

## DIPLOMARBEIT

# Finite Differenzen Verfahren zur numerischen Lawinensimulation

ausgeführt am Institut für  
Analysis und Scientific Computing  
der Technischen Universität Wien

in Zusammenarbeit mit dem Institut für  
Alpine Naturgefahren  
der Universität für Bodenkultur Wien

unter der Anleitung von  
Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Felix Breitenecker  
und  
Dipl.-Ing. Dr.techn. Harald Teufelsbauer  
als verantwortlich mitwirkenden Universitätsassistenten

durch  
Michael Szell  
Ludwig Kaiserstraße 12/I/15  
3021 Pressbaum

18. August 2007

# Kurzfassung

Diese Diplomarbeit formalisiert das zweidimensionale Lawinensimulationsmodell ELBA (Energy Line Based Avalanche) und präsentiert neu erstellte, auf bewährten numerischen Verfahren basierende Testimplementierungen mit **MATLAB**. ELBA gründet auf einem modifizierten Reibungsansatz nach Voellmy mit einer trockenen, und einer geschwindigkeitsabhängigen, dynamisch ermittelten, turbulenten Reibungskomponente. Das Modell beschreibt ein Newtonsches Fluid mit den Annahmen der Flachheit, Inkompressibilität, Isothermalität, sowie dimensionsabhängigen Größen. Es wird von einer Eulerschen Sichtweise des Fluids ausgegangen. Für diese Kräfte und Voraussetzungen wird ein System von partiellen Differentialgleichungen hergeleitet.

Das Berechnungsschema der bisherigen Implementierung, des auf beliebigen Topographien einsetzbaren kommerziellen Lawinensimulators ELBA+, wird detailliert aufgezeigt. Es handelt sich um ein diskretes Verfahren anlehnend an zelluläre Automaten und explizite Finite Differenzen Methoden. Da es in ELBA+ häufig zu ungeklärten Oszillationen kommt und eine Abhängigkeit von der Gitterauflösung besteht, wird eine Neuimplementierung angestrebt. Zu diesem Zweck werden klassische sowie moderne Finite Differenzen Verfahren diskutiert. Von den hochauflösenden numerischen Methoden werden jene dargelegt die sich nach eingehender Literaturrecherche zur Fluid- und Lawindynamik als adäquates Werkzeug zur Lösung konvektionsdominanter Strömungen erwiesen: TVD (Total Variation Diminishing) Lax-Friedrichs Methoden und das vielfach zur Simulation des Savage-Hutter-Modells eingesetzte NOC (Non-Oscillatory Central) Schema.

Numerische Experimente der in **MATLAB** implementierten Verfahren zur Lösung des hergeleiteten Differentialgleichungssystems werden in ein- und zweidimensionalen Testreihen auf einfachen Topographien durchgeführt und evaluiert. Wie sich herausstellt liefert das NOC Schema mit TVD Minmod Limiter die befriedigendsten Ergebnisse: keine Oszillationen, wenig bis keine Diffusion.

**Schlüsselbegriffe:** ELBA, Lawinen, Simulation, numerische Methoden, Finite Differenzen Methode

# Abstract

This thesis formalises the two-dimensional avalanche simulation model ELBA (Energy Line Based Avalanche) and presents new test implementations in **MATLAB** which are based on established numerical methods. ELBA utilizes a modified Voellmy friction approach, with both a dry and a velocity-dependent, dynamically calculated, turbulent friction component. The model describes a Newtonian fluid, assuming shallowness, incompressibility, isothermality, and dimension-dependent quantities. The fluid is treated from a Eulerian point of view. A system of partial differential equations is derived to fit this set of forces and premises.

The algorithm of the present implementation, the commercial avalanche simulator ELBA+, applicable to arbitrary topography, is demonstrated in detail. This discrete simulator's calculation procedure follows cellular automata and explicit finite difference schemes. Unexplained oscillations which appear often in ELBA+, and the dependency of the algorithm on grid resolution, necessitate a new implementation. For this reason, classic as well as modern finite difference methods are discussed. Some high-resolution schemes are presented which proved suitable for solving convectively dominated flows in recent publications on fluid- and avalanche-dynamics: TVD (Total Variation Diminishing) Lax-Friedrichs methods, and the NOC (Non-Oscillatory Central) scheme, which is frequently used in simulating the Savage-Hutter model.

Numerical experiments which make use of these methods, implemented in **MATLAB** for solving the derived system of differential equations, are conducted and evaluated in one- and two-dimensional series of tests on simple topographies. As it turns out, the NOC scheme with TVD Minmod limiter provides the best results, with no oscillations and little to no diffusion.

**Keywords:** ELBA, avalanches, simulation, numerical methods, finite difference method

# Danksagung

Mein Dank gilt Felix Breitenecker für die Betreuung dieser Diplomarbeit und Schaffung einer überaus freundlichen Atmosphäre am Institut, sowie Harald Teufelsbauer für die kollegiale Zusammenarbeit, Hilfestellung in vielen Fragen, durchgängige Diskussionsbereitschaft, und Beisteuerung wichtiger Literatur. Ich danke außerdem Gerhard Volk, der mir diese wunderbare Möglichkeit verschafft hat mich schon im Laufe des Studiums mit einem so praxisorientierten und interessanten Thema auseinanderzusetzen.

Weiters ergeht mein Dank an Judit Sebő für das Korrekturlesen und die moralische Unterstützung bei der Erstellung dieser Arbeit, wie auch Franz Clemens Schwarzingen für konstruktive Kommentare und nützliche Ratschläge zu L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-bezogenen Fragen. Péter Agócs danke ich für die Korrektur der englischen Kurzfassung, wie auch Daniel Weller für das Korrekturlesen der Arbeit. Dank gilt nicht zuletzt meinen Eltern Katalin und Andreas Szell, die mich in meinen Bestrebungen stets unterstützt haben.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Herleitung der Modellgleichungen</b>	<b>3</b>
2.1	Grundannahmen und Vereinfachungen . . . . .	3
2.2	Betrachtungsweisen eines Fluids . . . . .	5
2.3	Koordinatensystem und Geometrie . . . . .	7
2.3.1	Globale Koordinaten und geometrische Größen . . . . .	7
2.3.2	Lokale Koordinaten . . . . .	9
2.4	Modellkräfte . . . . .	10
2.4.1	Gravitationskraft . . . . .	11
2.4.2	Hydrostatischer Druck . . . . .	11
2.4.3	Turbulente Reibung . . . . .	12
2.4.4	Trockene Reibung . . . . .	13
2.5	Grundgleichungen . . . . .	14
2.5.1	Kontinuitätsgleichung . . . . .	14
2.5.2	Impulsgleichung . . . . .	16
2.6	Nebenbedingungen und zusätzliche Funktionen . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Der Algorithmus von ELBA+</b>	<b>20</b>
3.1	CFL-Bedingung und Berechnungsschema . . . . .	20
3.2	Implementierung . . . . .	22
3.2.1	Aufspannen der Bounding Box . . . . .	23
3.2.2	Ermittlung der beschleunigenden Kräfte . . . . .	24
3.2.3	Festlegung des Zeitschrittes . . . . .	24
3.2.4	Ermittlung der Geschwindigkeit . . . . .	25
3.2.5	Massenweitergabe . . . . .	26
3.2.6	Plastischer Stoß . . . . .	26
3.2.7	Abbruchbedingung . . . . .	27
3.3	Bemerkungen und Probleme . . . . .	28

---

<b>4</b>	<b>Finite Differenzen Schemata</b>	<b>30</b>
4.1	Motivation der Verfahrensart . . . . .	30
4.2	Überlegungen zu den Grundgleichungen . . . . .	31
4.2.1	Diskretisierung . . . . .	31
4.2.2	Klassifizierung . . . . .	33
4.2.3	Konservative Form und Numerischer Fluss . . . . .	34
4.3	Klassische Verfahren . . . . .	35
4.3.1	Upwind . . . . .	36
4.3.2	Lax-Wendroff . . . . .	38
4.3.3	Lax-Friedrichs . . . . .	39
4.3.4	MacCormack . . . . .	41
4.4	Hochauflösende Verfahren . . . . .	42
4.4.1	TVD Methoden . . . . .	43
4.4.2	NOC Schema . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Numerische Experimente</b>	<b>53</b>
5.1	Eindimensionale Testreihen . . . . .	54
5.1.1	Testreihe 1D.1 . . . . .	55
5.1.2	Testreihe 1D.2 . . . . .	59
5.2	Zweidimensionale Testreihen . . . . .	64
5.2.1	Testreihe 2D.1 . . . . .	64
5.2.2	Testreihe 2D.2 . . . . .	67
5.2.3	Testreihe 2D.3 . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Abschließende Bemerkungen</b>	<b>73</b>
6.1	Zusammenfassung . . . . .	73
6.2	Ergebnisse . . . . .	74
6.3	Ausblick . . . . .	75
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>76</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Die vorliegende Diplomarbeit entstand auf der Technischen Universität Wien (Institut für Analysis und Scientific Computing) in Zusammenarbeit mit der Wiener Universität für Bodenkultur (Institut für Alpine Naturgefahren) im Auftrag von Dipl.-Ing. Gerhard Volk für NiT Technisches Büro GmbH. Der Auftrag an den Autor dieser Arbeit bestand darin, das Berechnungsschema des Lawinensimulators ELBA+ zu untersuchen, entweder zu verbessern oder andere geeignete numerische Verfahrensweisen auf dem neuesten Stand der Literatur zu finden und auf ihre Tauglichkeit zu überprüfen.

Wie sich im Laufe der Literaturbeschaffung herausstellte ist die Lawinenforschung – mitsamt dem Streben nach immer exakteren numerischen Methoden zur Simulation – zurzeit ein sehr aktives Gebiet. Vor allem Beiträge von HUTTER, PUDASAINI und WANG rund um das Savage-Hutter-Modell stechen hervor. Die Aktualität des Themas findet sich bestätigt einerseits durch Neuerscheinungen wie [HK03] und [PH07], andererseits durch das stetig wachsende Bewusstsein in der Gesellschaft für Naturphänomene, und dem Bestreben, für die regelmäßig viele Menschenleben fordernden Katastrophenlawinen besser gerüstet zu sein.

### Geschichte von ELBA

ELBA (Energy Line Based Avalanche [Simulation Model]) ist ein Lawinensimulationsmodell, das im gleichnamigen Computerprogramm 1998 auf der Wiener Universität für Bodenkultur von Gerhard Volk und Karl Kleemayr ins Leben gerufen wurde. Das Programm basiert auf einem expliziten Differenzenschema, implementiert in Anlehnung an zelluläre Automaten. In den Jahren 2002 bis 2005 portierte Gerhard Volk die `FORTRAN 90` Version auf `Visual Basic .NET`, führte Verbesserungen ein, und kam so in den alleinigen Besitz dieses weiterentwickelten neuen Produktes: ELBA+.

„ELBA+ ist ein Pre- und Postprocessing-Modul rund um das Lawinensimulationsmodell ELBA. ELBA+ ist voll in das Geoinformationssystem ArcGIS 9.0 des Softwareherstellers ESRI eingebunden und erlaubt so die Nutzung aller GIS-Funktionen für die Aufbereitung der Eingangsdaten, sowie die Analyse und Präsentation der Ausgangsdaten einer Lawinensimulation in einer offenen GIS-Umgebung.“ (Quelle: [NiT05, S. 1])

Eine wesentliche Weiterentwicklung von ELBA+ ist neben der Einbindung in ArcGIS auch seine Benutzerfreundlichkeit und Erleichterung der Handhabung großer Projekte mit vielen Simulationsvarianten. Nicht zuletzt wegen der Schnelligkeit und guten Übereinstimmung der Simulationsergebnisse mit gemessenen Daten fand dieser Simulator in den letzten Jahren ausgiebige internationale Nutzung. In Österreich kann ELBA+ mittlerweile als Referenzprogramm für numerische Lawinensimulation angesehen werden.

## Gliederungsübersicht

**Kapitel 2** listet alle im ELBA-Modell vorausgesetzten Vereinfachungen und Annahmen auf, und gibt eine Einführung in strömungsmechanische Grundlagen. Nach einer kurzen Erklärung von Geometrie und Koordinatensystemen folgt die Herleitung der vier Modellkräfte sowie der Grundgleichungen. Das Kapitel schließt ab mit den Nebenbedingungen und zusätzlichen Funktionen von ELBA.

**Kapitel 3** beinhaltet das Berechnungsschema des Lawinensimulators ELBA+. Behandelt wird neben dem Algorithmus die Courant-Stabilitätsbedingung, am Ende folgen Bemerkungen zu den Problemen mit diesem diskreten zellulärer Automat-artigen Verfahren, sowie die Erkenntnis dass eine Neuimplementierung mit einem herkömmlichen numerischen Schema am sinnvollsten erscheint.

**Kapitel 4** motiviert dafür die Verfahrensart explizite Finite Differenzen Methode und gibt fundamentale numerische Überlegungen zu den Grundgleichungen. Anhand von vier klassischen Verfahren werden die typischen numerischen Probleme Diffusion und Oszillation aufgezeigt, sowie hochauflösende Verfahren zur Lösung dieser detailliert erklärt.

**Kapitel 5** enthält die Simulationsergebnisse von ein- und zweidimensionalen Testreihen zu den Verfahren MacCormack, TVD, und NOC, durchgeführt in selbstentwickelten MATLAB-Programmen. Die Vor- und Nachteile der einzelnen Schemata werden deutlich, nachdem auf verschiedenen primitiven Topographien Vergleiche angestellt werden. Tabellarische Ergebnisse stehen zur Verfügung, die wichtigsten werden visualisiert.

**Kapitel 6** fasst die Arbeit und deren Ergebnisse zusammen, und schließt die Diplomarbeit mit kritischen Bemerkungen sowie einem Ausblick ab.



## Kapitel 2

# Herleitung der Modellgleichungen

### 2.1 Grundannahmen und Vereinfachungen

Das ELBA-Lawinensimulationsmodell stützt sich einerseits auf mehrere Grundannahmen die sich auf physikalische Tatsachen und Erfahrungswerte gründen und eine befriedigende Annäherung an reale Verhältnisse ergeben sollen, andererseits auf Vereinfachungen, um eine mathematische Beschreibung und schnelle rechnergestützte Verarbeitung von Simulationsabläufen zu ermöglichen. Diese Grundannahmen sind zwar nirgendwo explizit spezifiziert, haben sich dem Autor dieser Arbeit aber sowohl in Beschäftigung mit den Funktionsweisen, Anwendungsgebieten und dem Aufbau von ELBA+ als auch aus persönlichen Gesprächen mit dessen Entwickler Gerhard Volk herauskristallisiert und werden festgelegt wie folgt, vgl. auch das in letzter Zeit vielstudierte Savage-Hutter-Modell, [HK03]:

- **Zweidimensionalität des Berechnungsschemas**

Berechnungen erfolgen in zwei Dimensionen, wobei die Abflusshöhe  $h$  nicht ausdrücklich aus einer Höhenmittelung hergeleitet sondern als Parameter gehandhabt wird. Veränderliche Gittergrößen wie Geschwindigkeit werden, sofern anwendbar, von vornherein als höhengemittelt angenommen. Dementsprechend entfällt etwa eine qualitative Unterscheidung von freier und basaler Oberfläche.

- **Größenabhängigkeit**

Dimensionslose Größen kommen nicht zum Einsatz. Die Erfahrung zeigt dass ab einer bestimmten Mächtigkeit Lawinen (wie z. B. die Katastrophenlawine von Galtür 1999, deren Volumen auf ca.  $500\,000\text{ m}^3$  geschätzt wurde) ein weitaus zerstörerischeres Verhalten an den Tag legen und eine Anwendung dimensionsloser Gleichungen, mit denen zur Evaluierung Laborexperimente in kleinen Maßstäben durchgeführt werden könnten, wegen dieses qualitativen Unterschiedes nicht gerechtfertigt werden können.

tigt erscheint, vgl. etwa [Eid05, S. 33], wo diverse Parameter abhängig von Lawinenmasse angegeben werden.<sup>1</sup>

- **Flachheit**

Die Höhe des Lawinenkörpers ist verglichen mit seiner hangparallelen Ausdehnung über das Abflussgebiet relativ klein.

- **Materialeigenschaften**

Die innere Reibung des Materials wird vernachlässigt – eine Lawine verhält sich im ELBA-Modell wie ein newtonsches Fluid ohne explizite granulare Eigenschaften.<sup>2</sup> Um Ablagerungen in befriedigenden Formen zu erhalten, ist es notwendig für die Berechnung gewisse Nebenbedingungen zu fordern, vgl. Abschnitt 2.6. Mit ELBA sollen vor allem trockene Großlawinen beschrieben werden, zumindest Lawinenteile mit einer Dichte ab etwa  $200 \text{ kg/m}^3$ , vgl. [Voe55, S. 9]. Unter diesen Bedingungen wird der Einfluss des Materialparameters Dichte vernachlässigt. Der Mohr-Coulombsche Gleitreibungsparameter  $\mu$  wird als konstant<sup>3</sup> mit einem Wert von etwa 0,2 angesetzt, vgl. [Eid05, S. 33].

- **Inkompressibilität**

Die Schneedichte ist stets konstant. Kompression des Lawinenkörpers im aktiven Fall oder Dehnung im passiven Fall geht nicht mit einer Dichteänderung einher, sondern mit einer Zu- bzw. Abnahme der Abflusshöhe. Dies kann bei starker Kompression zu einem temporär unrealistisch hoch aufgetürmten Lawinenkörper führen. Die Einführung eines Dichtefeldes sei als mögliche Erweiterung des Modells festgehalten.

- **Beliebige Topographien, Rotationsinvarianz**

ELBA soll auf beliebig geformten und gerichteten Topographien einsetzbar sein. Für das Rechenschema ist daher zu berücksichtigen, dass Begriffe wie „vorne“ und „hinten“ für den Fluss nicht ausgezeichnet sind. Es wird gefordert, dass ELBA für sowohl kanalisierte Lawinen in Geländeschluchten, als auch für Lawinen auf offenen Hängen befriedigende Ergebnisse liefert.<sup>4</sup>

- **Vorgegebene Geländedaten**

Das digitale Höhenmodell (DHM) ist mit konstanter Maschenweite  $\delta$  in beide Di-

---

<sup>1</sup>Persönliche Mitteilung von Gerhard Volk.

<sup>2</sup>Eine Verfeinerung des statischen Druckmodells durch die Abminderung um einen internen Reibungswinkel (für einen realistischeren Schneesammenhalt) war von Gerhard Volk angedacht, allerdings erwies sich die Auswirkung dieses Effektes wegen der Flachheit der simulierten Lawinen als zu insignifikant im verwendeten Rechenschema.

<sup>3</sup>In Abschnitt 2.6 werden Reibungsphasen eingeführt, in denen  $\mu$  verändert wird. Global gesehen sollen die Materialeigenschaften aber als festgelegt gelten und eine Variation dieser eine untergeordnete Rolle spielen.

<sup>4</sup>Man beachte hierbei, dass bei sehr engen Schluchten ein Widerspruch zur Flachheitsannahme bestehen kann. Dieser mögliche Widerspruch soll vernachlässigt werden.

mensionen äquidistant gerastert, wobei für jeden Gitterpunkt zumindest Höhe  $z$ , und wenn möglich Hangsteigung  $\psi$  sowie Exposition  $\phi$  aus Messungen ermittelt vorgegeben sind. Für Details zur Geometrie siehe Abschnitt 2.3.

- **Isothermalität**

Temperaturen spielen keine Rolle und werden vernachlässigt. Energie geht allein durch Reibungskräfte – also Geschwindigkeitsverlust – verloren.

- **Kontinuität**

Aufgrund der Größenordnungen und Eigenschaften einer Lawine sowie der praktischen Relevanz für die Simulation wird deren Materie stets unter der Kontinuums-Modellvorstellung betrachtet. Es ist unter diesen Umständen nicht zweckmäßig den molekularen Aufbau der Materie einzubeziehen; dieser wird deshalb vernachlässigt.

- **Dynamische Kraftberechnungen**

Die Ermittlung der im Schneekörper auftretenden Kräfte soll so dynamisch wie möglich erfolgen. Eine Abschätzung und Konstantsetzung der relativen Reibung  $\xi$  vor der Simulation ist zu vermeiden, vgl. Abschnitt 2.4.3.

