Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
Studia stacjonarne

Specjalność: Matematyka Stosowana

Praca licencjacka

Nr albumu: 310550

Mateusz Szczepański

Czasoprzestrzeń Minkowskiego w Szczególnej Teorii Względności

Opiekun pracy licencjackiej:
dr hab. Maciej Paluszyński

Wrocław 2021

Streszczenie

Poniższa praca licencjacka ma na celu przybliżyć ideę Szczególnej Teorii Względności i Przekształceń Lorentza za pomocą narzędzia, które Hermann Minkowski zaproponował w 1907 roku. Narzędziem tym jest czterowymiarowa czasoprzestrzeń stanowiąca swego rodzaju most pomiędzy 3 wymiarami przestrzennymi i czasem. Czasem traktowanym jako 4 wymiar naszej przestrzeni.

W pierwszym rozdziale w ramach wstępu omówimy podstawy Szczególnej Teorii Względności.

W drugim rozdziale zdefiniujemy Czasoprzestrzeń Minkowskiego, omówimy jej geometrię i właściwości.

Ostateczne rozważania dotyczyć będą przekształcenia Lorentza, które było kluczowym dla naszych rozważań o Szczególnej Teorii Względności w rozdziale pierwszym. Utożsamimy transformacje z obrotem w przestrzeni i wprowadzimy pojęcie grupy Lorentza.

Szanowny Panie **dr hab. Macieju Paluszyński**,

Chcę serdecznie podziękować
za czas jaki Pan poświęcił przy
opiece nad moją pracą naukową.
Wszystkie sugestie były dla mnie
niezwykle cenne i pouczające.
Napisanie tej pracy w tematyce
Szczególnej Teorii Względności
tym bardziej utwierdziło mnie w
przekonaniu, że wybrałem odpowiedni
kierunek i mogę się rozwijać
w dziedzinie, którą kocham.

Bardzo Dziękuję

Spis treści

Rozdział 1
Szczególna Teoria Względności

Rozdział został napisany na podstawie [1], [4] i [8].

1.1 Mechanika klasyczna Newtona

Jednymi z największych dziedzictw Isaaca Newtona są prawa ruchu i powszechnego ciążenia opisane przez niego dokładnie w XVII w. w [6]. Podstawowym równaniem mechaniki klasycznej jest:

$$F = m \cdot a, \tag{1.1}$$

gdzie F oznacza siłę z jaką oddziałujemy na ciało o masie m powodując przyspieszenie a. Wiemy, że przyspieszenie to pierwsza pochodna prędkości po czasie, a prędkość to pierwsza pochodna położenia po czasie. Przyjmujemy v - prędkość obiektu w chwili t oraz x - położenie obiektu w chwili t.

$$F = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{1.2}$$

Korzystając z równań mechaniki klasycznej ruch dwóch ciał w układzie inercjalnym[1] może zostać zapisany poprzez przekształcenie Galileusza dane wzorami:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t, \tag{1.3}$$

gdzie x, y, z, t odpowiadają za współrzędne zdarzenia dla spoczywającego obserwatora, a współrzędne primowane odpowiadają za współrzędnego tego samego zdarzenia, lecz w układzie odniesienia obserwatora poruszającego się względem pierwszego z prędkością v.

Na przełomie XIX i XX wieku w związku z badaniem zjawisk falowych, opisanych przez równania elektrodynamiki Jamesa C. Maxwella, dostrzeżono, że wyniki mechaniki klasycznej na tym polu nie są zgodne z obserwacjami. Przełomem w tym temacie były prace Alberta Einsteina z roku 1905.

A. Einstein odnotował, że problem można rozwiązać poprzez skorzystanie z pewnego przekształcenia przestrzeni $\mathbb{R}^4$, tak zwanej transformacji Lorentza i nowatorskiego postrzegania pojęcia masy. Zaproponował on, aby masę, wcześniej postrzeganą jako stałą, uzależnić od prędkości obiektu w następujący sposób:

$$m := \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \cdot \gamma, \tag{1.4}$$

[1] Układem inercjalnym określamy układ odniesienia, w którym na żadne ciało nie oddziałuje żadna siła, zatem żadne ciało nie doznaje przyspieszenia.

gdzie m_0 to masa spoczynkowa ciała w przypadku, gdy $v = 0$. Dalej tak zdefiniowaną masę nazywać będziemy *masą relatywistyczną*. Czynnik γ nazywać będziemy *czynnikiem Lorentza*. Możemy zauważyć, że dla prędkości znacząco mniejszych od prędkości światła $\gamma \approx 1$. Stąd dostrzeżenie błędów mechaniki klasycznej było tak trudne i możliwe dopiero w przypadku badania cząstek, które poruszają się z prędkościami bliskimi prędkości światła.

Obecnie koncepcja masy relatywistycznej jest dyskutowana, lecz na potrzeby pracy przyjmujemy, że jest ona prawdziwa. W przeciwnym wypadku niezbędnym byłoby uznać masę jako stałą fizyczną i uwzględniać czynnik Lorentza jedynie we wzorze na energię. Wtedy:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = E_0 \cdot \gamma.$$

1.2 Wstęp do transformacji Lorentza

Hendrik Lorentz rozwijając tak zwaną teorię eteru zaproponował poniższe przekształcenie przestrzeni $\mathbb{R}^4$, które w 1905r. posłużyły A. Einsteinowi do rozwiązania problemu związanego z równaniami Maxwella. Transformacja Lorentza dana jest wzorami:

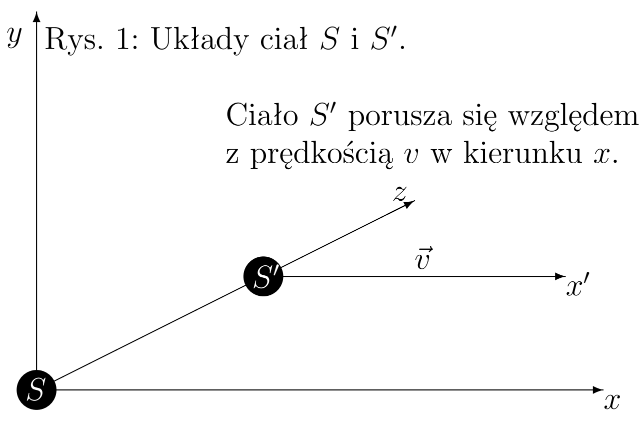
$$\Gamma: \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{1.5}$$

A. Einstein w swojej pracy o Szczególnej Teorii Względności z 1905r. wysnuł tezę, że wszystkie prawa fizyczne (niezależnie czy mówimy o dynamice czy elektromagnetyzmie) nie powinny ulegać zmianie po zastosowaniu w nich przekształcenia Lorentza. Swoje założenia sformułował w postaci tak zwanych postulatów.

Postulat 1 (Pierwszy Postulat Szczególnej Teorii Względności)
Zasada względności - We wszystkich układach inercjalnych prawa fizyki są jednakowe – zarówno mechaniki, jak i elektrodynamiki.

Współrzędne x, y, z odpowiadają 3 wymiarom przestrzennym, a t odpowiada za czas. Układ S przyjmujemy za układ w spoczynku, a układ S' to układ poruszający się z prędkością v wzdłuż pierwszej współrzędnej przestrzennej (Rys. 1). Przyjmować będziemy, że oba te ciała postrzegają to samo zdarzenie o współrzędnych $(x, 0, 0, t)$ w układzie S oraz $(x', 0, 0, t')$ w układzie S'.

