Laporan Tugas Besar I
IF-2123 Aljabar Linier Dan Geometri
Sistem Persamaan Linier, Determinan, dan Aplikasinya

Kelompok 31 – I Am Geprek

13520002 Muhammad Fikri Ranjabi
13520066 Putri Nurhaliza
13520161 M Syahrul Surya P

Institut Teknologi Bandung

Semester I 2021/2022

DAFTAR ISI

BAB I
DESKRIPSI MASALAH

Sistem persamaan linier (SPL) banyak ditemukan di dalam bidang sains dan rekayasa. Sembarang SPL dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan ($x = A$-1b), dan kaidah *Cramer* (khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Solusi sebuah SPL mungkin tidak ada, banyak (tidak berhingga), atau hanya satu (unik/tunggal).

Untuk mengoptimalkan penggunaan matriks, diperlukan suatu program komputer yang memuat satu atau lebih *library* aljabar linier. Salah satunya dapat diterapkan dalam bahasa pemograman Java. *Library* tersebut berisi fungsi-fungsi seperti eliminasi Gauss, eliminasi Gauss-Jordan, menentukan balikan matriks, menghitung determinan, kaidah Cramer (kaidah Cramer khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). *Library* tersebut dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai persoalan yang dimodelkan dalam bentuk SPL, menyelesaikan persoalan interpolasi, dan persoalan regresi linier berganda.

BAB II
TEORI SINGKAT

A. Metode Eliminasi Gauss

Eliminasi Gauss merupakan salah satu metode untuk menyelesaikan beberapa permasalahan yang diaplikasikan dengan matriks, salah satunya untuk mencari solusi sistem persamaan linear (SPL). Eliminasi Gauss diinisialisasi dengan matriks augmented, lalu diterapkan Operasi Baris Elementer (OBE) hingga terbentuk matriks eselon baris. Solusi SPL kemudian bisa didapatkan dengan *backward substitution*.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix} \sim\text{OBE}\sim \begin{bmatrix} 1 & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & * \end{bmatrix}$$

B. Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Metode eliminasi gauss jordan merupakan lanjutan dari metode gauss. Pada metode gauss, matriks yang terbuat dari OBE adalah matriks eselon baris. Sedangkan pada metode gauss jordan, matriks yang dihasilkan adalah matriks eselon baris tereduksi yang mana setiap elemen satu utama, tidak boleh ada nilai selain 0 di atas atau di bawahnya.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \sim\text{OBE}\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & * \end{bmatrix}$$

C. Determinan

Determinan adalah salah satu nilai skalar yang dapat diperoleh dari matriks persegi. Determinan dari matriks A dapat dituliskan det(A) atau |A|. Untuk matriks berukuran 2x2,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Untuk matriks berukan n x n, terdapat beberapa metode untuk menemukan determinan matriks, diantaranya adalah dengan ekspansi kofaktor dan reduksi baris. Determinan dapat mengidentifikasi karakteristik matriks itu sendiri, yang berguna untuk berbagai operasi matriks lainnya.

D. Matriks Balikan

Misalkan A adalah matriks persegi berukuran n x n. Balikan (inverse) matriks A adalah A^-1 sedemikian sehingga AA^-1 = A^-1A = I. Matriks balikan dapat dihitung menggunakan metode eliminasi gauss jordan dengan menambahkan matriks identitas setelah matriks A, kemudian dilakukan eliminasi gauss jordan sehingga matriks identitas berpindah ke bagian kiri dan bagian akan akan menjadi hasil oleh matriks invers.

$$[A|I] \overset{\text{G-J}}{\sim} [I|A^{-1}]$$

Contoh 4: Tentukan balikan dari matriks A berikut: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R3-R1}{\overset{R2-2R1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{R3+2R2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{R3/(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \overset{R1-2R2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \underset{R2+3R3}{\overset{R1-9R3}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) = (I|A^{-1})$$

Jadi, balikan matriks A adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

E. Matriks Kofaktor

Matriks Kofaktor adalah sebuah hasil operasi matriks persegi yang melibatkan determinan matriks minor-nya. Misal, A adalah matriks n x n dan C_{ij} adalah kofaktor entri a_{ij}, maka matriks kofaktor dari A adalah

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{ij} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

dimana C_{ij} berkoresponden dengan minor entri M_{ij} (determinan minor), yang tanda positif/negatif-nya dibalik jika nilai $i + j$ adalah bilangan ganjil. Ekspansi kofaktor dapat menghasilkan determinan, baik secara kolom maupun baris. Selain itu, matriks kofaktor yang di-transpose kan akan menghasilkan matriks adjoin.

F. Matris Adjoin

Adjoin didefinisikan sebagai transpose dari suatu matriks kofaktor. Adjoin matriks berperan dalam menemukan *inverse* suatu matriks, yakni dengan mengalikannya dengan $1/determinan$.

