Université de Nouakchott *Limam Mohamed Ould Ahmed Limam*

Faculté des Sciences Juridiques et Economiques

1ère année économie. Année 2018-2019

PROGRAMME DE *MATHEMATIQUES DU 1er SEMESTRE*

I) Généralités sur les fonctions (S1)

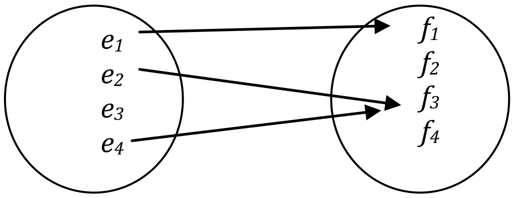
1) Applications

<u>Définition :</u>

On appelle application toute correspondance d'un ensemble E vers un ensemble F qui associe à tout élément de E <u>au plus</u> un élément de F.

L'ensemble E est dit ensemble de départ et F ensemble d'arrivée.

Les éléments de E sont appelés antécédents et ceux de F les images.



<u>Exemple</u>

Dans la figure *ci-contre* la correspondance entre les ensembles $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ et $F=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$, que nous appelons f , représente bien une application. Aux éléments e_1, e_2 et e_4 elle fait associer un seul élément de F et l'élément e_3 n'a pas d'image. Autrement, <u>aucun élément de E n'a, à la fois, deux images</u> ou plus.

Analytiquement, cette application s'écrit aussi $f(e_1)=f_1,\ f(e_2)=f_3\ et\ f(e_4)=f_3.$

Les éléments $e_1, e_2\ et\ e_4$ représentent les antécédents et $f_1\ et\ f_3.$ les images

<u>Exemple</u>

Soit f la correspondance définie, analytiquement, de $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ à $F=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$, par $f(e_1)=f_1,\ f(e_2)=f_2,\ f(e_2)=f_3\ et\ f(e_4)=f_3.$ Cette correspondance ne représente pas une application entre E et F car l'élément e_2 est associé aux deux éléments $f_2\ et\ f_3$ de F .

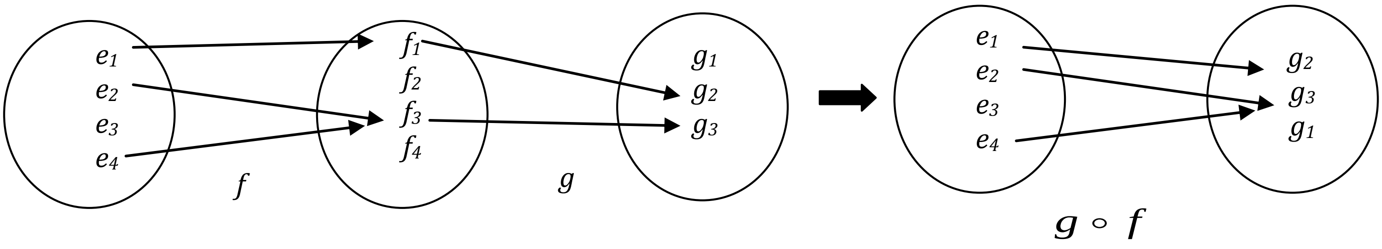
2) Composition d'applications et applications réciproques

<u>Définition :</u>

Soient f et g deux applications définies respectivement entre, d'une part, les ensemble E et F et, d'autre part, entre les ensembles F et G , alors la composée de f et g notée $g\circ f$ est une application définie de E dans G par : $\forall e\in E; g\circ f(e)=g(f(e))$. C'est l'image par l'application g des images préalablement calculées des éléments de E par l'application f .

<u>Exemple</u>

Soient f et g deux applications respectivement définies comme dans le 1er schémas ci-dessous. Alors $g \circ f$ représente une application de E dans G définie comme suit : $g \circ f(e_1) = g(f(e_1)) = g(f_1) = g_2$ et $g \circ f(e_2) = g \circ f(e_4) = g(f(e_4)) = g(f_3) = g_3$.



<u>En général</u>

$$g \circ f \neq f \circ g$$

<u>Définition :</u>

L'application i_d est dite application identité si et seulement si $\forall x \in E; i_d(x) = x$.

<u>Définition :</u>

Soit f une application de E dans F. L'application g est dite la réciproque de f si $\forall x \in E; g \circ f(x) = i_d(x) = x$.

<u>Définitions :</u>

- Soit f une application de E dans F. L'application f est **injective** ssi elle vérifie : si $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
Autrement, aucun élément de F ne peut être, à la fois, l'image de deux éléments distincts de E.

- Soit f une application de E dans F. L'application f est dite **surjective** ssi tout élément de F admet, au moins, un antécédent dans E.

- Soit f une application de E dans F. L'application f est dite **bijective** ssi elle est à la fois surjective et injective.

3) Fonction d'une variable réelle

<u>Quelques définitions sur les sous ensembles de l'ensemble des réels:</u>

- **Intervalle fermé** $[a,b]$: Ensemble $\{x / a \leq x \leq b\}$ bornes comprises.
- **Intervalle ouvert** $]a,b[$: Ensemble des réels x tels que $a < x < b$; *a* et *b* sont les bornes de l'intervalle.
- **Intervalle semi-ouvert** (semi-fermé) $]a,b]$ et $[a,b[$: Intervalles $]a,b]$ ($a < x \leq b$) et $[a,b[$ ($a \leq x < b$.
- **Voisinage** de *a*, $a \in \mathbb{R}$: Tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant *a* : $\forall \alpha_0 > 0$, $]a - \alpha_0, a + \alpha_0[$ est un voisinage de *a*.

<u>Définition :</u>

Les fonctions réelles d'une variable réelle sont des applications dont les ensemble E et F sont des intervalles de IR (ou IR tout entier). Ce sont les transformation qui à tout élément d'un domaine $D \subset \mathbb{R}$ font correspondre un unique élément de $\mathbb{R}$: $\forall x \in D$, $\exists! y \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$.

Définitions :

- **Domaine de définition** ou **ensemble de départ** d'une fonction réelle d'une variable réelle : Ensemble des éléments pour lesquels la fonction *f* est définie.
- **Ensemble d'arrivée** ou **image** d'une fonction réelle d'une variable réelle : $f(D) = \{y \in \mathbb{R} / y = f(x), x \in D\}$.