## 2.2 Betrachtungsweisen eines Fluids

Eine Lawine wird im Weiteren als eine sich im Großteil des Ablaufes turbulent bewegende Flüssigkeit aus der Sicht der Strömungslehre aufgefasst. Es sind die drei folgenden Sichtweisen zur Beschreibung von Fluiden und deren Bewegungen geläufig, [Her02, S. 48 ff.], [Wen92, S. 15 ff.], [DH03]:

### 1. Lagrangesche Sichtweise

In der Lagrangeschen Auffassung liegt der Fokus auf der Bewegung des flüssigen Körpers. Dieser wird in jedem Schritt verfolgt, und das aus den Materialteilen aufgespannte sich mitbewegende und -verformende Netz bleibt im gesamten Ablauf an den gleichen Stellen verbunden.

Zur Herleitung dieser nicht-konservativen Gleichungen wird ein infinitesimales<sup>5</sup> Fluidelement  $\Delta V = \Delta x \Delta y$  in zweidimensionalen kartesischen Koordinaten betrachtet, das zum Zeitpunkt  $t_1$ , und später bei  $t_2$  beobachtet wird. Da allgemein von einem ungleichmäßigen Fluss ausgegangen werden soll, sei eine skalare Feldgröße  $G$  von sowohl dem Ort als auch dem Zeitpunkt abhängig, also durch  $G = G(x, y, t)$  gegeben.  $G_1 = G(x_1, y_1, t_1)$  sei die Größe am Ort  $(x_1, y_1)$  zum Zeitpunkt  $t_1$ , analog  $G_2 = G(x_2, y_2, t_2)$  der zu dem vom Strom verfrachteten Fluidelement gehörige

---

<sup>5</sup>Der Begriff „infinitesimal“ deutet auf die rein mathematische Idealisierung hin; der molekulare Aufbau der Materie wird wegen der Kontinuitätsannahme, vgl. Abschnitt 2.1, vernachlässigt.

Wert. Taylorentwicklung von  $G$  um den Punkt  $(x_1, y_1)$  liefert:

$$G_2 = G_1 + \left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)_1 (x_2 - x_1) + \left( \frac{\partial G}{\partial y} \right)_1 (y_2 - y_1) + \left( \frac{\partial G}{\partial t} \right)_1 (t_2 - t_1) + (\text{Terme höherer Ordnung})$$

Division durch  $(t_2 - t_1)$  und Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung ergibt

$$\frac{G_2 - G_1}{t_2 - t_1} = \left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)_1 \left( \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \right) + \left( \frac{\partial G}{\partial y} \right)_1 \left( \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \right) + \left( \frac{\partial G}{\partial t} \right)_1,$$

beim Grenzübergang

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_2} \left( \frac{G_2 - G_1}{t_2 - t_1} \right) = \frac{\partial G}{\partial t} + u \frac{\partial G}{\partial x} + v \frac{\partial G}{\partial y} =: \frac{DG}{Dt},$$

mit  $(u, v) := (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}) = \mathbf{v}$ . Der Operator  $\frac{D}{Dt}$  hat den Namen *substantielle Ableitung*.

Allgemein gilt:

$$\underbrace{\frac{DG}{Dt}}_{\text{substantielle Ableitung}} = \underbrace{\frac{\partial G}{\partial t}}_{\text{lokale Ableitung}} + \underbrace{(\mathbf{v} \cdot \nabla)G}_{\text{konvektive Ableitung}} \quad (2.1)$$

Für die Simulation von rapiden Flüssigkeitsbewegungen ist diese teilchenfeste Sichtweise möglich, es ist aber eine ortsfeste Betrachtung üblicher, in der ein fixes Kontrollvolumen beobachtet und nicht das Fluid selbst verfolgt wird.

## 2. Eulersche Sichtweise

Dies führt zur Eulerschen Auffassung, wo sich das Fluid relativ zu einem stillstehenden Gitter bewegt. ELBA verkörpert genau diese Sichtweise, da sie die Behandlung von turbulenten Strömungen wesentlich erleichtert. Der Zusammenhang zur Lagrangeschen Sichtweise ist in Gleichung (2.1) direkt gegeben; es tauchen stets nur Terme von der rechten Seite auf, weshalb die Eulersch gebildeten Gleichungen zusammenfassend auch *konservative Form* oder *Divergenzform* genannt werden.

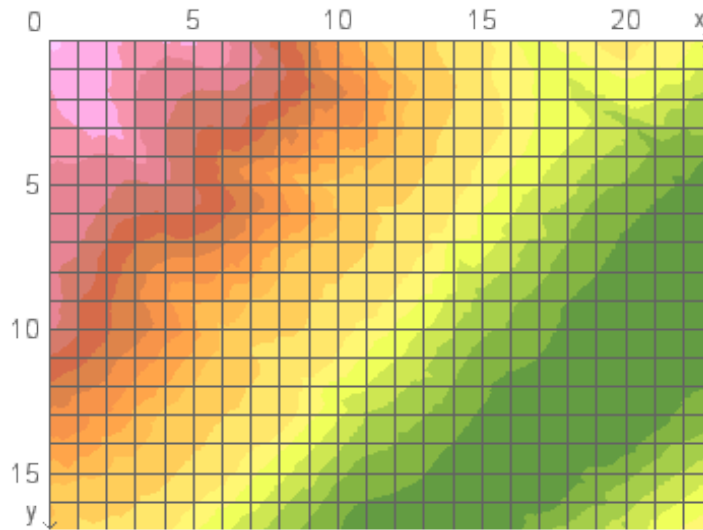
## 3. ALE Methoden

Eine dritte Darstellungsmethode ist die sogenannte *Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE)* Beschreibung, die vor allem bei großen Verzerrungen neben dem Auftreten von sich deformierenden Rändern angewendet wird. ALE Methoden bestehen aus einer Mischung von Lagrangescher und Eulerscher Sichtweise, um deren Vorteile zu kombinieren und Nachteile zu minimieren. Hier kann sich das Gitter unabhängig von der Geschwindigkeit der Materialteile bewegen.

## 2.3 Koordinatensystem und Geometrie

### 2.3.1 Globale Koordinaten und geometrische Größen

Als globales Koordinatensystem  $\mathcal{K}^G$  fungiert ein zweidimensionales kartesisches Gitter eines digitalen Geländemodells, aufgespannt über dem Grundriss des Geländes. Gitterpunkte sind in einem äquidistanten Abstand  $\delta$  voneinander aufgetragen, typische Maschenweiten reichen in GIS-Topographien von 5 m bis 10 m.<sup>6</sup> Der Ursprung liegt, wie in Abb. 2.1 gezeigt, links oben mit x-Koordinaten nach rechts (Osten) und y-Koordinaten nach unten (Süden) wachsend.



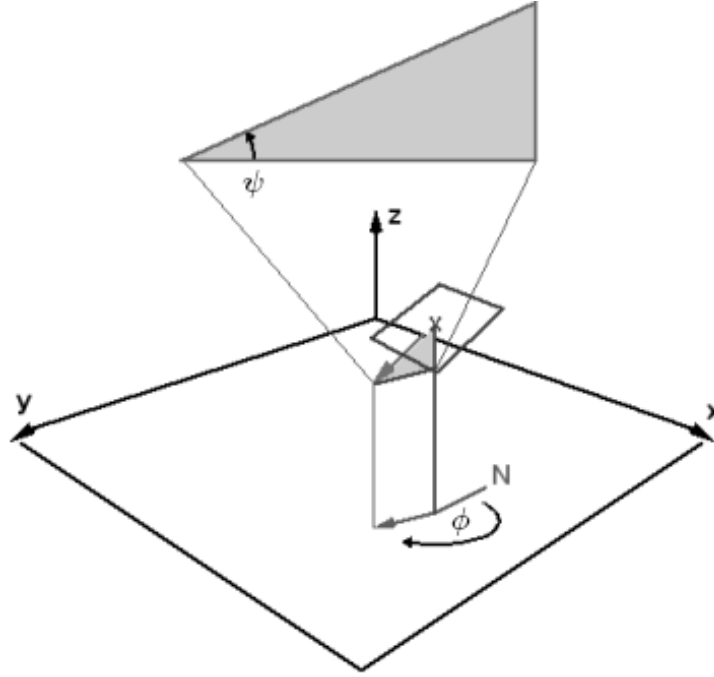
**Abbildung 2.1:** Globales Koordinatensystem  $\mathcal{K}^G$  über dem Grundriss von Ischgl und Nordhang mit  $\delta = 100$  m

Die zwei Komponenten des Vektors der *Hangneigung*, die *Steigung*  $\psi \in [0, \frac{\pi}{2})$  und die *Exposition*  $\phi \in [0, 2\pi)$ , haben folgende Bedeutungen<sup>7</sup>, [BM98, S. 190]: Die Steigung gibt die maximale Höhenänderung des Geländes an, während die Exposition die Kompassrichtung – mit 0 im Norden – dieser maximalen Änderung indiziert, siehe Abb. 2.2. Die Exposition zeigt immer in fallende Richtung.

Sollten  $\psi$  oder  $\phi$  im DHM nicht gegeben sein, können sie auf folgende Art aus den

<sup>6</sup>ELBA+ ist auf genau diese Maschenweiten getestet und geeicht.

<sup>7</sup>Siehe [BM98, S. 190] für eine Ausführung wie die Begriffe *slope*, *aspect*, *gradient*, usw. von verschiedenen Autoren anders definiert werden. Um Missverständnissen vorzubeugen wird der Begriff des Gradienten in dieser Arbeit ausschließlich im Kontext der Differentialrechnung gebraucht.



**Abbildung 2.2:** Hangneigung: Steigung  $\psi$  und Exposition  $\phi$

Geländehöhenwerten  $z$  berechnet werden:

$$\psi = \arctan \sqrt{(\Delta z / \Delta x)^2 + (\Delta z / \Delta y)^2} \quad (2.2)$$

$$\phi = \text{atan2}(\Delta z / \Delta y, \Delta z / \Delta x) \quad (2.3)$$

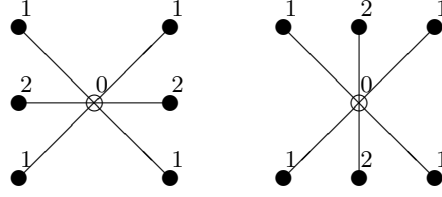
Die Bestimmung der approximativen Gradienten  $\Delta z / \Delta x$  und  $\Delta z / \Delta y$  in die Richtungen der zwei Achsen ist nicht eindeutig. Bewährt hat sich z. B. ein Schätzer nach Horn, der acht Nachbarpunkte miteinbezieht und von zahlreichen kommerziellen GIS verwendet wird, [BM98, S. 191 ff.].

Für den West-Ost bzw. Nord-Süd Gradienten liefert er:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_{i,j}}{\partial x} &\approx \frac{\Delta z_{i,j}}{\Delta x} = \frac{(z_{i-1,j-1} + 2z_{i-1,j} + z_{i-1,j+1}) - (z_{i+1,j-1} + 2z_{i+1,j} + z_{i+1,j+1})}{8\delta} \\ \frac{\partial z_{i,j}}{\partial y} &\approx \frac{\Delta z_{i,j}}{\Delta y} = \frac{(z_{i-1,j-1} + 2z_{i,j-1} + z_{i+1,j-1}) - (z_{i-1,j+1} + 2z_{i,j+1} + z_{i+1,j+1})}{8\delta} \end{aligned}$$

Der Wert  $z_{i,j}$  des zentralen Punktes selbst wird nicht miteinbezogen, siehe Abb. 2.3. Dieses Schema lässt sich analog bei anderen Gittergrößen, z. B. Abflusshöhe mit  $h$  statt  $z$  zur Bestimmung der Schneedeckentopographie, einsetzen.

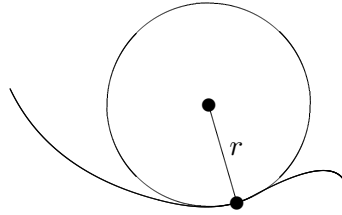
Ein weiterer, in den Modellkräften auftretender, geometrischer Parameter ist der *Geländeradius*  $r$ , siehe Abb. 2.4. Er ist definiert als die Inverse der Krümmung  $\kappa$  der



**Abbildung 2.3:** Differenzensterne der West-Ost und Nord-Süd Gradienten im Hornschen Schema

Geländekurve, [Kre68, S. 31 ff.]; anschaulich gesehen handelt es sich um den Radius des Schmiegekreises. Mit folgender Formel lässt sich  $r$  berechnen:

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|} \quad (2.4)$$



**Abbildung 2.4:** Geländeradius

### 2.3.2 Lokale Koordinaten

#### Berechnungsschema ELBA+

In der Simulation mit ELBA+ wird auf jedem Gitterpunkt  $\{i, j\}$  in einem lokalen Koordinatensystem  $\mathcal{K}_{i,j}^L$  mit Achsen parallel auf das jeweilige Hangflächenstück gerechnet. Sobald die zurückgelegten Wege der Massepakete feststehen, vgl. Abschnitt 3.2.5, werden diese auf die Horizontale des globalen Systems  $\mathcal{K}^G$  projiziert. Bei ELBA+ handelt es sich um ein zellulären Automaten ähnelndes Berechnungsschema, welches diesen relativ einfachen Übergang zwischen lokalem und globalem System zulässt. Unter der Voraussetzung dass im DHM keine Überhänge auftreten, ist eine bijektive Abbildung zwischen  $\mathcal{K}^G$  und lokalen Geländekoordinaten gesichert. Geometrische Fehler werden hierdurch keine begangen.

### Herkömmliches Finite Differenzen Berechnungsschema

Handelt es sich um ein herkömmliches Finite Differenzen Schema welches Differentialgleichungen annähert, ist ein lokales kartesisches Koordinatensystem zulässig solange man es mit einem konstant geneigten Hang zu tun hat, [PH07, S. 123 ff.]. Für komplexere Topographien sind zusätzliche differentialgeometrische Überlegungen notwendig. Das Savage-Hutter-Modell wurde mit Hilfe von speziellen Koordinatentransformationen etwa auf gekrümmte und gewundene Koordinatensysteme erweitert, [HK03, S. 49 ff.]. Typisch für viele der bisher durchgeführten Simulationen im Savage-Hutter-Modell ist ein Aufbau des Koordinatensystems entlang dem *Talweg*, einer vorgegebenen Kurve welche in einer vertikalen Ebene liegt, [GWH99], [WHP04], [Chi06]. Diese Einschränkung ist für beliebige Höhenmodelle, wie sie in ELBA verwendet werden, zu groß.

Ein neuer Ansatz mit einem allgemeinen orthogonalen Koordinatensystem entlang einer weniger eingeschränkten *master curve* wurde vor Kurzem eingeführt, [HK03, S. 61 ff.]. Die Behandlung differentialgeometrischer Fragestellungen würde den Rahmen einer Diplomarbeit sprengen; es sei auf oben erwähnte Literatur verwiesen.

## 2.4 Modellkräfte

Auf die Lawine wirken vier<sup>8</sup> Kraftkomponenten, [NiT05]:

$$F = \underbrace{F_g + F_{ph}}_{\text{Beschleunigung}} + \underbrace{F_e + F_d}_{\text{Verzögerung}}$$

Diese bestehen aus Gravitationskraft  $F_g$ , hydrostatischem Druck  $F_{ph}$ , turbulenter Reibung  $F_e$  und trockener Reibung  $F_d$ . Die ersten zwei wirken beschleunigend, während sich die letzten beiden für die Energiedissipation und Abbremsung verantwortlich zeichnen.

Zu dieser im ELBA-Handbuch [NiT05] gegebenen Kräftegleichung kommt der im Algorithmus von ELBA+, vgl. Kapitel 3, einbezogene Auftrieb  $\sigma := 1 - \frac{\rho_A}{\rho}$  hinzu, wobei  $\rho_A \approx 1,25 \text{ kg/m}^3$  für die konstant gehaltene Dichte der Luft steht, vgl. [Voe55, S. 12]. Die Schneedichte  $\rho$  besitzt in Fließlawinen eine Größenordnung von ca.  $300 \text{ kg/m}^3$ , vgl. [Voe55, S. 9], und ist in der gesamten Simulation laut Inkompressibilitätsannahme konstant.<sup>9</sup> Der Faktor  $\sigma \approx 1$  hat daher eine so geringe Auswirkung dass er im Weiteren vernachlässigt wird. Alle Gleichungen beziehen sich in diesem Abschnitt der Einfachheit halber nur auf eine Dimension. Ihre zweidimensionalen Erweiterungen liegen auf der Hand.

<sup>8</sup>Die fünfte Kraft  $F_{pd}$ , ein hydrodynamischer Druck, wird aufgrund seiner geringen Auswirkung und empirischen Natur seiner Herleitung vernachlässigt.

<sup>9</sup>Wie in Abschnitt 2.5.1 zu sehen, übernimmt allerdings die Abflusshöhe die Rolle der Dichte.



### 2.4.1 Gravitationskraft

Die Gravitationskraft ergibt sich aus dem Produkt von Schneemasse  $m$  (in kg), konstanter Erdbeschleunigung  $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$  und Steigung  $\psi$ , [CMM88, S. 276]:

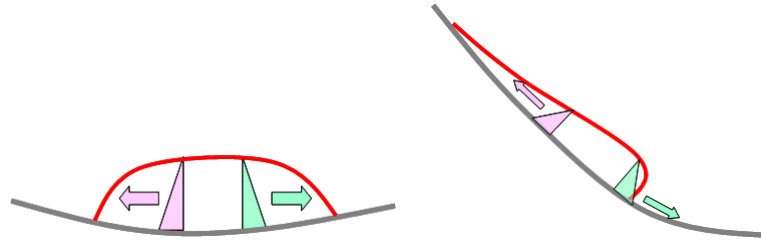
$$F_g = mg \sin \psi \quad (2.5)$$

Masse ist definiert als das Produkt aus Dichte  $\rho$  und Volumen  $V$ :

$$m = \rho V = \rho \delta^2 h \quad (2.6)$$

### 2.4.2 Hydrostatischer Druck

Lawinenmasse verhält sich in ELBA analog zu Wasser, was hydrostatischen Druck betrifft. Diese Kraft, die das „Verrinnen“ von Flüssigkeiten bewirkt, hat den gleichen Einfluss auf die modellierte Lawine. Sie verursacht sowohl die seitliche Ausbreitung, als auch Effekte die zur Beschleunigung bzw. Abbremsung eines Lawinenkopfes oder -endteiles führen können, siehe Abb. 2.5.



**Abbildung 2.5:** Hydrostatische Druckwirkung im Querschnitt (links) und Längsschnitt (rechts) der Lawine. (Quelle: [NiT05, S. 84])

[NiT05] gibt die Formel für hydrostatischen Druck folgendermaßen an:

$$F_{ph} = \frac{\Delta(\rho g h^2)}{2} \quad (2.7)$$

Sie stammt aus der Gleichung für Wasserdruckkraft auf vertikale Seitenflächen mit Schwerpunkt  $z_s$  und Fläche  $A$ , [Bol96, S. 56],

$$F = \rho g z_s A \quad (2.8)$$

und kommt mit  $z_s = h/2$  und  $A = bh$ , wobei die Breite  $b$  als 1 m angenommen wurde, der hergeleiteten Formel in [Bol96, S. 58] gleich.

Für die praktische Berechnung wird diese Gleichung verwendet, vgl. [CMM88, S. 276 ff.]:

$$F_{ph} = mg \sin \psi_s \quad (2.9)$$

Der Winkel  $\psi_s$  gibt die Neigung der Schneedecke an,  $\sin \psi_s$  steht in direktem Zusammenhang mit der räumlichen Ableitung der Abflusshöhe  $\frac{dh}{dx}$ . Wie man sieht lässt sich in dieser Form der hydrostatische Druck  $F_{ph}$  mit der Gravitationskraft  $F_g$  zusammenfassen zu

$$F_{g,ph} = mg(\sin \psi + \sin \psi_s).$$

### 2.4.3 Turbulente Reibung

ELBA basiert auf einem Fluidmodell nach VOELLMY [Voe55], welches eine turbulenzabhängige und eine normalkraftabhängige Reibungskomponente enthält. Erstere ist bei voller Geschwindigkeit für den Großteil der Energiedissipation verantwortlich, letztere wirkt sich vor allem bei niedrigen Geschwindigkeiten aus und führt zum letztendlichen Stehenbleiben der Lawine in der Ablagerungsphase.