G. Kaidah Cramer

Jika A**x** = **b** adalah SPL yang terdiri dari n persamaan linier dengan n peubah (variable) sedemikian sehingga det(A) ≠ 0, maka SPL tersebut memiliki solusi unik yaitu

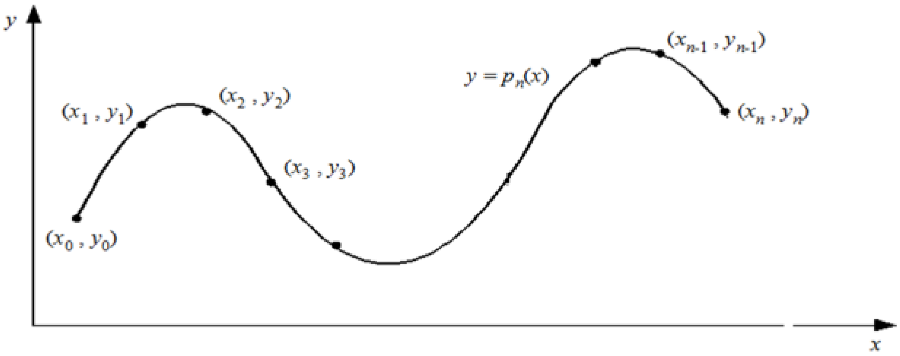
$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

yang dalam hal ini, Aj adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti entri pada kolom ke-j dari A dengan entri dari matriks

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

H. Interpolasi Polinom

Interpolasi polinom memiliki bentuk polinom interpolasi derajat n yang menginterpolasi $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ adalah berbentuk $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 a x_2 + \cdots + a_n a x_n$. Polinom berderajat n dibuat dengan (n + 1) buah titik data. Kemudian (x_i, y_i) disulihkan ke dalam persamaan polinom sehingga didapatkan sistem persamaan lanjar. Setelah itu digunakan metode eliminasi gauss untuk mendapatkan solusi dari spl tersebut yang akan menjadi nilai untuk persamaan polinom interpolasi.



I. Regresi Linier Berganda

Regresi Linear Berganda adalah model regresi linear dengan melibatkan lebih dari satu variable bebas atau prediktor. Ini merupakan salah satu metode untuk memprediksi suatu nilai dengan bentuk rumus umum:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$$

Untuk mendapatkan nilai dari setiap β_i dapat digunakan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression sebagai berikut:*

$$\begin{array}{lllll}
nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & + \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki} & = \sum_{i=1}^{n} y_i \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} & + \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{ki} & = \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} x_{1i} & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} x_{2i} & + \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 & = \sum_{i=1}^{n} x_{ki} y_i
\end{array}$$

Kemudian dengan metode eliminasu gauss, dapat dihasilkan solusi sistem persamaan linear tersebut yang nantinya dapat digunakan untuk menaksir suatu nilai.

BAB III
IMPLEMENTASI PUSTAKA DAN PROGRAM DALAM BAHASA JAVA

A. Garis Besar Program

Sebuah program Java yang bisa mencari solusi dari Sistem Persamaan Linier, Determinan, menemukan balikan dari suatu matriks, menyelesaikan persoalan interpolasi dan regresi linier. Untuk mencari solusi dari SPL, bisa menggunakan eliminasi Gauss, elimintasi Gauss-Jordan, menggunakan matriks balikan, dan kaidah Crammer. Untuk mencari determinan bisa menggunakan reduksi baris dan ekspansi kofaktor. Dan untuk balikan matriks, bisa menggunakan Gauss-Jordan dan Adjoin.

B. Struktur Class

1. Class Matrix

a. Attribute

Nama	Tipe	Deskripsi
ELMT	double[][]	Berisi elemen matriks
baris	int	Baris Matriks
kolom	int	Kolom Matriks

b. Methods

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
Matriks	konstruktor	int baris, int kolom	Membuat matriks dengan ukuran baris dan kolom
DisplayMatriks	public void		Menampilkan seluruh elemen matriks ke layer
changeRow	public static	Matriks m1, Matriks m2, int col	
copyMatriks	public static	Matriks m, int baris, int kolom	Mengembalikan nilai matriks hasil salinan dari matriks m
readSquareMatriks	public static		Membaca matriks berukuran n x n
keyboardInput	public static		Menerima input dari keyboard
fileInput	public	fileName	Menerima input sebuah file matriks
displaySPLSolution	public static void	double[] result	Menampilkan hasil SPL dalam bentuk double
displaySPLSolution	public static void	String[] result	Menampilkan hasil SPL dalam bentuk string
displayDeterminant	public static void	double det	Menampilkan hasil determinan ke layar

2. Class GaussElimination, Class GaussDeterminant, Class Solution
   a. Methods

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
gaussElimination	public static void	Matriks m	Melakukan eliminasi gauss dengan operasi baris elementer, menghasilkan matriks eselon baris.
swapRow	public static void	Matriks m, int brs1, int brs2	Menukarkan baris 1 dengan baris 2 dari matriks
allElmtColUnderIs0	public static Boolean	Matriks m, int iBrs, int iKol	Menghasilkan true jika semua elemen kolom iKol pada iBrs kebawah adalah 0
allElmtRowIs0	public static Boolean	Matriks m, int idx	Mengirimkan true jika semua elemen baris idx adalah 0
orderRow	public static void	Matriks m, int iBrs, int iKol	Menukar baris iBrs jika m[iBrs][iKol]=0 dengan baris lain dibawahnya yang elemennya tidak 0
gaussDeterminant	public static double	Matriks m	Menghasilkan nilai determinan dari matriks m
gaussSolution	public static void	Matriks m	Menentukan dan menampilkan solusi dari metode gauss matriks m ke layar
isNoSolution	public static Boolean	Matriks m	Mengirimkan true jika matriks tidak mempunyai solusi
isOneSolution	public static double[]	Matriks m	Menghasilkan result berupa solusi dari matriks yang mempunyai 1 solusi unik
parametricSolutions	public static String[]	Matriks m	Menghasilkan hasil parametrik pada matriks yang mempunyai banyak solusi
isNoParametric	public static Boolean	double[][] paramMatrix, int baris, int kolom	Menghasilkan true jika baris tidak memiliki solusi parametrik