Propriétés de certaines fonctions :

- **Fonction injective :** $f : I \to J$ est injective si tout élément de $f(I)$ est l'image d'un seul élément de *I*.
- **Fonction surjective :** $f : I \to J$ est surjective si $f(I) = J$, autrement dit si tout élément de *J* est l'image par *f* d'un élément de *I*.
- **Fonction bijective :** Fonction injective et surjective à la fois.
- **Fonction réciproque :** Soit *f* définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. La fonction réciproque f^{-1} est la fonction définie sur *J* par $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.
- **Fonction positive** (resp. **négative**) : *f* est positive (resp. négative), si $\forall x \in I$, $f(x) \geq 0$ (resp $f(x) \leq 0$).
- **Fonction inverse** ou **inversible :** Si $f : I \to J$ est inversible, alors $\forall x \in I, f(x) \neq 0$, et sa fonction inverse, notée $1/f$, est définie par $\forall x \in I, \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$.
- **Fonction majorée :** *f* est majorée, s'il existe un réel *M* tel que $\forall x \in I, f(x) \leq M$.
- **Fonction minorée :** *f* est minorée, s'il existe un réel *m* tel que $\forall x \in I, f(x) \geq m$.
- **Borne inférieure :** Plus grand réel *m* tel que $\forall x \in I, f(x) \geq m$: $m = \inf_I f$.
- **Fonction bornée :** *f* est bornée, si *f* est à la fois majorée et minorée : $\forall x \in I,\ m \leq f(x) \leq M$.
- **Borne supérieure :** Plus petit réel *M* tel que $\forall x \in I, f(x) \leq M$: $M = \sup_I f$.
- **Extremum** d'une fonction : Un extremum est un minimum ou un maximum.
- **Fonction composée :** Soient deux fonctions, *f* définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ et *g* définie sur un intervalle $J \subseteq \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, f(x) \in J$ (*i.e.*, $f(I) \subseteq J$).

  La fonction composée $g \circ f$ est la fonction définie sur *I* par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
- **Fonction convexe :** $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe sur *I* si et seulement si $\forall h \in [0;1]$, $\forall (a,b) \in I^2$, $f(ha + (1-h)b) \leq hf(a) + (1-h)f(b)$.
- **Fonction concave :** $f : I \to \mathbb{R}$ est dite concave si $(-f)$ est convexe.

4) Monotonie, parité et périodicité

A) Monotonie

- **Fonction croissante :** $\left\{(x,y)\in I^2 \text{ et } x\leq y\right\}\Rightarrow f(x)\leq f(y)$.
- **Fonction strictement croissante :** $\left\{(x,y)\in I^2 \text{ et } x< y\right\}\Rightarrow f(x)< f(y)$.
- **Fonction décroissante :** $\left\{(x,y)\in I^2 \text{ et } x\leq y\right\}\Rightarrow f(x)\geq f(y)$.
- **Fonction strictement décroissante :** $\left\{(x,y)\in I^2 \text{ et } x< y\right\}\Rightarrow f(x)> f(y)$

B) Parité

- **Fonction paire :** *f* est paire si $\forall x\in D$, $f(-x)=f(x)$. *f* est symétrique par rapport à l'axe Oy .
- **Fonction impaire :** *f* est impaire si $\forall x\in D$, $f(-x)=-f(x)$. *f* est symétrique par rapport à l'origine.

C) Périodicité

- **Fonction *T*-périodique :** Soit $f:D_f\rightarrow\mathbb{R}$. S'il existe $T\in\mathbb{R}$ strictement positif tel que $\forall x\in D_f$, $x+T\in D_f$ et $f(x+T)=f(x)$, alors la fonction *f* est dite périodique de période *T* ou *T*-périodique.

II) Fonctions élémentaires (S2 & S3)

1) Polynômes

Un polynôme est un fonction de la forme $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...a_1 x + a_0$ où $n \in IN$ et $a_n, a_{n-1},...a_1$ et $a_0 \in IR$. Cette fonction est un polynôme de degré n .

Exemples

Les fonctions constantes / $f(x) = x$ / $f(x) = x^2 + 2x \ +1$.

2) Fonctions rationnelles

Une fonction rationnelle se présente sous la forme $P(x)/Q(x)$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes à coefficients dans IR .

Exemples

$f(x) = \dfrac{1}{x}$; $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$; $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Une fonction rationnelle est définie ssi le **dénominateur est non nul**. Les 3 fonctions précédentes sont, respectivement, définies sur IR^*, IR et $IR - \{-1,1\ \}$.

3) Logarithmes

La fonction logarithme a été posée pour calculer l'aire entre $\{x = a\}$, $\{x = b\}$et le tracé de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Pour les fonctions de la forme x^n , l'aire comprise entre $\{x = a\}$, $\{x = b\}$et le tracé de la fonction $f \ = x^n$ est donnée par un calcul simple d'intégrale du type $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ excepté pour le cas n= -1. Ce dernier cas correspond à $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

L'aire existe et ne peut être obtenue par la formule, ainsi, il a été formulé et a donné la définition du logarithme :

$$\ln(x) = \int_a^x \frac{1}{x}dx.$$

La fonction du logarithme népérien $\ln(x)$ est définie uniquement sur IR^{*+} . Elle est caractérisée par les propriétés suivantes : $\ln(1) = 0$, $\ln(f.g) = \ln(f) + \ln(g)$ et la fonction $\ln(x)$ est continue et strictement croissante.

Exemples

$f(x) = \ln(x)$; $f(x) = \ln(\dfrac{x^3}{x^2+1})$; $f(x) = \dfrac{x^3}{\ln(x)-1}$.

4) Exponentielles

Nous aborderons plus tard un résultat fondamental en mathématiques : toute fonction réelle, à la fois, continue et strictement monotone admet une fonction réciproque. La fonction $\ln(x)$ étant continue et strictement croissante elle admet, donc, une fonction réciproque e^x appelée fonction exponentielle.