Turbulente Reibung ist abhängig von Masse, Quadrat der Geschwindigkeit, Abflusshöhe, sowie von einer Rauigkeitslänge des Geländes  $k_s$ , die als konstant angenommen wird und typischerweise bei 0,1 m liegt.<sup>10</sup> Diese bildet zusammen mit der Schneehöhe durch das logarithmische Gesetz einer *Keulegan-Relation* eine relative Rauigkeit  $\xi$ , die dynamisch berechnet wird:

$$F_e = mgS_{fe} \quad (2.10)$$

$$S_{fe} = \frac{v^2}{\xi h} \quad (2.11)$$

$$\xi = 8g \left( -2 \log_{10} \left( \frac{k_s}{12h} \right) \right)^2 \quad (2.12)$$

Der Faktor  $\xi$  kann im Zuge eines Abflusses stark variieren – Werte zwischen 500 für niedrige und 3000 für hohe Lawinenteile sind typisch, siehe Abb. 2.6.

Der Argumentation in [CMM88, S. 33 ff.] folgend, ergibt sich die Herleitung dieser in [NiT05] gegebenen Beziehungen (2.10)–(2.12) aus der Chézy-Gleichung

$$v = C \sqrt{RS_{fe}}$$

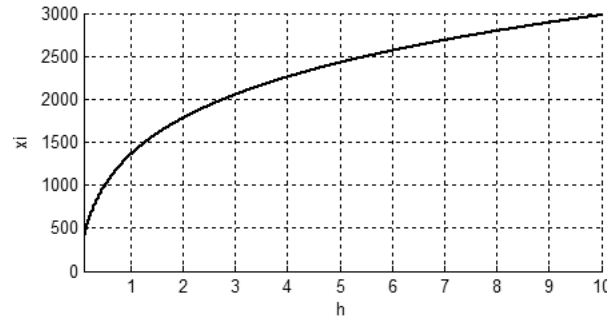
mit Chézy- $C = \sqrt{\frac{8g}{f}}$  und  $\xi := f^{-1}$ , in Verbindung mit der vereinfachten Colebrook-White-Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s}{12R} \right).$$

Die Voraussetzung für diese Reynoldszahl-unabhängige Simplifizierung der allgemeinen Form

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{k_s}{12R} + \frac{2,5}{Re\sqrt{f}} \right),$$

<sup>10</sup>Das entspricht etwa hohem Gras oder niedriger Vegetation, vgl. [CMM88, S. 45].



**Abbildung 2.6:** Abflusshöhenabhängige relative Rauigkeit  $\xi$  in der turbulenten Reibung  $F_e$  bei  $k_s = 0,1 \text{ m}$ ,  $h = 0,1 \dots 10$

nämlich hohe Reynoldszahlen – also voll turbulenter Fluss – und eine genügend große relative Rauigkeit<sup>11</sup>, kann als erfüllt angenommen werden. Da der hydraulische Radius  $R$  gleich dem Quotienten aus Durchflussquerschnitt  $A$  und benetztem Umfang (engl.: *wetted perimeter*)  $P$  ist, ergibt sich  $R = \frac{A}{P} = \frac{h\delta}{\delta} = h$ , woraus sofort die Gleichungen (2.11) und (2.12) folgen. Sie lassen sich mit (2.10) zusammenfassen zu:

$$F_e = \frac{mv^2}{32 \log_{10}^2 \left( \frac{k_s}{12h} \right) h} = \frac{\rho \delta^2 v^2}{32 \log_{10}^2 \left( \frac{k_s}{12h} \right)} \quad (2.13)$$

#### 2.4.4 Trockene Reibung

Abhängig vom überstrichenen Flächenstück wirkt eine bestimmte Normalkraft auf die Schneemasse. Auf konkaven Hangteilen wird der Lawinenkörper stärker gegen den Boden gedrückt als auf konvexen, siehe Abb. 2.7 a) und b). Diese Normalspannung, durch die Summe von Gravitationsbeschleunigung  $g \cos \psi$  und Zentrifugalbeschleunigung  $v^2/r$ , [Tru83, S. 34 f.], festgelegt, ergibt multipliziert mit Masse und dem konstant gesetzten dimensionslosen Mohr-Coulomb-Reibungsparameter  $\mu \approx 0,2$ , vgl. Abschnitt 2.1, die Trockenreibungskraft  $F_d$ :

$$F_d = m\mu \left( \underbrace{g \cos \psi + \frac{v^2}{r}}_{\text{Normalspannung}} \right) \quad (2.14)$$

Der Geländeradius  $r$  ist hier ohne Absolutbetrag zu berechnen, d. h.  $r$  ist an konvexen Geländestellen negativ, was in jenem Fall eine Abnahme der Normalspannung bedeutet.

<sup>11</sup>Gemeint ist hier die relative Rauigkeit definiert als  $\frac{k_s}{4R}$ , vgl. [CMM88, S. 36]. Unglücklicherweise bezeichnet [NiT05] mit demselben Begriff die Variable  $\xi$ .

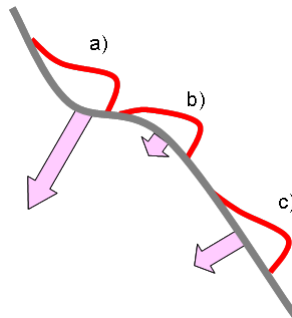


Abbildung 2.7: Wirkung der Zentrifugalkraft auf die Normalspannung. (Quelle: [NiT05, S. 86])

## 2.5 Grundgleichungen

„Unter den *Grundgleichungen der Strömungsmechanik* versteht man die mathematischen Formulierungen des Erhaltungsprinzips für Masse, Impuls und Energie. Diese drei Größen werden in bezug auf einen in der Regel ortsfesten (endlichen oder infinitesimal kleinen) Kontrollraum einzeln bilanziert. Sie können über die Kontrollraumgrenzen ein- und austreten, im Kontrollraum aber weder vernichtet noch erzeugt werden.“ (Quelle: [Her02, S. 47])

In diesem Abschnitt sollen die zwei für ELBA relevanten Grundgleichungen für Masse und Impuls hergeleitet werden. Gleichungen für Energie werden wegen der Isothermalitätsannahme nicht verwendet. Die Herleitung erfolgt beruhend auf grundlegenden strömungsmechanischen Ansätzen aus [Her02] und [Wen92].

### 2.5.1 Kontinuitätsgleichung

Aus dem physikalischen Grundgesetz der Massenerhaltung folgt, dass die Masse  $\Delta m$  eines Fluidelements erhalten bleibt, sich also nicht ändert. In Lagrangescher Schreibweise:

$$\frac{D\Delta m}{Dt} = 0 \quad (2.15)$$

Diese Grundgleichung zur Erhaltung der Masse heißt *Kontinuitätsgleichung*.

#### Für ein inkompressibles zweidimensionales Fluid ohne Abflusshöhe

Zur Herleitung der Kontinuitätsgleichung im ELBA-Modell wird sie zuvor an einem inkompressiblen zweidimensionalen Fluid ohne Abflusshöhe demonstriert.

Einsetzen von  $\Delta m = \rho \Delta V$  mit  $\Delta V = \Delta x \Delta y$  in Gleichung (2.15) und Anwendung der Produktregel ergibt

$$\Delta V \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{D\Delta V}{Dt} = 0, \quad (2.16)$$

umgeformt

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left( \frac{1}{\Delta V} \frac{D\Delta V}{Dt} \right) = 0. \quad (2.17)$$

Der Ausdruck in der Klammer entspricht  $\nabla \cdot \mathbf{v}$ , [Wen92, S. 22 f.], woraus sich sofort die nicht-konservative Form ableiten lässt:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.18)$$

Da die Dichte eines inkompressiblen Fluids konstant ist,  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ , folgt die Vereinfachung zur Divergenzform

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

ausgeschrieben

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.19)$$

In Worten bedeutet dies, dass sich das Volumen eines Fluidelements auf dem Weg durch das Strömungsfeld nicht ändert. Steht bei einer Grundgleichung wie hier auf der rechten Seite eine Null, spricht man von einer *Erhaltungsgleichung*.

### Im ELBA-Modell

Während im ELBA-Modell zwar die Dichte  $\rho$  konstant gehalten wird, übernimmt die Abflusshöhe  $h$  die Rolle dieser sich in einem kompressiblen Fluid verändernden Gittervariable: Die Masse  $\Delta m$  eines zweidimensionalen Fluidelements  $\Delta V = \Delta x \Delta y$  variiert bei jeder Änderung seiner Abflusshöhe  $h$ , da sie direkt proportional zu dieser ist ( $\Delta m = \rho h \Delta x \Delta y$ ). Man hat es formal mit einem inkompressiblen Ansatz zu tun, da Dichte und Höhe in der Massenformel aber äquivalentes Gewicht besitzen ist das ELBA-Modell einem kompressiblen Ansatz gleichwertig sofern man  $h$  und  $\rho$  vertauscht.

Wenn man unter diesem Gesichtspunkt schreibt

$$\Delta m = h \rho \Delta V,$$

so folgt analog zu Gleichung (2.16):

$$\rho \Delta V \frac{Dh}{Dt} + h \frac{D\rho \Delta V}{Dt} = 0 \quad (2.20)$$

Die Konstante  $\rho$  fällt weg und übrig bleibt die konservative Form

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h \mathbf{v}) = 0, \quad (2.21)$$

ausgeschrieben

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0. \quad (2.22)$$

### 2.5.2 Impulsgleichung

Die Impulsgleichungen basieren auf dem 2. Newtonschen Gesetz der Mechanik, welches besagt:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Dies bedeutet dass die zeitliche Änderung des Impulses eines Körpers gleich ist der Summe aller auf ihn wirkenden Kräfte. Bei einer Masse  $\Delta m = \rho h \Delta x \Delta y$  und einem Impuls  $\Delta m \mathbf{v}$  lautet die teilchenfeste Gleichung

$$\frac{D(\Delta m \mathbf{v})}{Dt} = \sum \mathbf{F},$$

nach Aufspaltung der Masse in seine Komponenten und geeigneter Gruppierung

$$\frac{D(\rho \Delta V \cdot h \mathbf{v})}{Dt} = \sum \mathbf{F}.$$

Anwenden der Produktregel und Herauslösen der Konstanten  $\rho$  führt zu:

$$\rho \left( \Delta V \frac{Dh \mathbf{v}}{Dt} + h \mathbf{v} \frac{D\Delta V}{Dt} \right) = \sum \mathbf{F}$$

Im Allgemeinen treten zwei Arten von Kräften auf:

1. *Volumenkräfte*, die „entfernt“ direkt auf das gesamte Volumen des Fluidelements wirken. Beispiele für solche Kräfte sind die Schwerkraft, Zentrifugalkraft, elektrische oder magnetische Kräfte. Auf das Volumen  $\Delta V = \Delta x \Delta y$  bezogene Kräfte  $\mathbf{F}$  sollen mit  $\mathbf{f} := \mathbf{F}/\Delta V$  abgekürzt werden.
2. *Oberflächenkräfte*, die an den Oberflächen des Fluidelements angreifen. Normal- und Tangentialkräfte werden dabei mathematisch durch einen Spannungstensor beschrieben. Neben den deviatorischen Spannungen können zusätzliche Druckkräfte auftreten.

Die Impulsgleichung ergibt sich nach Division durch  $\Delta V$  – was in Hinblick auf die in Abschnitt 2.4 vorgeführten Modellkräfte einer Division durch  $\delta^2$  entspricht – zu:

$$\rho \left( \frac{Dh \mathbf{v}}{Dt} + h \mathbf{v} \left( \frac{1}{\Delta V} \frac{D\Delta V}{Dt} \right) \right) = \sum \mathbf{f}$$

Nachdem der Ausdruck  $\frac{1}{\Delta V} \frac{D\Delta V}{Dt}$  wie in Gleichung (2.17) zu  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  äquivalent ist, lässt sich vektoriell für zwei Dimensionen schreiben

$$\rho \left( \frac{\partial(hu)}{\partial t} + u \frac{\partial(hu)}{\partial x} + v \frac{\partial(hu)}{\partial y} + hu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) = \left( \sum f_x \right),$$

was nach Anwenden der Produktregel diese Form ergibt:

$$\rho \left( \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} \right) = \left( \sum f_x \right)$$

Einsetzen der Modellkräfte aus Abschnitt 2.4, Kürzung von  $\rho$ , und Darstellung als Gleichungssystem liefert die folgenden zwei konservativen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} = hg (\sin \psi \sin \phi + \sin \psi_s \cos \phi_s) \quad (2.23)$$

$$- \frac{u}{\|\mathbf{v}\|} \left[ h\mu \left( g \cos \psi + \frac{u^2}{q} + \frac{v^2}{r} \right) + \frac{u^2 + v^2}{32 \log_{10}^2 \left( \frac{k_s}{12h} \right)} \right]$$

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial(hv^2)}{\partial y} = hg (-\sin \psi \cos \phi + \sin \psi_s \sin \phi_s) \quad (2.24)$$

$$- \frac{v}{\|\mathbf{v}\|} \left[ h\mu \left( g \cos \psi + \frac{u^2}{q} + \frac{v^2}{r} \right) + \frac{u^2 + v^2}{32 \log_{10}^2 \left( \frac{k_s}{12h} \right)} \right].$$

Hang- und Schneedeckenwinkel  $\phi$ ,  $\psi$ , bzw.  $\phi_s$ ,  $\psi_s$  können wie in Abschnitt 2.3 gezeigt berechnet werden. Die Variablen  $q$  und  $r$  im Term der trockenen Reibung stehen für die zwei Komponenten des Geländeradius  $\mathbf{r} = (q, r)$ . Die Faktoren  $\frac{u}{\|\mathbf{v}\|}$  bzw.  $\frac{v}{\|\mathbf{v}\|}$  sind notwendig damit die Reibungskräfte entgegengesetzt und verhältnismäßig richtig wirken. Zusammen mit Gleichung (2.22) ist das Modellgleichungssystem vollständig; ausständig bleibt die Auflistung aller Nebenbedingungen.

In der eindimensionalen Formulierung gibt es zwei Grundgleichungen:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} = hg (\sin \psi + \sin \psi_s) \quad (2.26)$$

$$- \operatorname{sgn}(u) \left[ h\mu \left( g \cos \psi + \frac{u^2}{q} \right) + \frac{u^2}{32 \log_{10}^2 \left( \frac{k_s}{12h} \right)} \right]$$

## 2.6 Nebenbedingungen und zusätzliche Funktionen

Die folgenden Bedingungen und Funktionen sind zu berücksichtigen:

- **Gültigkeitsbereich von  $\xi$**

Bei der Ermittlung der relativen Rauigkeit  $\xi$  aus Gleichung (2.12) ist zu beachten dass das Argument des Logarithmus stets ungleich 1 ist, damit  $\xi$  nicht Null wird und  $S_{fe}$  berechnet werden kann. Ein positiver Logarithmus, also ein Argument  $\frac{k_s}{12h} > 1$ , wäre mathematisch möglich, ist aber physikalisch gesehen nicht sinnvoll da bei solchen niedrigen Abflusshöhen nicht mehr von turbulenter Reibung die Rede sein kann (man erinnere sich, die Rauigkeitslänge  $k_s$  liegt bei ca. 0,1 m). Es muss daher bei Anwendung der turbulenten Reibungskraft für  $h$  gefordert werden

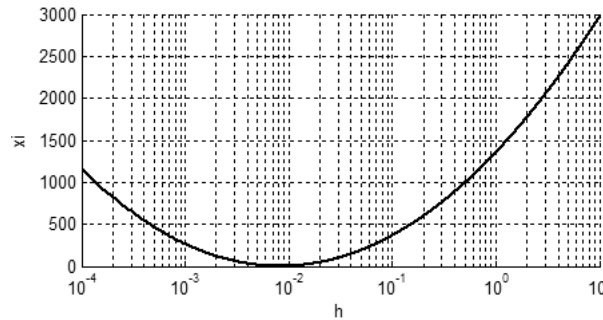
$$h > \frac{k_s}{12}, \quad (2.27)$$

was einem Argument zwischen 0 und 1 entspricht.

Für die Praxis bedeutet diese Forderung etwa, dass der Quotient  $\frac{u^2+v^2}{32 \log_{10}^2\left(\frac{k_s}{12h}\right)}$  nur dann ausgewertet wird, wenn für  $h$  gilt

$$h > h_e \geq \frac{k_s}{12}, \quad (2.28)$$

wobei  $h_e$  eine geeignet gewählte Konstante ist. Der Graph von  $\xi$  ist in Abb. 2.8 für Höhenwerte zwischen  $10^{-4}$  m und  $10^1$  m veranschaulicht. Die kritische Stelle  $h = \frac{k_s}{12}$  ist durch das Minimum der Parabel gekennzeichnet. Man beachte dass dieses Problem in ELBA+ nicht auftritt, da dort Abflusshöhen höchstens auf  $h_e = h_c = 10^{-1}$  m sinken können, siehe nächster Punkt.



**Abbildung 2.8:** Abflusshöhenabhängige relative Rauigkeit  $\xi$  in der turbulenten Reibung  $F_e$  bei  $k_s = 0,1$  m,  $h = 10^{-4} \dots 10^1$

- **Schneeablagerung und kritische Abflusshöhe**

Der Begriff *Schneeablagerung* bezieht sich auf das Stehenbleiben von Lawinenmasse. Es ist in einem diskreten Rechenverfahren denkbar, unter einer bestimmten kritischen Abflusshöhe  $h_c$  zu fordern, dass die Fortbewegung des Fluids eingeschränkt



wird, vgl. den folgenden Punkt. Das Nullsetzen der Geschwindigkeit unter dem Wert 10 cm ist die Vorgangsweise in ELBA+.

- **Reibungsphasen**

ELBA+ erlaubt es, eine durch die lokale Geschwindigkeit beschränkte Anbruchphase zu definieren, in der die turbulente Reibungskomponente ausgelassen und ein erhöhtes  $\mu$  verwendet wird. Dies ist begründet damit, dass die erste Bewegung einer Lawine durch laminaren Fluss gekennzeichnet ist, welcher anhält solange die Oberflächenschicht des Schnees intakt bleibt, [Voe55, S. 9]. Die Anbruchphase dauert maximal bis zu einem kritischen Zeitpunkt nach Start der Simulation an. Danach kommt es zu einer geschwindigkeitsabhängigen Anwendung eines von zwei Reibungsmodellen. Fällt die Geschwindigkeit unter einen Grenzwert  $v_c$  (z. B. 10 m/s), wird der Reibungsparameter  $\mu$  beträchtlich erhöht, um Ablagerung zu simulieren und ein unrealistisches „Ausrinnen“ über weite Teile des Geländes zu verhindern. Der Übergang zwischen den Phasen verläuft möglichst glatt in Überlappungsbereichen, um Oszillationen zu vermeiden. In einer typischen Simulation mit ELBA+ ändern sich Werte von  $\mu$  etwa folgendermaßen:  $0,25 \rightarrow 0,15 \rightarrow 0,35$ .

- **Snow Entrainment**

Ab einer gewissen Grenznormalspannung auf den Hang nimmt die Lawine eine Menge vorhandenen, ruhenden Schnees auf, genannt *Snow Entrainment*. Die Höhe dieser vorhandenen Schneeschicht kann in ELBA+ vordefiniert werden, üblich ist ein Wert zwischen 10 cm und 20 cm.

## Kapitel 3

# Der Algorithmus von ELBA+

Dieses Kapitel befasst sich mit der vorhandenen algorithmischen Implementierung von ELBA+ mit Hilfe der in Abschnitt 2.4 beschriebenen Modellkräfte, und dessen Analyse. Die Abläufe werden in Abschnitt 3.2 unreflektiert wiedergegeben, Bemerkungen dazu sind dem darauffolgendem Abschnitt 3.3 zu entnehmen.

### 3.1 CFL-Bedingung und Berechnungsschema

In einem Finiten Differenzen Schema, auf dessen Idee das Rechenschema von ELBA+ basiert, erfolgen alle Berechnungen auf einem  $\mathbf{x}$ - $t$ -Gitter mit endlichen Netzweiten, wobei  $\mathbf{x}$  die Orts- und  $t$  die Zeitinformationen darstellen. Während die kleinstmöglichen räumlichen Abstände durch den vorgegebenen Wert  $\delta$  fixiert sind, wird das zeitliche Inkrement  $\tau$  in jedem Berechnungsschritt separat mit Hilfe der *Courant-Friedrichs-Lewy Bedingung* (kurz: *CFL-Bedingung*) dynamisch ermittelt, vgl. [CMM88, S. 290 ff.]. Zur Veranschaulichung des Gitters siehe Abb. 3.1.

