Równanie dyfuzji (ciepła)

Mateusz Szczepański

1 Zagadnienie jednowymiarowe na $[0, 1]$

Rozważamy zagadnienie jednowymiarowe z danymi warunkami brzegowymi równania ciepła:

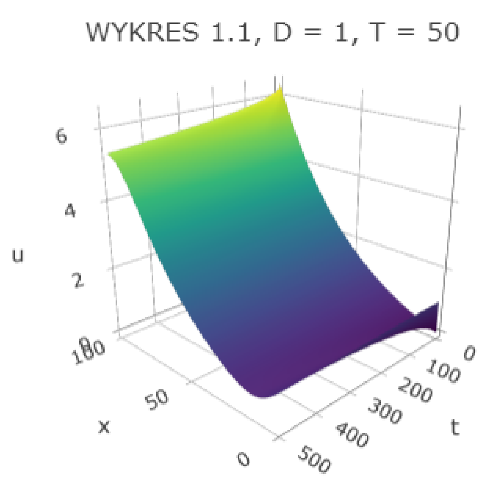
$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} & , x \in (0,1) \\ u(x,0) = e^{2x} - 1 \\ u(0,t) = 1 \\ u_x(1,t) = 1 \end{cases}$$

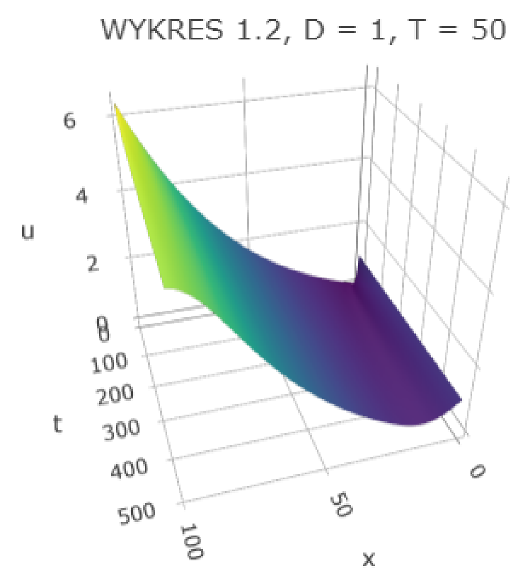
1.1 Symulacje w programie R

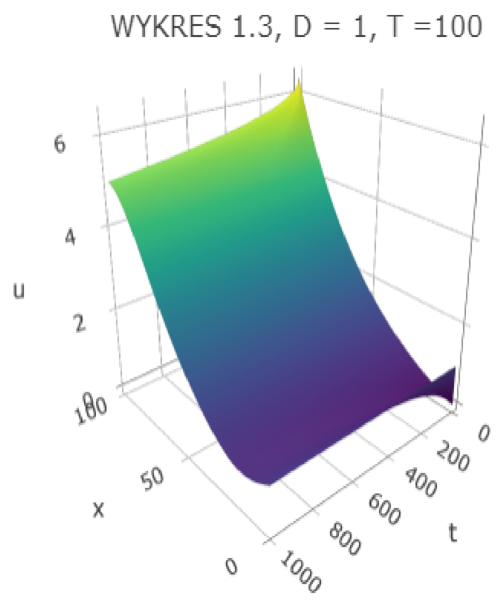
Zastosowana została metoda różnic skończonych o poniższym schemacie:

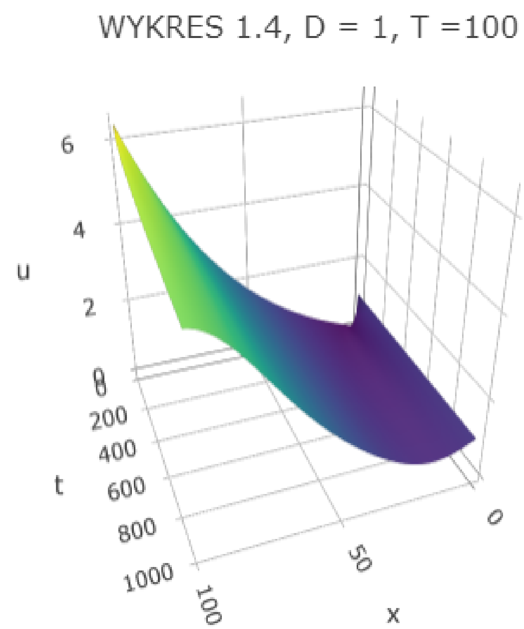
$$u(x, t + dt) = u(x, t) + D \cdot dt \cdot (u(x + dx, t) + u(x - dx, t) - 2u(x, t))$$