isOtherLeftCol0	public static Boolean	Matriks m, int baris, int kolom	Mengirimkan true jika kolom di sebelah kiri 0 semua
isOtherRightCol0	public static Boolean	Matriks m, int baris, int kolom	Mengirimkan true jika kolom di sebelah kanan 0 semua

3. Class GaussJordanElimination, Class GaussJordanInverse, Class GaussJordanInverseSolution

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
gaussJordanElimination	public static void	Matriks m	Melakukan OBE sampai didapatkan matriks eselon baris tereduksi
allElmtColUnderIs0	public static boolean	Matriks m, int iBrs, int iKol	Menghasilkan true jika semua elemen kolom iKol pada iBrs kebawah adalah 0
findLeading	public static Boolean	Matriks m, int iBrs	Mengirimkan true jika elemen bukan 1 utama
findLeadingIdx	public static int	Matriks m, int iBrs	Mengirimkan indeks pada nilai 1 utama
makeInverse	public static	Matriks m	Menghasilkan matriks balikan
gaussJordanInverseSolution	public static void	Matriks m	Menghasilkan nilai solusi dari metode invers dengan gauss jordan

4. Class CofactorDeterminant, GaussDeterminant

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
getDeterminant	public static double	Matriks m	Mendapatkan determinan dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor
getMinor	public static Matriks	Matriks m, int x, int y	Mendapatkan matriks minor untuk metode kofaktor
gaussDeterminant	public static double	Matriks m	Mendapatkan determinan dari metode gauss

5. Class AdjointInverse, Class TransposeCofactorAdjoint

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
getTranspose	public static Matriks	Matriks m	Menghasilkan transpose dari matriks m
getCofactor	public static Matriks	Matriks m	Menghasilkan kofaktor dari matriks m
getAdjoint	public static Matriks	Matriks m	Menghasilkan adjoin dari matriks m
getInverse	public static void	Matriks m	Menghasilkan inverse matriks dengan metode adjoin
multiplyMatrix	public static Matriks	Matriks m, double k	Operasi perkalian matriks untuk metode adjoint
getResult	public static Matriks	Matriks m	Mendapatkan hasil dari inverse dengan metode adjoint

6. Class Crammer

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
getSolution	public static void	Matriks m	Menghasilkan solusi SPL dengan kaidah kramer

7. Class InterpolasiPolinom

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
readPolinom	public static Matriks	-	Menginput n pasangan titik dan kemudian membentuk matriks nx2
readX	public static double	-	Menginput titik yang akan ditaksir
makePolinom	public static Matriks	-	Membentuk matriks representasi persamaan polinom
polinomSolution	public static void	-	Menghasilkan polinom interpolasi dan nilai taksiran

displaySPlSolution	public static void	double[] result	Menampilkan hasil result ke layar

8. Class Reg

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
getSolution	public static void	Matriks m	Menampilkan persamaan yang didapat dan hasil taksiran dari taksiran x1, x2, x3 yang ada
getMatriks	public static Matriks	Matriks m	Mendapatkan matriks *Normal Estimation Equation*
getTaksiran	public static double[]	Matriks m	Mengambil input taksiran untuk menentukan taksiran Y
displayEquation	public static void	Matriks m	Menampilkan persamaan hasil regresi

BAB IV
HASIL EKSPERIMEN

1. Solusi SPL Ax = b

a	Metode Gauss
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$	Hasil Eliminasi Gauss: 1.00 1.00 -1.00 -1.00 1.00 0.00 1.00 -1.67 -1.00 -1.33 0.00 0.00 1.00 -1.00 1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 Sistem persamaan linear ini tidak memiliki solusi
b	**Metode Gauss Jordan**
$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$	1.00 0.00 0.00 0.00 -1.00 3.00 0.00 1.00 0.00 0.00 -2.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 -1.00 -1.00 Sistem persamaan linear ini memili banyak solusi, dengan: x1 = 3.0 + a x2 = 2.0a x3 = b x4 = -1.0 + a x5 = a
c	**Metode Crammer**
$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	0 1 0 0 1 0 2 0 0 0 1 1 0 -1 0 1 0 0 0 1 1 Matriks Base Crammer harus NxN
d	**Metode Gauss Jordan**
n = 6 $H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}, \quad b =$	1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 36.00 0.00 1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 -630.00 0.00 0.00 1.00 0.00 0.00 0.00 3360.00 0.00 0.00 0.00 1.00 0.00 0.00 -7560.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 0.00 7560.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 -2772.00 Sistem persamaan linear ini memiliki 1 solu unik, yaitu: x1 = 36.000 x2 = -630.000 x3 = 3360.000 x4 = -7560.000 x5 = 7560.000 x6 = -2772.000