Allgemein besagt die CFL-Bedingung:

„The CFL stability condition [...] expresses that the mesh ratio  $\Delta t/\Delta x$  has to be chosen in such a way that *the domain of dependence of the differential equation should be contained in the domain of dependence of the discretized equations*. In other words, the numerical scheme defining the approximation [...] must be able to include all the physical information which influences the behaviour of the system in this point.“ (Quelle: [Hir88, S. 289])

Mathematisch ausgedrückt:

$$\frac{w\tau}{\delta} \leq 1, \tag{3.1}$$

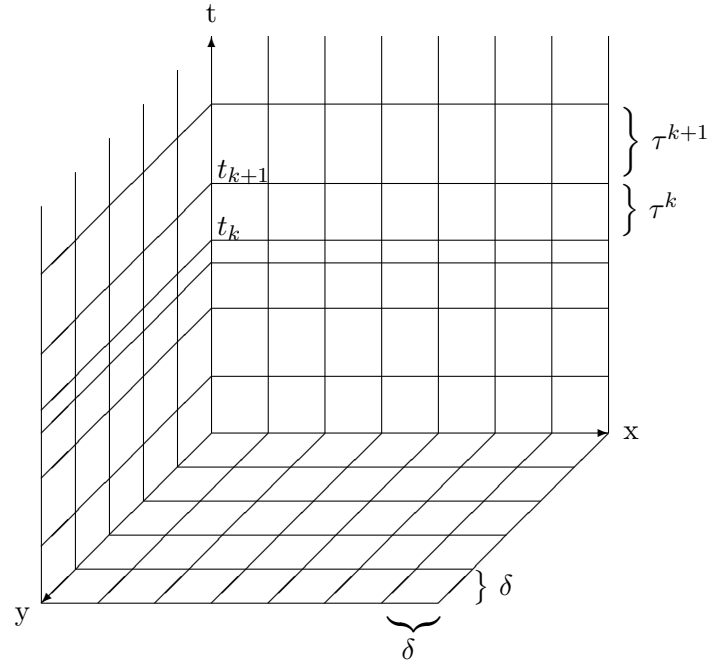


Abbildung 3.1: Äquidistantes Gitter mit variablen Zeitschritten

wobei  $w$  für die Geschwindigkeit, im eindimensionalen Fall  $\frac{dx}{dt}$ , steht. Die linke Seite der Gleichung,  $\frac{w\tau}{\delta} := \nu$ , heißt *Courant-Zahl*. Für die Praxis einer Simulation in ELBA+ gilt

$$w := \max(|u_{max}|, |v_{max}|),$$

wobei  $u_{max}$  und  $v_{max}$  die betragsmäßig maximalen Komponenten der Geschwindigkeitsvektoren  $\mathbf{v} = (u, v)$  aller Gitterpunkte kennzeichnen. Diese Bedingung fordert  $\tau$  so klein zu wählen, dass die simulierten zurückgelegten Wege aller Lawinenteile in einem Berechnungsschritt auf ihre numerischen Abhängigkeitsgebiete<sup>1</sup> beschränkt bleiben. Die Bedingung für die Wahl von  $\tau$  lautet nach Umformung:

$$\tau \leq \min \left( \frac{\delta}{|u_{max}|}, \frac{\delta}{|v_{max}|} \right) \quad (3.2)$$

Wie etwa in [MM94, S. 87 ff.] und [LeV92, S. 110 ff.] geschildert, ist die CFL-Bedingung für die Stabilität des Algorithmus notwendig, aber nicht hinreichend. Notwendigkeit lässt sich anschaulich beweisen: Angenommen Gleichung (3.1) sei nicht erfüllt. Dann gibt es einen Punkt  $\xi$  im kontinuierlichen Abhängigkeitsgebiet, der nicht im numerischen Abhängigkeitsgebiet liegt. Änderung der Anfangsbedingungen an diesem Punkt ändert die Lösung der Differentialgleichung, wirkt sich aber in der Approximation laut Annahme nicht aus. Damit kann die numerische Lösung nicht für alle Anfangsbedingungen gegen

<sup>1</sup>Für eine Erläuterung des Begriffes „Abhängigkeitsgebiet“ siehe Abschnitt 4.3.1 auf Seite 36.

die echte Lösung konvergieren. Durch *von Neumann Stabilitätsanalyse*, [Hir88, S. 283 ff.], lassen sich einfache Beispiele finden mit erfüllter CFL-Bedingung und Instabilität. Damit ist auch gezeigt dass sie nicht hinreichend ist. Ein (höchstens) unter der CFL-Bedingung stabiles Verfahren soll im Weiteren als *CFL-stabil* bezeichnet werden.

Der Algorithmus von ELBA+ ist von einer Finite Differenzen Methode hergeleitet, mit zeitlichen Ableitungen die durch eine vorwärts gerichtete Annäherung ermittelt werden:

$$\frac{\partial u^k}{\partial t} \approx \frac{u^{k+1} - u^k}{\tau}$$

Dies liefert ein explizites Lösungsverfahren in dem die Größen  $u^{k+1}$  zum Zeitpunkt  $t_k + \tau = t_{k+1}$  direkt berechnet werden können, mehr dazu in Abschnitt 4.2.1.

Die algorithmische Implementierung des Berechnungsschemas, siehe Abb. 3.2, wird im nächsten Abschnitt schrittweise vorgeführt.

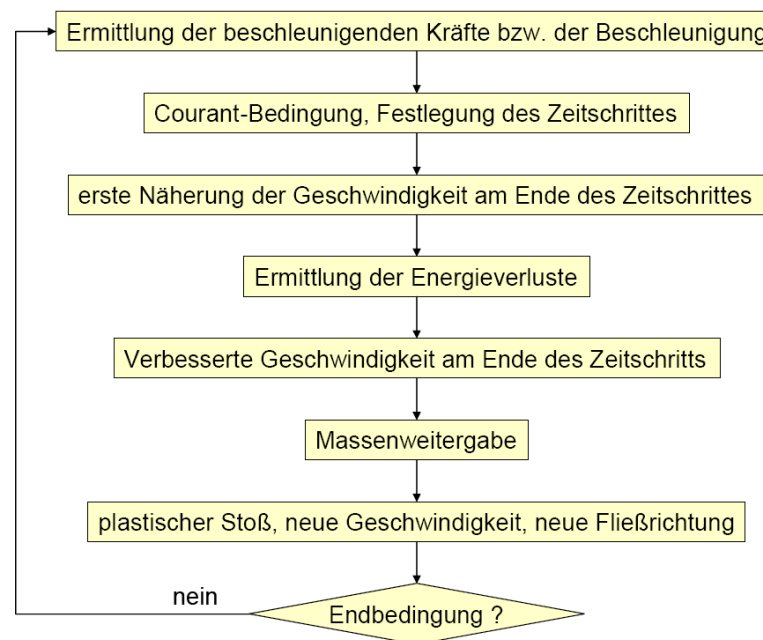


Abbildung 3.2: Flussdiagramm des Berechnungsschemas. (Quelle: [NiT05, S. 87])

## 3.2 Implementierung

Alle für die Darstellung des Algorithmus wichtigen Teile des Quellcodes werden in diesem Abschnitt in einem mathematisch formulierten Pseudocode (durch Umrahmung hervorgehoben) geschildert, teilweise mit leicht umgeformten Details. Vektoren werden

fettgedruckt wiedergegeben. Sofern es sich um räumliche Vektoren handelt, werden deren x-Werte mit Parameter 0, die y-Werte mit Parameter 1 aufgerufen.<sup>2</sup> Operationen zwischen Vektoren und Skalaren sind immer elementweise zu verstehen.

Die folgenden Unterabschnitte beschreiben einen Schritt der Lawinensimulation innerhalb einer fußgesteuerten Loop-Schleife (siehe Abschnitt 3.2.7 für die Abbruchbedingung), dem im vorigen Abschnitt präsentierten Berechnungsschema folgend. Vorhandene Werte stammen vom vorherigen Zeitpunkt  $t_k$  mit Index  $k$ , die zu ermittelnden neuen Werte für den Zeitpunkt  $t_{k+1}$  tragen den Index  $k+1$ . Bei auf allen Zellen stattfindenden Operationen wird das Raster reihenweise von oben nach unten, innerhalb der Reihen von links nach rechts durchlaufen. Die räumlichen Indices  $x, y$  von Gitterwerten werden zwecks einfacher Lesbarkeit weggelassen. Snow Entrainment und Hilfsprozeduren wie etwa die Berechnung des Geländeradius werden nicht gezeigt. Die Projektion vom lokalen auf das globale Koordinatensystem wird ebenfalls ausgelassen.

### 3.2.1 Aufspannen der Bounding Box

Die *Bounding Box*  $\mathcal{B}$  ist eine in jedem Schritt neu ermittelte, rechteckige Untermenge des Gesamtrasters, die den gerade bewegten Teil des Lawinenkörpers so eng wie möglich umfasst, um die momentanen Simulationsberechnungen stets auf den relevanten Teil zu beschränken.

Am Anfang werden in einer zweifachen Schleife alle Zellen des Gesamtrasters durchlaufen und die vier Box-Ränder nur jeweils dort erweitert wo die Geschwindigkeit größer Null ist – damit ist die scharfe Umgrenzung gesichert. Die Bounding Box wird danach für später anfallende Derivatiberechnungen in alle Richtungen um drei Zellen ausgeweitet. Sie kann als zweidimensionales Array gedeutet werden, mit x-Werten nach rechts und y-Werten nach unten wachsend. Elemente von  $\mathcal{B}$  sind Listen mit den Einträgen der momentanen lokalen Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ , Abflusshöhe  $h$ , Geländehöhe  $z$ , sowie Hangsteigung  $\psi$  und Exposition  $\phi$ :

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} (\mathbf{v}, h, z, \psi, \phi)_{11} & (\mathbf{v}, h, z, \psi, \phi)_{21} & \dots & (\mathbf{v}, h, z, \psi, \phi)_{c_{max}1} \\ (\mathbf{v}, h, z, \psi, \phi)_{12} & (\mathbf{v}, h, z, \psi, \phi)_{22} & \dots & (\mathbf{v}, h, z, \psi, \phi)_{c_{max}2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{v}, h, z, \psi, \phi)_{1r_{max}} & (\mathbf{v}, h, z, \psi, \phi)_{2r_{max}} & \dots & (\mathbf{v}, h, z, \psi, \phi)_{c_{max}r_{max}} \end{pmatrix}$$

<sup>2</sup>Der Grund für diese Art der Darstellung liegt in der Programmiersprache, in der Vektoren als eindimensionale Arrays realisiert sind.

### 3.2.2 Ermittlung der beschleunigenden Kräfte

Im Schema erfolgt an dieser Stelle die Ermittlung der beschleunigenden Kräfte  $\mathbf{F}_g$ ,  $\mathbf{F}_{ph}$ , und die nur von diesen Kräften abhängige erste Schätzung der Beschleunigung  $\mathbf{a}_{gp}$ . Diese wird danach für die auf der CFL-Bedingung basierende Festlegung des Zeitschrittes  $\tau$  verwendet.

Überdachte Variablen wie z. B.  $\hat{\psi}_s$  kennzeichnen die Herkunft aus dem Hornschen Schema, vgl. Abschnitt 2.3.1.  $h_c$  ist die kritische Abflusshöhe, unter der die Geschwindigkeit auf Null gesetzt wird, vgl. Abschnitt 2.6.

$\forall x \in \{1, \dots, c_{max}\}, y \in \{1, \dots, r_{max}\}$ :

$$\begin{aligned} m^k &= h^k \rho \delta^2 \\ \mathbf{F}_g^{k+1} &= m^k g \begin{pmatrix} \sin \psi \sin \phi \\ -\sin \psi \cos \phi \end{pmatrix} \\ \mathbf{F}_{ph}^{k+1} &= m^k g \begin{pmatrix} \sin \hat{\psi}_s^k \cos \hat{\phi}_s^k \\ \sin \hat{\psi}_s^k \sin \hat{\phi}_s^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

If ( $h^k > h_c$ )

$$\mathbf{a}_{gp}^{k+1} = \frac{1}{m^k} (\mathbf{F}_g^{k+1} + \mathbf{F}_{ph}^{k+1})$$

Else

$$\mathbf{a}_{gp}^{k+1} = \mathbf{0}$$

Die Formel für die Beschleunigung ergibt sich aus der fundamentalen Beziehung  $a = F/m$ .  $\widehat{\Delta \mathbf{v}}$  steht für die West-Ost- bzw. Nord-Süd-Differenz der Geschwindigkeit.

### 3.2.3 Festlegung des Zeitschrittes

Als Minimum über alle Gitterknoten der Bounding Box ergibt sich der Zeitschritt:

$$\tau^{k+1} = \min_{\substack{i \in \{0, 1\} \\ x \in \{1, \dots, c_{max}\} \\ y \in \{1, \dots, r_{max}\}}} \left( \frac{-\mathbf{v}^k(i)}{2\mathbf{a}_{gp}^{k+1}(i)} + \sqrt{\left( \frac{\mathbf{v}^k(i)}{2\mathbf{a}_{gp}^{k+1}(i)} \right)^2 + \frac{\delta}{\mathbf{a}_{gp}^{k+1}(i)}} \right) \frac{1}{c}$$

Es werden nur solche Punkte durchlaufen wo  $\mathbf{a}_{gp}^{k+1} > 0$ . Der Faktor  $1/c$  mit  $c = 2$

dient zur Sicherheit, damit die CFL-Bedingung in der Praxis eingehalten wird. Der zu minimierende Ausdruck ergibt sich durch Gleichsetzen und elementares Auflösen der folgenden Gleichungen, mit nachheriger Abschätzung des Weges  $s$  durch das maximal erlaubte  $\delta$ :

$$\begin{aligned} v^{k+1} &= v^k + a^{k+1} \tau^{k+1} \\ v^{k+1} &= \frac{s^{k+1}}{\tau^{k+1}} \end{aligned}$$

### 3.2.4 Ermittlung der Geschwindigkeit

Es wird zunächst eine vorläufige Näherung  $\mathbf{v}_{\mathbf{gp}}$  der Geschwindigkeit ermittelt, die wie  $\mathbf{a}_{\mathbf{gp}}$  nur von den beschleunigenden Kräften Gravitation und hydrostatischem Druck abhängt, sowie vom soeben ermittelten Zeitschritt  $\tau^{k+1}$ . Diese Näherung dient als Grundlage der Berechnung der Reibungskräfte die den verzögernden Anteil  $a_{fric}$  der Beschleunigung ergeben. Da in beide Richtungen mit dem gleichen Faktor abgebremst wird ist  $a_{fric}$  ein Skalar. Sollte dieser Reibungsanteil so groß sein dass  $\mathbf{v}_{\mathbf{gp}}$  vollständig aufgehoben wird, wird die Geschwindigkeit auf Null gesetzt.

Da die Geschwindigkeit im letzten Schritt nur verringert werden kann ( $a_{fric}$  ist immer nichtnegativ), ist die CFL-Bedingung nicht gefährdet, da der Abhängigkeitsbereich der kontinuierlichen Lösung höchstens eingeschränkt wird, vgl. Abschnitt 3.1.

$\forall x \in \{1, \dots, c_{max}\}, y \in \{1, \dots, r_{max}\}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\mathbf{gp}}^{k+1} &= \mathbf{v}^k + \mathbf{a}_{\mathbf{gp}}^{k+1} \tau^{k+1} \\ F_d^{k+1} &= m^k \mu \left( g \cos \psi + \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{gp}}^{k+1}(0)^2}{\mathbf{r}(0)} + \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{gp}}^{k+1}(1)^2}{\mathbf{r}(1)} \right) \\ F_e^{k+1} &= m^k \frac{\|\mathbf{v}_{\mathbf{gp}}^{k+1}\|^2}{32 \log_{10}^2 \left( \frac{k_s}{12h^k} \right) h^k} \\ a_{fric}^{k+1} &= \frac{1}{m^k} (F_d^{k+1} + F_e^{k+1}) \end{aligned}$$

If  $(a_{fric}^{k+1} \tau^{k+1} < \|\mathbf{v}_{\mathbf{gp}}^{k+1}\| \text{ and } h^k > h_c)$

$$\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{v}_{\mathbf{gp}}^{k+1} \left( 1 - \frac{a_{fric}^{k+1}}{\|\mathbf{v}_{\mathbf{gp}}^{k+1}\|} \right)$$

Else

$$\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{0}$$

### 3.2.5 Massenweitergabe

Nachdem die Geschwindigkeit für alle Gitterpunkte bestimmt wurde, ist die Einführung einer Sichtweise zweckmäßig, in der von „Zellen“ oder „Paketen“ die Rede ist.<sup>3</sup> Sie seien als  $\delta \times \delta$  große Rasterbereiche mit den Gitterknoten als Mittelpunkte definiert. Für jede Zelle findet elementare Bestimmung des Weges durch  $s = vt$  und die Aufteilung der Masse in benachbarte Zellen statt, je nachdem in welche Richtung und wie weit das Massepaket verschoben wurde. Die Einträge des Vektors  $\mathbf{m}_p$  geben von 0 bis 3 die in der Zelle verbleibende Masse, den diagonal, vertikal, bzw. horizontal verschobenen Massenanteil an, siehe Abb. 3.3.

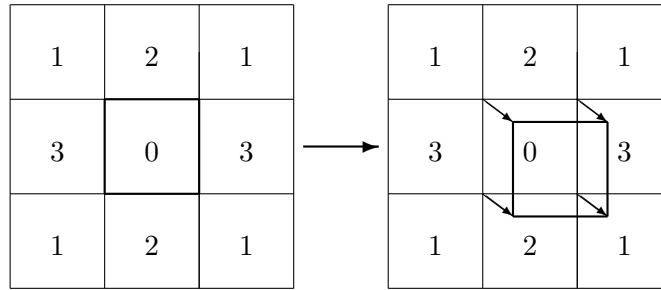


Abbildung 3.3: Bedeutung der Indizes von  $\mathbf{m}_p$  bei der Massenweitergabe

$\forall x \in \{1, \dots, c_{max}\}, y \in \{1, \dots, r_{max}\}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{k+1} &= \mathbf{v}^{k+1} \tau^{k+1} \\ \mathbf{m}_p^{k+1} &= m^k \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\mathbf{s}^{k+1}(0)}{\delta}\right) \left(1 - \frac{\mathbf{s}^{k+1}(1)}{\delta}\right) \\ \left(\frac{\mathbf{s}^{k+1}(0)}{\delta}\right) \left(\frac{\mathbf{s}^{k+1}(1)}{\delta}\right) \\ \left(1 - \frac{\mathbf{s}^{k+1}(0)}{\delta}\right) \left(\frac{\mathbf{s}^{k+1}(1)}{\delta}\right) \\ \left(\frac{\mathbf{s}^{k+1}(0)}{\delta}\right) \left(1 - \frac{\mathbf{s}^{k+1}(1)}{\delta}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 3.2.6 Plastischer Stoß

In einer Zelle zusammentreffende Massepakete werden durch einen vollkommen plastischen Stoß beschrieben, d. h. die Massen vereinigen sich reflektionslos, die Impulse werden aufaddiert. Für die Berechnung bedeutet das: Betrachte alle Nachbarzellen aus der Moore-Nachbarschaft  $N(\{x, y\})$ , und wenn es einen Geschwindigkeitsvektor von einer

<sup>3</sup>Diese Betrachtungsweise gilt im gesamten Rechenschema von ELBA+, wird aber erst jetzt eingeführt da sie in diesem Schritt zum Tragen kommt. Man vergleiche außerdem Abschnitt 4.2.3, wo derselbe Standpunkt bei herkömmlichen Finite Differenzen Schemata eingenommen wird.



solchen gibt, addiere zu vorhandener Masse und vorhandenem Impuls dessen entsprechende Werte. Wurden alle Nachbarn berücksichtigt, ermittle die neue Geschwindigkeit durch die Beziehung  $v = p/m$ , [HSG95, S. 33], sowie die neue Abflusshöhe durch  $h = m/\rho\delta^2$ .

$\forall x \in \{1, \dots, c_{max}\}, y \in \{1, \dots, r_{max}\}$ :

$$\begin{aligned} m^{k+1} &= \mathbf{m}_{\mathbf{p}}^{k+1}(0) \\ \mathbf{p}^{k+1} &= \mathbf{m}_{\mathbf{p}}^{k+1}(0)\mathbf{v}^{k+1} \end{aligned}$$

$\forall \{i, j\} \in N(\{x, y\})$ :

If  $(\mathbf{v}_{\{i,j\} \rightarrow \{x,y\}}^{k+1})$  {

$$\begin{aligned} m^{k+1} &+= \mathbf{m}_{\mathbf{p}_{i,j}}^{k+1}(l) \\ \mathbf{p}^{k+1} &+= \mathbf{m}_{\mathbf{p}_{i,j}}^{k+1}(l)\mathbf{v}_{\{i,j\} \rightarrow \{x,y\}}^{k+1} \end{aligned}$$

}

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{k+1} &= \frac{\mathbf{p}^{k+1}}{m^{k+1}} \\ h^{k+1} &= \frac{m^{k+1}}{\rho\delta^2} \end{aligned}$$

Die Variable  $l$  steht für den jeweils passenden Index in der Massenweitergabe.