Jeżeli dwa ciała poruszają się względem siebie z jednostajną prędkością to na podstawie zasady względności możemy stwierdzić, że prawa fizyczne w układach obu tych ciał są takie same.



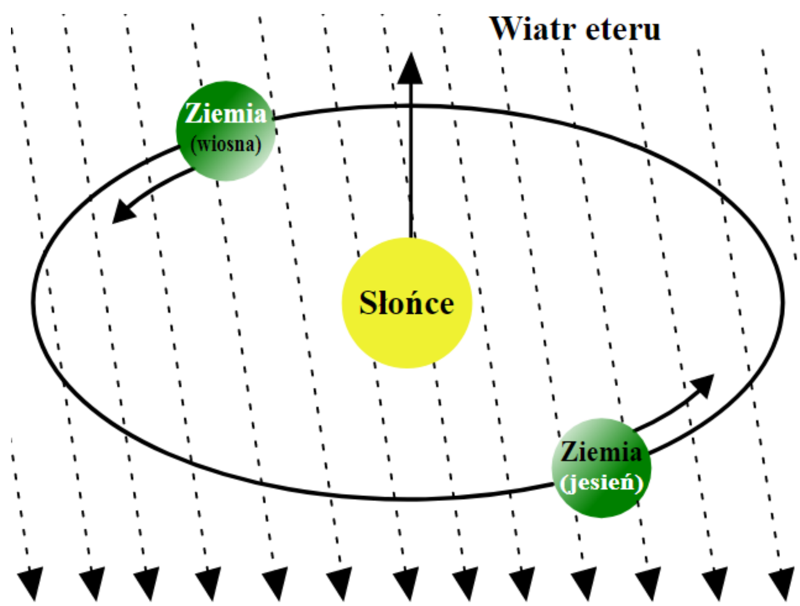
1.3 Teoria Eteru i doświadczenie Michelsona - Morleya

Teoria eteru opiera się na idei, w której światło z uwagi na swoją falową naturę poruszałoby się w pewnym ośrodku dalej zwanym eterem. Sytuacja jest analogiczna do fali dźwiękowej w powietrzu lub fali morskiej w oceanie. Ośrodek taki pozwoliłby na określenie uniwersalnego układu odniesienia, względem którego mierzyłoby się prędkości obiektów. Przez lata szukano owego tajemniczego bytu, lecz bez skutku. Najpoważniejszą próbą odnalezienia eteru jest doświadczenie Michelsona - Morleya z lat 1881-1887.

Szczegóły doświadczenia wykraczają poza omawiane tutaj zagadnienia, natomiast znajdują się one w [1]. Spróbujmy zrozumieć ideę doświadczenia na podstawie poniższej ilustracji. Jeśli eter by istniał to powodowałby on, jak na Rys. 2, że hipotetyczny 'wiatr' eteru przyspieszałby naszą planetę krążącą po orbicie Słońca. Doświadczenie miało wskazać różnicę w prędkościach światła w różnych porach roku. Przykładowo, na Rys. 2, zimą mierzona prędkość światła powinna wynosić $v + c$, a latem $c - v$, gdzie v jest prędkością poruszania się naszej planety po orbicie (około $30km/s$). Przez lata nie udało się jednak tego potwierdzić i zawsze zatrzymywano się przy tym, że prędkość światła jest stałą $c \simeq 3 \cdot 10^8 m/s$. Albert Michelson i Edward Morley nie potrafili znaleźć eteru, a zarazem opisali niezrozumiałe wtedy jeszcze zjawisko. Z ich doświadczenia wynika również zaproponowany przez A. Einsteina drugi postulat Szczególnej Teorii Względności.

Postulat 2 (Drugi Postulat Szczególnej Teorii Względności)
Niezmienniczość prędkości światła - Dla wszystkich obserwatorów inercjalnych prędkość światła w próżni c jest taka sama we wszystkich kierunkach i nie zależy od prędkości źródła światła.

Rys. 2: Wiatr eteru [9]



1.4 Skrócenie Lorentza

Kontrowersyjny pomysł wyjaśniający wspomniane zjawisko braku różnicy prędkości światła zaproponował Lorentz dalej rozwijając teorię eteru - **obiekty materialne ulegają skróceniu w kierunku, w którym się poruszają**.

Zaproponowane skrócenie można zapisać poniższym wzorem:

$$L_x = L \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{L}{\gamma}, \tag{1.6}$$

gdzie L_x to długość obiektu względem kierunku poruszania x, a L to długość spoczynkowa obiektu.

Warto wspomnieć, że objętość zmienia się analogicznie. Uwzględnienie takiej poprawki pozwoliło zrozumieć istotę negatywnego wyniku doświadczenia Michelsona - Morleya.

Łatwo zauważyć, że dla prędkości znacząco mniejszych od prędkości światła czynniki L_x i L są praktycznie równe.

1.5 Dylatacja czasu

Ze skrócenia długości zaproponowanego przez Lorentza wynika coś jeszcze - **czas również ulega skróceniu dla poruszających się obiektów**.

Możemy zapisać to następującym wzorem:

$$\tau = t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{t}{\gamma}, \tag{1.7}$$

gdzie t oznacza zarejestrowany czas zjawiska przez obserwatora w układzie spoczywającym, a τ oznacza zarejestrowany czas tego samego zjawiska w układzie spoczywającym przez obserwatora poruszającego się względem tego pierwszego z prędkością v. Dopiero przekształcenie Lorentza pozwala poruszającemu się obserwatorowi na przejście do układu S'.

Spróbujmy to zrozumieć za pomocą Rys. 1. Można myśleć, że przyrządy mierzące czas dla poruszającego się obiektu doznają spowolnienia. Załóżmy, że dla poruszającego się z prędkością v obserwatora w układzie S upłynęła 1 sekunda. Wtedy nieruchomy obserwator odnotuje, że upłynęło dokładnie $1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ sekundy. Możemy ponownie zauważyć, że dla prędkości znacząco mniejszych od prędkości światła czynnik Lorentza będzie bliski wartości 1. Poniższa tabela wskazuje różnice w postrzeganiu czasu przez dwóch obserwatorów w układzie nieruchomego obserwatora.

Rys. 3: Tablica wskazująca różnice w postrzeganiu czasu

Prędkość	Różnica czasu [s]
1 m/s	$5.5 \cdot 10^{-18}$
0.1c	0.0050
0.9c	2.2941
0.999c	21.3663

Skrócenie czasu wiąże się z obserwacjami związanymi z poruszającymi się obiektami. Załóżmy, że dwóch obserwatorów dostaje dwa identyczne zegary, które zostały perfekcyjnie zsynchronizowane. W przypadku, gdy jeden obserwator zacznie się poruszać razem z zegarem, to nie dostrzeże on żadnej różnicy, jeśli będzie poruszał się ze stałą prędkością. Obserwator, który jest w spoczynku też postrzega swój zegar jako normalnie działający. Gdyby, którykolwiek z nich był w stanie dostrzec jakąkolwiek zmianę w działaniu swojego zegara to mógłby stwierdzić, że jest właśnie tą poruszającą się osobą. Wtedy Teoria Względności byłaby błędna, gdyż mogło by to świadczyć o konieczności doboru odpowiedniego układu odniesienia w przypadku mierzenia czasu (Na takich założeniach opierała się wcześniej wspomniana teoria eteru). Jak już powiedzieliśmy - obserwator poruszający się nie widzi żadnej zmiany w swoim zegarze (zasada względności), lecz obserwator na Ziemi zauważy, że zegary w trakcie poruszania się desynchronizują się.