n=10	Hasil Eliminasi Gauss: 1.00 0.50 0.33 0.25 0.20 0.17 0.14 0.13 0.11 0.10 1.00 0.00 1.00 1.00 0.90 0.80 0.71 0.64 0.58 0.53 0.49 -6.00 0.00 0.00 1.00 1.50 1.71 1.79 1.79 1.75 1.70 1.64 30.00 0.00 0.00 0.00 1.00 2.00 2.78 3.33 3.71 3.96 4.11 -140.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 2.50 4.09 5.57 6.85 7.93 630.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 3.00 5.65 8.62 11.63 -2772. 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 3.50 7.47 12.60 12012. 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 4.00 9.53 -51480. 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 4.50 218789. 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 -923630 Sistem persamaan linear ini memiliki 1 solusi unik, yaitu x1 = 99.996 x2 = -4949.683 x3 = 79193.220 x4 = -600538.192 x5 = 2522224.561 x6 = -6305486.469 x7 = 9608263.414 x8 = -8750306.886 x9 = 4375120.485 x10 = -923630.445

2. **SPL berbentuk matriks augmented**

a	**Metode Matriks Balikan**
$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$.	1 -1 2 -1 -1 2 1 -2 -2 -2 -1 2 -4 1 1 3 0 0 -3 -3 Matriks tidak memiliki inverse
b	**Metode Gauss**
$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.	Hasil Eliminasi Gauss: 1.00 0.00 4.00 0.00 4.00 0.00 1.00 0.00 4.00 6.00 0.00 0.00 1.00 0.00 1.00 0.00 0.00 0.00 1.00 1.00 Sistem persamaan linear ini memiliki 1 solusi unik, yaitu: x1 = 0.000 x2 = 2.000 x3 = 1.000 x4 = 1.000

3. **SPL berbentuk**

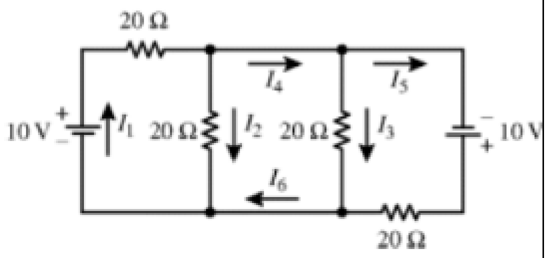
a	**Metode Crammer**
$8x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0$ $2x_1 + 9x_2 - x_3 - 2x_4 = 1$ $x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2$ $x_1 + 6x_3 + 4x_4 = 3$	8 0 3 2 0 2 9 -1 -2 1 1 3 2 -1 2 1 0 6 4 3 x1 = -0.200 x2 = 0.176 x3 = 0.706 x4 = -0.259
b	**Metode Gauss**

$$x_7 + x_8 + x_9 = 13$$
$$x_4 + x_5 + x_6 = 15$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 8.$$
$$0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_6 + x_8) + 0.61396x_9 = 14$$
$$0.91421(x_3 + x_5 + x_7) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) = 14$$
$$0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_2 + x_4) + 0.61396x_1 = 3.$$
$$x_3 + x_6 + x_9 = 18$$
$$x_2 + x_5 + x_8 = 12$$
$$x_1 + x_4 + x_7 = 6.$$
$$0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_2 + x_6) + 0.61396x_3 = 10$$
$$0.91421(x_1 + x_5 + x_9) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) = 16$$
$$0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_4 + x_8) + 0.61396x_7 = 7.$$

```
Hasil Eliminasi Gauss:
1.00 1.00 1.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 8.00
0.00 1.00 3.66 1.00 3.66 1.00 3.66 1.00 0.00 57.24
0.00 0.00 1.00 0.00 1.00 17.49 1.00 17.49 14.31 344.84
0.00 0.00 0.00 1.00 1.00 1.00 0.00 0.00 0.00 15.00
0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 -161546268097193376.00 -5530060054440778
167076328151634144.00 -137773989069044560.00 -315589650527285710
0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 0.03 1.03 0.85 19.54
0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 1.00 1.00 13.00
0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 17.00 13.00
0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 -16.00
Sistem persamaan linear ini memiliki 1 solusi unik, yaitu:
x1 = 24.004
x2 = 2532.989
x3 = -2548.993
x4 = -2548.188
x5 = 2816.000
x6 = -252.812
x7 = -256.000
x8 = 285.000
x9 = -16.000
```

4. **Menentukan arus listrik yang mengalir pada rangkaian**

Konversi ke dalam augmented	Metode Gauss




```
Hasil Eliminasi Gauss:
1.00 0.00 0.00 -0.50 0.00 0.00 0.25
0.00 1.00 0.00 0.50 0.00 0.00 0.25
0.00 0.00 1.00 -1.00 1.00 0.00 0.00
0.00 0.00 0.00 1.00 -0.67 0.00 0.17
0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 0.00 0.50
0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 1.00 0.50
Sistem persamaan linear ini memiliki 1
solusi unik, yaitu:
x1 = 0.500
x2 = 0.000
x3 = -0.000
x4 = 0.500
x5 = 0.500
x6 = 0.500
```