### 3.2.7 Abbruchbedingung

Am Ende des Schrittes wird die Abbruchbedingung überprüft. Diese besteht aus zwei Teilen, von denen mindestens einer erfüllt sein muss um die Schleife zu beenden und die Simulation abzuschließen:

1. Ist die Maximalgeschwindigkeit Null?
2. Hat sich die Lawinenfront zum  $m$ -ten mal nicht verändert? (Der Wert von  $m$  ist im Programm auf 20 gesetzt.)

Der einzige Grund warum die zweite Bedingung benötigt wird ist das oftmalige Auftreten von Oszillationen in der Ablagerungsphase, wenn die Lawine komplett stehen bleiben sollte.

### 3.3 Bemerkungen und Probleme

Der dem Autor vorliegende Algorithmus in der Programmiersprache VB .NET wurde basierend auf empirischen Überlegungen, aufbauend auf elementaren physikalischen Zusammenhängen, wie z. B. in [HSG95] gegeben, erstellt. Grundgleichungen wurden dabei nicht aufgestellt; die in Abschnitt 2.4 hergeleiteten Modellkräfte wurden weitgehend heuristisch in Beziehung gesetzt. Das Verfahren wurde bisher keinen numerischen Analysen unterzogen. Ziel ist es, die im vorigen Abschnitt geschilderten Abläufe kritisch zu hinterfragen, wenn notwendig einen neuen Algorithmus aus dem Modell der partiellen Differentialgleichungen (2.22)–(2.24) herzuleiten, um eine fachgerechte Untersuchung zu ermöglichen.

Auf Modell- und Datenfehler wird nicht eingegangen, nur Verfahrensfehler oder mit dem Verfahren zusammenhängende Probleme werden kommentiert:

- **Festlegung des Zeitschrittes**

Es ist wahrscheinlich nicht notwendig für die Festlegung des Zeitschrittes eine überschätzte Beschleunigung  $\mathbf{a}_{\text{gp}}$  zu verwenden, siehe Abschnitt 3.2.3. Da sowieso schon ein grober Sicherheitsfaktor eingesetzt wird, wäre es einfacher das zeitliche Inkrement aus der Geschwindigkeit des vorherigen Schrittes zu ermitteln, da keine extremen Geschwindigkeitsschwankungen zwischen aufeinanderfolgenden Zeitschritten zu erwarten sind.

- **Überschätzung der Geschwindigkeit**

Die Reibungskräfte  $F_d$  und  $F_e$  werden abhängig von einer vorläufigen überschätzten Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{\text{gp}}$  ermittelt. Alle neuen Werte könnten aber ohne Probleme aus den bekannten des vorherigen Zeitpunktes hergeleitet werden. Ein Zwischenschritt dieser Art scheint keine offensichtlichen Vorteile zu bringen.

- **Oszillationen und Gitterauflösung**

Die folgenden zwei Probleme werden im ELBA-Handbuch [NiT05] aufgeführt. Vor allem in der Ablagerungsphase kommt es häufig zu unphysikalischen Oszillationen, deren Ursachen nicht geklärt sind. ELBA+ ist außerdem auf Zellweiten zwischen 5 m und 10 m kalibriert; Abweichung von diesen Werten kann qualitativ verschiedene Ergebnisse liefern.

- **Massenweitergabe und Stoß wie ein zellulärer Automat**

In einem Zeitschritt bis zur Massenweitergabe ausgeführte Berechnungen haben eine temporäre Bestimmung von Geschwindigkeiten an allen Gitterpunkten als Ergebnis. Sie werden danach benutzt um Massenweitergabe zwischen „Zellen“ zu simulieren, wobei Zellen als  $\delta \times \delta$  große Rasterbereiche mit den Gitterknoten als Mittelpunkte definiert sind. Diese Vorgehensweise fällt grob mit der eines klassischen zellulären Automaten zusammen, vgl. mit der informellen Definition von

zellulären Automaten in [WG00, S. 15], in dem Sinn dass für jede Zelle zuerst ein temporärer von einer Nachbarschaft abhängiger Berechnungsschritt und anschließend ein synchroner Stoßvorgang durchgeführt wird. In ELBA+ treten allerdings statt diskreten Zuständen die zwei kontinuierlichen Variablen Geschwindigkeit und Höhe auf. Außerdem sind die Zellen nicht homogen, sondern von den Geländeeigenschaften wie Hangneigung oder Höhe abhängig. Die *update rules* sind allerdings deterministisch und einheitlich.

Der ELBA+ Algorithmus kann offensichtlich nicht als direkte Approximationsmethode von Differentialgleichungen eingestuft werden – er setzt eine „diskretere“ Verfahrensweise ein, die von der Rechendauer her sehr effizient funktioniert und nach entsprechenden Kalibrierungen meist hervorragende Resultate liefert. Allerdings ist dadurch eine numerische Analyse unter Einbeziehung der kontinuierlichen Gleichungen und deren Approximationsfehlern, wie dies bei einer geläufigen Finite Differenzen Methode möglich wäre, nicht durchführbar. Um Übereinstimmung mit den herkömmlichen mathematischen Methoden des Gebietes der *Computational Fluid Dynamics (CFD)* zu erhalten, ist die Herleitung eines neuen Algorithmus notwendig.

## Kapitel 4

# Finite Differenzen Schemata

In diesem Kapitel wird auf Basis des in Abschnitt 2.5 hergeleiteten Systems der Differentialgleichungen (2.22), (2.23) und (2.24) ein für die Lawinensimulation geeignetes explizites Finite Differenzen Schema entwickelt. Vor der Untersuchung der in Frage kommenden Schemata werden die Einengung dieser konkreten Verfahrensart motiviert und numerische Grundlagen erklärt.

### 4.1 Motivation der Verfahrensart

Die Wahl der Verfahrensart explizite Finite Differenzen Methode wird wie folgt motiviert:

- Grundsätzlich sollen die Simplität und der damit verbundene relativ schnelle Simulationsablauf des vorhandenen Verfahrens von ELBA+ nicht aufgegeben werden. Finite Volumen oder Finite Elemente Methoden wären in der allgemeinen numerischen Theorie zu bevorzugen, würden aber Berechnungszeiten ausufern lassen und die Implementierung in VB .NET erheblich erschweren. Weiters soll am homogenen Raster festgehalten werden. Diese Bedingungen sind vom Auftraggeber dieser Arbeit vorgegeben.

In der modernen Literatur zur Simulation von fluiddynamischen Hochgeschwindigkeitsereignissen finden sich – auch konkret zur Lawinensimulation – außerdem einige verschiedene Finite Differenzen Schemata die für diesen Zweck genau geeignet zu sein scheinen.

- Wegen der üblichen relativ groben Gitterauflösung die sich aus den vorhandenen Geländedaten ergibt, sind für ein explizites Schema durch anfallende Stabilitätsbedingungen keine extrem eingeschränkten Zeitschritte zu erwarten.<sup>1</sup> Von

---

<sup>1</sup>Man beachte, in der CFL-Bedingung gilt  $\tau \propto \delta$ .

daher sind in Punkto Rechenzeit gegenüber einem impliziten Schema keine wesentlichen Nachteile anzunehmen.

- Für die Simulation von zeitabhängigen hyperbolischen Problemen – wie hydrodynamische, konvektionsdominante Phänomene mit schnellen Flüssen – wird in der Literatur durchgängig auf die Anwendung expliziter Schemata verwiesen, siehe z. B. [Hir88, S. 162], [LeV92, S. 99]. Der ausschlaggebende Vorteil impliziter Verfahren besteht normalerweise in der Verwendung längerer Zeitschritte, womit im Vergleich zu ihren expliziten Gegenstücken die Anzahl der Rechenschritte auch nach Einsatz der zusätzlich notwendigen algebraischen Lösungswerkzeuge für Gleichungssysteme niedriger gehalten wird. Durch die rapiden Abläufe in einer Lawinensimulation kann dieser Vorteil allerdings nicht zum tragen kommen (oder wenn, dann höchstens in der langsamen Anbruch- oder Ablagerungsphase).

## 4.2 Überlegungen zu den Grundgleichungen

In den nächsten Abschnitten werden alle Modellgleichungen und deren Approximationen eindimensional betrachtet und analysiert, da ein Berechnungsschema im Übergang auf höhere Dimensionen üblicherweise nicht an Qualität gewinnt und die Analyse im Eindimensionalen am einfachsten durchzuführen ist. Ist einmal ein passendes eindimensionales Schema gefunden, können eine zweidimensionale Implementierung und damit eventuell auftretende Probleme oder Schwierigkeiten diskutiert werden.

### 4.2.1 Diskretisierung

Diskretisierung eines Differentialausdrucks geschieht am einfachsten durch Taylorentwicklung um einen Punkt  $\{i\}$  und Weglassen von Termen höherer Ordnung. Diese fallengelassenen Terme sind der *Abbruchfehler* der Approximation. Die niedrigste Potenz des Diskretisierungsparameters im Abbruchfehler ist die (Konvergenz-) *Ordnung* der Approximation. Abhängig von den Entwicklungspunkten ergeben sich mehrere Möglichkeiten für die Diskretisierung – eine Differenzenapproximation ist nicht eindeutig.

Im Gleichungssystem von ELBA treten nur Ableitungen erster Ordnung auf. Für diese existieren drei übliche Approximationsmöglichkeiten, erläutert am Beispiel der Geschwindigkeit  $u$ :

- **Vorwärts gerichtet.** Die Geschwindigkeit  $u_{i+1}$  am Punkt  $\{i + 1\}$  sei durch die Taylorentwicklung um  $\{i\}$  gegeben:

$$u_{i+1} = u_i + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \delta + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i \frac{\delta^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i \frac{\delta^3}{6} + \dots$$

Umformung liefert

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\delta} + O(\delta)$$

bzw. die Approximation erster Ordnung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{\delta}. \quad (4.1)$$

- **Rückwärts gerichtet.** Die Taylorentwicklung für den Punkt  $\{i-1\}$  um  $\{i\}$  durchgeführt ergibt:

$$u_{i-1} = u_i - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \delta + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i \frac{\delta^2}{2} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i \frac{\delta^3}{6} + \dots$$

Analog zu vorher liefert Umformung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\delta} + O(\delta)$$

bzw. die Approximation erster Ordnung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{\delta}. \quad (4.2)$$

- **Zentral.** Wird die rückwärts gerichtete Entwicklung von der vorwärts gerichteten subtrahiert, ergibt sich:

$$u_{i+1} - u_{i-1} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i 2\delta + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i \frac{\delta^3}{3} + \dots$$

Auflösung nach  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i$  liefert

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\delta} + O(\delta^2)$$

bzw. die Approximation zweiter Ordnung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\delta}. \quad (4.3)$$

Analog existieren diese drei Möglichkeiten für die Gewinnung der zeitlichen Diskretisierung, mit  $\tau$  statt  $\delta$  und Variation des Zeit- statt des Ortsindex. Weiters sind Approximationen beliebig hoher Ordnung möglich, je nachdem wie der Abbruchfehler gewählt wird. Für die Praxis einer Lawinensimulation sind Diskretisierungen höherer Ordnungen allerdings rechnerisch zu aufwendig, oder durch eine damit verbundene notwendige

Erweiterung der Stützpunkte wegen den rapiden unterschiedlichen Änderungen nahe liegender Gitterwerte nicht rechtfertigbar.

Grundlage eines expliziten Finite Differenzen Schemas ist die gleichzeitige Diskretisierung von räumlichen und zeitlichen Derivativen und Auflösung nach der unbekannten Variable. Erforderlich dafür ist eine zeitliche Diskretisierung die eine explizite, also sofortige, Auflösung der Unbekannten erlaubt (in dieser Arbeit: vorwärts gerichtet). Sind diese expliziten Gleichungen bekannt, werden alle unbekannten Werte durch sequentielle Berechnung Zeitschritt für Zeitschritt ermittelt.

Im Grenzübergang sind alle Approximationsmethoden formal zwar äquivalent zueinander, numerisch gesehen kann es jedoch zu signifikanten Unterschieden kommen. Diese qualitativen Unterschiede können z.B. durch *von Neumann Stabilitätsanalyse* erfasst werden (unter bestimmten Voraussetzungen), siehe dazu [Hir88, S. 283 ff.].

### 4.2.2 Klassifizierung

Es sei die prototypische Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \Psi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q \quad \text{oder} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{a(u) \frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{\Psi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{q}_{\text{Quelle}}$$

in konservativer bzw. nichtkonservativer Form mit einer Flussfunktion  $f(u)$ , einem Quellterm  $q$  und einer Konstanten  $\Psi \geq 0$  gegeben, vgl. [WH01]. Die Funktion  $a(u) = \partial f(u) / \partial u$  ist die Ableitung der Flussfunktion in Bezug auf die Gittergröße  $u$  (z.B. die Geschwindigkeit). Es sei zunächst  $q = 0$ .

- **Fall  $\Psi = 0$**

Im Fall  $a(u) = a = \text{const.}$  und  $f(u) = au$  handelt es sich um die *lineare Wellengleichung*, [LeV92], die reine Konvektion mit konstanter Geschwindigkeit  $a$  modelliert. Für die einfachste nichtlineare Form gilt  $a(u) = u$  und  $f(u) = u^2/2$ . Sie trägt den Namen *nichtviskose Burgers-Gleichung* und ist aufgrund ihrer Simplität und einfachen analytischen Lösbarkeit ein Standardbeispiel beim Studium numerischer Schemata.

Es handelt sich also bei  $\Psi = 0$  um rein konvektive Probleme, z.B. die Fortbewegung von Stoßwellen. Gleichungen dieser Bauart werden als *hyperbolisch* eingestuft.

- **Fall  $\Psi > 0$**

Die zweite Ableitung beschreibt das Phänomen der Diffusion, die z.B. bei der Wärmeverteilung auftritt. Dabei geht es um die *uniforme* Ausbreitung einer Größe mit einer durch den *Diffusionskoeffizienten*  $\Psi$  gegebenen Stärke. Man spricht von

*Konvektions-Diffusions-Problemen*, mit Gleichungen von formal *parabolischer* Bauart. Für  $a(u) = u$  und  $f(u) = u^2/2$  handelt es sich um die *Burgers-Gleichung*.

Bei konvektionsdominanten Problemen ( $\Psi \ll 1$ ) muss der Fokus bei der Wahl des Berechnungsschemas auf einer befriedigenden Nachbildung der konvektiven Vorgänge liegen.

### 4.2.3 Konservative Form und Numerischer Fluss

Bei der Entwicklung von Berechnungsverfahren für Grundgleichungen ist es zweckmäßig, Gitterpunkte als Mittelpunkte von Zellen (mit Rändern  $x_{j\pm 1/2} := x_j \pm \delta/2$ ) aufzufassen, und die dort berechneten Approximationen  $U_j^k$  der echten Lösungswerte  $u_j^k = u(x_j, t_k)$  als Annäherungen an die Mittelungen der Zellwerte zu definieren, [LeV92]:

$$U_j^k \approx \bar{u}_j^k = \frac{1}{\delta} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t_k) dx \quad (4.4)$$

Liegt eine konservative Grundgleichung vor, ist es möglich sie in der allgemeinen Form (ohne diffusiven Anteil)

$$U_j^{k+1} = U_j^k - \frac{\tau}{\delta} [\mathcal{F}(U_{j-m}^k, U_{j-m+1}^k, \dots, U_{j+n}^k) - \mathcal{F}(U_{j-m-1}^k, U_{j-m}^k, \dots, U_{j+n-1}^k)] + \tau q_j^k \quad (4.5)$$

anzuschreiben, wo  $\mathcal{F}$  die sogenannte *numerische Flussfunktion* (kurz: *numerischer Fluss*, engl.: *numerical flux*) mit  $m + n + 1$  Argumenten ist. Bei vielen relevanten Problemen reduziert sich Gleichung (4.5) zu

$$U_j^{k+1} = U_j^k - \frac{\tau}{\delta} [\mathcal{F}(U_j^k, U_{j+1}^k) - \mathcal{F}(U_{j-1}^k, U_j^k)] + \tau q_j^k, \quad (4.6)$$

was  $m = 0$ ,  $n = 1$ , und einer Abhängigkeit des numerischen Flusses von (höchstens) einem linken und einem rechten Nachbarn entspricht. Da nur abhängig von drei Punkten handelt sich dabei um ein 3-Punkt Schema. Ein symmetrisches 5-Punkt Schema würde zusätzlich die Berücksichtigung von  $U_{j-2}^k$  und  $U_{j+2}^k$  erfordern. Deuten lässt sich  $\mathcal{F}(U_j^k, U_{j+1}^k) =: \mathcal{F}_{j+1/2}$  als durchschnittlicher Fluss durch den Zellrand  $x_{j+1/2}$  über das Zeitintervall  $[t_k, t_{k+1}]$ <sup>2</sup>:

$$\mathcal{F}_{j+1/2} \approx \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(u(x_{j+1/2}, t)) dt \quad (4.7)$$

<sup>2</sup>Man beachte dass diese Auffassung der einer Finite Volumen Methode (FVM) mit kartesischem Gitter ähnlich ist, vgl. [Hir88, S. 237 ff.]. Da beliebige Zellformen ein wesentlicher Vorteil der FVM ist und dieser Vorteil hier nicht zum Tragen kommt, soll weiterhin von Finite Differenzen Methoden die Rede sein, selbst wenn die Erwähnung von „Zellen“ nicht ganz korrekt ist.



Die Herleitung von  $\mathcal{F}_{j-1/2} := \mathcal{F}(U_{j-1}^k, U_j^k)$  und eventuellen Diffusionsflüssen  $\mathcal{D}_{j\pm 1/2}$  geschieht analog. Da das Intervall  $[t_k, t_{k+1}]$  vorwärts gerichtet gewählt wurde, entsteht ein explizites Schema.

Für die Verwendung dieser konservativen Form finden sich folgende Argumente:

1. HIRSCH [Hir88, S. 237 ff.] zeigt ein Beispiel auf, in dem zwei mathematisch äquivalente Formulierungen unterschiedliche Ergebnisse liefern. Die konservative Implementierung erhält dabei die physikalischen Größen, während bei der nichtkonservativen Implementierung numerische innere Quellen entstehen. Vor allem beim Vorhandensein steiler Gradienten können diese Quellen zu groben Fehlern führen.
2. LEVEQUE [LeV92, S. 122 ff.] führt die Ergebnisse der Implementierung der Burgers-Gleichung ebenfalls in beiden Varianten vor. Die in den Anfangswerten vorgegebene Unstetigkeit wird im nichtkonservativen Fall mit falscher Geschwindigkeit weitergeleitet, die konservative Variante funktioniert korrekt.

Da in der Simulation des ELBA-Modells steile Gradienten auftauchen können, sollte wann immer möglich versucht werden der konservativen Methode Vorzug zu leisten.

## 4.3 Klassische Verfahren

Anhand der historisch ersten numerischen Schemata werden in diesem Abschnitt die typischen Probleme aufgezeigt, die moderne Verfahren versuchen zu beseitigen. Es reicht wenn zur Demonstration einfache Modelle zum Einsatz kommen, da die relativ komplexen ELBA-Gleichungen nicht notwendig sind um wesentliche numerische Eigenschaften zu veranschaulichen.

Ein solches Testmodell sei gegeben durch die lineare Wellengleichung mit einer Unstetigkeit in den Anfangswerten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ u_0(x) &= \begin{cases} 1 & x \leq 0,1 \\ 0 & x > 0,1 \end{cases} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Mit der konstanten dimensionslosen Geschwindigkeit  $a = 0,01$  beschreibt diese Gleichung ein Wandern der Unstetigkeit in positive x-Richtung. Ist ein Differenzenschema nicht in der Lage dieses simple Problem befriedigend zu lösen, kann es für weitaus komplexere Problemstellungen der konvektiven Art getrost verworfen, oder muss modifiziert werden.

