Modele polowań w pojedynczej populacji

Mateusz Szczepański

1 Rozważane zagadnienia

Rozważamy dwa różne równania różniczkowe:

$$\frac{d}{dt}P = r \cdot (1 - \frac{P}{L}) - kP \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}P = r \cdot (1 - \frac{P}{L}) - M \tag{2}$$

gdzie $P := P(t)$ oznacza liczebność populacji w chwili t. Parametry równania są zdefiniowane następująco:

- $r :=$ przyrost naturalny rozważanej populacji
- $L :=$ optymalna pojemność środowiska
- $k :=$ współczynnik polowań (połowów) proporcjonalnych (intensywność)
- $M :=$ współczynnik polowań (połowów) stałych

Modele opierają się na modelu logistycznym Verhulsta. Dla obu równań zakładamy niezerowy warunek początkowy $P(0) = P_p$ mówiący o liczebności populacji w chwili t=0. Dla równania (1) możemy zauważyć, że połowy zwiększają się wraz z liczebnością rozważanej populacji. W przypadku równania (2) nasze połowy są stałe i nie zależą od liczebności populacji. Równanie (2) dla M = 0 jest modelem Verhulsta (logistycznym).

2 Analiza rozwiązań

W pierwszej kolejności rozważać będziemy równanie (1).
Stany stacjonarne naszego równania to :

$$P_0 = 0$$

$$P_1 = \frac{r-k}{r}L$$

W tym przypadku musimy rozważyć dwa przypadki. Jeden 1° gdzie $r > k$, drugi 2° dla $r \leqslant k$.

W drugiej kolejności rozważymy równanie (2).
Tutaj stany stacjonarne zależą od naszych parametrów.
W przypadku $1^\bullet$ dla $r^2 - \frac{4Mr}{L} < 0$ nie istnieją rzeczywiste stany stacjonarne.
W przypadku $2^\bullet$ dla $r^2 - \frac{4Mr}{L} = 0$ istnieje jeden rzeczywisty punkt stacjonarny:

$$P_0 = \frac{1}{2}L$$

W przypadku $3^\bullet$ dla $r^2 - \frac{4Mr}{L} > 0$ istnieją dwa rzeczywiste punkty stacjonarne dane wzorem:

$$P_{0,1} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - \frac{4Mr}{L}}}{2 \cdot (-\frac{r}{L})}$$

3 Zachowanie rozwiązań równań

Rozwiązania równania (1) są uzależnione od przyrostu naturalnego, warunku początkowego oraz współczynnika polowań.
1° Dla $r > k$ wszystkie rozwiązania będą zbiegać do NIEzerowego punktu stacjonarnego.
Dla odpowiednio dobranego współczynnika polowań liczebność populacji się ustabilizuje.

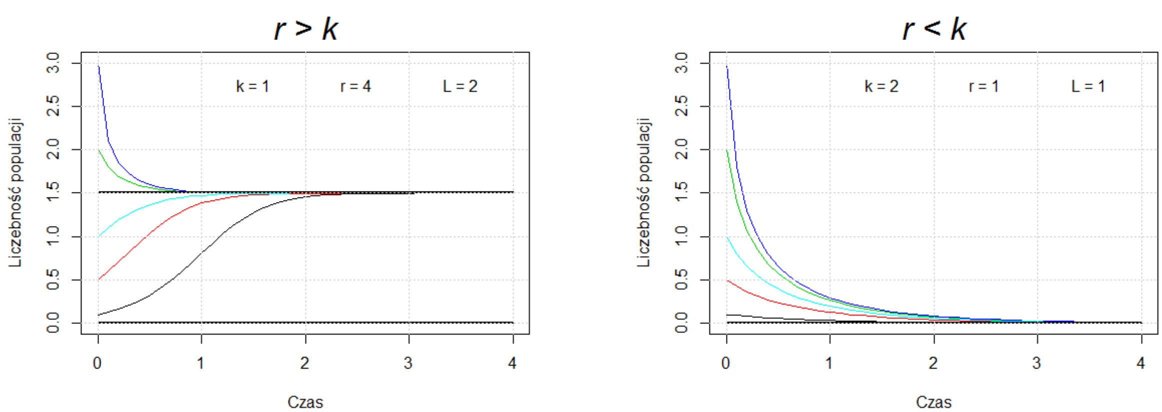
2° Dla $r \leqslant k$ wszystkie rozwiązania będą zbiegać do zerowego punktu stacjonarnego, co będzie skutkować wyginięciem populacji.
Rozwiązania równania (2) są uzależnione od wielkości współczynnika M oraz wielkości P_p.
$1^\bullet$ Dla $r^2 - \frac{4Mr}{L} < 0$ rozwiązania niezależnie od P_p będą zbiegać do $-\infty$.
Zbyt duże polowania doprowadzą do wyginięcia populacji.

$2^\bullet$ Dla $r^2 - \frac{4Mr}{L} = 0$ rozwiązania będą się stabilizować do $P_0 = \frac{1}{2}L$ lub będą dążyć do $-\infty$ zależnie od P_p.
W tej sytuacji populacja się ustabilizuje do niezerowego punktu stacjonarnego bądź wyginie.

$3^\bullet$ Dla $r^2 - \frac{4Mr}{L} > 0$ rozwiązania będą stabilizować się do P_1 lub zbiegać do 0 zależnie od P_p.
Zbyt małe polowania zależnie od początkowej liczebności populacji mogą doprowadzić do ustabilizowania liczebności populacji lub do jej wyginięcia.

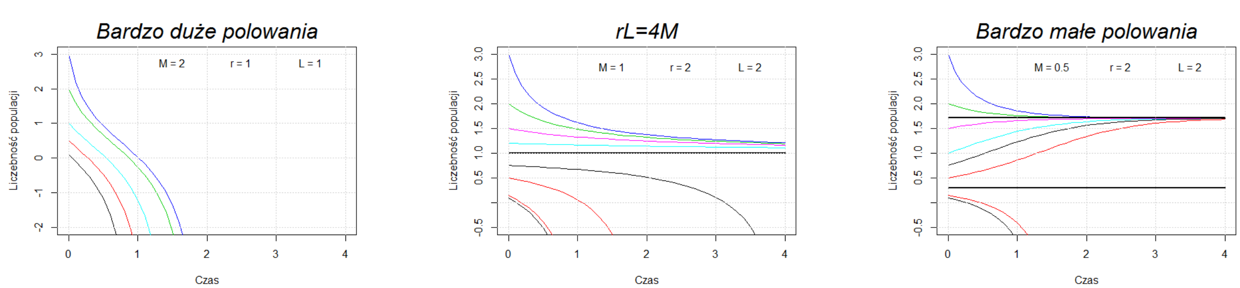
4 Symulacja rozwiązań naszych równań w R

Poniższe dwie ilustracje symulują rozwiązania równania (1) dla przypadków 1° oraz 2°. Czarne poziome linie wyznaczają punkty stacjonarne.



Rysunek 1: Rozwiązania równania (1)

Poniższe trzy ilustracje symulują rozwiązania równania (2) dla przypadków $1^\bullet$, $2^\bullet$ oraz $3^\bullet$. Czarne poziome linie wyznaczają punkty stacjonarne.



Rysunek 2: Rozwiązania równania (2)