5. **Sistem Reaktor**

Konversi ke Matriks Augmented	Metode Matriks Balikan

```
-40   60    -80    -1300
40    -80   0      0
80    20    -150   -200
```

```
-40   60    -80    -1300
40    -80   0      0
80    20    -150   -200
x1 = 20.000
x2 = 10.000
x3 = 13.000
```

6. Studi Kasus Interpolasi

a. Akan dilakukan sebuah pengujian dengan data yang berasal dari tabel seperti berikut:

x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
$f(x)$	0.003	0.067	0. 148	0.248	0.370	0.518	0.697

Berikut adalah tampilan program,

```
-------------KALKULATOR MATRIKS-------------
1. Menentukan Solusi Persamaan Linier
2. Determinan
3. Transpose, Kofaktor, Adjoin
4. Matriks Balikan
5. Interpolasi Polinom
6. Regresi Linier Berganda
7. Keluar

Pilih operasi: 5
Masukkan jumlah n:
7
Masukkan pasangan titik-titik:
0.1 0.003
0.3 0.067
0.5 0.148
0.7 0.248
0.9 0.370
1.1 0.518
1.3 0.697
Masukkan nilai x yang akan ditaksir:
0.2
x1 = -0.0230
x2 = 0.2400
x3 = 0.1974
x4 = 0.0000
x5 = 0.0260
x6 = 0.0000
x7 = -0.0000
```

```
Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan:
a0 = -2.2977E-02, a1 = 2.4000E-01, a2 = 1.9740E-01, a3 = 7.5879E-14, a4 = 2.6042E-02, a5 = 5.5147E-14, a6 = -1.2663E-14.

Polinom interpolasi yang melalui 7 buah titik tersebut adalah p6(x) =
 -2.2977E-02x^0 + 2.4000E-01x^1 + 1.9740E-01x^2 + 7.5879E-14x^3 + 2.6042E-02x^4 + 5.5147E-14x^5 + -1.2663E-14^6.

Dengan menggunakan polinom ini, maka nilai fungsi pada x = 0.200
dapat ditaksir menghasilkan p6(0.200) = 0.032961
```

Gambar x.x Output program studi kasus 6.a. untuk x = 0.2 (kolom hasil persamaan diperlebar untuk memudahkan keterbacaan)

Kemudian dicari f(x) dengan memanfaatkan interpolasi polinom untuk menaksir beberapa titik x sehinga didapatkan hasil seperti di atas.

Dilakukan pengulangan dengan memasukkan pasangan titik yang sama, dengan variasi nilai x yang akan ditaksir.

Untuk nilai x = 0.55, x = 0.85, dan x = 1.28. Didapat hasil f(x) seperti gambar di bawah.

```
Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan:
a0 = -2.2977E-02, a1 = 2.4000E-01, a2 = 1.9740E-01, a3 = 7.5879E-14, a4 = 2.6042E-02, a5 = 5.5147E-14, a6 = -1.2663E-14.

Polinom interpolasi yang melalui 7 buah titik tersebut adalah p6(x) =
 -2.2977E-02x^0 + 2.4000E-01x^1 + 1.9740E-01x^2 + 7.5879E-14x^3 + 2.6042E-02x^4 + 5.5147E-14x^5 + -1.2663E-14^6.

Dengan menggunakan polinom ini, maka nilai fungsi pada x = 0.550
dapat ditaksir menghasilkan p6(0.550) = 0.171119
```

```
Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan:
```

```
Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan:
a0 = -2.2977E-02, a1 = 2.4000E-01, a2 = 1.9740E-01, a3 = 7.5879E-14, a4 = 2.6042E-02, a5 = 5.5147E-14, a6 = -1.2663E-14.

Polinom interpolasi yang melalui 7 buah titik tersebut adalah p6(x) =
 -2.2977E-02x^0 + 2.4000E-01x^1 + 1.9740E-01x^2 + 7.5879E-14x^3 + 2.6042E-02x^4 + 5.5147E-14x^5 + -1.2663E-14^6.

Dengan menggunakan polinom ini, maka nilai fungsi pada x = 1.280
dapat ditaksir menghasilkan p6(1.280) = 0.677542
```

Dari percobaan di atas, maka hasil pengujian adalah sebagai berikut.

x = 0.2 f(x) = 0.032961

x = 0.55 f(x) = 0.171119

x = 0.85 f(x) = 0.337236

x = 1.28 f(x) = 0.677542

b. Dengan memanfaatkan polinom interpolasi, akan dilakukan prediksi jumlah kasus Covid-19 pada tanggal yang ditentukan dari tabel berikut.

Tanggal	Tanggal (desimal)	Jumlah Kasus Baru
17/06/2021	6,567	12.624
30/06/2021	7	21.807
08/07/2021	7,258	38.391
14/07/2021	7,451	54.517
17/07/2021	7,548	51.952
26/07/2021	7,839	28.228
05/08/2021	8,161	35.764
15/08/2021	8,484	20.813
22/08/2021	8,709	12.408
31/08/2021	9	10.534

Tanggal (desimal) adalah tanggal yang sudah diolah ke dalam bentuk desimal 3 angka di belakang koma dengan memanfaatkan perhitungan sebagai berikut:

tanggal(desimal) = bulan + (tanggal / jumlah hari pada bulan tersebut)

Permasalahan ini dapat diolah dengan memasukkan nilai Tanggal (desimal) sebagai nilai x dan Jumlah Kasus Baru sebagai nilai dari f(x). Untuk nilai n adalah 10 karena kita memiliki data 10 pasangan titik.