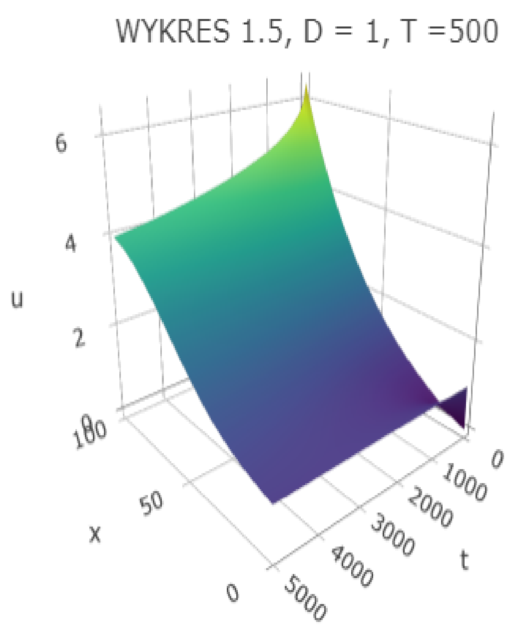
Gdzie D to stała dyfuzji. Rozważane wartości stałej dyfuzji to $D \in \{1, 3, 5, 5.1\}$. Aby metoda dawała zbieżne wyniki przyjęte zostały $dx = 10^{-2}$ oraz $dt = 10^{-1}$. Dla każdej wartości D będziemy rozważać zagadnienie na przedziale $t \in [0, T]$. Nasz warunek początkowy $u(x, 0) = e^{2x} - 1$ przyjmuje dla $x = 0$ wartość 0 co nie spełnia naszego warunku brzegowego $u(0, t) = 1$. Możemy przez to zauważyć pewną osobliwość wyszczególnioną na wykresie Osobliwość. Dla warunku brzegowego $u_x(1, t) = 1$ dochodzi do przepływu skierowanego do środka naszego kwadratu.