La fonction exponentielle est définie uniquement sur IR . Elle est caractérisée par les propriétés suivantes : $\ln(e)=1$, $e^0=1$, $e^{f+g}=e^f e^g$ et la fonction e^x est également continue et strictement croissante.

Exemples

$$f(x)=\ln(e^x+1)\,;\; f(x)=e^{\frac{x^3}{x^2+1}}\;;\; f(x)=\frac{x^3}{e^x-1}.$$

5) Trigonométriques

Les fonctions trigonométriques sont des fonctions dont la variable est un angle. Elles permettent de relier les longueurs des côtés d'un triangle en fonction de la mesure des angles aux sommets.
Les trois fonctions trigonométriques les plus utilisées sont le sinus (noté sin), le cosinus (cos) et la tangente (tan, tang ou tg).

Valeurs particulières de sin et cos

Angle en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angle en degrés	0	30	45	60	90
Sin	$\frac{\sqrt{0}}{2}$ (0)	$\frac{\sqrt{1}}{2}$ $(\frac{1}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$ (1)
Cos	$\frac{\sqrt{4}}{2}$ (1)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$ $(\frac{1}{2})$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$ (0)
Tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	*indéfinie*

Les fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sont définies sur IR . Elles sont $2\pi-$ *périodiques.* Les fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sont respectivement impaire et paire sur l'ensemble IR .

Relations fondamentales entre sin et cos

$$\cos(f+g)=\cos(f)\cos(g)-\sin(f)\sin(g).$$
$$\sin(f+g)=\sin(f)\cos(g)+\cos(f)\sin(g).$$

6) Fonctions trigonométriques réciproques

Les fonctions trigonométriques ne sont pas bijectives. En les restreignant à certains intervalles, les fonctions trigonométriques réalisent des bijections. Les applications réciproques (arcsin, arccos, arctan) sont habituellement définies par :

1. pour tous réels x et y tels que : $-1 \le x \le 1, -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$: $y = \arcsin(x)$ si et seulement si $x = \sin(y)$.
2. pour tous réels x et y tels que : $-1 \le x \le 1, 0 \le y \le \pi$: $y = \arccos(x)$ si et seulement si $x = \cos(y)$.
3. pour x réel quelconque et y tel que : $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$: $y = \arctan(x)$ si et seulement si $x = \tan(y)$.

III) Limite et continuité (S4 & S5)

1) Limite des valeurs d'une fonction et Calcul des limites

- **Limite en x_0 d'une fonction :** ℓ est la limite de *f* en x_0, si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0$ tel que $x \in I$ et $|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
  On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

- **Limite à gauche :** $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0$ tel que $(x_0 - B \leq x < x_0) \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- **Limite en $+\infty$ d'une fonction :** ℓ est limite de *f* en $+\infty$ si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq B \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
  On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

- **Limite en $-\infty$ d'une fonction :** ℓ est **limite** de *f* en $-\infty$ si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq B \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
  On note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

2) Continuité des fonctions

- **Continuité en un point :** On dit que *f* est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- **Continuité à droite** (resp. **à gauche**) : *f* est continue à droite en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ et $x \geq x_0$ (resp. $x \leq x_0$).
- **Continuité sur un intervalle :** *f* est continue sur *I* si et seulement si *f* est continue en tout point de *I*.
- **Prolongement par continuité :** Si *f* est une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, on dit que *g* est un prolongement par continuité de *f* en x_0 si et seulement si $g(x) = f(x)\ \ \forall x \neq x_0$ et $g(x_0) = a$

IV) Dérivation des fonctions (S6, S7 & S8)

1) Dérivée et différentielles

Soient f une fonction définie sur son domaine de définition DF et $x_0 \in$ DF.

Définition

1) f est dérivable au point x_0 si et seulement si la limite du taux d'accroissement

$\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$ existe lorsque x tend vers x_0.

2) f est dérivable au point x_0 si et seulement si :il existe un réel a et une fonction ε qui tend vers 0 quand x tend vers 0, tel que :

$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\, a + (x - x_0)\, \varepsilon\, (x - x_0)$

La dérivée de f au point x_0 est égale à a.

3) Si f est dérivable au point x_0, sa dérivée est notée $f'(x_0)$.

- **Fonction dérivable le sur un intervalle :** *f* est dérivable sur *I* si elle est dérivable en tout point de *I*.
- **Fonction dérivée :** La fonction dérivée ou dérivée de *f* sur *I* est la fonction f' qui a tout x de *I* associe $f'(x)$.
- **Fonction *n*-fois dérivable :** Si la dérivée *n*-ième de *f*, $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$, existe, on dit que *f* est *n*-fois dérivable sur *I*.

Exemple 1 :

Soit $f(x) = x^2$ *et* $x_0 = 1$. *Calculer la dérivée de f au point* x_0.

…………

$f(x) - f(x_0) = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$.

*Cette différence s'écrit également **:***

$f(x) - f(x_0) = (x - 1)(x + 1)$.

Ce qui donne :

$\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = x + 1$ ***et*** $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = 2.$

Et d'après les définitions : $f'(1) = 2$

Exemple 2 (plus général) :

Soit $f(x) = x^n$ où n est un entier naturel. Calculer la dérivée de f à un point x_0 quelconque.

…………

Rappels :

a) $1+u+u^2+\ \dots\ +u^{n-1}=\dfrac{u^n-1}{u-1}$; b) $u^n-1=(u-1)(1+u+u^2+\ \dots\ +u^{n-1})$.

Revenons au calcul de la dérivée :

$$f(x)-f(x_0)=x^n-{x_0}^n={x_0}^n\left(\left(\frac{x}{x_0}\right)^n-1\right)$$

Avec le changement de variable :

$u=\left(\dfrac{x}{x_0}\right)$, *la différence précédente devient :* $f(x)-f(x_0)={x_0}^n\left((u)^n-1\right)$. *Et d'après le rappel (b), elle s'écrit :*

$$f(x)-f(x_0)={x_0}^n\left((u-1)(1+u+u^2+\ \dots\ +u^{n-1})\right)$$

Ou encore : $f(x)-f(x_0)={x_0}^n\left(\left(\dfrac{x-x_0}{x_0}\right)(1+u+u^2+\ \dots\ +u^{n-1})\right)$ Ce qui est équivalent à :

$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}={x_0}^{n-1}\left(1+u+u^2+\ \dots\ +u^{n-1}\right)$ En remarquant que : $\forall\ k$, $\lim\limits_{x\to x_0}(u)^k=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{x}{x_0}\right)^k=1$.