1.6 Wyprowadzenie przekształcenia Lorentza

Korzystając z (1.6) wyprowadzimy przekształcenie Lorentza zakładając, że układ S' porusza się względem układu S z prędkością v wzdłuż współrzędnej x. Przypuśćmy, że w chwili $t = 0$ początki układów S i S' zbiegają się.

Lampa błyskowa wysyła rozszerzający się sferycznie impuls świetlny. Możemy zauważyć, że po chwili t początek układu S' przesunął się na $x' = vt$. Dzięki nieruchomemu obserwatorowi w układzie S obserwator z układu S' może stwierdzić, że rejestrowane zdarzenie, z uwzględnieniem poprawki na skrócenie długości, w układzie S ma współrzędne:

$$x = vt + x'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

czyli

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{1.8}$$

Zatem otrzymaliśmy pierwszą składową przekształcenia Γ.

Rozchodzenie się impulsu świetlnego możemy odpowiednio w układach S i S' zapisać jako:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (ct)^2 \\ (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 &= (ct')^2. \end{aligned}$$

Zgodnie z postulatami Einsteina i powyższymi wzorami otrzymujemy:

$$x^2 - (ct)^2 = (x')^2 - (ct')^2,$$

a z tego wyliczyć możemy, że:

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{1.9}$$

co jest składową transformacji Γ odpowiedzialną za czas.

1.7 Równoczesność

Niżej wprowadzimy pojęcie **względności równoczesności zdarzeń** wynikające z powyższych rozważań. Jest to kluczowa obserwacja wynikająca ze Szczególnej Teorii Względności.

Względność Równoczesności Zdarzeń

Względność równoczesności zdarzeń - Zjawiska zachodzące w dwóch różnych miejscach, w tym samym czasie, dla obserwatora w układzie S, nie zachodzą w tym samym czasie dla obserwatora w układzie S'.

Poniżej znajduje się krótkie wytłumaczenie względności równoczesności zdarzeń Feynmana z [1].

"Przypuśćmy, że podróżny pojazdu kosmicznego (układ S') umieścił zegary na obu końcach swego pojazdu i chciałby je zsynchronizować. Jak może tego dokonać? Istnieje wiele sposobów. Jeden z nich, wymagający niewielu obliczeń, polegać będzie na ustaleniu środka linii łączącej oba zegary, a następnie na wysłaniu z tego punktu sygnałów świetlnych. Sygnały te będą biec w obu kierunkach z jednakową szybkością i oczywiście przybędą do obu zegarów w tym samym czasie. To równoczesne przybycie sygnałów można wykorzystać do synchronizacji zegarów. Przypuśćmy, że podróżny znajdujący się w układzie S' synchronizuje swoje zegary właśnie w ten sposób. Zobaczmy, czy obserwator w układzie S zgodzi się z tym, że oba zegary zostały zsynchronizowane. Ktoś, kto znajduje się w układzie S', ma prawo przypuszczać, że tak jest, gdyż nie wie o tym, że się porusza. Ale znajdujący się w układzie S rozumuje, że ponieważ pojazd porusza się na naprzód, zegar z przodu pojazdu ucieka przed sygnałem świetlnym, a więc światło musi przebyć więcej niż połowę odległości, aby go dogonić, tylny zegar natomiast porusza się na spotkanie sygnału, a więc odległość ta jest krótsza. Tak więc sygnał dotrze najpierw do tylnego zegara, mimo, że znajdujący się w układzie S' podróżny myślał, że oba zegary zostały zsynchronizowane. Widzimy więc, że gdy pasażer pojazdu kosmicznego przypuszcza, że czas w dwóch różnych miejscach jest taki sam, jednakowym wartościom t' w jego układzie współrzędnych muszą odpowiadać różne wartości t w innym układzie! "

1.8 Siła i pęd

Pokazaliśmy jakie konsekwencje będzie miało wykorzystanie czynnika Lorentza w przypadku długości i czasu. Przyjrzyjmy się teraz wzorom mechaniki klasycznej, uwzględniającym poprawkę na masę (1.4). Wzory na siłę i pęd przybierają następującą formę:

$$F = \frac{d(mv)}{dt} \quad , \quad p = m \cdot v = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \cdot v \cdot \gamma.$$

Warto rozważyć różnicę w postrzeganiu pędu w mechanice klasycznej, a w mechanice relatywistycznej. Dla pędu w pierwszym przypadku mamy $p = mv$, zatem widzimy, że jeśli masa jest stałym czynnikiem to pęd jest wprost proporcjonalny do prędkości - pęd dąży do nieskończoności tylko gdy sama prędkość dąży do nieskończoności, więc możliwe są prędkości ponadświetlne $v > c$ (prędkości większe od prędkości światła). W drugiej sytuacji nasz pierwiastek w mianowniku powoduje, że gdy $v \to c$ to pęd dąży w takiej sytuacji również do nieskończoności, ale nie są możliwe wartości prędkości większe od prędkości światła.

Z powyższych rozważań możemy wywnioskować, że żaden obiekt o niezerowej masie nie może poruszać się z prędkością większą lub równą prędkości światła.

1.9 Masa i energia

Zbadajmy co wiąże się z naszym wzorem (1.4) dla małych prędkości v. Aby dostrzec przybliżony wzór na zmianę masy możemy rozwinąć nasz wzór w szereg potęgowy względem $\frac{v}{c} \to 0$. Wtedy otrzymamy:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = m_0 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6} + \dots\right). \tag{1.10}$$

Wiemy, że $v \ll c$, zatem szereg ten jest bardzo szybko zbieżny. Jego fundamentem są pierwsze 2-3 wyrazy. Stąd naszą masę możemy aproksymować następująco:

$$m \approx m_0 + \frac{m_0 v^2}{2} \cdot \frac{1}{c^2}. \tag{1.11}$$

Z tego możemy wywnioskować, że nasza masa to w przybliżeniu masa spoczynkowa ciała oraz jej niewielka zmiana wywołana ruchem z prędkością v. Wyrażenie $m_0v^2/2$ możemy związać z energią kinetyczną naszego ciała, tak jak w mechanice klasycznej. Stąd przyrost masy możemy utożsamić z przyrostem energii kinetycznej mnożonej przez czynnik $1/c^2$, który jest bardzo mały dla prędkości znacznie mniejszych od prędkości światła.

Gdy spojrzymy na naszą aproksymację (1.11) możemy dokonać przemnożenia obustronnego przez c^2. Otrzymamy wtedy:

$$mc^2 \approx m_0c^2 + \frac{m_0v^2}{2}$$

$$E \approx E_0 + E_k.$$

Te równania doprowadziły Einsteina do wniosków, że energię całkowitą ciała E możemy przestawić jako energię spoczynkową E_0, energię kinetyczną E_k i wyrazy wyższego rzędu.