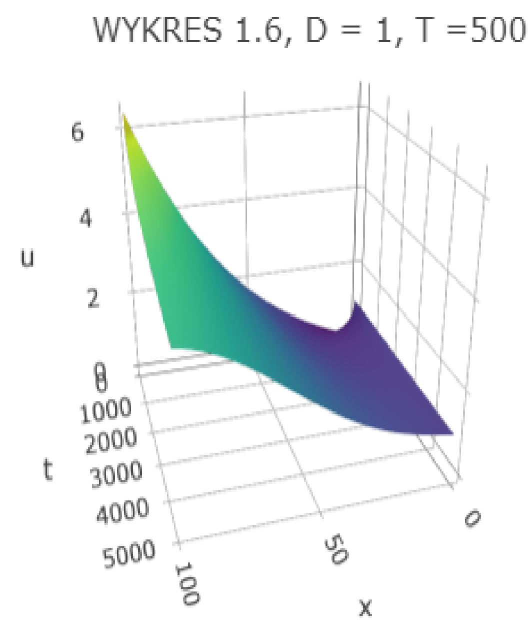




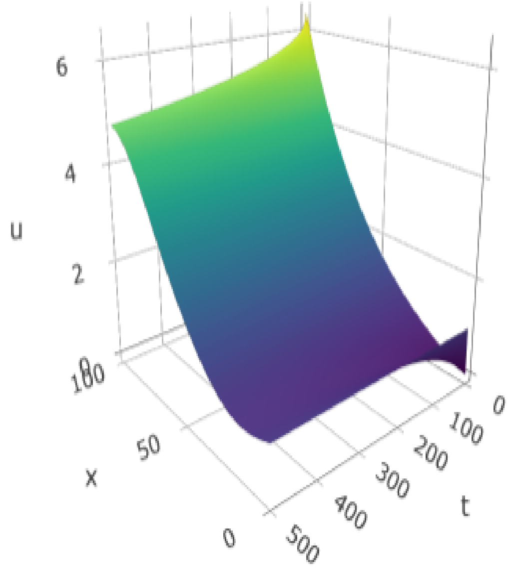

WYKRES 1.3, D = 1, T =100
u
x
t


WYKRES 1.4, D = 1, T =100
u
t
x

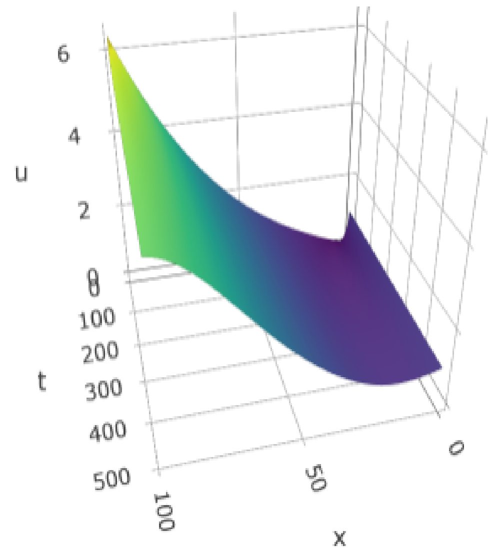

WYKRES 1.5, D = 1, T =500
u
x
t


WYKRES 1.6, D = 1, T =500
u
t
x

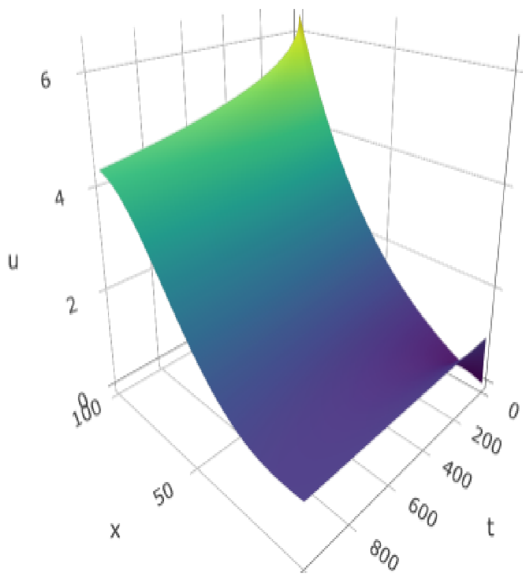
WYKRES 2.1, D = 3, T =50



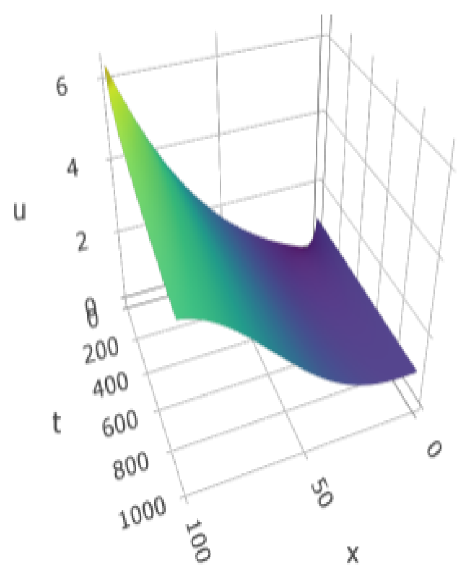
WYKRES 2.2, D = 3, T =50

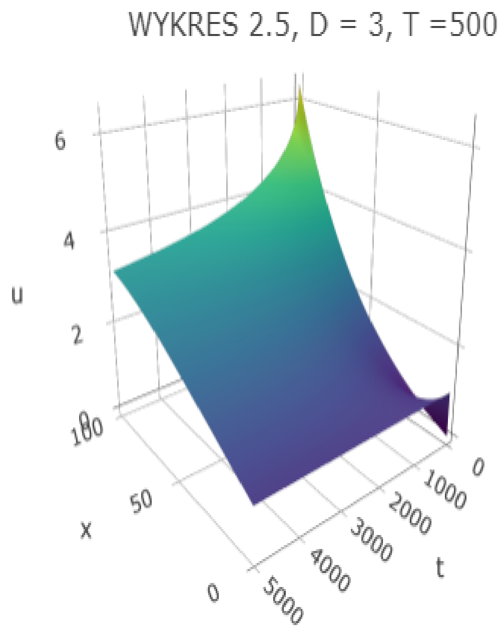


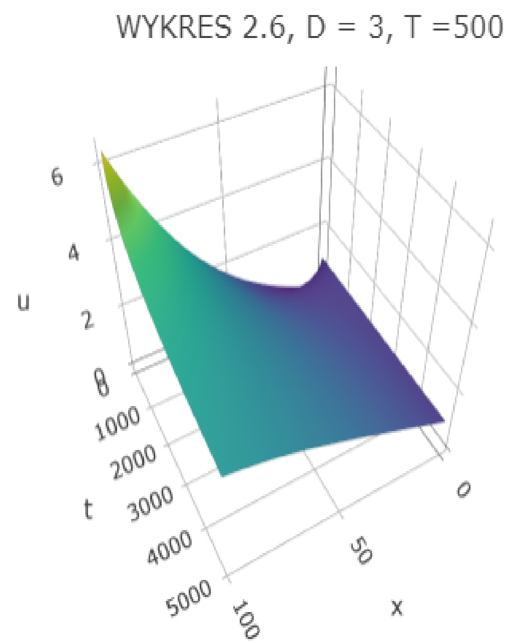
WYKRES 2.3, D = 3, T =100



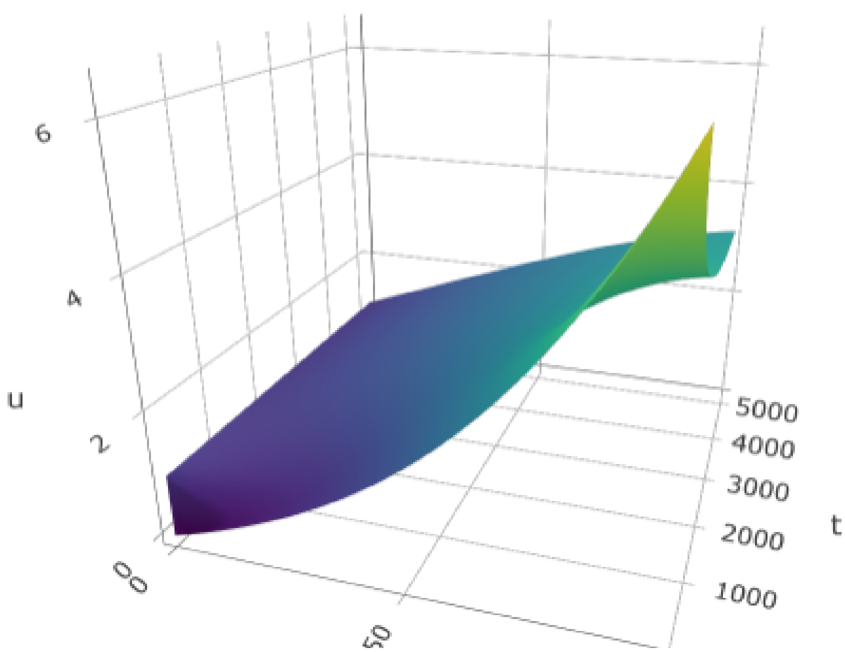
WYKRES 2.4, D = 3, T =100



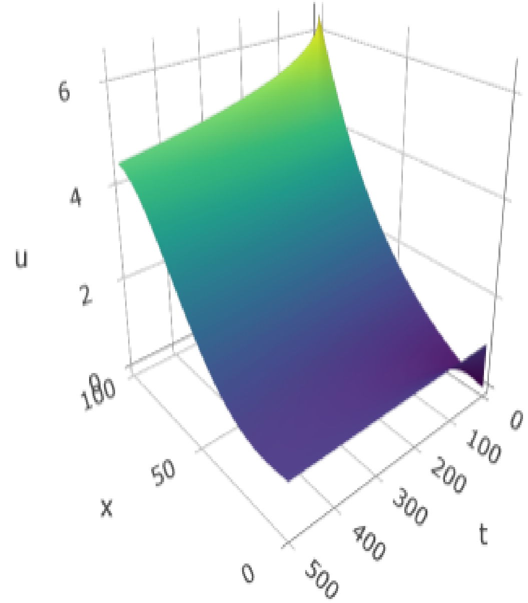

WYKRES 2.5, D = 3, T =500
u
x
t
0
2
4
6
0
50
100
0
1000
2000
3000
4000
5000


WYKRES 2.6, D = 3, T =500
u
t
x
0
2
4
6
1000
2000
3000
4000
5000