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)=n\,{x_0}^{n-1}$. *Nous obtenons l'égalité :* $\forall\ x\in IR$, ***et*** $\forall\ n\in IN$, $\left((x)^n\right)'=n\,x^{n-1}$.

Théorèmes

Soient f et g deux fonctions dérivables au point x_0 et a un réel quelconque.

Théorème 1

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

<u>Démonstration :</u>

Par définition :

$$(f+g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)+\lim_{x\to x_0}\left(\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)$$

$=f'(x_0)+g'(x_0)$

Théorème 2

$$(a\,f)'(x_0)=a\,f'(x_0)$$

Théorème 3

$$\left(f.g\right)'\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right).g\left(x_0\right)+g'\left(x_0\right).f\left(x_0\right)$$

<u>Démonstration :</u>

D'abord :

$$f(x).g(x)-f(x_0).g(x_0)=f(x).g(x)-f(x).g(x_0)+f(x).g(x_0)-f(x_0).g(x_0)$$

Ou encore :

$$f(x).g(x)-f(x_0).g(x_0)=f(x).\left[g(x)-g(x_0)\right]+g(x_0)\left[f(x)-f(x_0)\right]$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{(f.g)(x)-(f.g)(x_0)}{x-x_0}\right)=\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)+\lim_{x\to x_0}\left(g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$$

$$=f(x_0)\lim_{x\to x_0}\left(\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)+g(x_0)\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)=f(x_0).g'(x_0)+g(x_0).f'(x_0).$$

Théorème 4

Si $f(x_0)\neq 0$; $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0)=-\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$.

<u>Démonstration :</u>

D'abord :

$\left(\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x_0)}\right)=\frac{f(x_0)-f(x)}{f(x)f(x_0)}$. Ou encore : $\frac{\left(\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x_0)}\right)}{x-x_0}=-\frac{1}{f(x).f(x_0)}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$.

Ainsi :

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\left(\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x_0)}\right)}{x-x_0}\right)=-\frac{1}{f(x_0)^2}\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)=-\frac{1}{f(x_0)^2}.f'(x_0).$$

Théorème 5

Si $g(x_0) \neq 0$; $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$.

<u>Démonstration</u> :

On pose $\dfrac{f}{g} = f.u$ où $u = \dfrac{1}{g}$. **D**'après le théorème 3 : $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = (f.u)' = f'.u + u'.f$.

Et d'après le théorème 4 : $u' = \left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$ Donc $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = f'\left(\dfrac{1}{g}\right) + \left(-\dfrac{g'}{g^2}\right)f$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g}{g^2} - \frac{g'f}{g^2} = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

Théorème 6

$$(f \circ g)'(x_0) = g'(x_0).\, f'(g(x_0)).$$

<u>Démonstration</u> :

On utilise les définitions 2 et 3, en substituant x par g(x) et x_0 par $g(x_0)$:

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = (g(x) - g(x_0))\, f'(g(x_0)) + (g(x) - g(x_0))\, \varepsilon\, (g(x) - g(x_0)).$$

En divisant par $(x - x_0)$:

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{(x - x_0)} = \frac{(g(x) - g(x_0))}{(x - x_0)}\, f'(g(x_0)) + \frac{(g(x) - g(x_0))}{(x - x_0)}\, \varepsilon\, (g(x) - g(x_0)).$$

Lorsque x tend vers x_0, le dernier terme tendra vers 0. D'où le résultat du théorème.

Théorème 7

Si f est bijective et g est sa réciproque. Alors :

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(g(x_0))}.$$

<u>Démonstration</u> :

g étant la réciproque de f : $f \circ g(x) = x. \quad \forall\, x \in DF.$

Si l'on dérive les deux termes :

1) $(f \circ g(x))' = (x)' = 1. \quad \forall\, x \in DF.$

2) *D'après le théorème 6 :* $(f \circ g)' = g'.\, f'(g)$. *Donc :* $g'.\, f'(g) = 1$. *D'où le résultat.*

Théorème 8

Si f est dérivable au point x_0 alors f est continue au même point.

Théorème 9 (Rolle)

Soit $f:[a,b]\to IR$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a)=f(b)$. Alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

Théorème 10 (Accroissements finis)

Soit $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c\in]a,b[$ tel que : $(b-a)f'(c)=f(b)-f(a)$.

<u>Démonstration</u> :

Appliquer Rolle pour : $\phi(x)=\dfrac{(b-a)}{f(b)-f(a)}f(x)+a+b-x.$

<u>Définitions :</u>

Lorsque f' est dérivable, on note f'' sa dérivée. Par récurrence, on définit les dérivées successives éventuelles de la manière suivante : pour $n\geq 0$, la dérivée d'ordre $n+1$, $f^{(n+1)}$, est, si elle existe, la dérivée de $f^{(n)}$.

La fonction $f^{(n)}$ est appelée la différentielle de f à l'ordre n.

2) Formule de Taylor

- **<u>Formule de Taylor:</u>** Si f est n fois dérivable sur $[a;b]$; $f^{(n)}$ est continue sur $[a;b]$ et $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a;b[$. Alors: $\forall$ x $\in$ $]a;b[$ / $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dfrac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots\ldots + \dfrac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R(x)$. Où $R(x)$ est une fonction continue au voisinage de a et tend vers 0 lorsque x tend vers a.
- **<u>Formule de Taylor-Young</u>:** Si f est n fois dérivable sur $[a;b]$; $f^{(n)}$ est continue sur $[a;b]$ et $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a;b[$. Alors: $\forall$ x $\in$ $]a;b[$ /

  $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dfrac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots\ldots + \dfrac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + (x-a)^n\,\varepsilon(x-a)$. Où $\varepsilon(x)$ est une fonction continue au voisinage de a et tend vers 0 lorsque x tend vers a.

