Mouty SENE

Assignement S/IDDA.

## Exercice Page 36:

Soit $\hat{f}_n(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$ avec K

Verifiant l'hypothèse H1

Montrons que $\hat{f}_n$ est une densité de probabilité.

K est un noyau d'ordre l donc $\int K(x)dx = 1$.

Par conséquent $\hat{f}_n$ est positive et continue.

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)dx$$

Posons $u = \frac{x - X_i}{h}$ ; $dx = h\,du$.

Donc $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}_n(x)dx = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} hK(u)du$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} K(u)du = 1.$$

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} \hat{f}_n(x)dx = 1}$$

## Exercice Page 40:

Théorème:

Supposons que : $H_1$ : K est un noyau d'ordre l

$H_2$ : $\int |u|^l K(u)\,du < +\infty$

Scan with **Balayage rapide**

$H_3$ : $f$ est deux fois continûment différentiable
Alors :
$$E[\hat{f}_n(x) - f(x)] \leq C_1(f, K) h^2$$

et
$$Var[\hat{f}_n(x)] \leq \frac{C_2(f, K)}{nh}$$

avec $C_1(f, K) := \frac{1}{2} \|f''\|_\infty \int |u|^2 |K(u)| du$

et $C_2(f, K) := \|f\|_\infty \int |K^2(u)| du$.

Preuve :
→ Calculons $E[\hat{f}_n(x)]$.

$$E[\hat{f}_n(x)] = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{X_i - x}{h}\right)$$

$$= \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} K\left(\frac{y - x}{h}\right) f(y) dy$$

Posons $u = \frac{y - x}{h} \Rightarrow y = hu + x$

$dy = d(hu + x) du = h du$

En remplaçant les valeurs de $y$ et $dy$ dans l'expression de $E[\hat{f}_n(x)]$ on obtient :

$$E[\hat{f}_n(x)] = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} K\left(\frac{hu + x - x}{h}\right) f(y) h du$$

$$E[\hat{f}_n(x)] = \int_{\mathbb{R}} K(u) f(x + hu) du.$$

Par développement limité à l'ordre 2 on a

$$E(\hat{f}_n(x)) = \int_{\mathbb{R}} K(u)\left[f(x) + (uh) f'(x) + \frac{(uh)^2}{2} f''(\xi_u)\right] du$$

$$= \left(\int K(u)\,du\right) f(x) + \left(\int u h\,du\right) f'(x) + \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{h^2}{2} u^2\,du\right) f''(\xi_u)$$

$$= f(x)\int_{\mathbb{R}} K(u)\,du + h f'(x)\int_{\mathbb{R}} u K(u)\,du + \frac{h^2}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2 K(u) f''(\xi_u)\,du$$

D'après $h_1$ : $\int_{\mathbb{R}} K(u)\,du = 1$ et $\int_{\mathbb{R}} u K(u)\,du = 0$

d'où on a : $E(\hat{f}_n(x)) = \frac{h^2}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2 K(u) f''(\xi_u)\,du + f(x)$

il en résulte que :

$$E(\hat{f}_n(x) - f(x)) \leq \frac{h^2}{2}\int_{\mathbb{R}} u K(u)\,du = 0$$

d'où on a : $E[\hat{f}_n(x)] = \frac{h^2}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2 K(u) f''(\xi_u)\,du + f(x)$

il en résulte que :

$$E[\hat{f}_n(x) - f(x)] \leq \frac{h^2}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2 K(u) f''(\xi_u)\,du$$

$$\leq \frac{h^2}{2}\int u^2 |K(u)| f''(\xi_u)\,du$$

$$\leq \frac{h^2}{2}\max(f''(x))\int_{\mathbb{R}} u^2 |K(u)|\,du$$

Scan with Balayage rapide

Posons $c_1(f, k) = \frac{1}{2} \max |f''(x)| \int |u|^2 k(u)\, du$

d'où $E[\hat{f}_n(x) - f(x)] \leq C_1(f, k) h^2$.

- $Var[\hat{f}_n(x)] = \frac{1}{(nh)^2} Var[\sum_{i=1}^{n} k(\frac{X_i - x}{h})]$.

$$= \frac{1}{(nh)^2} n Var[k(\frac{X_i - x}{h})].$$

$$\leq \frac{1}{n h^2} E[k(\frac{X_i - x}{h})^2].$$

en posant $u = \frac{y - x}{h}$ on a :

$Var[\hat{f}_n(x)] \leq \frac{1}{n h^2} \int_{\mathbb{R}} k^2 \frac{(y-x)}{h} f(y) dy$.

$$= \frac{1}{nh} \int_{\mathbb{R}} k(u)^2 f(x + uh)\, du$$

Posons $c_2(f, k) = \max |f''(x)| \int k^2(u) du$.

alors $Var[\hat{f}(x)] \leq \frac{c_2(f, k)}{nh}$

Posons $c_1(f,k) = \frac{1}{2} \max |f''(x)| \int |u|^2 k(u)\, du$

d'où $E(\hat{f}_n(x) - f(x)) \leq c_1(f,k) h^2$.

- $Var[\hat{f}_n(x)] = \frac{1}{(nh)^2} Var[\sum_{i=1}^{n} k\left(\frac{X_i - x}{h}\right)]$.

$$= \frac{1}{(nh)^2} n Var[k\left(\frac{X_i - x}{h}\right)].$$

$$\leq \frac{1}{n h^2} E\left[k\left(\frac{X_i - x}{h}\right)^2\right].$$

en posant $u = \frac{y - x}{h}$ on a:

$$Var[f_n(x)] \leq \frac{1}{nh^2} \int_{\mathbb{R}} k^2 \frac{(y-x)}{h} f(y)\, dy.$$

$$= \frac{1}{nh} \int_{\mathbb{R}} k(u)^2 f(x + uh)\, du$$

Posons $c_2(f,k) = \max |f''(x)| \int k^2(u)\, du$.

alors $Var[f(x)] \leq \frac{c_2(f,k)}{nh}$

## Exercice Page 49:

Théorème:

Supposons qu'il existe $\beta, R > 0$ et un entier $\ell$, $\beta - \ell \in ]0,1]$, tel que

H1: $K$ est un noyau d'ordre $\ell$ et $\int |u|^{\beta} K(u)du < +\infty$

Si $r \in \Sigma(\beta, R)$, alors:

$$R(\hat{r}, r) \leq C(\beta, \sigma, \|r\|_{\infty}) \times \left(R^2 h^{2\beta} + \frac{1}{nh}\right),$$

$\sigma^2$ est la variance de $\varepsilon$, où $Y = r(X) + \varepsilon$.

Hypothèse: $r \in \Sigma(\beta, R)$

$$\Sigma(\beta, R) = \left\{ f \in C^{\ell}([0,1]) : \forall x, y \in [0,1], |f^{(\ell)}(x) - f^{(\ell)}(y)| \leq R|x-y|^{\beta-\ell} \right\},$$

où $\ell$ est un entier tel que $\beta - \ell \in ]0,1]$.

Montrons que $R(\hat{r}, r) \leq C(\beta, \sigma, \|r\|_{\infty})(R^2 h^{2\beta} + \frac{1}{nh})$