0
50
100

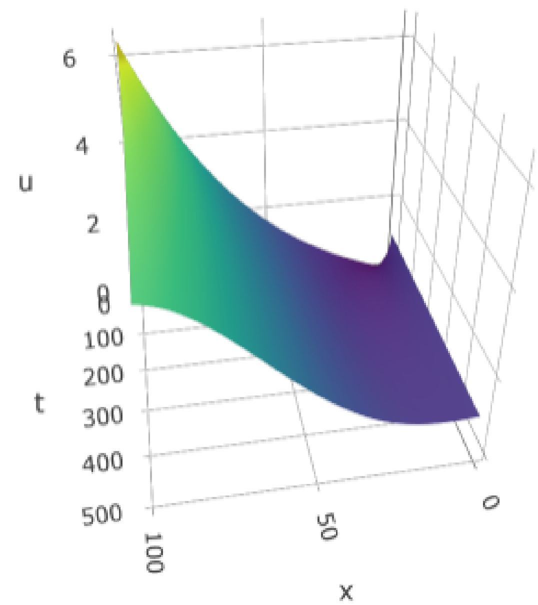
Osobliwość


u
t
2
4
6
1000
2000
3000
4000
5000

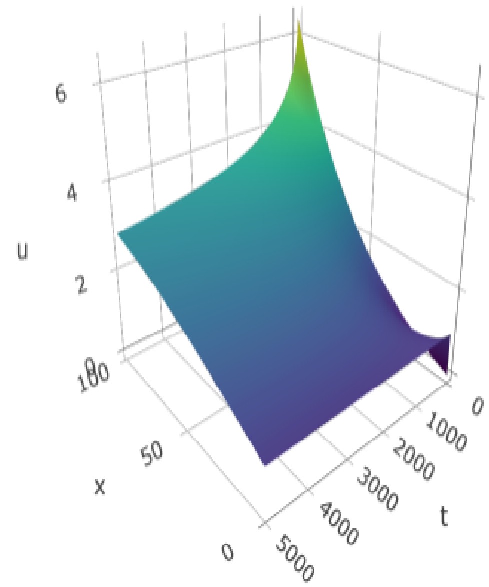
WYKRES 3.1, D = 5, T =50



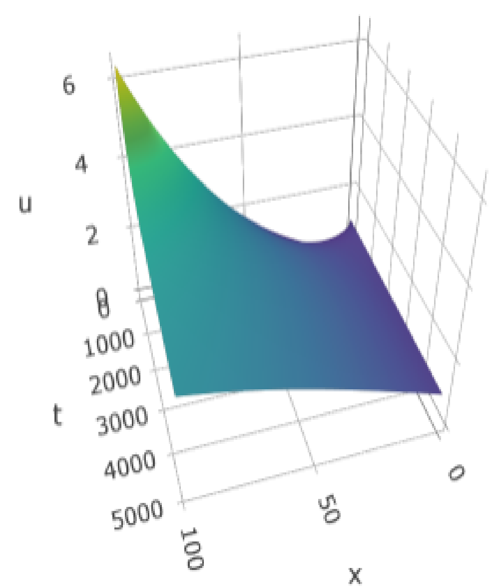
WYKRES 3.2, D = 5, T =50

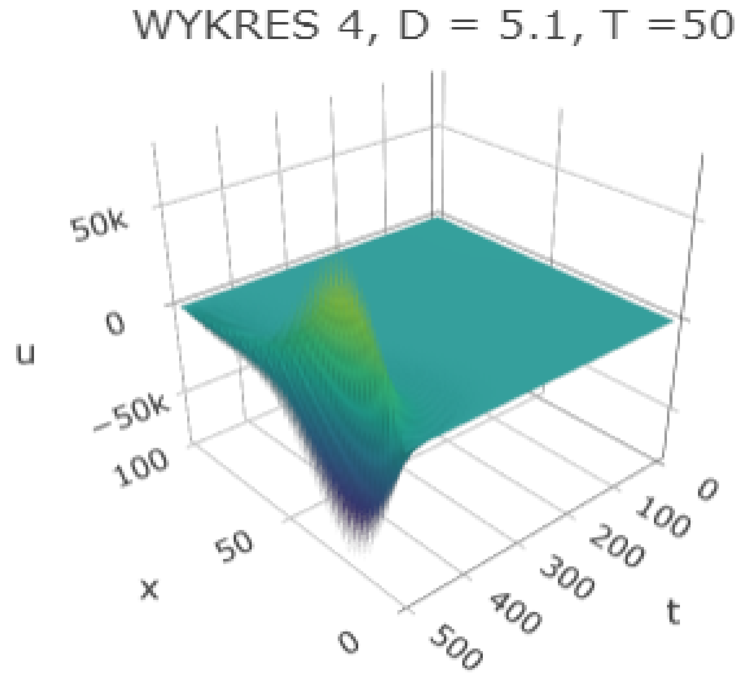


WYKRES 3.3, D = 5, T =500



WYKRES 3.4, D = 5, T =500





1.2 Wnioski dla przypadku jednowymiarowego

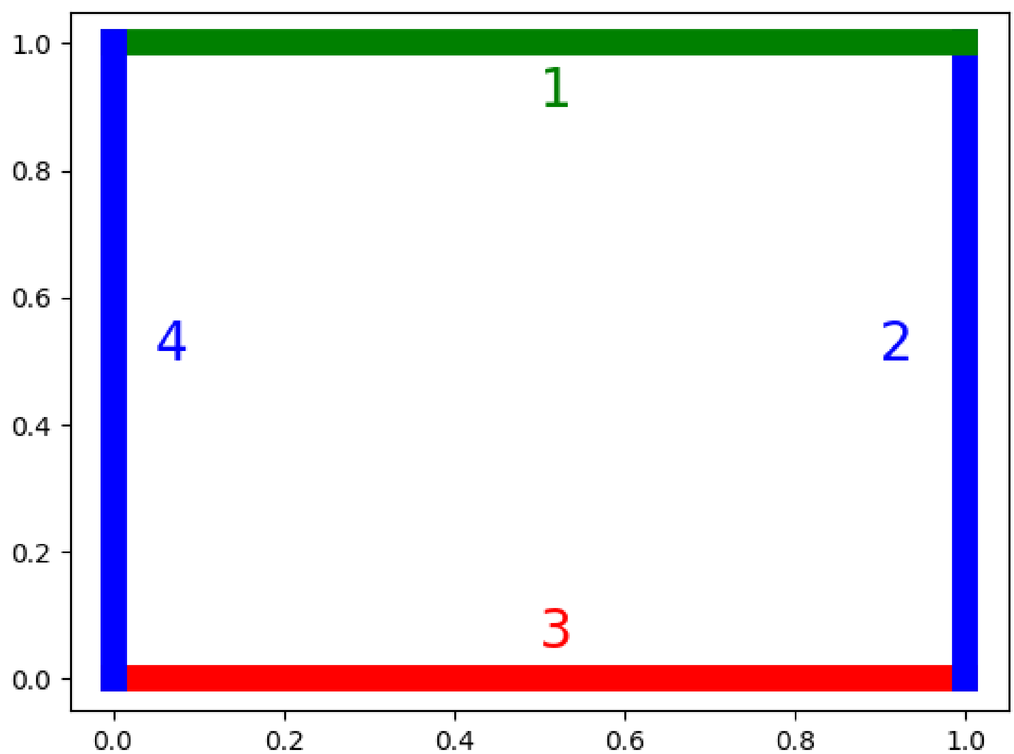
- Możemy zauważyć, że pomimo warunku początkowego, który dla x=0 daje wartość 0 warunek brzegowy ustala wartość wokół 0 równą 1 i utrzymuje tam stały poziom wyrównując z czasem pobliskie wartości ciepła.
- Dla $D > 5$ dochodzi do destabilizacji, którą możemy dostrzec na wykresie 4.