3) Développements limités

<u>Définition</u>

Soit f(x) est une fonction définie sur un voisinage de 0. On dit que f admet un développement limité (<u>noté dans la suite DL</u>)à l'ordre n au voisinage de 0 s'il existe un polynôme $p(x)$ de degré inférieur ou égal à n ($p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ qui s'appelle la partie principale du DL) et une fonction $\varepsilon(x)$ définie sur un voisinage de 0 tels que: $f(x) = p(x) + x^n\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

<u>Exemples :</u><u>(au voisinage de *0*)</u> :

$cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^2\ \varepsilon_1(x)$; $cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\ \varepsilon_2(x)$; $cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + x^6\ \varepsilon_3(x)$ *etc.*

$sin\ x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\ \varepsilon_1(x)$; $sin\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\ \varepsilon_2(x)$; $sin\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + x^7\ \varepsilon_3(x)$ *etc.*

$(1+x)^r = 1 + r\frac{x}{1!} + r(r-1)\frac{x^2}{2!} + r(r-1)(r-2)\frac{x^3}{3!} + \ldots + r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1)\frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$ *avec* $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

4) Théorème de l'hôpital

Soient f et g deux fonction continues et dérivables sur l'intervalle I. $a \in I$ et $f(a) = g(a) = 0$. Si g' ne s'annule pas sur $I - \{a\}$ et $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$. Alors $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$.

V) Tracé du graphe d'une fonction (S9)

1) Plan d'ensemble

Graphe ou **courbe représentative** d'une fonction réelle d'une variable réelle : Ensemble des points de coordonnées $\left(x, y = f(x)\right)$, avec $x \in D$ domaine de définition de *f*.

2) Domaine, domaine d'étude et discontinuité

L'ensemble des antécédents admettent une image est appelé domaine de définition de la fonction f. Le domaine de définition de la fonction f est alors un intervalle ou une union d'intervalles de IR.

3) Utilisation des dérivées

4) Asymptotes

Asymptote à une courbe :

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, alors la droite $x = x_0$ est asymptote à la courbe représentative de *f*.

Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$, alors la droite $y = \ell$ est asymptote à la courbe représentative de *f*.

Si $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - ax - b) = 0$ alors la droite $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de *f*.

5) Points particuliers et tangentes

1) **Point d'inflexion :** Soient $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $x_0 \in I$, différent des bornes. On dit que x_0 est un point d'inflexion si f'' s'annule et change de signe au point x_0
2) **Tangente** à une courbe en un point : $y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$ est l'équation de la tangente à la courbe représentative de *f*, au point x_0.

6) Critères de convexités

1) ***Proposition*** caractérisation de la convexité par la dérivée première) : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors *f* est convexe si et seulement si f' est croissante sur *I*. *Conséquence* (tangente à la courbe d'une fonction convexe) :

   $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et convexe. Alors pour tout $x_0 \in I$, on a :

   $\forall x \in I$, $f(x) \geq f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$. Autrement dit, la courbe représentative de *f* est partout au-dessus des tangentes

2) ***Proposition*** (caractérisation de la convexité par la dérivée seconde) : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Alors *f* est convexe si et seulement $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$.

VII) Exercices

Eléments sur le tracé du graphe d'une fonction

A) Domaine de définition, domaine d'étude et discontinuité

1) Déterminer les domaines de définition et d'étude et les discontinuités des fonctions :

a) i) $f(x) = 2x^6$ ii) $f(x) = \dfrac{1}{(2x-3)^2}$ iii) $f(x) = \dfrac{2}{(x^2-4x)^2}$ iv) $f(x) = \dfrac{2}{x^2+4}$ v) $f(x) = \dfrac{2}{x^3+4x}$

vi) $f(x) = \sin(x)$ vii) $f(x) = \sin(x^2)$ viii) $f(x) = \sin^2(x)$ ix) $f(x) = \sin(x+1)$ x) $f(x) = \text{tang}(x)$ xi) $f(x) = |x|$

xii) $f(x) = (x^2-1)^{-\frac{3}{2}}$ xiii) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x-1}}$ xiv) $f(x) = \ln(2x^2+3x-5)$ xv) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1}}$

b) i) $f(x) = \cos(2x-3)$ ii) $f(x) = 3\cos(2x^2+3x-1)$ iii) $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ iv) $f(x) = \dfrac{1}{3}\cos\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$ v) $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + 3\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$

vi) $f(x) = \sin x + \text{tang}^2(x)$ vii) $f(x) = \cos^2\sqrt{x} - \sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$ viii) $f(x) = x.\sin(-2x+1)$ ix) $f(x) = (x^2-1)\sqrt{\dfrac{x}{3}-1}$

x) $f(x) = \sin^2 x \,.\, \cos x$ xi) $f(x) = \dfrac{(2x-3)^2}{(x^2+x+1)^3}$ xii) $f(x) = \dfrac{\sin(2x-3)}{(x+1)^2}$.

c) i) $f(x) = \ln(\cos x)$ ii) $f(x) = \ln(|\cos x|)$ iii) $f(x) = \ln(1+\cos x)$ iv) $f(x) = \ln(2+\cos x)$ v) $f(x) = \sqrt{\cos x}$ vi) $f(x) = \sqrt{|\cos x|}$

vii) $f(x) = \sqrt{1+\cos x}$ viii) $f(x) = \sqrt{2+\cos x}$.

B) Tableau de variation des fonctions

Dresser les tableaux de variations des fonctions:

i) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$ ii) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x}$ iii) $f(x) = \dfrac{2x^2-4x+1}{x^2-2x-8}$ iv) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}$ v) $f(x) = (x-1)^3 + \dfrac{3}{x+1}$

C) Asymptotes

1) Si elles existent, déterminer les équations des asymptotes aux graphes des fonctions :

I) $f(x) = (-x^2+x)\sqrt{x}$ II) $f(x) = -\dfrac{2}{x-1}$ III) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{3-x}$ IV) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+4}$ V) $f(x) = x+1+\dfrac{2}{x^2+1}$

VI) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$ VII) $f(x) = \dfrac{3-x}{x^2-6x+8}$ VIII) $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-6x+8}$ IX) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2+1}$ X) $f(x) = \dfrac{x^3-9}{-x^2+x+2}$

XI) $f(x) = -1+\sqrt{2x-5}$ XII) $f(x) = \sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}$.

