2(M) = false$.

Assim sendo, como P_1 é indecidível e é semi-decidível, então P_2 deve ser completamente insolucionável, pois, se fosse semi-decidível, P_1 seria decidível, o que é falso pelo teorema de Rice.

Questão 2: (2 pontos)

Para cada um dos problemas abaixo, diga se o problema é decidível ou não justificando sua resposta.

– **(1 ponto) PROBLEMA DA PARADA COM ESPAÇO QUADRÁTICO**
Instância: Uma máquina de Turing M e uma palavra w .
Pergunta: M para com entrada w gastando não mais do que $|w|^2$ de espaço?

– **(1 ponto) PROBLEMA DA EXPANSÃO DECIMAL DE e**
Instância: Um número natural $n \geq 1$
Pergunta: Existe uma sequência contígua com pelo menos n 9's na expansão decimal do número de Euler e ?

• Problema da parada com espaço quadrático:

Se esse problema é decidível, então existe uma máquina de Turing MT que recebe um par (M, w) , tal que M é uma máquina de Turing e w é uma palavra, e que nunca entra em loop - ou seja, devolve sim ou não para qualquer entrada.

Sendo assim, MT pode ser dada por uma máquina de Turing com duas fitas que faz os seguintes processos:

1. Simula M para a palavra w na primeira fita, sendo que, a cada passo, verifica se o uso da fita ultrapassou $|w|^2$. Se sim, MT rejeita a entrada. Senão, vai para o passo 2.

2. Verifica se M parou (está em um estado final em M ou rejeita por indefinição). Se sim, aceita a entrada. Senão, escreve a configuração atual da máquina (o estado em que se encontra, a fita 1 até $|w|^2$ e a posição atual da cabeça na fita 1) em alguma codificação na fita 2 e compara com as outras presentes na fita 2. Se existir uma outra configuração idêntica na fita 2, então significa que a máquina entrou em loop e a entrada é rejeitada. Senão, volta para o passo 1.

Isso se dá porque a máquina é determinística, ou seja, dado um estado, uma fita de uma maneira específica e a cabeça numa certa posição, o próximo passo será sempre o mesmo. Dessa forma, como o número de estados é finito e o número de possíveis situações da fita também - visto que, se ultrapassar $|w|^2$ a máquina já para no passo 1 - então o número de combinações é finito e em algum momento a máquina irá parar ou terá chegado no número máximo de combinações de estado atual e fita, e irá gerar no próximo passo uma combinação que já está presente na fita 2, rejeitando a entrada.

Portanto, MT decide o problema e o problema é decidível.

• **Problema da expansão decimal de e :**

Uma das possibilidades para o conjunto de instâncias codificadas do problema é a linguagem $L = \{1^n | n \in \mathbb{N}^*\}$. Dessa forma, suponha que o problema seja decidível. Assim sendo, existe uma máquina de Turing M que recebe uma instância do problema da expansão decimal de e e para qualquer entrada. Considerando isso, existem duas possibilidades para $ACEITA(M)$:

- **$ACEITA(M)$ é finita:** dessa forma, é importante notar que, para qualquer linguagem finita, é possível criar uma máquina de Turing que verifica se a palavra de entrada é alguma palavra pertencente a essa linguagem. Assim sendo, o conjunto A , dado por todas as máquinas de Turing que contém alguma combinação finita c dos números naturais como palavras pertencentes às linguagens de aceitação e $\forall w \in L, MT_c \in A | w \in ACEITA(MT_c) \iff w \in c$, com certeza contém a máquina M , pois a máquina M nada mais é que uma máquina de Turing que verifica se a palavra de entrada é igual a alguma palavra de uma certa combinação de palavras (essas que são pertencentes a linguagem L). Portanto, M existe e decide o problema da expansão decimal de e .
- **$ACEITA(M)$ é infinita:** consequentemente, $ACEITA(M) = L$. Para isso, usarei uma prova por contradição. Suponha que $ACEITA(M) \neq L$. Assim sendo, como $L = \{1^n | n \in \mathbb{N}^*\}$, então deve existir uma palavra $w_n \in L$ que se refere a um número n tal que $w_n \notin ACEITA(M)$. Dessa forma, como a sequência deve ser contígua, então $(\forall w_m \in L) \wedge (m \geq n) \implies w_m \notin ACEITA(M)$, pois, se $w_m \in ACEITA(M)$, então a "subsequência" de tamanho

n estaria contida na sequência de tamanho m , mas como $w_n \notin ACEITA(M)$, então essa afirmação é verdadeira. Contudo, se essa afirmação for verdadeira, então $ACEITA(M)$ deve ser finita, pois, para quaisquer dois números naturais a e b tal que $a \leq b$, o conjunto formado por todos os números naturais a e b é necessariamente um conjunto finito. Contradição, pois a suposição inicial é que $ACEITA(M)$ é infinita. Logo, $ACEITA(M) = L$. Como L é a linguagem que codifica os números naturais positivos, então é possível construir uma máquina de Turing T que decide L simplesmente verificando se a palavra de entrada é uma sequência de 1's. Por conseguinte, $M = T$ e o problema da expansão decimal de e é decidível.

Como em todos os casos o problema é decidível, então o problema é decidível.

Questão 3: (2 pontos)

Prove que o problema descrito abaixo não é semi-decidível. Prove também que o *complemento* do problema descrito abaixo não é semi-decidível.

– PROBLEMA DAS LINGUAGENS DE ACEITAÇÃO IDÊNTICAS
Instância: Máquinas de Turing M_1 e M_2 .
Pergunta: É verdade que $ACEITA(M_1) = ACEITA(M_2)$?

Para provar que esse problema não é semi-decidível, irei utilizar um corolário.