- Nasze rozwiązanie wraz ze wzrostem D lub t stabilizuje się do funkcji liniowej. Przypomnienie - warunek początkowy to funkcja wykładnicza.
- Skok, który występuje na wykresie Osobliwość jest raczej niefizyczny.

2 Zagadnienie dwuwymiarowe na $[0,1]^2$

Rozważamy zagadnienie dwuwymiarowe z danymi warunkami brzegowymi równania ciepła:

$$\begin{cases} u_t = D(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) = D\Delta u & , x \in \Omega = (0,1)^2 \\ u(x,0) = sin(3\pi x_1)x_2(1-x_2)^3 & \\ u(x,t) = 1 & , x \in \boxed{1} \\ u(x,t) = -1 & , x \in \boxed{3} \\ u_v(x,t) = 1 & , x \in \boxed{2}, \boxed{4} \\ x = (x_1, x_2) & \end{cases}$$

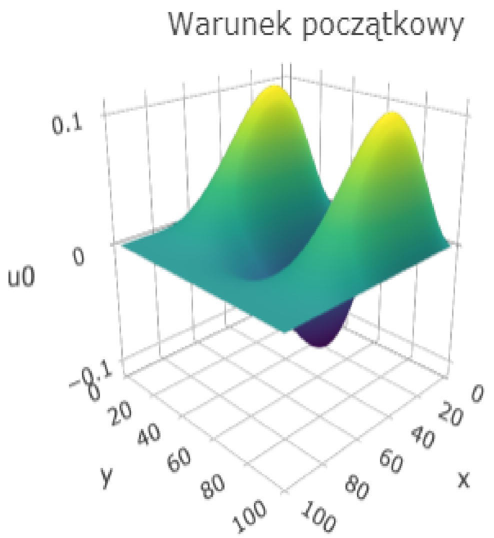
gdzie $\boxed{1} \cup \boxed{3} \cup \boxed{2} \cup \boxed{4}$ odpowiada $\partial\Omega$. Zostało to wyszczególnione na poniższym rysunku.