2) Déterminer les équations des asymptotes et leurs positions par rapport aux graphes des fonctions :
I) $f(x) = x\ln(1+\dfrac{1}{x})$ II) $f(x) = x^3 - x^3.\ln(1+\dfrac{1}{x^2})$ III) $f(x) = x^2\sin(\dfrac{1}{x^2})+1$ IV) $f(x) = (1+x)\cos(\dfrac{1}{x})$

V) $f(x) = (1+x)(e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}})$.

D) <u>Points particuliers et tangentes</u>

Déterminer, <u>sur un choix adéquat de fonctions de cette feuille</u>, les éventuels extremums, points d'inflexion et intersections avec les axes ainsi que des équations de tangentes et les positions des courbes par rapport à celles-ci.

Dérivation des fonctions

Exercices (Les dérivées):

1) Déterminer f' la fonction dérivée des fonctions :

A) i) $f(x) = (2x - 3)^5$ ii) $f(x) = (2x - 3)^{-5}$ iii) $f(x) = \frac{1}{(2x-3)^2}$ iv) $f(x) = (3x^2 - 2x)$ v) $f(x) = \frac{7}{(3x^2-2x)^2}$

vi) $f(x) = \sin^2 x$ vii) $f(x) = \cos^2(2x - 5)$ viii) $f(x) = -\frac{2}{\cos^3(2x-1)}$ ix) $f(x) = (3x-1)^{\frac{5}{2}}$ x) $f(x) = 7\left(x^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}$

xi) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$ xii) $f(x) = -3\sqrt{-x^2+x}$ xii) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$

B) i) $f(x) = \cos(2x - 3)$ ii) $f(x) = 3\cos(2x^2 + 3x - 1)$ iii) $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ iv) $f(x) = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$ v) $f(x) = \frac{1}{x+1} + 3\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

vi) $f(x) = x^2 - 3x + 1 - 3\sqrt{x^2-4}$ vii) $f(x) = \cos^2\sqrt{x} - \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$ viii) $f(x) = x.\sin(-2x + 1)$ ix) $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{\frac{x}{3}-1}$

x) $f(x) = \sin^2 x . \cos x$ xi) $f(x) = \cos^2(2x - 5).\sqrt{x}$ xii) $f(x) = \frac{(2x-3)^2}{(x^2+x+1)^3}$ xii) $f(x) = \frac{\sin(2x-3)}{(x+1)^2}$.

Exercices (Théorème de l'Hôpital):

En utilisant le théorème de l'Hôpital, étudier les limites:

i) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}$ iii) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(2x-1)}{2x-2}$ iv) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-x)}{x}$ v) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\ln(-3x-5)}{x+2}$ vi) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(2\sqrt{x}-1)}{2x-2}$; v) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x^2+3x}$ vi) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$ vii) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(2x)-1}{x^3+5x^2}$.

Exercices (Développement Limité):

1) $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$

a)Déterminer les dérivées successives de f, jusqu'à l'ordre 4.

b) Démontrer que la fonction $f(x)$ admet un DL à l'ordre 3 au voisinage de 0.

c)Déduire du a) que la fonction $\sqrt[3]{1+x}$ admet des DL aux ordres: $2, 1$ et 0, au voisinage de 0.

2) En utilisant le 1), et en posant $x = 1+h$, montrer que:

$$\sqrt[3]{x} = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{5}{81}(x-1)^3 + (x-1)^3\,\varepsilon(x-1) \text{ avec: } \lim_{x\to1}\varepsilon(x-1) = 0.$$

L'égalité ci-dessus constitue le DL à l'ordre 3 de la fonction $\sqrt[3]{x}$ au voisinage de 1.

3) En utilisant le 1), et en posant $x = \frac{1}{t}$, montrer que: $\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{3x} - \frac{1}{9x^2} + \frac{1}{x^2}\,\varepsilon(\frac{1}{x})$ avec:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varepsilon(\frac{1}{x}) = 0$

L'égalité ci-dessus constitue le DL à l'ordre 2 de la fonction $\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}$ au voisinage de $\pm\infty$.

4) a) En utilisant le DL de $cos(x)$, et en posant $x = \frac{1}{t}$, déterminer le DL à l'ordre 3 de la fonction $cos(\frac{1}{x})$, au voisinage de $\pm\infty$. b) Déduire de ce qui précède la limite de $x^2.\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$ lorsque x tend vers $\pm\infty$.

5) Déterminer le DL au voisinage de 0, à l'ordre 3 des fonctions :i) $f(x) = \sqrt{1+x}$. ii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

6) Etudier les limites: i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-(1+\frac{1}{2}x)}{x^2}$, ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}-1+\frac{1}{2}x}{x^2}$, iv) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{\sqrt{1-x}}}{x^3}$

7) Déterminer le DL au voisinage de 0, à l'ordre n des fonctions : i) $f(x) = e^{-x}$, ii) $f(x) = \frac{1}{1+x}$, iii) $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

8) Etudier les limites: i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1+x-x^2}{x^3}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x+x^2+x^3-\frac{1}{1-x}}{x^4}$.

Opérations sur les développements limités (exercices):

1) Somme :

Déterminer le DL au voisinage de 0, à l'ordre 4 des fonctions : 1) $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, 2) $f(x) = cosx + sinx$.

2) Produit:

Déterminer le DL au voisinage de 0, à l'ordre 4 des fonctions : 1) $f(x) = cosx \,.\, sinx$ et $g(x) = e^x.sinx$. Etudier les limites :

i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x - x^2}{x^3}$, ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x - x^2 - \frac{1}{3}x^3}{x^4}$.

3) Inverse:

1) Déterminer le DL au voisinage de 0, à l'ordre 4 des fonctions: i) $f(x) = \frac{1}{1+x}$, ii) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, iii) $f(x) = e^{-x}$.

2) Déterminer le DL au voisinage de 0, à l'ordre 4 des fonctions: i) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$, ii) $f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$.