Gunakanlah data di atas dengan memanfaatkan **polinom interpolasi** untuk melakukan prediksi jumlah kasus baru Covid-19 pada tanggal-tanggal berikut:

a. 16/07/2021
b. 10/08/2021
c. 05/09/2021
d. beserta masukan user lainnya berupa **tanggal (desimal) yang sudah diolah** dengan asumsi prediksi selalu dilakukan untuk tahun 2021.

Berikut adalah tampilan program ketika memasukkan 10 data dengan tanggal dalam desimal dan jumlah kasus baru.

```
-------------KALKULATOR MATRIKS-------------
1. Menentukan Solusi Persamaan Linier
2. Determinan
3. Transpose, Kofaktor, Adjoin
4. Matriks Balikan
5. Interpolasi Polinom
6. Regresi Linier Berganda
7. Keluar

Pilih operasi: 5
Masukkan jumlah n:
10
Masukkan pasangan titik-titik:
6.567 12.624
7 21.807
7.258 38.391
7.451 54.517
7.548 51.952
7.839 28.228
8.161 35.764
8.484 20.813
8.709 12.408
9 10.534
```

Kemudian untuk tanggal lainnya yang akan diprediksi, dikonversikan terlebih dahulu ke dalam bentuk desimal secara manual.

Untuk tanggal 16/07/2021, 10/08/2021, 05/09/2021. Didapat hasil f(x) sebagai prediksi jumlah kasus baru Covid-19 seperti gambar di bawah

```
Masukkan nilai x yang akan ditaksir:
7.516
Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan:
a0 = 7.1877E+12, a1 = -9.3478E+12, a2 = 5.3346E+12, a3 = -1.7569E+12, a4 = 3.6857E+11, a5 = -5.1135E+10,
a6 = 4.6961E+09, a7 = -2.7549E+08, a8 = 9.3733E+06, a9 = -1.4100E+05.

Polinom interpolasi yang melalui 10 buah titik tersebut adalah p9(x) =
 7.1877E+12x^0 + -9.3478E+12x^1 + 5.3346E+12x^2 + -1.7569E+12x^3 + 3.6857E+11x^4 + -5.1135E+10x^5 + 4.696
1E+09x^6 + -2.7549E+08x^7 + 9.3733E+06x^8 + -1.4100E+05^9.

Dengan menggunakan polinom ini, maka nilai fungsi pada x = 7.516
dapat ditaksir menghasilkan p9(7.516) = 53538.228516
```

Prediksi Jumlah Kasus Baru Covid-19 pada tanggal 16/07/2021. Nilai tanggal dalam bentuk desimal adalah 7.516.

```
Masukkan nilai x yang akan ditaksir:
8.323
Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan:
a0 = 7.1877E+12, a1 = -9.3478E+12, a2 = 5.3346E+12, a3 = -1.7569E+12, a4 = 3.6857E+11, a5 = -5.1135E+10,
a6 = 4.6961E+09, a7 = -2.7549E+08, a8 = 9.3733E+06, a9 = -1.4100E+05.

Polinom interpolasi yang melalui 10 buah titik tersebut adalah p9(x) =
 7.1877E+12x^0 + -9.3478E+12x^1 + 5.3346E+12x^2 + -1.7569E+12x^3 + 3.6857E+11x^4 + -5.1135E+10x^5 + 4.696
1E+09x^6 + -2.7549E+08x^7 + 9.3733E+06x^8 + -1.4100E+05^9.

Dengan menggunakan polinom ini, maka nilai fungsi pada x = 8.323
dapat ditaksir menghasilkan p9(8.323) = 36295.355469
```

Prediksi Jumlah Kasus Baru Covid-19 pada tanggal 10/08/2021. Nilai tanggal dalam bentuk desimal adalah 8.323.

```
Masukkan nilai x yang akan ditaksir:
9.167
Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan:
a0 = 7.1877E+12, a1 = -9.3478E+12, a2 = 5.3346E+12, a3 = -1.7569E+12, a4 = 3.6857E+11, a5 = -5.1135E+10,
a6 = 4.6961E+09, a7 = -2.7549E+08, a8 = 9.3733E+06, a9 = -1.4100E+05.

Polinom interpolasi yang melalui 10 buah titik tersebut adalah p9(x) =
 7.1877E+12x^0 + -9.3478E+12x^1 + 5.3346E+12x^2 + -1.7569E+12x^3 + 3.6857E+11x^4 + -5.1135E+10x^5 + 4.696
1E+09x^6 + -2.7549E+08x^7 + 9.3733E+06x^8 + -1.4100E+05^9.

Dengan menggunakan polinom ini, maka nilai fungsi pada x = 9.167
dapat ditaksir menghasilkan p9(9.167) = -667701.078125
```