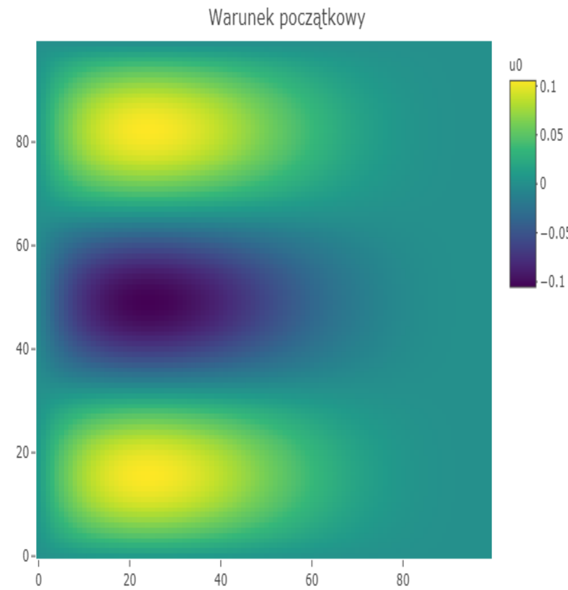


2.1 Symulacje w programie R

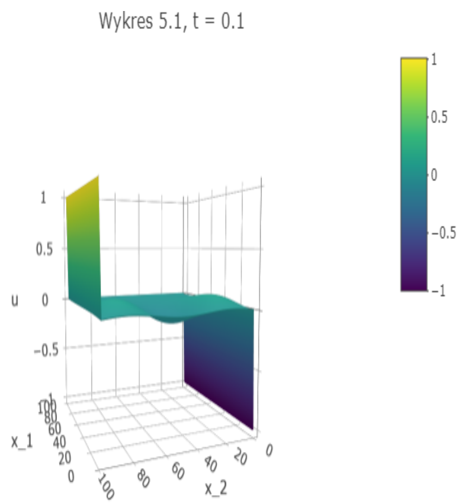
Została zastosowana metoda różnic skończonych opisywana poniższym wzorem: $u(x_1, x_2, t+dt) = u(x_1, x_2, t) + D \cdot dt \cdot (u(x_1 + dx_1, x_2, t) + u(x_1, x_2 + dx_2, t) + u(x_1 - dx_1, x_2, t) + u(x_1, x_2 - dx_2, t) - 4u(x_1, x_2, t))$

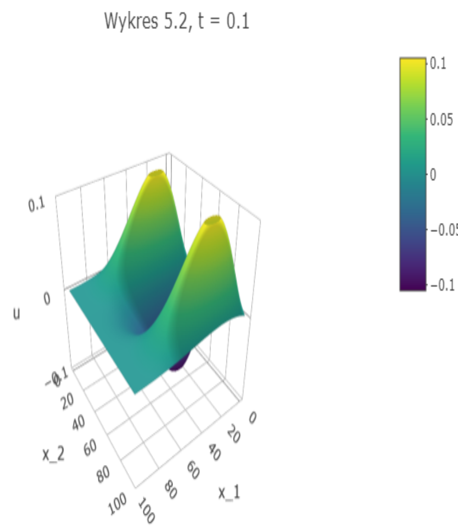
Dla możliwie najlepszego zobrazowania najpierw zobaczmy jak wygląda nasz warunek początkowy dla $t = 0$. Całe zagadnienie jest rozważane dla $dx_1 = dx_2 = 0.01$ oraz $dt = 0.1$. Rozważane jest $D = 1$.



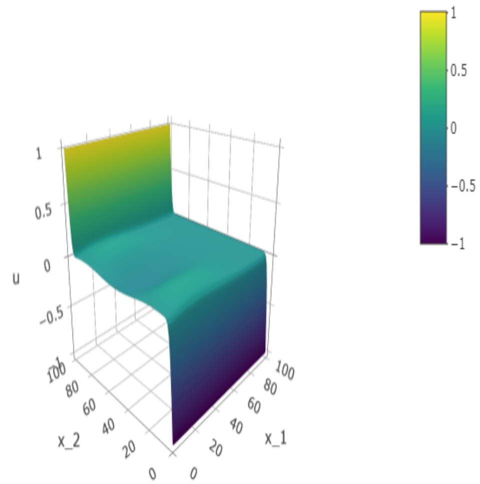


Warto zauważyć, że podobnie jak w przypadku jednowymiarowym nasz warunek początkowy nie spełnia wszystkich warunków brzegowych, zatem będziemy mogli dostrzec pewne osobliwości dla niewielkich $t > 0$. Warto również zauważyć, że warunek początkowy przyjmuje wartości z przedziału $(-0.1, 0.1)$.

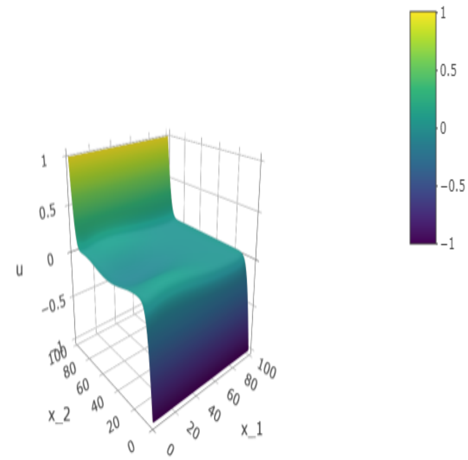




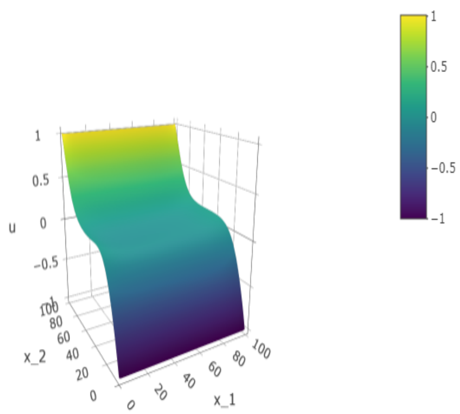
Z wykresu 5.1 na pierwszy rzut oka wydaje się, że coś się zepsuło podczas naszej symulacji, jednakże jest to kwestia skali i warunków brzegowych. Wykres 5.2 to to samo co 5.1, lecz zostały wycięte z dziedziny argumenty, które odpowiadały za warunku brzegowe oraz wykres został wyskalowany tak jak warunek początkowy czyli dla wartości $(-0.1, 0.1)$. Następnie będziemy się przyglądać co się dzieje z naszym wykresem z rosnącym t.