Etudier les limites: i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1-\frac{x^2}{2}}{x^4}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{e^x}{\cos x}}{x^4}$

4) Quotient:

Déterminer le DL au voisinage de 0, à l'ordre 4 des fonctions $tanx$ et $\frac{e^x}{\cos x}$.

5) Composition:

1) Déterminer le DL au voisinage de 0, à l'ordre 3 de la fonction $f(x) = cos(sin\, x)$.

2) Etudier la limite, lorsque x tend vers 0 , de la fonction: $\varphi(x)=\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^3}$.

3) Déterminer le DL à l'ordre 3 au voisinage de 0, des fonctions $f(x)=\ln(\sqrt{1+x}\,)$ et $g(x)=\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right)$; Que remarque-t-on? Expliquer.

4) Déterminer le DL à l'ordre 3 au voisinage de 0 , des fonctions : $f(x)=e^{\left(\sqrt{1+x}-1\right)}$ et $f(x)=e^{\frac{1}{\sqrt{1+x}}}$.

Suites et séries

Exercice n°1

A) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites dont les premiers termes sont les suivants :

$$\frac{4}{3}\ ;\ 1\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ 0\ ;\ -\frac{1}{3}$$

$$0\ ;\ 3\ ;\ 9\ ;\ 21\ ;\ 45\ ;\ 93$$

Préciser pour chaque suite le mode de génération : récurrente (il faut alors donner la relation de récurrence et le terme initial) ou explicite (il faut alors donner le terme de rang *n* exprimé en fonction de *n*).

B) Calculer les limites des suites définies par le terme général suivant : $\dfrac{\cos n}{n}$; $\sqrt{n+3}-\sqrt{n}$; $\dfrac{3n-(-1)^n}{4n+(-1)^n}$

C) Etudier la nature des suites de terme général : $u_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$; $v_n = \dfrac{1-n^2}{n+2}$ et $w_n = u_n + v_n$.

D) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle à termes positifs telle que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2u_n}{3u_n+1}=0$. Démontrer que la suite converge vers 0.

Exercice n° 2

On considère la suite de terme général : $u_n = 1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}+\ldots+\dfrac{(-1)^n}{2n}$. a) Montrer que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont des suites adjacentes. b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.

Exercice n°3

Par un encadrement convenable de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de terme général $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$, démontrer qu'elle est convergente et déterminer sa limite. *Indication* : $\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}} \le u_n \le \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}$

Exercice n°4

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par : $u_{n+1} = \left(1-\dfrac{1}{3n}\right)u_n$ et $u_1 = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. Montrer que cette suite est convergente.

Exercice n°5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite récurrente définie par : $u_0 \in \left]0,1\right[$ et $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$. a) Montrer qu'elle est convergente et calculer sa limite. b) Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite définie par : $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{u_n}$, montrer qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Limam Mohamed Ould Ahmed Limam

Exercice n°6

Etudier les suite récurrentes définies par : $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$, $u_0 = 1$.

Exercice n°7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite récurrente définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{3 - u_n}$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n < 1$.

b) Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite définie par : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$. Montrer que c'est une suite arithmétique. En déduire u_n en fonction de *n* et étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Exercice n°8

$u_o = 1$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$

1) Montrer par récurrence que u_n > 0 et qu'elle est strictement décroissante.

3) Montrons par récurrence que $u_{n+1} = e^{-S_n}$ avec $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

4) Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite $l \geq 0$. Déterminer *l*.

5) Déterminer la limite de S_n.

Exercice n°9

Dans chacun de cas suivants, étudier la convergence de la série de terme général :

i) 2^n ii) $\frac{1}{3^n}$ iii) $\frac{1}{n^3}$ iv) $\frac{1}{\sqrt{n}}$ v) $\frac{1}{n^4+3}$ vi) $\frac{1}{n^2+2}$ vii) $\frac{1}{\sqrt{n+3}}$, viii) $\frac{1}{n!}$ ix) $\frac{\cos n\pi}{n^2}$ x) $\frac{(-1)^n}{n}$

Exercice n°10

Dans chacun de cas suivants, étudier la convergence de la série de terme général :

i) $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ ii) $\frac{(n!)^2}{(2)^{n^2}}$ iii) $\frac{n^2}{n^3+1}$ iv) $\frac{1}{(\ln n)^n}$ v) $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ vi) $\frac{1}{\ln(n^2+n+1)}$ vii) $\frac{n^2}{(1+\alpha)^n}$, $|\alpha| < 1/2$

viii) $\frac{1+2+...+n}{1^2+2^2+...+n^2}$ * ix) $1 - \cos(\frac{1}{n})$ x) $2^{-\sqrt{n}}$ xi) *f(x)* = $\sqrt{n(n+1)(n+2)}$ xiii) $e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+a}}$, $a > 0$ xiv) $\sqrt[n]{\frac{n}{n-1}} - 1$

* *Indication* : pour la série viii), montrer d'abord que $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ et $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice n°11

Déterminer l'ensemble des triplets réels (a, b, c) tels que la série de terme général : $u_n=\frac{1}{an+b}-\frac{c}{n}$ soit convergente.

Exercice n°12**

Déterminer l'ensemble des couples réels strictement positifs (a, b) tels que la série de terme général : $u_n=\frac{2^n+a^n}{2^n+b^n}$ soit convergente.

** *Indication* : pour cet exercice, commencer par établir un tableau d'équivalences de u_n avec des séries géométriques en fonction des positions de a et de b par rapport à 2.

VIII) *EXAMEN DE MATHEMATIQUES*

Session de mars 2010

Exercices I

Déterminer f' la fonction dérivée des fonctions :

i) $f(x) = cos^3(2x + 4)$ ii) $f(x) = x.sin(-2x^4 + 1)$

Exercices II

1) Donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 5 des fonctions :

i) $f(u) = \cos u$, ii) $g(u) = \sin u$, ii) $h(u) = \ln(1+u)$.

2) Déduire les développements limités au voisinage de 0 à l'ordre 5 des fonctions :

i) $f(x) = \cos(2x) + sinx(3x)$. ii) $g(x) = e^x.\sin(x^2)$.