Pokażemy teraz, że teza Einsteina o tym, że energia całkowita ciała wyraża się poprzez $E = mc^2$ doprowadzi nas do wzoru (1.4). Moc P definiujemy jako wielkość fizyczną określająca jak szybko dany obiekt jest zdolny wykonać pracę. Na moc możemy spojrzeć więc jako prędkość emisji energii w czasie. Wtedy moc wyraża się wzorem:

$$P = \frac{dE}{dt}$$

Równocześnie wiedząc, że moc możemy zapisać w postaci $P = F \cdot v$ zapisujemy nasze równanie w postaci:

$$\frac{dE}{dt} = P = F \cdot v$$

Stąd widzimy, że za zmianę energii w chwili czasu odpowiada przyłożona siła F o danej prędkości chwilowej v.

Jeśli przyjmiemy (tak jak A. Einstein), że $E = mc^2$, a $F = \frac{d(mv)}{dt}$ to otrzymamy:

$$\frac{d(mc^2)}{dt} = v \cdot \frac{d(mv)}{dt}$$

Następnie przemnażając obie strony równania przez $2m$ mamy:

$$c^2 \cdot 2m\frac{dm}{dt} = 2mv \cdot \frac{d(mv)}{dt}$$

Całkujemy obie strony względem dt:

$$c^2 \int 2m\frac{dm}{dt}dt = \int 2mv \cdot \frac{d(mv)}{dt}dt$$

$$c^2 \int 2m\, dm = \int 2(mv)\, d(mv)$$

$$c^2m^2 = (mv)^2 + C$$

gdzie C to stała całkowania. Aby ją określić musimy pamiętać, że równanie to musi być spełnione dla dowolnych v, więc przyjmijmy $v = 0$ - wtedy całkowita masa ciała to masa spoczynkowa. Stąd otrzymujemy:

$$m_0^2c^2 = 0 + C$$

Zatem nasza stała całkowania odpowiada masie spoczynkowej ciała. Wstawiając nasze C do (1.14) otrzymujemy:

$$c^2m^2 = m^2v^2 + m_0^2c^2$$

Dzielimy obie strony równania przez c^2:

$$m^2 = m^2\left(\frac{v}{c}\right)^2 + m_0^2$$

$$m_0^2 = m^2\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)$$

$$m^2 = \frac{m_0^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Pierwiastkując obustronnie otrzymujemy wyrażenie:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Otrzymujemy zatem wzór (1.4). Wzór jak już wspomnieliśmy pozwolił uniknąć błędów, które występowały w mechanice klasycznej. W następnym rozdziale omówimy Czasoprzestrzeń Minkowskiego.

Rozdział 2
Czasoprzestrzeń Minkowskiego

Rozdział został napisany na podstawie [2], [4], [5], [7].

2.1 Czasoprzestrzeń z iloczynem pseudoskalarnym

Czasoprzestrzeń Minkowskiego została zaproponowana przez Hermana Minkowskiego w 1907r. na Kongresie Filozofii Naturalnej w Kolonii w celu zformalizowania pewnych pojęć Szczególnej Teorii Względności zaproponowanej przez A. Einsteina 2 lata wcześniej. Czasoprzestrzeń jako czterowymiarowa przestrzeń liniowa pozwala określić położenie obiektu w danym miejscu trójwymiarowej przestrzeni w danym czasie traktowanym jako czwarty wymiar.

Czasoprzestrzeń Minkowskiego definiować będziemy jako czterowymiarową przestrzeń liniową $\mathbb{R}^4$ o standardowych ortogonalnych wektorach bazowych e_0, e_1, e_2, e_3. Punkt czasoprzestrzeni nazywać będziemy zdarzeniem czasoprzestrzennym lub wektorem tej przestrzeni.

Dalej czasoprzestrzeń będziemy oznaczać:

$$\mathbb{M} := \mathbb{M}(x^0, x^1, x^2, x^3) = \mathbb{M}(ct, x, y, z), \tag{2.1}$$

gdzie x, y, z są współrzędnymi przestrzennymi, a ct jest czasem mnożonym przez prędkość światła w próżni[1].

Zamiennie stosować będziemy notację, w której $ct = x^0, x = x^1, y = x^2, z = x^3$, czyli wektor w czasoprzestrzeni oznaczać będzie za pomocą czterech współrzednych x^i dla $i = 0, 1, 2, 3$.

Zdefiniujemy w czasoprzestrzeni $\mathbb{M}$ następującą strukturę geometryczną, którą nazwiemy iloczynem pseudoskalarnym.

Definicja 2.1 (Iloczyn Pseudoskalarny)
Niech:

1. $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych.
2. $\langle \cdot\,, \cdot \rangle : \mathbb{V}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją przyporządkowującą dwóm wektorom z $\mathbb{V}$ liczbę rzeczywistą. Niech ponadto funkcja ta spełnia poniższe warunki:

   - **Symetryczność**

$$\bigwedge_{x,y\in\mathbb{V}} \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

[1]Zasadność wykorzystania współczynnika c zostanie omówiona później.

- **Liniowość**

$$\bigwedge_{x,y,z\in\mathbb{V}}\bigwedge_{\alpha\in\mathbb{R}} \quad \langle \alpha x + y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \langle x, y\rangle$$

- **Nieosobliwość**

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{V}} \quad \langle x, y\rangle = 0 \implies y = 0,$$

  Wtedy funkcję $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ nazywamy iloczynem pseudoskalarnym określonym na przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$.

  W przypadku standardowego iloczynu skalarnego występuje dodatkowo warunek o dodatniej określoności. Jest to różnica między przestrzenią euklidesową i naszym odpowiednikiem - przestrzenią pseudoeuklidesową.

Mając już iloczyn pseudoskalarny możemy zdefiniować czterowymiarową czasoprzestrzeń Minkowskiego .

Definicja 2.2 (Czasoprzestrzeń Minkowskiego)
Czasoprzestrzenią niech będzie para $(\mathbb{M}, \eta_{\mu\nu})$, gdzie $\eta_{\mu\nu}$ to tensor metryczny Minkowskiego definiujący iloczyn pseudoskalarny określony przez macierz:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

Dla $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, $y = (y^0, y^1, y^2, y^3) \in \mathbb{M}$ mamy:

$$\langle x, y\rangle := \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu}x^\mu y^\nu = x^0y^0 - (x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3). \tag{2.3}$$

2.2 Pseudonorma i interwał czasoprzestrzenny

Wyżej zaprezentowany iloczyn pseudoskalarny pozwala nam na zdefiniowanie tak zwanej pseudonormy w naszej czasoprzestrzeni.

Definicja 2.3 (Pseudonorma)
Niech:

1. $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych.
2. $\langle\cdot\,,\cdot\rangle : \mathbb{V}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją przyporządkowującą dwóm wektorom z $\mathbb{V}$ liczbę rzeczywistą. Niech ponadto funkcja ta spełnia poniższe warunki:

Dla $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{M}$ pseudonorma czasoprzestrzeni dana niech będzie:

$$\|x\|^2 := \langle x, x\rangle = (x^0)^2 - ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2). \tag{2.4}$$

Możemy zauważyć, że definiujemy kwadrat pseudonormy, z uwagi na brak warunku dodatniej określoności iloczynu pseudoskalarnego.

Powyższa pseudonorma **nie spełnia** warunku niezdegenerowania normy, tj. warunku, w którym:

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{M}} \|x\|^2 = 0 \implies x = 0.$$

Przykład

Dla $x = (\frac{\sqrt{3}}{c}c, 1, 1, 1)$ mamy:

$$\|x\|^2 = (\frac{\sqrt{3}}{c}c)^2 - (1^2 + 1^2 + 1^2) = 3 - 3 = 0, \tag{2.5}$$

więc widzimy, że istnieje nieskończenie wiele wektorów niezerowych o zerowej pseudonormie.