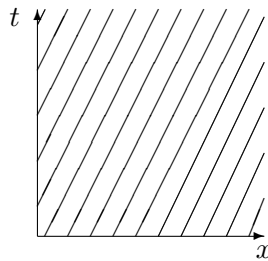
### 4.3.1 Upwind

Die Konstruktion eines Verfahrens erster Ordnung geschieht im einfachsten Fall durch ein räumlich vorwärts oder rückwärts gerichtetes Differenzenschema. Die Entscheidung welche Richtung zu wählen ist hängt dabei allein von der Richtung des Informationsflusses im Modell ab.

Im Fall der Wellengleichung (4.8) lässt sich dieser Fluss besonders einfach ermitteln, [LeV92]. Es ergibt sich die Lösung

$$u^*(x, t) = u_0(x - at) \quad (4.9)$$

mit parallelen Geraden  $x - at = \text{const.}$  als Charakteristiken, entlang derer die Lösung konstant ist. Da  $a$  positiv gewählt wurde, wird Information mit wachsender Zeit nach rechts weitergegeben, was sich auch im Verlauf der Charakteristiken widerspiegelt, siehe Abb. 4.1.



**Abbildung 4.1:** Charakteristiken der linearen Wellengleichung bei  $a > 0$

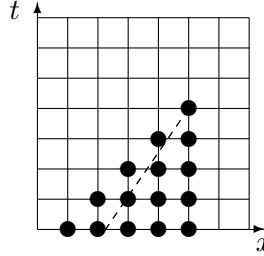
Zwei damit zusammenhängende wesentliche Begriffe werden im Folgenden erläutert.

Das *Abhängigkeitsgebiet* erklärt sich indem man die Lösung  $u^*(x, t)$  an einem Punkt  $(x, t)$  betrachtet. Diese Lösung ist im Modell (4.8) nur abhängig von einem einzigen Punkt aus den Anfangswerten, nämlich  $x_0$ , der auf derselben Charakteristik wie die Lösung liegt. Allgemein ist das Abhängigkeitsgebiet bei hyperbolischen Gleichungssystemen nicht nur ein Punkt sondern ein gesamtes Intervall, das wegen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit beschränkt ist.

Der *Einflussbereich* eines Punktes  $x_0$  ergibt sich aus der umgekehrten Überlegung: Er bezeichnet den in der  $x$ - $t$ -Ebene nach oben offenen Kegel mit  $x_0$  an der Spitze, in dem  $x_0$  einen Einfluss auf die Lösung besitzen kann.

Sofern man die für Stabilität notwendige CFL-Bedingung einhält, kann sich die Information auf einem Rechengitter in jedem Schritt höchstens um einen Gitterpunkt weiterbewegen – damit beschränkt sich in einem einseitigen Schema im Fall paralleler Charakteristiken das Abhängigkeitsgebiet auf einen Bereich innerhalb eines von Gitterpunkten aufgespannten rechtwinkligen Dreiecks. Je nachdem ob die Geschwindigkeit  $a$

positiv oder negativ ist, hat sich das Dreieck nach links bzw. nach rechts zu öffnen, siehe Abb. 4.2.



**Abbildung 4.2:** Charakteristik bei positiver Geschwindigkeit (strichliert) und damit notwendiges rechnerisches Abhängigkeitsdreieck

Damit ist die Wahl des Differenzenschemas für die lineare Wellengleichung mit  $a > 0$  klar: rückwärts gerichtet. In einer Gleichung ausgedrückt lautet es (mit  $\nu := a\tau/\delta$ )

$$U_j^{k+1} = U_j^k - \nu(U_j^k - U_{j-1}^k), \quad (4.10)$$

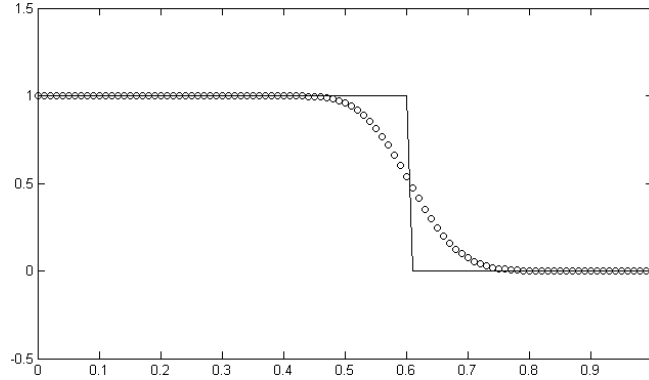
analog vorwärts gerichtet für  $a < 0$

$$U_j^{k+1} = U_j^k - \nu(U_{j+1}^k - U_j^k). \quad (4.11)$$

Dieses Verfahren nennt sich *Upwind Verfahren* (erster Ordnung), da sich die Diskretisierungsrichtung des Schemas nach dem physikalischen Informationsfluss richtet.<sup>3</sup> Abbildung 4.3 zeigt eine MATLAB-Implementierung dieser Methode mit den Parametern  $\delta = 0,01$ ,  $\tau = 0,02$ , und  $a = 0,1$ , was eine Courant-Zahl von  $\nu = 0,2$  ergibt. Nach 250 Zeitschritten – bei  $t = 5$  – stoppt die Simulation; damit befindet sich die Unstetigkeit an der Stelle  $x = 0,6$ . Die durchgezogene Linie zeigt die exakte Lösung (in der gleichen Auflösung von 100 Punkten), während die Kreise das numerische Ergebnis kennzeichnen. Auffällig ist dass die Unstetigkeit wegen numerischer Diffusion stark verschmiert wird. Dieses Verhalten ist typisch für Schemata erster Ordnung und macht sie damit in dieser Form für konvektionsdominante Problemstellungen nur beschränkt brauchbar.

Man beachte außerdem, dass in der einfachen Gleichung (4.8) die Geschwindigkeit  $a$  konstant ist, wodurch sich die oben vorgeführte triviale Wahl des Verfahrens ergibt. Anders ist die Lage bei nichtlinearen Systemen wo nicht von vornherein klar ist dass es in der gesamten Simulation Informationsausbreitung in nur eine bestimmte Richtung gibt. In diesem Fall muss die lokale charakteristische Struktur einbezogen werden, was zur *Godunov Methode* und der Theorie der (approximativen) Riemann-Löser führt, siehe dazu z. B. [LeV92]. Im Weiteren werden nur zentrale Schemata in Betracht gezogen, da

<sup>3</sup>Manche Autoren bezeichnen nur den rückwärts gerichteten Fall als Upwind Verfahren, dafür den vorwärts gerichteten als Downwind Verfahren.



**Abbildung 4.3:** Implementierung des Upwind Verfahrens anhand der linearen Wellengleichung

dort diese relativ aufwändigen Verfahren nicht benötigt werden. Für das ELBA-Modell kommt außerdem noch die Annahme der beliebigen Topographie hinzu, in der abhängig von den Geländedaten und deren Ausrichtung die Geschwindigkeitsvektoren beliebig ihre Orientierungen wechseln können.

#### 4.3.2 Lax-Wendroff

Ein klassisches zentrales Schema zweiter Ordnung, das *Lax-Wendroff Verfahren*, baut im Unterschied zu den meisten anderen nicht auf der direkten Annäherung der Differentialgleichung, sondern auf einer Taylorapproximation der abhängigen Variable auf, [LeV92]:

$$u(x, t + \tau) = u(x, t) + \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^3) \quad (4.12)$$

Da für Gleichung (4.8) gilt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.13)$$

und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} = -a \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.14)$$

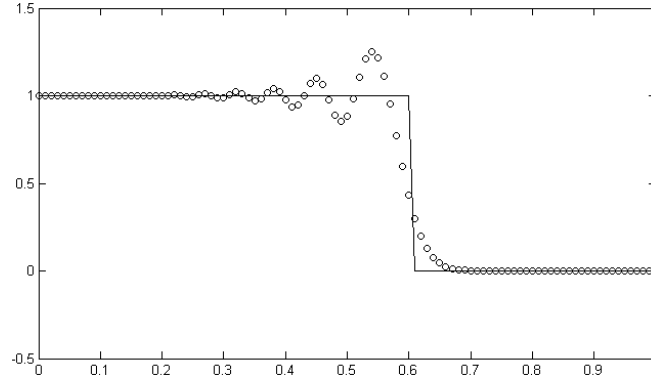
folgt nach Einsetzen in (4.12)

$$u(x, t + \tau) = u(x, t) + \tau \left( -a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\tau^2}{2} \left( a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + O(\tau^3). \quad (4.15)$$

Anwendung zentraler Approximation der räumlichen Ableitungen führt schließlich zum Lax-Wendroff Schema

$$U_j^{k+1} = U_j^k - \frac{\nu}{2} (U_{j+1}^k - U_{j-1}^k) + \frac{\nu^2}{2} (U_{j+1}^k - 2U_j^k + U_{j-1}^k). \quad (4.16)$$

Eine MATLAB-Implementierung ist in Abb. 4.4 zu sehen, mit denselben Parametern wie beim Upwind Verfahren in Abschnitt 4.3.1.



**Abbildung 4.4:** Implementierung des Lax-Wendroff Verfahrens anhand der linearen Wellengleichung

Im Vergleich ist die Verschmierung im Bereich der Unstetigkeit wegen der höheren Konvergenzordnung geringer, allerdings kommt es links davon zu erheblichen *Over-* und *Undershoots* mit einem maximalen Absolutfehler von ca. 0,28. Solche Oszillationen sind typisch für Schemata zweiter Ordnung. Sie sind in dieser unmodifizierten Form ebenfalls unbrauchbar.

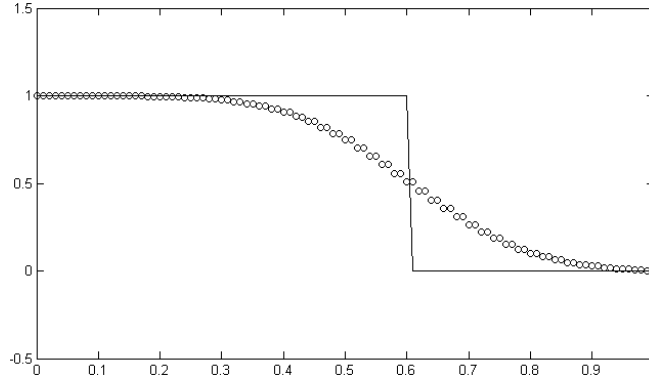
Es ist möglich analoge nichtzentrale Verfahren zu konstruieren (wie etwa das *Beam-Warming Verfahren*, [LeV92]), Oszillationen bleiben aber erhalten.

### 4.3.3 Lax-Friedrichs

Das sich natürlich ergebende Schema  $U_j^{k+1} = U_j^k - \frac{\nu}{2}(U_{j+1}^k - U_{j-1}^k)$ , welches im Unterschied zum Upwind Verfahren zentrale statt gerichtete Raumdifferenzen verwendet, erweist sich als bedingungslos instabil, [Hir88, S. 284 ff.]. Deshalb wird im *Lax-Friedrichs Verfahren* der Stützpunkt  $U_j^k$  durch eine Mittelung der beiden Nachbarpunkte  $\frac{1}{2}(U_{j+1}^k + U_{j-1}^k)$  ersetzt. Das jetzt CFL-stabile Differenzschema erster Ordnung lautet:

$$U_j^{k+1} = \frac{1}{2}(U_{j+1}^k + U_{j-1}^k) - \frac{\nu}{2}(U_{j+1}^k - U_{j-1}^k) \quad (4.17)$$

Plottet man die numerische Lösung, siehe Abb. 4.5, mit Parametern wie oben, zeigt sich eine extreme Verschmierung, stärker als beim Upwind Verfahren. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da durch die Einführung der Mittelung eine relativ starke künstliche Diffusion eingebaut wurde. Es zeigt sich, dass eine Änderung der ursprünglichen Differentialgleichung sich auf das qualitative numerische Verhalten des Verfahrens nützlich auswirken kann. Während zwar nicht genau die Lösung des ursprünglichen Problems angenähert wird, lassen sich so Schemata höherer Konvergenzordnungen finden.



**Abbildung 4.5:** Implementierung des Lax-Friedrichs Verfahrens anhand der linearen Wellengleichung

[LeV92, S. 117] führt vor, dass das Lax-Friedrichs Verfahren in Bezug auf die modifizierte Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\delta^2}{\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (4.18)$$

einen Abbruchfehler von nur quadratischer Größenordnung bezüglich  $\tau$  besitzt statt linearer. Verwendet man die zu den Gleichungen (4.14) ähnlichen Umformungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -a \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \left( \tau \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{\delta^2}{\tau} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \\ &= -a \left( -a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\tau) \right) + O(\tau) \\ &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\tau), \end{aligned}$$

kommt man mit  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  auf eine einfacher zu analysierende Modellgleichung zweiter Ordnung mit folgendem Aussehen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \Psi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \Psi = \frac{\delta^2}{2\tau} (1 - \nu^2) \quad (4.19)$$

Analog lässt sich die modifizierte Gleichung für das Upwind Verfahren herleiten. Dort gilt als Unterschied

$$\Psi = \frac{\delta a}{2} (1 - \nu). \quad (4.20)$$

Zusammenfassend sei festgehalten, dass durch Hinzugabe eines künstlichen numerischen Diffusionstermes ein (etwa oszillierendes) Verfahren oft stabilisiert werden kann – mit der Kehrseite dass die Lösung eines anderen, zusätzlich diffusiven, Problems angenähert wird. Dementsprechend sollte in diesem Fall versucht werden, die Konstante  $\Psi$  so klein wie höchstens notwendig zu halten. Eine ausführliche Diskussion über künstliche Diffusionsmethoden findet sich in [Hir90, S. 272 ff.].

#### 4.3.4 MacCormack

Die *MacCormack Methode*, [LeV92, S. 127], [Hir90, S. 239 ff.], ist ein *Prädiktor-Korrektor Verfahren*, welches eine Erweiterung des Lax-Wendroff Schemas auf nichtlineare Probleme darstellt. In einem ersten Schritt wird dabei ein Prädiktor berechnet, der abschließend durch einen Korrektor-Schritt korrigiert wird. Man spricht deshalb auch von einem Zweischnitt-Verfahren.

In diesen zwei Schritten erfolgt die Diskretisierung in entgegengesetzten Richtungen: beispielsweise im Prädiktor vorwärts gerichtet, im Korrektor rückwärts. Das sich dadurch ergebende Schema lautet:

$$\begin{aligned}\overline{U_j^{k+1}} &= U_j^k - \frac{\tau}{\delta}(f(U_{j+1}^k) - f(U_j^k)) \\ U_j^{k+1} &= \frac{1}{2}(U_j^k + \overline{U_j^{k+1}}) - \frac{\tau}{2\delta}(f(\overline{U_j^{k+1}}) - f(\overline{U_{j-1}^{k+1}}))\end{aligned}\tag{4.21}$$

Anders angeschrieben lässt sich die symmetrische Beziehung zwischen Prädiktor und Korrektor deutlicher erkennen:

$$\overline{U_j^{k+1}} = U_j^k - \frac{\tau}{\delta}(f(U_{j+1}^k) - f(U_j^k))\tag{4.22}$$

$$\overline{\overline{U_j^{k+1}}} = U_j^k - \frac{\tau}{\delta}(f(\overline{U_j^k}) - f(\overline{U_{j-1}^k}))\tag{4.23}$$

$$U_j^{k+1} = \frac{1}{2}(\overline{U_j^{k+1}} + \overline{\overline{U_j^{k+1}}})\tag{4.24}$$

Das Update (4.24) entspricht einer Mittelung aus Prädiktor (4.22) und Korrektor (4.23).

Beide Schritte verwenden Diskretisierung erster Ordnung. Zusammen betrachtet ergibt das Verfahren allerdings eine Ordnung zweiter Stufe, da sich Abbruchfehler gegenseitig aufheben. Es sei zu beachten, dass sich das MacCormack Schema im linearen Fall auf das Lax-Wendroff Verfahren reduziert. Sein Vorteil liegt darin, dass die Ermittlung der Ableitungen der Funktion  $f$ , bzw. der Ausbreitungsrichtungen der weitergegebenen Information – ein im nichtlinearen Fall normalerweise aufwändiges Unterfangen – entfällt; auf beide Richtungen wird im Schema Rücksicht genommen. Während der vorwärts gerichtete Schritt für Ausbreitung nach links bzw. der rückwärts gerichtete für Ausbreitung nach rechts instabil ist, entsteht zusammen genommen ein CFL-stabiles Verfahren.

Man beachte außerdem dass die Vertauschung der Diskretisierungsrichtungen zwischen Prädiktor und Korrektor zu unterschiedlichen Ergebnissen führen kann. Um alle Richtungen gleichwertig zu behandeln – was im ELBA-Modell geschehen soll –, empfiehlt sich ein Wechsel der Diskretisierungsrichtungen in jedem Schritt (also abwechselnd vorwärts/rückwärts, rückwärts/vorwärts für Prädiktor/Korrektor), wie in [HC93, S. 192] erwähnt.

Ein Manko des MacCormack Verfahrens ist sein generell oszillierendes Verhalten, ähnlich zum Lax-Wendroff Schema. Um diese Oszillationen auszugleichen, ist in der Praxis der

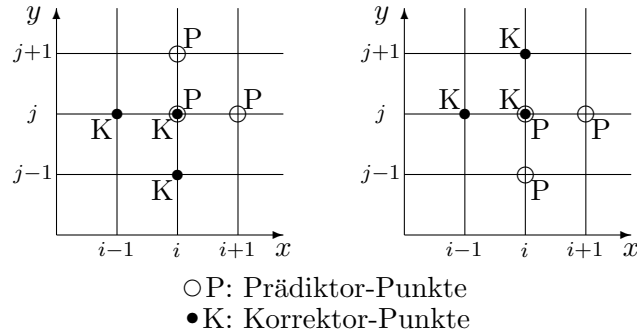
Einbau eines künstlichen Diffusionstermes (wie im vorigen Abschnitt behandelt) notwendig. Hinzugabe dieses Termes in beiden Schritten des Verfahrens (4.21) liefert das brauchbare Schema

$$\begin{aligned}\overline{U_j^{k+1}} &= U_j^k - \frac{\tau}{\delta}(f(U_{j+1}^k) - f(U_j^k)) + \Psi \frac{\tau}{\delta^2}(U_{j+1}^k - 2U_j^k + U_{j-1}^k) \\ U_j^{k+1} &= \frac{1}{2}(U_j^k + \overline{U_j^{k+1}}) - \frac{\tau}{2\delta}(f(\overline{U_j^{k+1}}) - f(\overline{U_{j-1}^{k+1}})) + \Psi \frac{\tau}{\delta^2}(\overline{U_{j+1}^k} - 2\overline{U_j^k} + \overline{U_{j-1}^k}),\end{aligned}\quad (4.25)$$

mit dem künstlichen Diffusionskoeffizienten  $\Psi$ , der nah an 0 gehalten werden sollte. In Kapitel 5 wird dieses Verfahren in numerischen Experimenten angewendet.

#### Anmerkung zur zweidimensionalen Implementierung

Bei einer zusätzlichen Dimension entstehen mehrere Möglichkeiten für die Wahl der Richtungen von Prädiktor und Korrektor, [Hir90, S. 261 ff.]. Alternierende Schemata sind zwei vorstellbar: abwechselnd vorwärts-vorwärts/rückwärts-rückwärts für die zwei Dimensionen in Prädiktor/Korrektor, oder vorwärts-rückwärts/rückwärts-vorwärts, siehe Abb. 4.6. Für eine richtungsunabhängige Implementierung empfiehlt HIRSCH [Hir90] die abwechselnde Anwendung aller möglichen Schemata, um Asymmetrien durch einseitig aufkumulierte Fehler zu vermeiden.



**Abbildung 4.6:** Mögliche alternierende MacCormack Schemata in zwei Dimensionen: vorwärts-vorwärts/rückwärts-rückwärts (links), vorwärts-rückwärts/rückwärts-vorwärts (rechts)

## 4.4 Hochauflösende Verfahren

Der Begriff *hochauflösendes Verfahren* steht für moderne Berechnungsschemata, in denen versucht wird eine kontinuierliche Lösung oszillationsfrei mit mindestens zweiter Ordnung anzunähern. Schlüssel zu dieser hohen Auflösung ist normalerweise eine adaptive Methode, die sich den lokalen Umständen dynamisch anpasst.



#### 4.4.1 TVD Methoden

Die Probleme der klassischen Verfahren wurden in Abschnitt 4.3 aufgezeigt: Ungenaue Nachbildung von Unstetigkeiten, Verschmierungen oder Oszillationen je nach Verfahrensordnung. Eine Kombination der vorteilhaften Eigenschaften dieser Verfahren wird in der folgenden Methode unternommen.