- **Corolário:** sejam A e B problemas de decisão. Se A não é semi-decidível e existe uma redução $r : A \rightarrow B$, então B não é semi-decidível.

Prova por contradição:

Se A não é semi-decidível, existe uma redução $r : A \rightarrow B$ e B é semi-decidível, então é possível utilizar, para qualquer instância de a de A , $M_B(r(a))$ - tal que M_B é a máquina de Turing que semi-decide B - para semi-decidir A . Dessa forma, A é semi-decidível. Contradição!

Assim sendo, levando em consideração que esse problema ($PA - IGUAL$) é indecidível (de acordo com o slide 384). Então só existem três possibilidades:

- $PA - IGUAL$ é semi-decidível e $\overline{PA - IGUAL}$ não é semi-decidível.
- $\overline{PA - IGUAL}$ é semi-decidível e $PA - IGUAL$ não é semi-decidível.
- $PA - IGUAL$ não é semi-decidível e $\overline{PA - IGUAL}$ não é semi-decidível.

Portanto, se existe uma redução $r : PA - IGUAL \rightarrow \overline{PA - IGUAL}$ e existe uma redução $t : \overline{PA - IGUAL} \rightarrow PA - IGUAL$, então ambos problemas não são semi-decidíveis, pois os dois primeiros casos implicam no terceiro caso.

Dessa forma, seja (M, M') uma instância de $PA - IGUAL$, então $r((M, M')) =$
 ()

Questão 4: (2 pontos)

Seja $M = (\Sigma, Q, \Pi, q_0, F, V, \beta, \odot)$ uma máquina de Turing. Dizemos que uma transição de M é *corretiva* se tal transição faz com que M escreva na fita seu símbolo de espaço em branco β por cima de qualquer símbolo que seja diferente de β . Por exemplo, sejam $q, q' \in Q$ e $a \in \Sigma$. Suponha que $\Pi(q, a) = (q', \beta, D)$. Como $a \neq \beta$ (pois, por definição, $\beta \notin \Sigma$), então a transição de M descrita por $\Pi(q, a)$ é uma transição corretiva, visto que tal transição ordena que M escreva o símbolo de espaço em branco β em cima de um símbolo diferente de β (nesse caso a).

Mostre que, para *toda* máquina de Turing M , existe uma máquina de Turing M' *equivalente* a M (veja no final do enunciado desta questão o conceito de máquinas de Turing equivalentes) *sem transições corretivas*. Em outras palavras, esta questão, essencialmente, pede que você prove que "proibir" transições corretivas em máquinas de Turing não implica na diminuição do seu poder computacional.

É simples fazer a contrução de M' , pois basta acrescentar uma letra a que não pertence a $\Sigma \cup V$ ao alfabeto auxiliar e, nas transições corretivas, trocar o símbolo de espaço em branco por essa letra. Ademais, para toda transição t que existir em M e ler da fita o símbolo do espaço em branco, acrescente uma transição t' que faça exatamente a mesma coisa (saia do mesmo estado que t sai, vá para o mesmo estado t vai, escreva na fita a mesma letra que t escreve e move a cabeça no mesmo sentido que t move) só que lê da fita a e, se t escreve o espaço em branco em cima do espaço em branco lido, então t' escreve a em cima do a lido. Assim sendo, é acrescentado outro símbolo que é equivalente ao símbolo de espaço em branco, mas não é ele, e todas as transições corretivas são retiradas.

Dessa forma, é possível verificar que para qualquer M , existe uma M' equivalente, pois as transições corretivas foram trocadas por outras transições equivalentes quanto ao reconhecimento de linguagens. E como a máquina de Turing é, essencialmente, um reconhecedor de linguagens, então essa equivalência computacional é válida.

Já, para computação de funções, seria necessário modificar como as funções são computadas, sendo que a função que a apaga da fita os espaços vazios também iria apagar da fita esse símbolo extra acrescentado.

Questão 5: (2 pontos)

Prove que se uma função total $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é bijetora e Turing computável (isto é, pode ser computada por uma máquina de Turing), então f^{-1} (isto é, a inversa de f) é total e Turing-computável.

Suponha que $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é uma função total, bijetora e Turing computável. Logo, como é total, então ela também é Turing decidível, pois, para toda entrada, existirá uma saída. Ou seja, $LOOP(M)$, tal que M é a máquina de Turing que computa essa função, é a linguagem vazia.

Assim sendo, é possível definir $f^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ por uma máquina de Turing

que recebe um número natural e testa todas as entradas possíveis para f , iniciando em 0, verificando se a saída de f é igual ao número natural dado como entrada. Se for, devolve a entrada dada pra f nessa iteração. Senão, incrementa a entrada de f e realiza o teste novamente. Dessa forma, f^{-1} é Turing computável.

Já para verificar que f^{-1} é total, irei provar que para qualquer função total bijetora $\delta : A \rightarrow B$, existe uma função inversa $\delta^{-1} : B \rightarrow A$ tal que δ^{-1} é total. Para isso, segue uma prova por contradição.

- Suponha que δ^{-1} seja a inversa de δ e não é total. Logo, $\exists b \in B, \forall a \in A | \delta^{-1}(b) \neq a$. Agora, como δ é bijetora, então $\exists c \in A | \delta(c) = b$. Assim sendo, como $\forall a \in A, \delta^{-1}(\delta(a)) = a$ - visto que δ^{-1} é a inversa de δ -, então $\delta^{-1}(\delta(c)) = c = \delta^{-1}(b)$. Contradição, pois $\forall a \in A | \delta^{-1}(b) \neq a$. Logo, δ^{-1} é total.

Dessa forma, f^{-1} também é total.