Definicja 2.4 (Interwał czasoprzestrzenny)
Podobnie jak normę możemy zdefiniować kwadrat odległości dwóch dowolnych wektorów z przestrzeni. Kwadrat odległości wektorów w czasoprzestrzeni będziemy nazywali **interwałem czasoprzestrzennym**.

Dla wektorów $x = (x^0, x^1, x^2, x^3), y = (y^0, y^1, y^2, y^3) \in \mathbb{M}$ kwadrat odległości wynosić będzie:

$$\|x - y\|^2 := \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu}(x^\mu - y^\nu)^2 = (x^0 - y^0)^2 - (x^1 - y^1)^2 - (x^2 - y^2)^2 - (x^3 - y^3)^2,$$

gdzie dalej interwał czasoprzestrzenny oznaczać będziemy:

$$s^2 := s^2(x, y) = (x^0 - y^0)^2 - (x^1 - y^1)^2 - (x^2 - y^2)^2 - (x^3 - y^3)^2. \tag{2.6}$$

Zakładając, że:

$$x^0 - y^0 = cdt, \;\; x^1 - y^1 = dx, \;\; x^2 - y^2 = dy, \;\; x^3 - y^3 = dz,$$

oraz korzystając z notacji różniczkowej przyrost interwału czasoprzestrzennego może zostać zapisany w postaci:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{2.7}$$

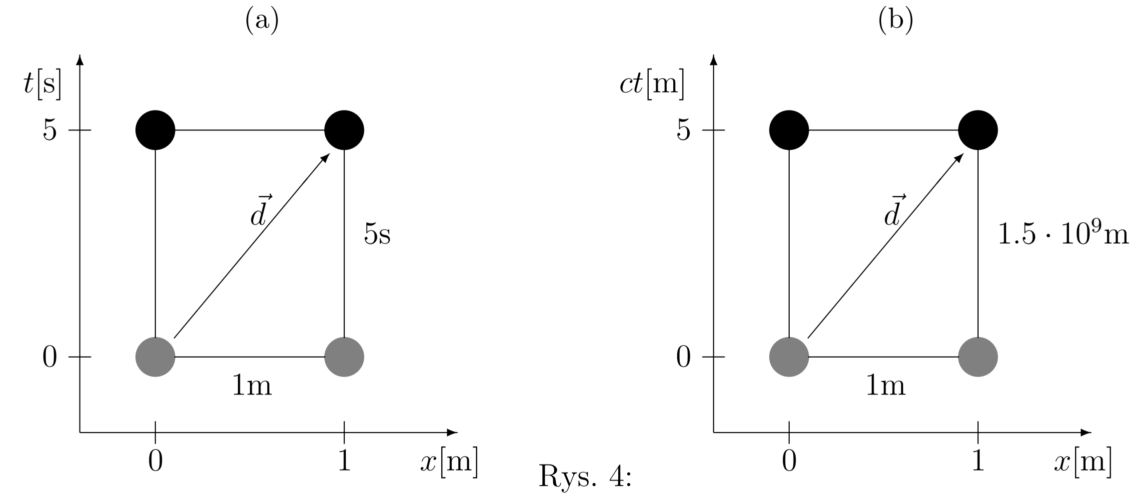
Kluczowym dla naszych rozważań jest to, że **interwał czasoprzestrzenny jest niezmiennikiem czasoprzestrzeni** ze względu na transformację Lorentza, która jak pokażemy w następnym rozdziale będzie mogła zostać utożsamiona z obrotem standardowej przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

2.3 Czas i przestrzeń

Warto się zastanowić w jaki sposób łączymy pojęcia czasu i przestrzeni. Posłużmy się poniższym przykładem.

Wyobraźmy sobie, że trzymamy przed sobą ręce rozstawiając je na szerokość 1 metra. Załóżmy, że w chwili $t = 0$ pstrykami palcami. Jeśli odczekamy 5 sekund i pstrykniemy ponownie to możemy dostrzec, że wykonaliśmy 4 pstryknięcia, a każde z nich odpowiada jednemu punktowi w czasoprzestrzeni. Pomijając dwie współrzędne przestrzenne możemy to zobrazować na Rys. 4a.

Na rysunku szare punkty odpowiadają za dwa pierwsze pstryknięcia, natomiast czarne za pstryknięcia wykonane po 5 sekundach. Widzimy, że aby wyznaczyć pseudonormę wektora $\vec{d}$ musimy posłużyć się interwałem czasoprzestrzennym. Musimy teraz tylko pogodzić fakt łączenia ze sobą czasu i długości, które są wyrażone w rożnych jednostkach. H. Minkowski zaproponował prostą regułę, w której o czasie myślimy również jak o długości i każda sekunda odpowiadać będzie $3 \cdot 10^8 m$. Wtedy nasz rysunek przybierze postać jak na Rys. 4b.



Rys. 4:
Zdarzenia czasoprzestrzenne

Stąd możemy zauważyć, że wykorzystana konwersja czasu na długość odpowiada odległości jaką światło może pokonać w ustalonym czasie. Tak jak w naszym przykładzie, 5 sekund zmieniliśmy na $5s \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = 1.5 \cdot 10^9 m$. Taka konwersja jest uzasadnieniem użycia c w definicji (2.1). Jest to niezbędne, aby zharmonizować relację czasu i przestrzeni.

Co więcej, takie postrzeganie odległości pozwala wysunąć ciekawy wniosek - każdy obiekt porusza się w czasoprzestrzeni ze stałą prędkością równą prędkości światła. Aby to wyjaśnić wyobraźmy sobie osobę na początku układu współrzędnych. Jeśli nie wykona ona ruchu w kierunku żadnej współrzędnej przestrzennej w ciągu sekundy to wykona ona 'ruch' jedynie w kierunku współrzędnej czasowej. Czyli korzystając z naszego przelicznika czasu pokona ona w tym czasie $1s \sim 3 \cdot 10^8 m$. Co jeśli zaczniemy się poruszać z prędkością v? Odpowiedzią jest Transformacja Lorentza. Przekształcenie Lorentza, które przyjmuje interwał czasoprzestrzenny jako niezmiennik, zapewnia każdemu obiektowi stałe poruszanie się z prędkością światła w jego własnym, jak i każdym innym układzie odniesienia.

2.4 Stożek świetlny

Jak już zauważyliśmy w (2.5) istnieje nieskończenie wiele wektorów niezerowych o zerowej normie w czasoprzestrzeni $\mathbb{M}$. Wiemy również, że kwadrat normy wektora może być liczbą ujemną stąd rozróżniamy 3 typy wektorów.

Niech $m \in \mathbb{M}$, wtedy wyróżniamy wektory:

1. **czasopodobne**, dla $\|m\|^2 > 0$;

   dla obserwatora znajdującego się w początku układu współrzędnych wektory te reprezentują możliwe przyszłe skutki lub przeszłe przyczyny teraźniejszego stanu.