##### Definition

Das Prinzip der *TVD (Total Variation Diminishing) Methoden*, eingeführt von HARTEN [Har83], vgl. auch [Hir90, S. 528 ff.], [LeV92, S. 176 ff.], basiert auf dem Begriff der *Totalvariation*:

$$TV(u) = \sum_i |u_{i+1} - u_i| \quad (4.26)$$

Eine TVD Methode ist gekennzeichnet durch die Eigenschaft dass die Totalvariation der Gitterwerte nicht größer wird:<sup>4</sup>

$$\forall k : \quad TV(u^{k+1}) \leq TV(u^k) \quad (4.27)$$

Ist diese Eigenschaft für ein Schema erfüllt, folgt auch dass es *monotonieerhaltend* ist, d. h. aus monotonen Anfangswerten  $U_j^0$  folgt Monotonie für  $U_j^k$  in allen Zeitpunkten  $k$ . Dies hat zur Folge dass Oszillationen (wie etwa in Abb. 4.4 auf Seite 39) nicht auftreten können. Eine weitere angenehme Eigenschaft der TVD-Bedingung ist dass es möglich ist nichtoszillierende Schemata höherer Ordnungen herzuleiten.

##### Konstruktion

Die Idee zur Konstruktion von TVD Verfahren beruht auf der *Hybridisierung* von einem Fluss  $\mathcal{F}^H$  mit hoher und einem Fluss  $\mathcal{F}^L$  mit niedriger Ordnung. In glatten Gebieten kommt  $\mathcal{F}^H$  zum Einsatz, während im Umfeld steiler Gradienten der nichtoszillierende niedriggeordnete Anteil dominiert. In diesem Sinne kann man den Fluss hoher Ordnung als  $\mathcal{F}^L$  plus einem korrigierenden Anteil darstellen:

$$\mathcal{F}^H = \mathcal{F}^L + (\mathcal{F}^H - \mathcal{F}^L) \quad (4.28)$$

Der adaptive Ansatz besteht darin, eine nichtlineare Funktion  $\phi_j := \phi(U, j)$  namens *Flux-Limiter* vor den korrigierenden Anteil zwischenschalten:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^L + \phi_j(\mathcal{F}^H - \mathcal{F}^L) \quad (4.29)$$

---

<sup>4</sup>Der Begriff *diminishing* ist nicht korrekt – richtig wäre z. B. *nonincreasing*. Tatsächlich verwendete HARTEN [Har83] ursprünglich diesen Begriff, also TVNI statt TVD.

Je nachdem wie glatt die Daten  $U$  an  $j$  sind, wird  $\phi_j$  in die Nähe von 0 oder 1 gesetzt. Im glatten Fall Ersteres, in der Nähe steiler Gradienten Letzteres.

Als einfaches Maß für die „Glattheit“ der Daten ist das Verhältnis aufeinanderfolgender Differenzen denkbar:

$$\theta_j = \frac{U_j - U_{j-1}}{U_{j+1} - U_j} \quad (4.30)$$

Man kann  $\phi_j$  als eine bestimmte Funktion von  $\theta_j$ , also  $\phi_j = \phi(\theta_j)$ , wählen. Zu beachten ist, dass diese Methode an Extrempunkten, wo der Nenner  $U_{j+1} - U_j$  nahe an Null liegt und  $\theta_j$  beliebig groß werden kann, versagt. In der Praxis wird  $\theta_j$  auf 0 gesetzt wo der Nenner verschwindet.

Für ein zweiseitiges 5-Punkt Schema in der allgemeinen Form

$$U_j^{k+1} = U_j^k - C_{j-1/2}(U_j^k - U_{j-1}^k) + D_{j+1/2}(U_{j+1}^k - U_j^k) \quad (4.31)$$

mit den datenabhängigen Werten  $C_{j-1/2} = C_{j-1/2}(U_{j-2}, U_{j-1}, U_j, U_{j+1})$  und  $D_{j+1/2} = D_{j+1/2}(U_{j-1}, U_j, U_{j+1}, U_{j+2})$  müssen die folgenden Bedingungen erfüllt werden um die TVD-Eigenschaft zu gewährleisten:

$$\begin{aligned} C_{j-1/2} &\geq 0 \quad \forall j \\ D_{j+1/2} &\geq 0 \quad \forall j \\ C_{j+1/2} + D_{j+1/2} &\leq 1 \quad \forall j \end{aligned} \quad (4.32)$$

### Bedingungen an den Flux-Limiter

Um diese Bedingungen an einem konkreten Beispiel zu demonstrieren, sei das Lax-Wendroff Schema (4.16) in der leicht umgeformten Darstellung

$$U_j^{k+1} = U_j^k - \nu(U_j^k - U_{j-1}^k) + \frac{1}{2}\nu(1 - \nu)(U_{j+1}^k - 2U_j^k + U_{j-1}^k) \quad (4.33)$$

gegeben, aus der ersichtlich wird dass es sich um das Upwind Verfahren plus einem Korrekturterm handelt. Der zugehörige Fluss lautet

$$\mathcal{F}_{j+1/2} = aU_j^k + \frac{1}{2}a(1 - \nu)(U_{j+1}^k - U_j^k)\phi_j,$$

mit  $\phi_j = 1$ . In dieser Form werden die Komponenten aus Gleichung (4.29) deutlich:  $aU_j^k$  entspricht dem Upwind Fluss  $\mathcal{F}^L$  niedriger Ordnung,  $\frac{1}{2}a(1 - \nu)(U_{j+1}^k - U_j^k)$  dem Korrekturterm  $(\mathcal{F}^H - \mathcal{F}^L)$ .

Gleichung (4.31) ist gegeben durch folgende Wahl von  $C_{j-1/2}$  und  $D_{j+1/2}$ :

$$\begin{aligned} C_{j-1/2} &= \nu + \frac{1}{2}(1 - \nu)\nu \left( \frac{\phi_j(U_{j+1}^k - U_j^k) - \phi_{j-1}(U_j^k - U_{j-1}^k)}{U_j^k - U_{j-1}^k} \right) \\ D_{j+1/2} &= 0 \end{aligned}$$

Bedingung (4.32) reduziert sich zu:

$$0 \leq C_{j-1/2} \leq 1 \quad (4.34)$$

Unter Verwendung von (4.30) lässt sich  $C_{j-1/2}$  schreiben als

$$C_{j-1/2} = \nu \left( 1 + \frac{1}{2}(1 - \nu) \left( \frac{\phi(\theta_j)}{\theta_j} - \phi(\theta_{j-1}) \right) \right), \quad (4.35)$$

was zusammen mit der CFL-Bedingung  $|\nu| \leq 1$  zu dieser Forderung führt:

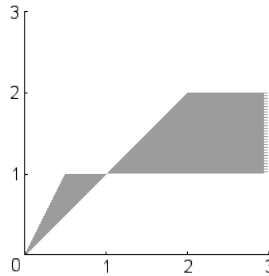
$$\left| \frac{\phi(\theta_j)}{\theta_j} - \phi(\theta_{j-1}) \right| \leq 2 \quad \forall \theta_j, \theta_{j-1} \quad (4.36)$$

Eine besondere Rolle spielen Extrempunkte, d.h. Punkte mit nichtpositivem  $\theta$ . Obwohl dort relativ glatte Verhältnisse vorherrschen können, ist es dennoch nicht erlaubt einen Fluss hoher Ordnung zuzulassen. Sollte dies geschehen, würde eine Steigung ungleich Null erzeugt werden, was zu Oszillation und damit erhöhter Totalvariation führen würde. Tatsächlich wurde bewiesen dass eine TVD Methode an Extrempunkten zu einem Verfahren erster Ordnung degeneriert, [LeV92, S. 179], was ihr größter Nachteil ist. Als Folgerung muss  $\phi(\theta) = 0$  immer gelten wenn  $\theta \leq 0$ .

Unter dieser Bedingung ist Ungleichung (4.36) erfüllt wenn für alle  $\theta$  gilt:

$$0 \leq \frac{\phi(\theta)}{\theta} \leq 2 \quad \text{und} \quad 0 \leq \phi(\theta) \leq 2 \quad (4.37)$$

Für eine Genauigkeit zweiter Ordnung muss zusätzlich gelten, dass  $\phi$  glatt durch den Punkt  $\phi(1) = 1$  verläuft. Weiters ist es – wie von SWEBY gefunden, [LeV92, S. 180] – ratsam die Funktion  $\phi$  als Konvexkombination aus dem  $\phi$  des Lax-Wendroff Schemas (d.h.  $\phi \equiv 1$ ) und des Beam-Warming Verfahrens, wo gilt  $\phi(\theta) = \theta$ , zu nehmen, um zu große Diffusion oder Anti-Diffusion zu vermeiden. Somit folgt ein Gebiet für TVD Schemata zweiter Ordnung für die Auswahl von  $\phi$  wie in Abb. 4.7 ersichtlich.



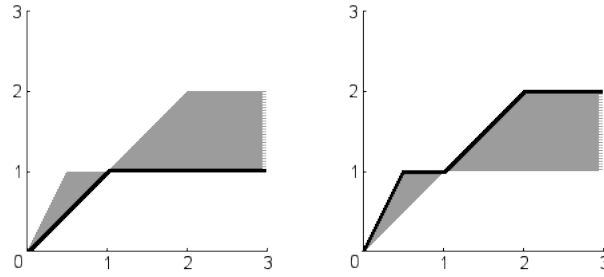
**Abbildung 4.7:**  $\theta$ - $\phi(\theta)$ -Diagramm: Gebiet für TVD zweiter Ordnung

Eine Liste einiger Limiter die im Laufe der Zeit definiert wurden findet sich z.B. in [Hir90, S. 537 ff.]. Die zwei einfachsten lauten:

$$\text{Minmod: } \phi^{\text{mm}}(\theta) = \max(0, \min(1, \theta)) \quad (4.38)$$

$$\text{Superbee: } \phi^{\text{sb}}(\theta) = \max(0, \min(1, 2\theta), \min(\theta, 2)) \quad (4.39)$$

Sie entsprechen dem unteren bzw. oberen Rand des TVD Gebietes, siehe Abb. 4.8. Der Minmod Limiter ist der am meisten, der Superbee Limiter der am wenigsten auf diesem Gebiet definierte diffusive. Letzterer wirkt oft sogar anti-diffusiv. Die Wahl des Flux-Limiters hängt vom jeweiligen Problem ab und muss empirisch ermittelt werden – einen „besten“ Flux-Limiter gibt es nicht.



**Abbildung 4.8:** Minmod Limiter (links) und Superbee Limiter (rechts) im TVD-Gebiet zweiter Ordnung

### Slope-Limiter und Rekonstruktion

In engem Zusammenhang mit dem Flux-Limiter steht die Idee des *Slope-Limiters*, der aus der am Ende von Abschnitt 4.3.1 erwähnten Godunov Methode hervorgeht. Die Godunov Methode basiert auf einer Funktion  $\tilde{u}^k(x, t_k)$ , die eine stückweise konstante *Rekonstruktion* der Zellwerte aus den vorhandenen Daten  $U_j^k$  darstellt, siehe Abb. 4.9 links, d. h.:

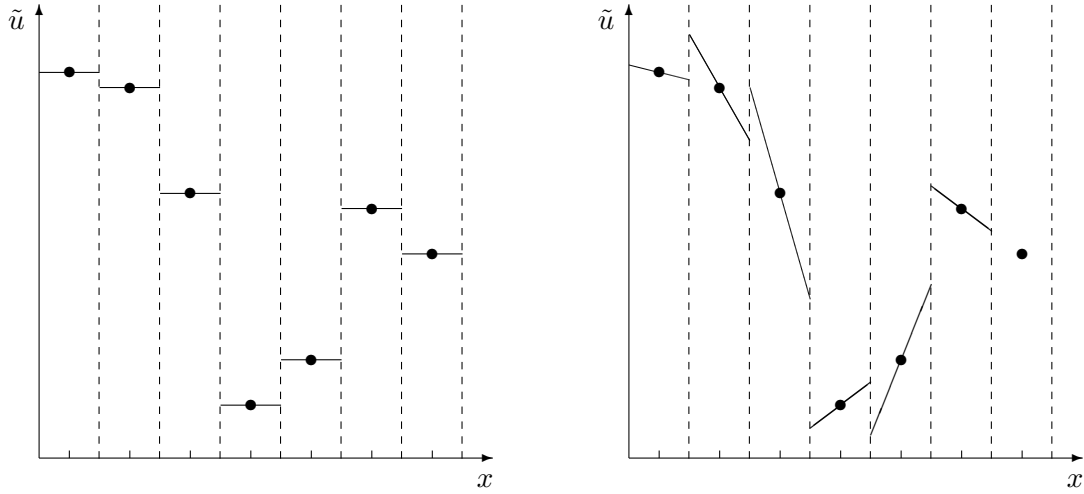
$$\tilde{u}^k(x, t_k) \equiv U_j^k \quad \text{für } x \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \quad (4.40)$$

Aus diesen rekonstruierten Werten wird nach exakter Lösung der Gleichungen die Funktion  $\tilde{u}^k(x, t_{k+1})$  bestimmt, die, wie in Gleichung (4.4), gemittelt über die Zelle die neuen Gitterwerte  $U_j^{k+1}$  liefert.

Eine natürliche Ausweitung dieser Vorgangsweise besteht in einer stückweise linearen statt konstanten Rekonstruktion der Zelle  $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ , also

$$\tilde{u}^k(x, t_k) = U_j^k + \sigma_j^k(x - x_j), \quad (4.41)$$

mit einer entsprechenden Steigung  $\sigma_j^k$ . Abhängig von der Definition von  $\sigma_j^k$  folgen in direkter Konsequenz geometrische Auswirkungen. Hat man es etwa mit der linearen



**Abbildung 4.9:** Stückweise konstante Rekonstruktion (links), stückweise lineare vorwärts gerichtete Rekonstruktion (rechts)

Wellengleichung (4.8) mit  $a > 0$  zu tun, bietet sich auf natürliche Weise eine einseitige vorwärts gerichtete Neigung an:

$$\sigma_j^k = \frac{U_{j+1}^k - U_j^k}{\delta} \quad (4.42)$$

Wie in Abb. 4.9 rechts ersichtlich, kommt es auf diesem Weg allerdings zu offensichtlichen geometrischen Ungereimtheiten, die sich auch auf das Verhalten des Schemas auswirken. Tatsächlich, [LeV92, S. 84 f.], führt Anwendung dieser Neigung auf nichts anderes als das Lax-Wendroff Schema (4.16). Dies zeigt dass es möglich ist mit dieser Methode Schemata höherer Ordnungen zu gewinnen, und veranschaulicht warum es beim Lax-Wendroff Verfahren so einfach zu Oszillationen kommt.

Mit dieser Erkenntnis liegt es nahe die Neigung selbst zu limitieren, und zwar mit einem Slope-Limiter. Um (bei skalaren Erhaltungsgleichungen) ein Verfahren mit TVD-Eigenschaft zu erhalten, muss Acht darauf gelegt werden dass gilt:

$$\forall k : \quad TV(\tilde{u}^k(\cdot, t_k)) \leq TV(U^k) \quad (4.43)$$

Es stellt sich heraus dass Flux- und Slope-Limiter durch folgende Formel in direkten Zusammenhang gebracht werden können:

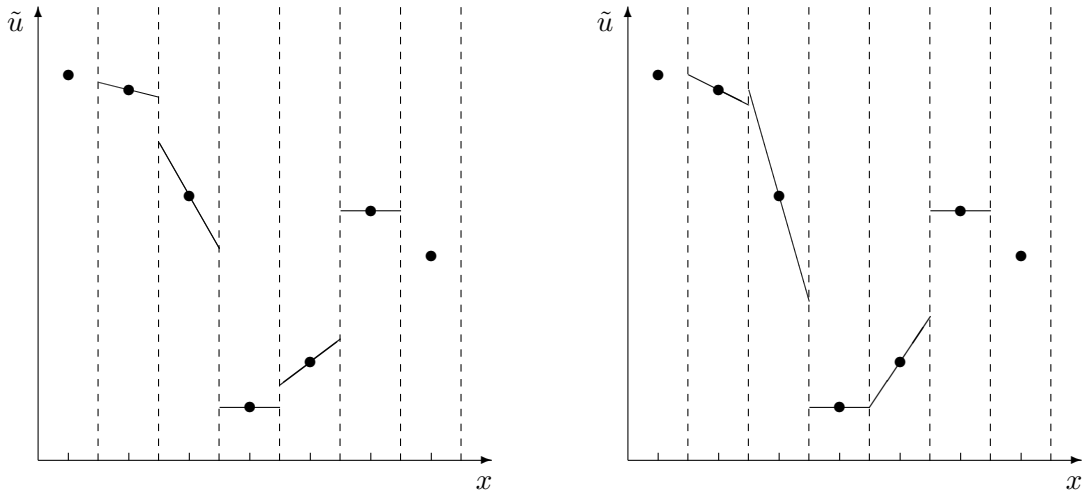
$$\sigma_j = \frac{U_{j+1} - U_j}{\delta} \phi_j \quad (4.44)$$

Je nach Interpretation handelt es sich bei  $\phi_j$  um einen Limiter für den Fluss oder die Neigung. Aus einem Slope-Limiter lässt sich so sofort ein Flux-Limiter ableiten und umgekehrt.

Als Beispiel sei der Minmod Flux-Limiter  $\phi^{\text{mm}}$  (4.38) gegeben. Die Minmod Neigung lautet dann:

$$\begin{aligned}\sigma_j^{\text{mm}} &= \frac{U_{j+1} - U_j}{\delta} \max \left( 0, \min \left( \frac{U_j - U_{j-1}}{U_{j+1} - U_j}, 1 \right) \right) \\ &= \frac{1}{\delta} \text{minmod}(U_{j+1} - U_j, U_j - U_{j-1}) \\ &= \frac{1}{2\delta} (\text{sgn}(U_{j+1} - U_j) + \text{sgn}(U_j - U_{j-1})) \min(|U_{j+1} - U_j|, |U_j - U_{j-1}|)\end{aligned}$$

Die minmod Funktion ergibt Null wenn die Vorzeichen ihrer Argumente unterschiedlich sind, ansonsten wird dasjenige Argument mit kleinstem Absolutbetrag (engl.: *modulus*) zurückgegeben. Ersteres Verhalten stimmt mit der anschaulichen Vorstellung der TVD-Bedingung überein, an Extrempunkten keine Steigung zu erzeugen. Abbildung 4.10 zeigt Rekonstruktion mit Minmod und Superbee Neigung. Jeder Zellrand erhält so einen von links und einen von rechts berechneten Wert  $U^L$  bzw.  $U^R$ , siehe Abb. 4.11.



**Abbildung 4.10:** Stückweise lineare Rekonstruktion mit Minmod (links) und Superbee (rechts) Limiter

### TVD Lax-Friedrichs Methoden

Aus dem Lax-Friedrichs Schema (4.17) lassen sich TVD Schemata zweiter Ordnung konstruieren, [WH01]. Für allgemeines  $f$  lautet das Lax-Friedrichs Verfahren:

$$U_j^{k+1} = \frac{1}{2}(U_{j+1}^k + U_{j-1}^k) - \frac{\tau}{2\delta}(f(U_{j+1}^k) - f(U_{j-1}^k)) \quad (4.45)$$

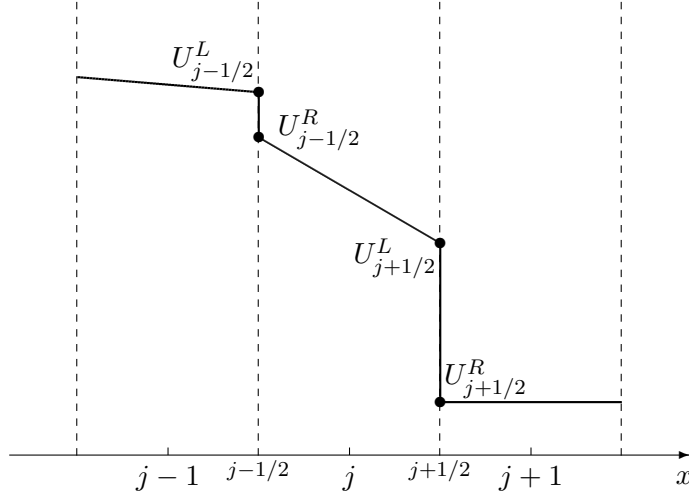


Abbildung 4.11: Zellränder bei stückweise linearer Rekonstruktion

In der in Abschnitt 4.2.3 eingeführten Zellinterpretation lässt sich der Randfluss aus Gleichung (4.6) schreiben als

$$\mathcal{F}_{j+1/2}^k = \frac{1}{2} \left( f(U_{j+1}^k) + f(U_j^k) - \frac{\delta}{\tau} (U_{j+1}^k + U_j^k) \right), \quad (4.46)$$

analog für den linken Zellrand  $\mathcal{F}_{j-1/2}^k$ . Der abgezogene letzte Term ist als die künstliche Diffusion zu interpretieren.