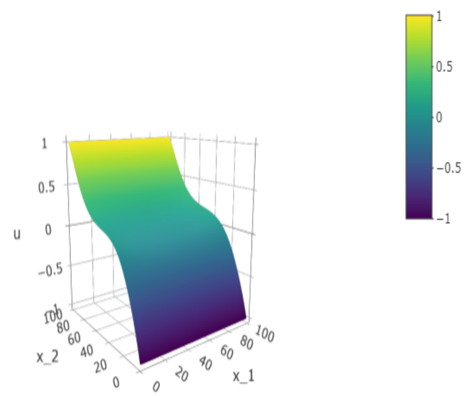
Wykres 5.3, t = 1



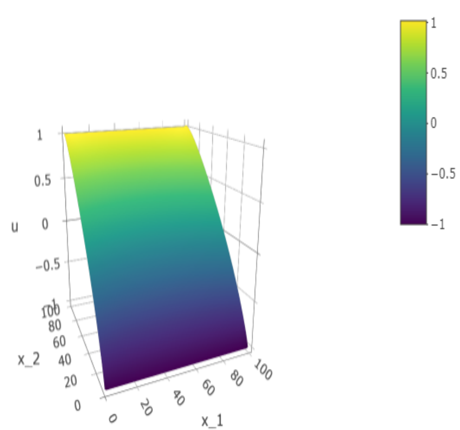
Wykres 5.4, t = 5



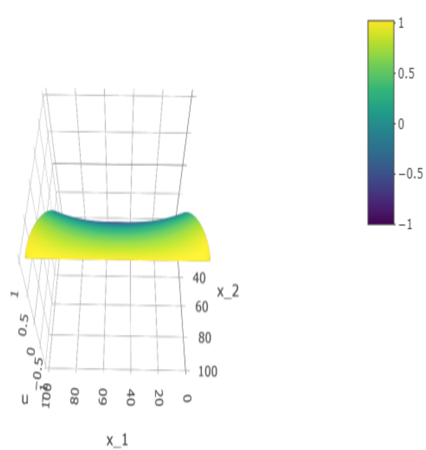
Wykres 5.6, t = 50



Wykres 5.7, t = 100

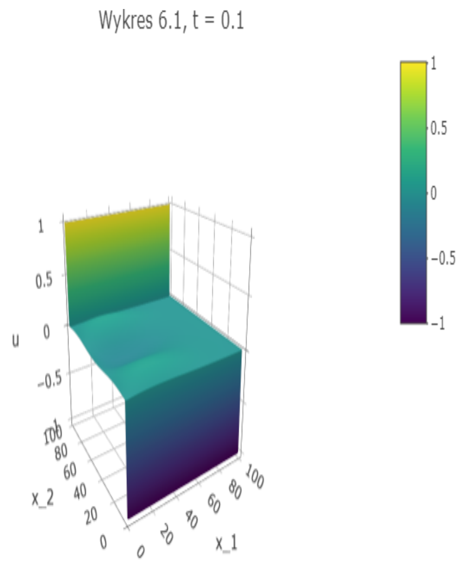


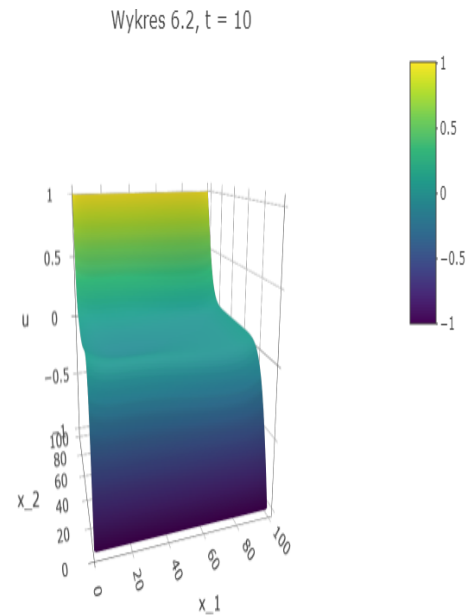
Wykres 5.8, t = 500

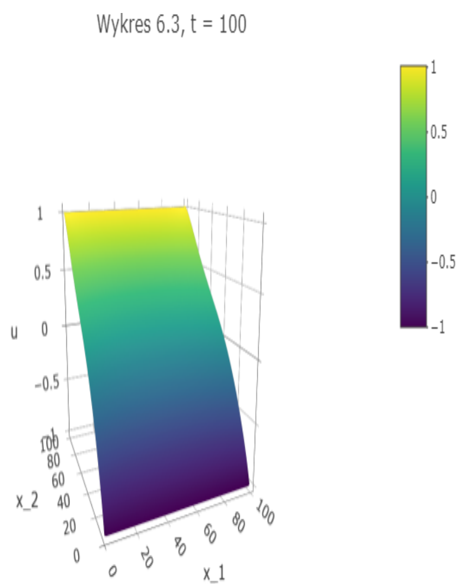


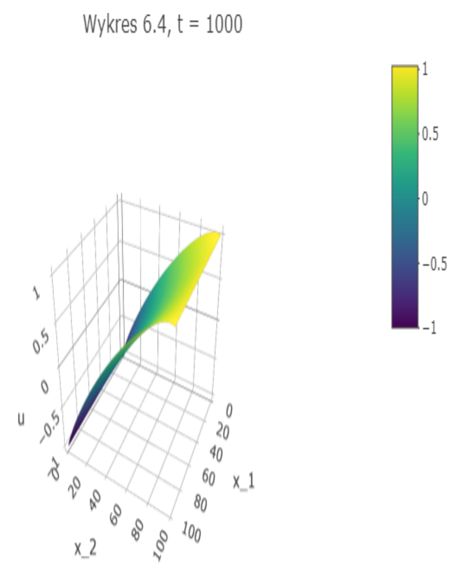
Wykres 5.9, t = 1000

2.2 Możemy dostrzec, że dla danego warunku początkowego warunki brzegowe całkowicie pochłonęłyńasz wykres i finalnie dostaliśmy prawie płaszczyznę, która jest nieznacznie