2. **przestrzennopodobne**, dla $\|m\|^2 < 0$;

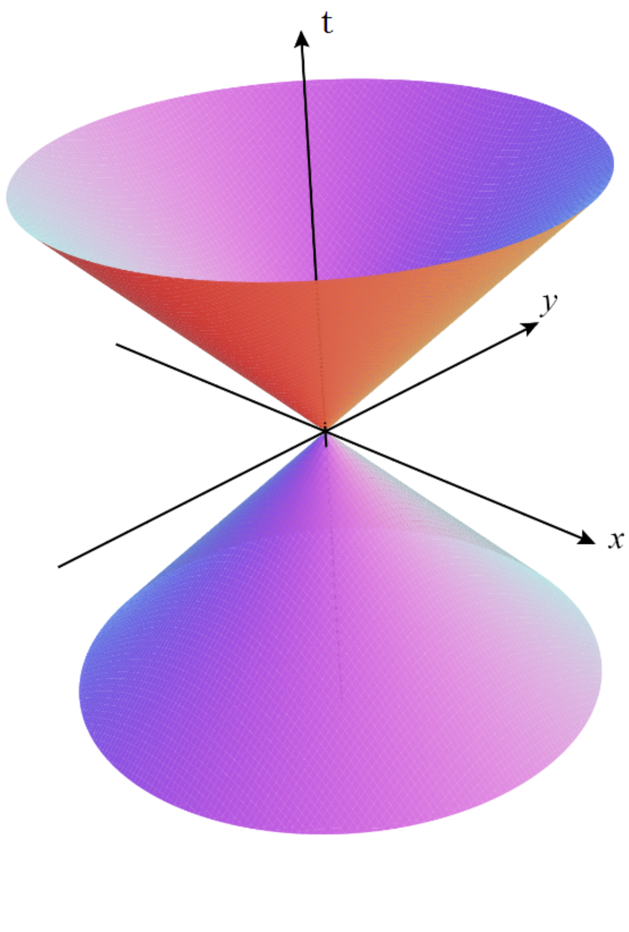
dla ponownego ustawienia obserwatora w początku układu współrzędnych wektory te reprezentują nieosiągalne dla obserwatora zdarzenia czasoprzestrzenne.

3. **światłopodobne**, dla $\|m\|^2 = 0$;

   czyli wektory o zerowej normie. Jeżeli dwóch hipotetycznych obserwatorów ustawilibyśmy w dwóch różnych zdarzeniach czasoprzestrzennych, które są światłopodobne to ich połączenie byłoby możliwe wtedy i tylko wtedy, gdyby poruszali się oni z prędkością światła, co jak wiemy jest niemożliwe dla obiektów z niezerową masą.

Zbiór wektorów światłopodobnych tworzy **stożek świetlny**. Będzie on zapisany przez funkcję uwikłaną $(ct)^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Pomijając trzecią współrzędną przestrzenną stożek wygląda następująco:

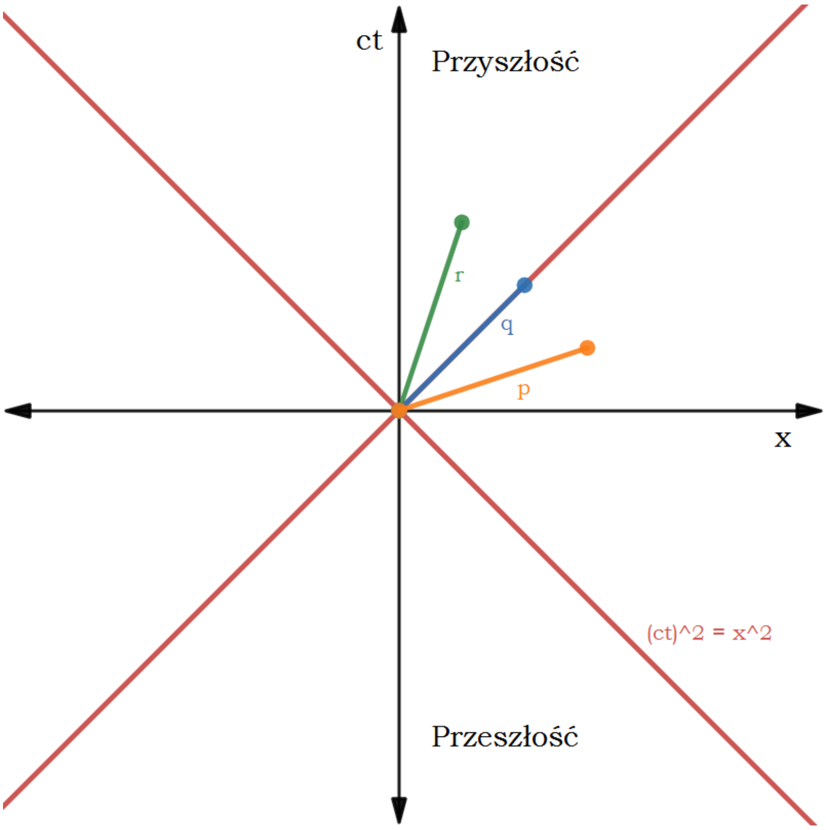
Rys. 5: Stożek świetlny w 3D



Na stożek świetlny w trzech wymiarach możemy patrzeć jak na rozszerzającą się z prędkością światła dwuwymiarową sferę o danym środku. Jest to analogia do impulsu świetlnego, który pozwolił wyprowadzić przekształcenie Lorentza w podrozdziale 1.6. W 4-wymiarowej czasoprzestrzeni wyobrażamy sobie rozszerzającą się trójwymiarową sferę, której promień w chwili t jest równy $r = ct$.

Aby lepiej zrozumieć jego istotę ponownie rozważmy go pomijając dwie współrzędne przestrzenne. Wtedy jego wykres będzie opisywany równaniem $(ct)^2 = x^2$.

Rys. 6: Stożek świetlny w 2D



Na powyższym rysunku wyróżnić możemy 3 wektory: p, q, r.

Wektor r znajdujący się wewnątrz stożka, czyli spełniający $\|r\|^2 > 0$ nazywamy czasopodobnym.

Wektor q znajdujący się na brzegu stożka, czyli spełniający $\|q\|^2 = 0$ nazywamy światłopodobnym.

Wektor p znajdujący się na zewnątrz stożka, czyli spełniający $\|r\|^2 < 0$ nazywamy przestrzennopodobnym.

2.5 Czas własny

W poniższym podrozdziale przyjrzymy się pojęciu **czasu własnego** czasoprzestrzeni. W tym celu zdefiniujmy dodatkowo pojęcie linii świata czasoprzestrzeni.

Definicja 2.5 (Linia świata)
Linią świata nazywamy krzywą kreśloną w czasoprzestrzeni przez poruszający się obiekt.

Z uwagi na to, że obiekt o niezerowej masie nie może się poruszać z prędkością większą lub równą niż c linia świata znajduje się zawsze wewnątrz stożka świetlnego.

Definicja 2.6 (Czas własny)
Czasem własnym τ nazywamy czas wskazywany przez zegar umieszczony wraz z poruszającym się obiektem.

Czas własny możemy utożsamiać z opisaną w rozdziale 1 dylatacją czasu. Jak już wiemy z podrozdziału 1.5 czas własny (τ) jest zawsze mniejszy od czasu mierzonego przez nieruchomego obserwatora. Pokażemy, że prawdziwy jest wzór (1.7).