Prediksi Jumlah Kasus Baru Covid-19 pada tanggal 05/09/2021. Nilai tanggal dalam bentuk desimal adalah 9.167.

```
Masukkan nilai x yang akan ditaksir:
8.548
Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan:
a0 = 7.1877E+12, a1 = -9.3478E+12, a2 = 5.3346E+12, a3 = -1.7569E+12, a4 = 3.6857E+11, a5 = -5.1135E+10,
a6 = 4.6961E+09, a7 = -2.7549E+08, a8 = 9.3733E+06, a9 = -1.4100E+05.

Polinom interpolasi yang melalui 10 buah titik tersebut adalah p9(x) =
 7.1877E+12x^0 + -9.3478E+12x^1 + 5.3346E+12x^2 + -1.7569E+12x^3 + 3.6857E+11x^4 + -5.1135E+10x^5 + 4.696
1E+09x^6 + -2.7549E+08x^7 + 9.3733E+06x^8 + -1.4100E+05^9.

Dengan menggunakan polinom ini, maka nilai fungsi pada x = 8.548
dapat ditaksir menghasilkan p9(8.548) = 13421.746094
```

Prediksi Jumlah Kasus Baru Covid-19 pada tanggal 17/08/2021. Nilai tanggal dalam bentuk desimal adalah 8.548.

Dari semua percobaan di atas, dapat dilihat bahwa jumlah kasus baru Covid-19 adalah sebagai berikut.

a. 16/07/2021	53538 Kasus Baru
b. 10/08/2021	36295 Kasus Baru
c. 05/09/2021	-667701 Kasus Baru
d. 17/08/2021 (masukan user)	13421 Kasus Baru

c. Akan disederhanakan sebuah fungsi

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{e^x + x}$$

dengan polinom interpolasi derajat *n* di dalam selang [0, 2]. Persoalan ini dapat diselesaikan dengan mensubtitusikan nilai x dengan jarak tertentu dalam selang titik untuk mendapatkan nilai f(x).

Dipilih nilai n = 5. Maka titik-titik x yang diambil di dalam selang [0, 2] berjarak h = (2 – 0)/5 = 0.4. Kemudian substitusikan nilai x ke dalam persamaan untuk mendapatkan f(x). Sehingga 6 pasangan titik adalah sebagai berikut:

0	0
0.4	0.4189
0.8	0.5072
1.2	0.5609
1.6	0.5837

2 0.5767

```
-------------KALKULATOR MATRIKS------------
1. Menentukan Solusi Persamaan Linier
2. Determinan
3. Transpose, Kofaktor, Adjoin
4. Matriks Balikan
5. Interpolasi Polinom
6. Regresi Linier Berganda
7. Keluar

Pilih operasi: 5
Masukkan jumlah n:
6
Masukkan pasangan titik-titik:
0       0
0.4     0.4189
0.8     0.5072
1.2     0.5609
1.6     0.5837
2       0.5767
```

Setelah itu akan dicoba untuk memprediksi 3 buah titik: 22.21, 29.90, dan 10.01 dengan persamaan di atas. Hasilnya adalah sebagai berikut.

```
Masukkan nilai x yang akan ditaksir:
22.21
Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan:
a0 = 0.0000E+00, a1 = 2.0347E+00, a2 = -3.5499E+00, a3 = 3.2329E+00, a4 = -1.4188E+00, a5 = 2.3576E-01.

Polinom interpolasi yang melalui 6 buah titik tersebut adalah p5(x) =
 0.0000E+00x^0 + 2.0347E+00x^1 + -3.5499E+00x^2 + 3.2329E+00x^3 + -1.4188E+00x^4 + 2.3576E-01^5.

Dengan menggunakan polinom ini, maka nilai fungsi pada x = 22.210
dapat ditaksir menghasilkan p5(22.210) = 962601.031088
```

```
Masukkan nilai x yang akan ditaksir:
29.90
Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan:
a0 = 0.0000E+00, a1 = 2.0347E+00, a2 = -3.5499E+00, a3 = 3.2329E+00, a4 = -1.4188E+00, a5 = 2.3576E-01.

Polinom interpolasi yang melalui 6 buah titik tersebut adalah p5(x) =
 0.0000E+00x^0 + 2.0347E+00x^1 + -3.5499E+00x^2 + 3.2329E+00x^3 + -1.4188E+00x^4 + 2.3576E-01^5.

Dengan menggunakan polinom ini, maka nilai fungsi pada x = 29.900
dapat ditaksir menghasilkan p5(29.900) = 4583420.399395
```

```
Masukkan nilai x yang akan ditaksir:
10.01
Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan:
a0 = 0.0000E+00, a1 = 2.0347E+00, a2 = -3.5499E+00, a3 = 3.2329E+00, a4 = -1.4188E+00, a5 = 2.3576E-01.

Polinom interpolasi yang melalui 6 buah titik tersebut adalah p5(x) =
 0.0000E+00x^0 + 2.0347E+00x^1 + -3.5499E+00x^2 + 3.2329E+00x^3 + -1.4188E+00x^4 + 2.3576E-01^5.

Dengan menggunakan polinom ini, maka nilai fungsi pada x = 10.010
dapat ditaksir menghasilkan p5(10.010) = 12356.555593
```

Didapatkan sebuah persamaan polinom interpolasi derajat 5

$$P_5(x) = 2.0347x^1 + -3.5499x^2 + 3.2329x^3 + -1.4188x^4 + 2.3576 * 10^{-1}x^5$$