wklęsła w środku z uwagi na nasze warunki brzegowe na bokach 2 i 4. Zobaczymy jeszcze co się będzie działo dla $D = 2.5$. Oczywiście warunek początkowy jest bez zmian.



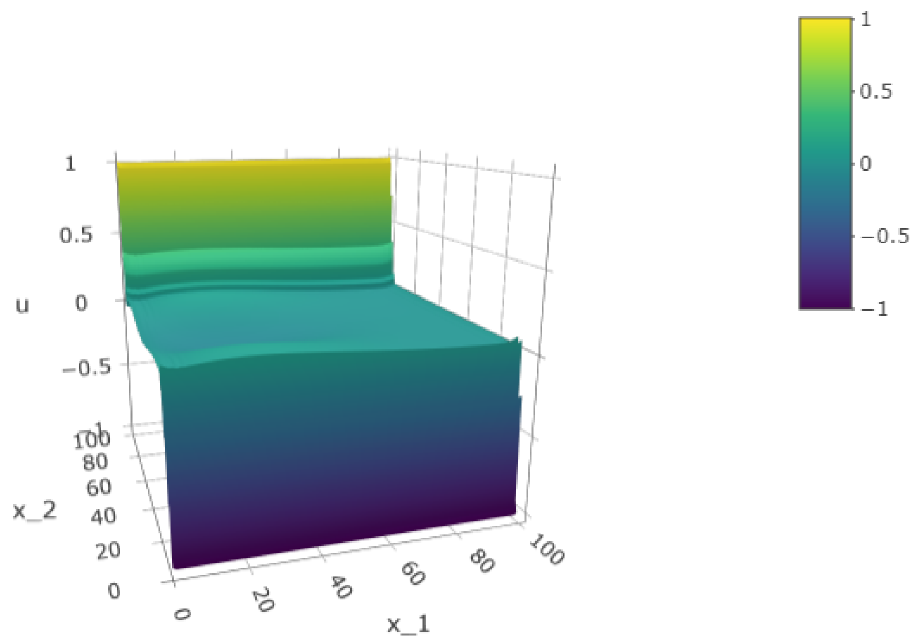




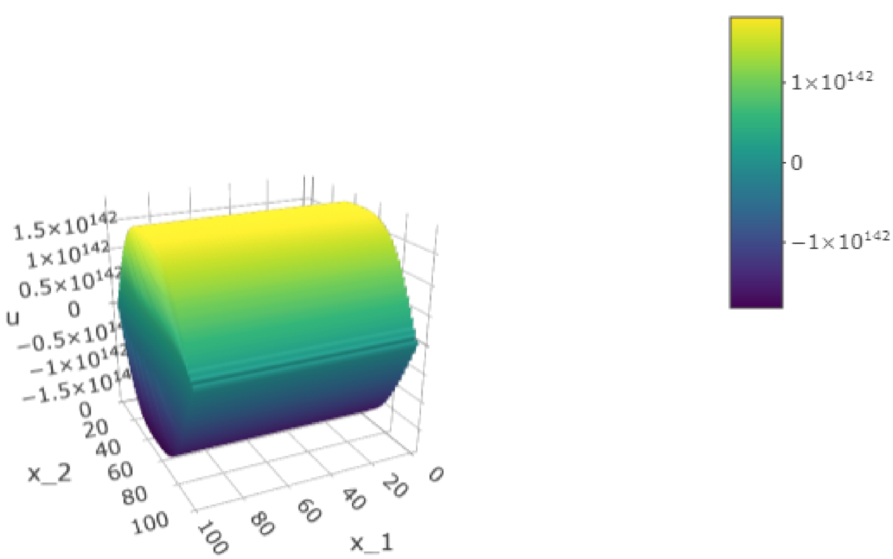


2.3 Widzimy, że sytuacja jest analogiczna, lecz wykres szybciej zbiega do naszej wklęsłej płaszczyzny. Na koniec zobaczymy sytuacje destabilizacji naszego wykresu dla $D = 3$.

Wykres 7.1, t = 1, destabilizacja



Wykres 7.2, t = 100, destabilizacja



Nie wiem czemu, ale ten wałek z wykresu 7.2 wygląda niezmiernie satysfakcjonująco :)