Przypomnijmy, że przyrost interwału czasoprzestrzennego, w układzie spoczywającym S, w notacji różniczkowej ma postać:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{2.8}$$

Podobnie w układzie poruszającym się wraz z naszą cząsteczką ten sam interwał możemy zapisać w postaci:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - ((dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2). \tag{2.9}$$

Układ S' porusza się razem z cząsteczką, zatem:

$$(dx')^2 = (dy')^2 = (dz')^2 = 0,$$

stąd wzór (2.9) przyjmuje postać:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2.$$

Jak już wspomnieliśmy interwał czasoprzestrzenny jest niezmiennikiem transformacji Lorentza, zatem wielkości opisywane przez wzory (2.8) i (2.9) są równe. Stąd:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

dalej:

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)}.$$

Możemy zauważyć, że wielkość $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ opisuje kwadrat prędkości poruszania się ciała, czyli v^2. Stąd dalej:

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma}. \tag{2.10}$$

Rozważmy teraz całkowity czas własny, który upłynął od początku mierzenia czasu zdarzenia. Załóżmy, że zegar spoczywający mierzył czas od 0 do t. Całkowity czas własny wyraża się zatem:

$$\tau = \int d\tau = \int_0^t \frac{dt}{\gamma} = \frac{t}{\gamma}, \tag{2.11}$$

co jest zgodne z naszym wzorem na dylatację czasu (1.7).

Rozdział 3
Przekształcenie Lorentza

Rozdział ten został napisany w oparciu o [2] i [10].

3.1 Obrót hiperboliczny

W ramach przypomnienia przekształcenie Lorentza $\Gamma : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ dane było wzorami:

$$\Gamma: \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Pokażemy, że odpowiednio dany obrót hiperboliczny w czasoprzestrzeni $\mathbb{M}$ będzie przekształceniem Lorentza, względem którego interwał czasoprzestrzenny jest niezmienniczy. Stąd przekształcenie Γ, dalej zwane również **pchnięciem Lorentza**, będzie izometrią czasoprzestrzeni.

Obroty w czasoprzestrzeni możemy rozpatrzyć na płaszczyznach xy, xz, yz, tx, ty, tz. Pierwsze 3 to tak zwane obroty przestrzenne. Rozpatrzmy teraz obrót na płaszczyźnie tx, wówczas współrzędne y i z nie zmieniają się. Chcemy, aby interwał czasoprzestrzenny był niezmiennikiem takiego przekształcenia. Niech będzie ono zadane macierzą:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

gdzie pierwsza kolumna odpowiada za przekształcenie współrzędnej czasowej, a druga za przekształcenie współrzędnej przestrzennej. Chcemy, aby przekształcenie zadane macierzą A nie zmieniało wielkości interwału $(ct)^2 - x^2$. Stąd spełnione muszą zostać następujące równości:

- $a^2 - c^2 = 1$
- $ab = cd$
- $d^2 - b^2 = 1.$

Macierz spełniającą te równości jest z dokładnością do znaku macierz:

$$A = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$$

Stąd obrót o kąt θ dany będzie poniższymi wzorami:

$$\begin{aligned} x &= x' \cosh\theta + ct' \sinh\theta \\ ct &= x' \sinh\theta + ct' \cosh\theta, \end{aligned} \tag{3.1}$$

lub korzystając z notacji macierzowej:

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}$$

Możemy zauważyć, że równania te są podobne do standardowego obrotu w $\mathbb{R}^2$. Różnicą jest tutaj zamiana funkcji trygonometrycznych na hiperboliczne.

Pokażemy, że tak zdefiniowany obrót na płaszczyźnie tx jest wcześniej danym przekształceniem Lorentza Γ.

Weźmy początek układu odniesienia S' względem układu S. Wtedy $x' = 0$ i wzory (3.1) wyglądają następująco:

$$x = ct' \sinh\theta, \qquad ct = ct' \cosh\theta.$$

Stąd wiedząc, że $\frac{x}{t} = v$ otrzymujemy:

$$\tanh\theta = \frac{x}{ct} = \frac{v}{c}.$$

Korzystając ponownie z tożsamości hiperbolicznych możemy wywnioskować, że:

$$\sinh\theta = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \cosh\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Następnie podstawiając te wzory do (3.1) otrzymujemy:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

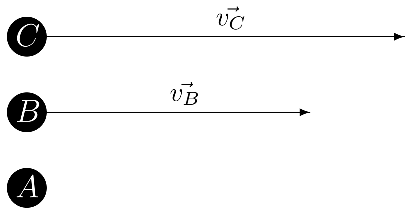
co jest naszym przekształceniem Lorentza. Przekształcenie Lorentza możemy zatem utożsamiać z obrotem na płaszczyźnie tx w naszej czterowymiarowej czasoprzestrzeni, które dane będzie wzorem (3.1).

3.2 Przekształcenie prędkości

W mechanice klasycznej dodawanie prędkości poruszania się dwóch ciał jest sumą algebraiczną tych prędkości. Posłużmy się Rys. 7. Niech najpierw dla nieporuszającego się obiektu A, obiekty B i C poruszają się odpowiednio z prędkościami $v_B = 30km/h$ i $v_C = 50km/h$. Stąd prosty wniosek, że dla obserwatora A, mamy $v_B + 20km/h = v_C$. Zatem jeżeli obiekt B zwiększy swoją prędkość o $20km/h$ to będzie poruszać się z prędkością równą v_C.

Następnie załóżmy, że $v_B = 0.6c$ czyli B porusza się z prędkością 60% prędkości światła. We wcześniej opisanym modelu obiekt B może zwiększyć swoją prędkość dwukrotnie i poruszałby się wtedy z prędkością $v_B = 1.2c$ co jak wiemy nie jest możliwe w mechanice relatywistycznej.

Rys. 7: Prędkości ciał.



Równoważnie stosując notację różniczkową przekształcenie Γ możemy zapisać w postaci:

$$\Gamma: \quad dx = \frac{dx' + vdt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad dy = dy', \qquad dz = dz', \qquad dt = \frac{dt' + \frac{vdx'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Niech $v_x = \frac{dx}{dt}$ oraz $v'_x = \frac{dx'}{dt'}$ oznaczają odpowiednio prędkości ciała w układach S i S'. Przy wyznaczeniu z pierwszego i czwartego równania $\frac{dx}{dt}$ otrzymujemy:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + vdx'/c^2} = \frac{dx' + vdt'}{dt'(1 + \frac{vdx'}{c^2dt'})} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{vdx'}{dt'}} = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v \cdot v'_x}{c^2}},$$

a stąd widzimy, że:

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v \cdot v'_x}{c^2}}. \tag{3.2}$$

W liczniku znajduje się suma algebraiczna, która występuje w mechanice klasycznej, lecz na naszą prędkość wpływa również mianownik. Widzimy, że dla niewielkich zmian prędkości v jest on bliski 1, co zgadza się z naszymi obserwacjami mechaniki klasycznej. Jak poprzednio rozważmy, że obiekt B porusza się z prędkością $v'_x = 0.6c$. Chcielibyśmy dwukrotnie zwiększyć tę prędkość, więc nasza zmiana prędkości v również będzie równa $0.6c$. Otrzymujemy zatem:

$$v_x = \frac{0.6c + 0.6c}{1 + \frac{0.6c \cdot 0.6c}{c^2}} = \frac{1.2c}{1 + 0.36} \approx 0.88c.$$

Widzimy zatem, że dla obserwatora w układzie S (może to być nieporuszający się obiekt A) prędkość obiektu B nie zwiększyła się dwukrotnie. Możemy zauważyć, że suma prędkości niewiększych od prędkości światła daje również prędkość niewiększą niż prędkość światła.