2) Calculer la limite :

i) $$\lim_{x\to 0} \frac{2x + 2x^2 - e^x \sin(2x)}{x^3}$$

Exercices III

Dans chacun de cas suivants, étudier la convergence de la série de terme général :

i) $\frac{\cos n\pi}{n^2}$, II) $\frac{(-1)^n}{n!}$

NB :

Une attention particulière sera accordée à la lisibilité de la rédaction et à la propreté de la copie (2 points).

Bonne chance

Session d'octobre 2010

Exercices I

Déterminer f' la fonction dérivée des fonctions :

i) $f(x) = sin(x^2 +4)$ ii) $f(x) = x\ sin(x)$.

Exercices II

1) Donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 5 des fonctions :

i) $f(u) = cos\ u$, ii) $g(u) = sin\ u$, ii) $h(u) = ln(1+ u)$.

2) Déduire les développements limités au voisinage de 0 à l'ordre 4 des fonctions :

i) $f(x) = sin(2x) + cos\ (3x)$.

2) Calculer la limite :

i) $\lim_{x \to 0} \frac{x + x^2 - e^x}{x^3}$

Exercices III

Dans chacun de cas suivants, étudier la convergence de la série de terme général :

i) $\frac{1}{n^2}$, II) $\frac{(-2)^n}{n!}$

NB :

Une attention particulière sera accordée à la lisibilité de la rédaction et à la propreté de la copie (<u>2 points</u>).

Bonne chance

Session de mars 2011

Exercices I

Déterminer, s'ils existent, les domaines de définition et d'étude dans chacun des cas :

A) : a) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$; b) $f(x)=ln(x^2+x+1)$.

B) : a) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}$; b) $f(x)=ln(x^2-2x+1)$.

C) : a) $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}$; b) $f(x)=ln(x^2+2x-3)$.

D) : a) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$; b) $f(x)=ln(x^2-2x+3)$.

Exercices II

Déterminer, s'ils existent, les domaines de définition et d'étude dans chacun des cas :

A) : a) $f(x)=\sqrt{1-cos x}$; b) $f(x)=\sqrt{cos x-1}$; c) $f(x)=\sqrt{cos x-2}$.

Exercices III

L'objectif de cet exercice est de démontrer la formule de Pythagore $cos^2 x+sin^2 x=1;\forall x.$

a) On définie la fonction $f(x)=cos^2 x+sin^2 x.$ *Calculer sa dérivée.*

b) Calculer $f(0)$ *et conclure.*

Exercices IV

L'objectif de cet exercice est de calculer, par les développements limités (DL), la limite de la fonction $f(x)=\dfrac{sin x-xcos x}{x^3}$ quand x tend vers 0.

a) Rappelant qu'au voisinage de 0 , $sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+x^3\varepsilon_1(x)$ *et* $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+x^3\varepsilon_2(x)$,

calculer en fonction de $\varepsilon_1(x)$ et $\varepsilon_2(x)$ *la différence* $sin x-xcos x$.

b) Calculer, ensuite, la limite de $f(x)$ *quand x tend vers 0.*

NB :

Une attention particulière sera accordée à la lisibilité de la rédaction et à la propreté de la copie (2 points).

Bonne chance !

Session de juillet 2011

Exercices I (6 points)

Déterminer, s'ils existent, les domaines de définition et d'étude dans chacun des cas :

A) : a) $f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$; b) $f(x) = ln(2x^2 + x + 1)$.

B) : a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$; b) $f(x) = ln(x^2 - 4x + 4)$.

C) : a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 5}$; b) $f(x) = ln(x^2 + 4x - 5)$.

Exercices II (6 points)

Déterminer, s'ils existent, les domaines de définition et d'étude dans chacun des cas :

A) : a) $f(x) = \sqrt{|x|}$; b) $f(x) = \sqrt{cosx - 1}$; c) $f(x) = \sqrt{sinx - 2}$.

Exercices III (6 points)

L'objectif de cet exercice est de montrer, par les développements limités (DL), que la limite de la fonction $f(x) = \dfrac{3sinx - xcosx}{x}$ quand x tend vers 0 est égale à 2.

a) Rappelant qu'au voisinage de 0, $sinx = x - \dfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)$ *et* $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_2(x)$,

calculer en fonction de $\varepsilon_1(x)$ et $\varepsilon_2(x)$ *la différence* $3sinx - xcosx$.

b) Calculer, ensuite, la limite de $f(x)$ *quand x tend vers 0.*

NB : (2 points)

*Une attention particulière sera accordée à la propreté de la copie et à la rédaction qui doit, impérativement, suivre le canevas de la 2ème page. **Les tableaux, ci-dessous, doivent être reproduits et regroupés sur la 4ème page de la copie principale de l'examen et, obligatoirement, complétés par les résultats demandés**.*

Page 1/2

LE CANEVAS A SUIVRE

Exercices I

Etape 1 : Le raisonnement.

Etape 2 : Le Tableau à reproduire et à remplir :

	Domaine de définition …	*Domaine de d'étude …*
… de $\sqrt{2x^2+x+1}$		
… de $ln(2x^2+x+1)$		
… de $\sqrt{x^2-4x+4}$		
… de $ln(x^2-4x+4)$		
… de $\sqrt{x^2+4x-5}$		
… de $ln(x^2+4x-5)$		

Exercices II

Etape 1 : Le raisonnement.

Etape 2 : Le Tableau à reproduire et à remplir :

	Domaine de définition …	*Domaine de d'étude …*
… de $\sqrt{\lvert x \rvert}$		
… de $\sqrt{cosx-1}$		
… de $\sqrt{sinx-2}$		

Exercices III

Etape 1 : Le raisonnement.

Etape 2 : Le Tableau à reproduire et à remplir :

L'expression de $3sinx - xcosx$	
La Limite de $f(x)$ *quand x tend vers 0*	

Bonne chance !

Page 2/2

IX) Principales références

Limam Mohamed Ould Ahmed Limam

- Notes personnelles. Limam Mohamed ;
- www.wikipedia.org ;
- www.euroschool.lu ;
- Extrait du cours de DAEU B par M. REJDJAL université aix-marseille 3.