Sehingga hasil taksiran tiga buah titik adalah sebagai berikut.

x = 22.21 962601.031
x = 29.90 4583420.399
x = 10.01 12356.556

7 . Studi Kasus Regresi Linear Berganda

Table 12.1: Data for Example 12.1

Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3	Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3
0.90	72.4	76.3	29.18	1.07	23.2	76.8	29.38
0.91	41.6	70.3	29.35	0.94	47.4	86.6	29.35
0.96	34.3	77.1	29.24	1.10	31.5	76.9	29.63
0.89	35.1	68.0	29.27	1.10	10.6	86.3	29.56
1.00	10.7	79.0	29.78	1.10	11.2	86.0	29.48
1.10	12.9	67.4	29.39	0.91	73.3	76.3	29.40
1.15	8.3	66.8	29.69	0.87	75.4	77.9	29.28
1.03	20.1	76.9	29.48	0.78	96.6	78.7	29.29
0.77	72.2	77.7	29.09	0.82	107.4	86.8	29.03
1.07	24.0	67.7	29.60	0.95	54.9	70.9	29.37

Source: Charles T. Hare, "Light-Duty Diesel Emission Correction Factors for Ambient Conditions," EPA-600/2-77-116. U.S. Environmental Protection Agency.

$$20b_0 + 863.1b_1 + 1530.4b_2 + 587.84b_3 = 19.42$$

$$863.1b_0 + 54876.89b_1 + 67000.09b_2 + 25283.395b_3 = 779.477$$

$$1530.4b_0 + 67000.09b_1 + 117912.32b_2 + 44976.867b_3 = 1483.437$$

$$587.84b_0 + 25283.395b_1 + 44976.867b_2 + 17278.5086b_3 = 571.1219$$

```
Persamaan yang didapatkan
20.000b0 + 863.100b1 + 1530.400b2 + 587.840b3 = 19.420
863.100b0 + 54876.890b1 + 67000.090b2 + 25283.395b3 = 779.477
1530.400b0 + 67000.090b1 + 117912.320b2 + 44976.867b3 = 1483.437
587.840b0 + 25283.395b1 + 44976.867b2 + 17278.509b3 = 571.122

Hasil
b0 = -3.5078
b1 = -0.0026
b2 = 0.0008
b3 = 0.1542

Pentaksiran
x1 = 50.00
x2 = 76.00
x3 = 29.30

Hasil taksiran
0.9384
```

Input via Terminal

```
Input matriks:
Masukkan jumlah peubah x: 3
Masukkan jumlah sampel: 3
72.4 76.3 29.18 0.90
41.6 70.3 29.35 0.91
23.3 77.1 29.24 0.96
Masukkan x0 = 50
Masukkan x1 = 76
Masukkan x2 = 29.30
```

Hasil

```
Persamaan yang didapatkan
3.000b0 + 137.300b1 + 223.700b2 + 87.770b3 = 2.770
137.300b0 + 7515.210b1 + 10245.030b2 + 4014.884b3 = 125.384
223.700b0 + 10245.030b1 + 16708.190b2 + 6544.143b3 = 206.659
87.770b0 + 4014.884b1 + 6544.143b2 + 2567.873b3 = 81.041

Hasil
b0 = 0.8142
b1 = -0.0012
b2 = 0.0041
b3 = -0.0050

Pentaksiran
x1 = 50.00
x2 = 76.00
x3 = 29.30

Hasil taksiran
0.9241
```

BAB V
PENUTUP

A. Kesimpulan

Matriks merupakan salah satu bagian besar dari aljabar linier. Sebagai array dua dimensi, matriks dapat merepresentasikan objek-objek matematika pada baris dan kolomnya. Operasi pada matriks dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan linier seperti mencari solusi Sistem Persamaan Linier (SPL), interpolasi polinom, dan regresi linier berganda. Pada Tugas Besar 1 IF-2123 Aljabar Linier Dan Geometri ini, telah dibuat suatu program komputer dengan bahasa pemograman Java untuk mengoptimalkan aplikasi matriks. Dengan Java, dibuat suatu konstruktor yang membentuk objek matriks, beserta *library* yang berisi beberapa *class* dan *method* yang dapat digunakan pada berbagai studi kasus.

B. Saran

Dalam pengerjaan tugas besar ini, kami menyadari dengan sepenuhnya segala kendala dan keterbatasan pada program yang kami buat. Tentunya terdapat berbagai hal yang kedepannya dapat dikembangkan untuk optimalisasi lebih lanjut. Untuk itu, kami mengharapkan kritik dan saran dari pihak-pihak yang turut mengevaluasi program dan laporan ini. Terima kasih kepada tim dosen IF-2123 Aljabar Linier Dan Geometri bersama tim asisten atas segala bimbingannya.

DAFTAR REFERENSI

https://github.com/kriasoft/Folder-Structure-Conventions/blob/master/README.md
https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-03-Sistem-Persamaan-Linier.pdf
https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-05-Sistem-Persamaan-Linier-2.pdf
https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-08-Determinan-bagian1.pdf
https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-09-Determinan-bagian2.pdf
https://www.statistikian.com/2018/01/penjelasan-tutorial-regresi-linear-berganda.html