Zauważyć warto też, że dla $v'_x = c$ oraz $v = 0$ nasze v_x również jest równe c co zgadza się z drugim postulatem Szczególnej Teorii Względności o niezmienniczości prędkości światła w dowolnym układzie odniesienia.

3.3 Grupa Lorentza

3.3.1 Definicja

Do tej pory przez przekształcenie (transformację) Lorentza rozumieliśmy przekształcenie Γ. W bieżącym podrozdziale rozważać będziemy inne przekształcenia czasoprzestrzenni, również nazywane transformacjami Lorentza.

Definicja 3.1 (Grupa Lorentza)
Grupą Lorentza nazywamy nieabelową grupę przekształceń czasoprzestrzeni różnych od translacji, takich że interwał czasoprzestrzenny pozostaje niezmiennikiem. Przekształcenia takie będą, więc izometriami czasoprzestrzeni.

Grupą Lorentza oznaczmy parę $(\Lambda, \bullet)$, gdzie Λ to zbiór transformacji Lorentza, a $\bullet$ to standardowe mnożenie macierzy.

W algebrze liniowej grupa Lorentza oznaczana jest przez $SO(1, 3)$.

Zbiór Λ zawiera w sobie wszystkie liniowe izometrie czasoprzestrzeni (bez uwzględniania translacji). Grupa Poincarégo jest rozszerzeniem grupy Lorentza, które uwzględnia również translacje przestrzeni.

Łączność transformacji wynika z łączności działania mnożenia macierzy. Element neutralny i elementy odwrotne zostaną opisane w kolejnych podrozdziałach.

3.3.2 Generatory grupy

W poniższym podrozdziale wymienimy wszystkie generatory grupy Lorentza. Każdy element tej grupy może zostać uzyskany poprzez odpowiednie złożenie ze sobą przekształceń generujących.

Elementem neutralnym w naszej grupie będzie transformacja identycznościowa. Odpowiadająca jej macierz ma następującą postać:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

W grupie Lorentza wyróżnić możemy **obroty przestrzenne**. Przekształcenie to nie zmienia współrzędnej czasowej zatem ma postać:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ 0 & \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \\ 0 & \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{pmatrix}, \qquad \det(\Pi) \neq 0$$

gdzie π_{ij} dla $i, j = 1, 2, 3$ są odpowiednimi współczynnikami obrotu przestrzennego.

Przykładowo rozważając obrót o kąt β na płaszczyźnie yz macierz obrotu przestrzennego będzie postaci:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Kolejnym generatorem grupy Lorentza będzie tak zwana **inwersja przestrzenna** polegająca na 'odwróceniu' osi współrzędnych przestrzennych. Przekształcenie to będzie dane macierzą:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dodatkowo możemy mówić o **inwersji czasu** danej macierzą:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ostatnimi generatorami grupy Lorentza będą **właściwe transformacje Lorentza**. Mogą one zostać opisane macierzą poniższej postaci:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_{00} & \phi_{01} & 0 & 0 \\ \phi_{10} & \phi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det(\Phi) \neq 0$$

gdzie ϕ_{ij} dla $i, j = 0, 1$ są odpowiednimi współczynnikami tej transfomacji.

Właściwe transformacje Lorentza ograniczają się do transformacji pomiędzy czasem i jedną ze współrzędnych przestrzennych. Zakładamy, że dochodzi do transformacji pomiędzy współrzędnymi t oraz x (analogicznie jest dla transformacji pomiędzy t, z oraz t, y). Pokazaliśmy w podrozdziale 3.1, że przekształceniem zachowującym wielkość interwału (czyli będące izometrią czasoprzestrzeni) i opisywanym przez macierz Φ jest pchnięcie Lorentza dane poniższą macierzą:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta & 0 & 0 \\ \sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Warto jednak nadmienić, że nie jest to jedyna taka macierz. W następnym podrozdziale pokażemy, że macierzą izometrii w postaci Φ jest również macierz odwrotna do przekształcenia Γ.

3.3.3 Elementy odwrotne

Pokażemy, że wszystkie elementy z podrozdziału 3.3.2 mają element odwrotny. Poniżej wypiszemy elementy odwrotne dla każdego wymienionego generatora. Dla dowolnych przekształceń niebędącymi generatorami elementami odwrotnymi będę odpowiednie złożenia elementów odwrotnych generatorów.

i. Element neutralny jest odwrotnym do samego siebie, gdyż $I \bullet I = I$.

ii. Dla obrotu przestrzennego o kącie α na danej płaszczyźnie elementem odwrotnym będzie analogiczny obrót przestrzenny $-\alpha$ na tej samej płaszczyźnie.

iii. Inwersja przestrzenna i czasowa są swoimi elementami odwrotnymi.

iv. Elementem odwrotnym pchnięcia Lorentza będzie również pchnięcie Lorentza. Poniżej pokażemy jaka macierz odpowiada za przekształcenie odwrotne do pchnięcia Lorentza.

Wiemy, że przekształcenie Γ możemy utożsamiać z obrotem hiperbolicznym o danym kącie θ. Stąd przekształcenie odwrotne dane będzie tożsamą macierzą reprezentującą obrót hiperboliczny o kąt $-\theta$. Wtedy hipotetycznie Γ^{-1} byłaby postaci:

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh(-\theta) & \sinh(-\theta) & 0 & 0 \\ \sinh(-\theta) & \cosh(-\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta & 0 & 0 \\ -\sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Możemy zauważyć, że:

$$\Gamma^{-1} \bullet \Gamma = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta & 0 & 0 \\ \sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta & 0 & 0 \\ -\sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Również $\Gamma \bullet \Gamma^{-1} = I$. Zatem wskazany wyżej element jest elementem odwrotnym Γ.

Tak jak Γ pozwalało nam na przejście z układu S do ukłądu S' poruszającego się z prędkością v względem S, tak Γ^{-1} definiuje nam przekształcenie odwrotne, czyli przejście z układu S' do układu S, który porusza się z prędkością $-v$ względem S'.

Bibliografia

[1] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sands, *Feynmana wykłady z fizyki tom 1.1*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2001.

[2] Lew D. Landau, Jewgienij M. Lifszyc, *Teoria Pola*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2009.

[3] Mickaël Launay, *Teoria Parasola, czyli jak matematyka wywraca świat do góry nogami*, JK Wydawnictwo, Łódź, 2020.

[4] Samuel J. Ling, Jeff Sanny, William Moebs, *Fizyka dla szkół wyższych Tom III*, Openstax Polska, 2018.
https://openstax.org/details/books/fizyka-dla-szk%C3%B3%C5%82-wy%C5%BCszych-tom-3

[5] Hermann Minkowski, *Raum and Zeit*, B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1909.
https://en.wikisource.org/wiki/Translation:Space_and_Time

[6] Isaac Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londyn, 1686.

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski_space

[8] Albert Einstein, *On the electrodynamics of moving bodies*, Annalen der Physik, 1905.
http://hermes.ffn.ub.es/luisnavarro/nuevo_maletin/Einstein_1905_relativity.pdf (str. 891-921)
https://www.fourmilab.ch/etexts/einstein/E_mc2/e_mc2.pdf (str. 639-641)

[9] https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2590956

[10] https://klimas.paginas.ufsc.br/files/2017/03/Chapter12.pdf