In [TO96] findet sich die folgende allgemeine Verfahrensform:

$$\begin{aligned} U_j^T &= U_j^k - \frac{\tau}{2\delta} (\mathcal{F}_{j+1/2}^k - \mathcal{F}_{j-1/2}^k) \\ U_j^{k+1} &= U_j^T + \frac{1}{2} (\Phi_{j+1/2} - \Phi_{j-1/2}) \end{aligned} \quad (4.47)$$

Die zweistufige Schreibweise stammt aus der *FCT* (*Flux Corrected Transport*) Methode, in der zuerst ein rein transportiertes  $U^T$  berechnet und danach durch diffusiv und anti-diffusiv wirkende Terme korrigiert wird. Die Variable  $\Phi_{j+1/2}$  steht für einen *dissipativen Limiter* zentriert um  $U_{j+1/2}$ , am einfachsten  $\Phi_{j+1/2} = U_{j+1} - U_j$ . Indem man ihn in den Fluss hineinzieht lässt sich dieses Verfahren als Verallgemeinerung des Lax-Friedrichs Flusses (4.46) auffassen:

$$\mathcal{F}_{j+1/2}^k = \frac{1}{2} \left( f(U_{j+1}^k) + f(U_j^k) - \phi_{j+1/2} \right), \quad \phi_{j+1/2} = \frac{\delta}{\tau} \Phi_{j+1/2} \quad (4.48)$$

Ersetzt man alle  $U_{j+1}$  und  $U_j$  durch  $U_{j+1/2}^R$  bzw.  $U_{j+1/2}^L$ , wird die TVD-Eigenschaft erfüllt und es entsteht der Fluss für ein sogenanntes *TVDLF Verfahren*:

$$\mathcal{F}_{j+1/2} = \frac{1}{2} \left( f(U_{j+1/2}^R) + f(U_{j+1/2}^L) - \phi_{j+1/2}^{\text{TVDLF}} \right), \quad \phi_{j+1/2}^{\text{TVDLF}} = \frac{\delta}{\tau} (U_{j+1/2}^R - U_{j+1/2}^L) \quad (4.49)$$

Leider erweist sich dieser erste Versuch als ähnlich dissipativ wie das Lax-Friedrichs Schema selbst. Modifikation schafft allerdings erhebliche Verbesserung. TÓTH und ODSTRČIL [TO96] empfehlen das Hinzumultiplizieren der globalen Courant-Zahl  $\frac{\tau}{\delta} \max_i(|a_{i+1/2}|)$  zum dissipativen Limiter, was die meisten wünschenswerten Eigenschaften der TVD-Methode erhält und zum in [WH01] untersuchten *MTVDLF (modified TVDLF) Schema* führt:

$$\phi_{j+1/2}^{\text{MTVDLF}} = \max_i(|a_{i+1/2}|)(U_{j+1/2}^R - U_{j+1/2}^L) \quad (4.50)$$

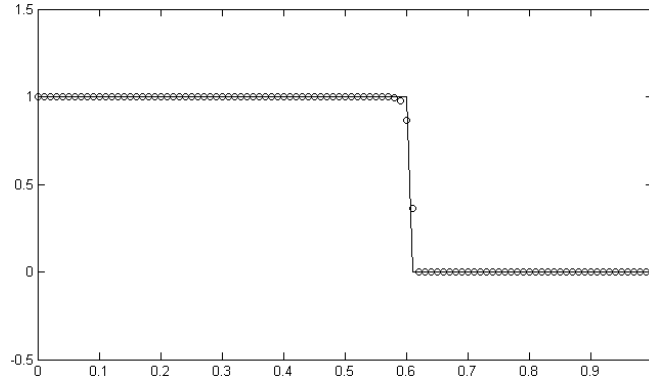
In [CLS89] findet sich weiters

$$\phi_{j+1/2} = \max_i(|a_{i+1/2}(U_{i+1/2}^R)|, |a_{i+1/2}(U_{i+1/2}^L)|)(U_{j+1/2}^R - U_{j+1/2}^L) \quad (4.51)$$

und der lokale Ansatz

$$\phi_{j+1/2} = \max(|a_{j+1/2}(U_{j+1/2}^R)|, |a_{j+1/2}(U_{j+1/2}^L)|)(U_{j+1/2}^R - U_{j+1/2}^L). \quad (4.52)$$

Die Variable  $a$  steht für die Geschwindigkeit am jeweiligen Punkt. Abbildung 4.12 zeigt am Beispiel der linearen Wellengleichung eine erhebliche Verbesserung bei Anwendung des MTVDLF Schemas im Gegensatz zu den klassischen Methoden aus Abschnitt 4.3.



**Abbildung 4.12:** Implementierung des MTVDLF Verfahrens anhand der linearen Wellengleichung

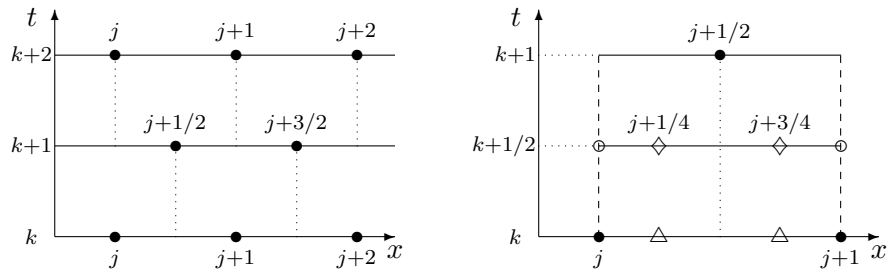
#### Anmerkung zur zweidimensionalen Implementierung

Zweidimensionale TVD Methoden besitzen – außer in trivialen Fällen – höchstens Ordnung Eins, [LeV92, S. 206]. Es besteht die Möglichkeit zur Anwendung von *Strang splitting*, wo das zweidimensionale Problem in eindimensionale Subprobleme in Richtungen der Koordinatenachsen zerlegt wird. Dies bringt allerdings Schwierigkeiten mit sich, z. B. eine Voreingenommenheit des Schemas in die Koordinatenrichtungen. Auf diesem Gebiet sind noch einige theoretische Fragen ungelöst, viele vorhandene Implementierungen sind von empirischer Natur.



## 4.4.2 NOC Schema

Das *NOC (Non-Oscillatory Central) Schema* wurde von NESSYAHU und TADMOR [NT90] eingeführt und hat sich in den letzten Jahren nach ausgiebiger Anwendung zur Simulation des Savage-Hutter-Modells erfolgreich bewährt, [HK03], [WHP04], [Chi06], [PH07]. Grundlage dieses Zweischritt-Verfahrens ist ein versetztes Rechengitter (engl.: *staggered grid*) – d. h. es wechselt in jedem Schritt zwischen dem ursprünglichen und einem in jede Ortsdimension um  $\delta/2$  versetzten Platz – mit verfeinerten und verschiedenen Entwicklungspunkten für unterschiedliche Terme, siehe Abb. 4.13.



**Abbildung 4.13:** NOC Schema (eindimensional). Links: versetztes Rechengitter. Rechts: • Gitterpunkte, ○ Entwicklungspunkte für  $\mathbf{f}$ , ◇ Entwicklungspunkte für  $\mathbf{q}$ , △ Entwicklungspunkte zum Zeitpunkt  $t_k$ . (Quelle: [WHP04, S. 514])

Fettgedruckte Variablen kennzeichnen Vektoren aus einer Schreibweise für Differentialgleichungssysteme stammend, [WHP04, S. 511]:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{w})}{\partial y} = \mathbf{q}(\mathbf{w}) \quad (4.53)$$

bzw. ohne den Term  $\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{w})}{\partial y}$  im eindimensionalen Fall. Vektor  $\mathbf{w}$  beinhaltet die konservativen Variablen,  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{g}$  stehen für die Transportflüsse,  $\mathbf{q}$  für die Quellterme. Die Gleichungen (2.22), (2.23) und (2.24) des zweidimensionalen ELBA-Modells lauten in dieser Form:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 \\ huv \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ hg(\sin \psi \sin \phi + \sin \psi_s \cos \phi_s) - \dots \\ hg(-\sin \psi \cos \phi + \sin \psi_s \sin \phi_s) - \dots \end{pmatrix}$$

Das Update im eindimensionalen NOC Schema hat die Gestalt

$$\underbrace{\mathbf{w}_{j+1/2}^{k+1}}_{\bullet} = \underbrace{\frac{1}{2} \left( \mathbf{w}_{j+1/4}^k + \mathbf{w}_{j+3/4}^k \right)}_{\Delta} - \underbrace{\frac{\tau}{\delta} \left( \mathbf{f} \left( \mathbf{w}_{j+1}^{k+1/2} \right) - \mathbf{f} \left( \mathbf{w}_j^{k+1/2} \right) \right)}_{\circ} + \underbrace{\frac{\tau}{2} \left( \mathbf{q} \left( \mathbf{w}_{j+1/4}^{k+1/2} \right) + \mathbf{q} \left( \mathbf{w}_{j+3/4}^{k+1/2} \right) \right)}_{\diamond}, \quad (4.54)$$

wobei  $\mathbf{w}_{j+1/4}^k$  und  $\mathbf{w}_{j+3/4}^k$  durch Rekonstruktion mit geeigneten TVD-erfüllenden Neigungen zu ermitteln sind:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{j+1/4}^k &= \mathbf{w}_j^k + \frac{\delta}{4} \boldsymbol{\sigma}_j^x \\ \mathbf{w}_{j+3/4}^k &= \mathbf{w}_{j+1}^k - \frac{\delta}{4} \boldsymbol{\sigma}_{j+1}^x \end{aligned}$$

Die Werte im zeitlichen Halbschritt  $t_{k+1/2}$  werden durch Taylorapproximation bestimmt:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_j^{k+1/2} &= \mathbf{w}_j^k + \frac{\tau}{2} (\partial \mathbf{w} / \partial t)_j^k \\ \mathbf{w}_{j+1}^{k+1/2} &= \mathbf{w}_{j+1}^k + \frac{\tau}{2} (\partial \mathbf{w} / \partial t)_{j+1}^k \end{aligned}$$

Umformung von (4.53) und der Jakobimatrix-freie Ansatz (engl.: *Jacobi Free Form, JFF*)  $(\partial \mathbf{f} / \partial t)_j^k = \boldsymbol{\sigma}_j^{\mathbf{f}}$  aus [NT90] mit einer auf  $\mathbf{f}$  bezogenen begrenzten Neigung  $\boldsymbol{\sigma}_j^{\mathbf{f}}$  liefert die zeitliche Ableitung

$$(\partial \mathbf{w} / \partial t)_j^k = -\boldsymbol{\sigma}_j^{\mathbf{f}} + \mathbf{q} \left( \mathbf{w}_j^k \right). \quad (4.55)$$

Ist die Jakobimatrix bekannt kann  $\boldsymbol{\sigma}_j^{\mathbf{f}}$  auch wie folgt ermittelt werden:

$$\boldsymbol{\sigma}_j^{\mathbf{f}} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} \boldsymbol{\sigma}_j^x \quad (4.56)$$

Rekonstruktion führt analog zu oben auf die noch ausstehenden Werte

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{j+1/4}^{k+1/2} &= \mathbf{w}_j^{k+1/2} + \frac{\delta}{4} \boldsymbol{\sigma}_j^x \\ \mathbf{w}_{j+3/4}^{k+1/2} &= \mathbf{w}_{j+1}^{k+1/2} - \frac{\delta}{4} \boldsymbol{\sigma}_{j+1}^x. \end{aligned}$$

#### Anmerkung zur zweidimensionalen Implementierung

Eine ausführliche Darstellung des zweidimensionalen NOC Schemas ist in [Chi06] zu finden. Die CFL-Bedingung (3.2) wird um den Faktor 2 verschärft:

$$\tau \leq \frac{1}{2} \min \left( \frac{\delta}{|u_{max}|}, \frac{\delta}{|v_{max}|} \right) \quad (4.57)$$

## Kapitel 5

# Numerische Experimente

Alle in diesem Kapitel gezeigten Simulationsergebnisse stammen aus selbstentwickelten MATLAB-Programmen. Da das Ziel der Test und Vergleich mehrerer numerischer Verfahren war und sich MATLAB zur relativ unkomplizierten Implementierung und Visualisierung eignet, wurde diese Umgebung gegenüber VB .NET – der Sprache in der ELBA+ entwickelt worden ist – vorgezogen.

Implementiert wurde jeweils die konservative Form, vgl. Abschnitt 4.2.3. Geschwindigkeiten  $u$  bzw.  $v$  sind auf Punkten ohne Abflusshöhe  $h$  nicht definiert. In jedem Schritt gilt daher aus programmiertechnischen Gründen: Wo  $h$  den Wert  $10^{-6}$  unterschreitet, wird  $h$  auf  $10^{-6}$  gestellt, alle anderen Gittervariablen auf 0. Die Massenerhaltung wird dadurch nicht merklich beeinflusst.

Im Randbereich werden alle Gitterwerte stets auf 0 gesetzt. Das Rechengebiet ist statisch (d.h. es existiert keine dynamische Bounding Box wie in ELBA+, vgl. Abschnitt 3.2.1) und wird groß genug gewählt um eine Beeinflussung durch Randeffekte zu verhindern. Der Wert der Courant-Zahl beträgt in allen Simulationen 0,3. Der maximal mögliche Zeitschritt  $\tau$  ist 0,1 s; vor allem in den ersten Schritten jeder Simulation – wenn Abflussgeschwindigkeiten niedrig sind – tritt diese Grenze in Kraft und die Courant-Zahl sinkt temporär. Die räumliche Maschenweite lautet  $\delta := \delta_x = \delta_y = 1$  m. Zeiteinheiten sind in Sekunden zu verstehen, Raumeinheiten in Metern, Geschwindigkeiten in m/s. Die Schneeablagerung wird vernachlässigt, wie auch Snow Entrainment und Reibungsphasen, vgl. Abschnitt 2.6. In Tabellen und Abbildungen gezeigte Geschwindigkeiten beziehen sich auf Bereiche wo die Abflusshöhe mindestens 0,05 m beträgt. Grund dafür ist dass sie auf dem gesamten Rechengebiet ermittelt werden, aber nur relevant sind wo die Lawine eine bestimmte Höhe aufweist.

Gerechnet wird in allen Testreihen in kartesischen lokalen Koordinaten mit Höhenachse normal zur Oberfläche, Koordinatentransformation werden keine vorgenommen. Aus-

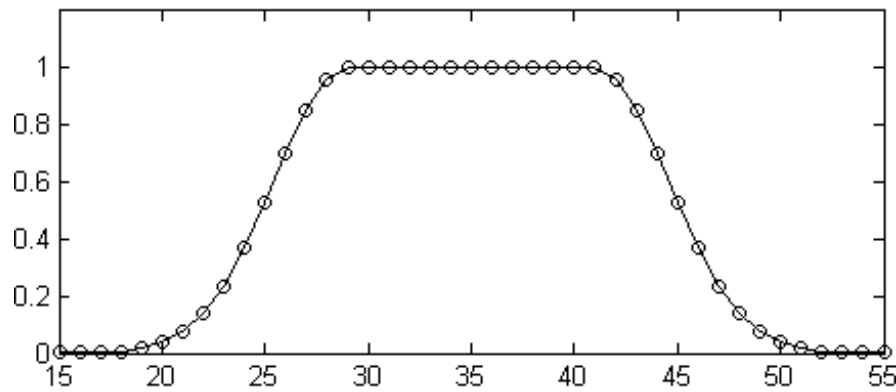
drücklich erwähnt sei dass dadurch beträchtliche geometrische Fehler entstehen können, da kartesische Koordinaten nur bei Hängen konstanter Neigung zulässig sind, vgl. Abschnitt 2.3.2.

„MC“ steht im Folgenden für das MacCormack Verfahren mit jeweiligem Diffusionskoeffizienten  $\Psi$ , „sb“ und „mm“ geben die eingesetzten Limiter an (Superbee bzw. Minmod), „JFF“ steht im NOC Schema für die Jakobimatrix-freie Form, „JAC“ für die Berechnung mit Berücksichtigung der Jakobimatrix-Einträge. Das MTVDLF Schema verwendet den globalen dissipativen Limiter (4.50).

## 5.1 Eindimensionale Testreihen

Das Rechengebiet spannt im Eindimensionalen den Bereich  $[1, x_{max}]$  auf, wobei  $x_{max}$  vom Testfall abhängig angegeben wird. Testhänge sind in positive x-Richtung fallend, d. h. die Lawine wird im Bereich niedriger x-Werte abgelassen. Der Lawinenkörper hat im Bereich  $[29, 41]$  eine Höhe von 1 m, 10 m davor und danach existiert ein glatter<sup>1</sup> Übergang auf den Hang, siehe Abb. 5.1, realisiert durch Exponentialfunktionen wie in der Dichtefunktion einer Normalverteilung:

$$h = \begin{cases} e^{-\frac{(x-29)^2}{25}} & 18 < x < 29 \\ 1 & 29 \leq x \leq 41 \\ e^{-\frac{(x-41)^2}{25}} & 41 < x < 52 \end{cases}$$

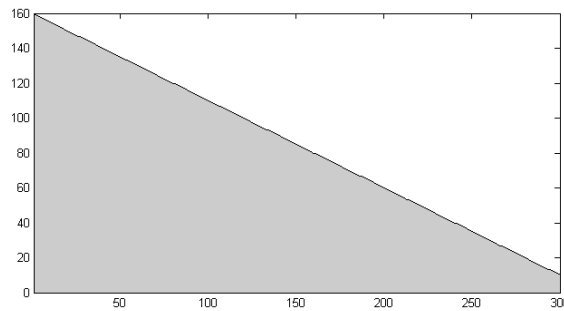


**Abbildung 5.1:** Anfangsabflusshöhen in den eindimensionalen Testreihen

<sup>1</sup>Im Sinne einer relativen Glattheit bezogen auf die diskrete Darstellung in der vorhandenen Auflösung.

## 5.1.1 Testreihe 1D.1

Die erste eindimensionale Testreihe findet auf einem Hang mit konstanter Neigung  $\psi \approx 26,6^\circ$  statt, mit  $x_{max} = 300$  m, siehe Abb. 5.2. Es wird nur die Gravitationskraft  $F_g$  angewandt, um einen Vergleich der numerischen Diffusionen zu erhalten. Im Idealfall sollte keine Verformung des Lawinenkörpers auftreten, nur eine Translation.



**Abbildung 5.2:** Topographie in Testreihe 1D.1: Hang mit konstanter Neigung

Abgebrochen wird nach 8 s simulierter Zeit. Die Resultate verschiedener Verfahren finden sich in Tabelle 5.1. In Spalte  $h_{max}^8$  befindet sich die maximale Abflusshöhe, unter  $u_{max}^8$  die maximale Geschwindigkeit am Ende der Simulation. Der Zeitindex  $k$  zeigt an wieviele Schritte benötigt wurden um die 8 s in der Simulation zu berechnen. Die Massenänderung  $\Delta m$  zwischen Anfang und Ende der Simulation sollte laut Massenerhaltung immer 0 betragen, im MacCormack Verfahren kommt es damit allerdings zu Problemen.

Verfahren	$h_{max}^8$	$u_{max}^8$	$k$	$\Delta m$	Abb.
MC 0,00	1,193	52,71	707	+7,30 %	5.3
MC 0,10	1,154	52,46	701	+5,56 %	–
MC 0,35	1,079	52,18	692	+1,08 %	–
MC 0,70	1,008	52,07	688	+0,95 %	5.4
MTVDLF mm	1,423	38,68	556	+0,00 %	5.5
MTVDLF sb	2,779	40,75	579	+0,00 %	–
NOC JFF mm	0,990	34,98	494	+0,00 %	–
NOC JFF sb	1,000	34,83	464	+0,00 %	–
NOC JAC mm	1,016	34,83	466	+0,00 %	–
NOC JAC sb	0,998	34,71	460	+0,00 %	5.6

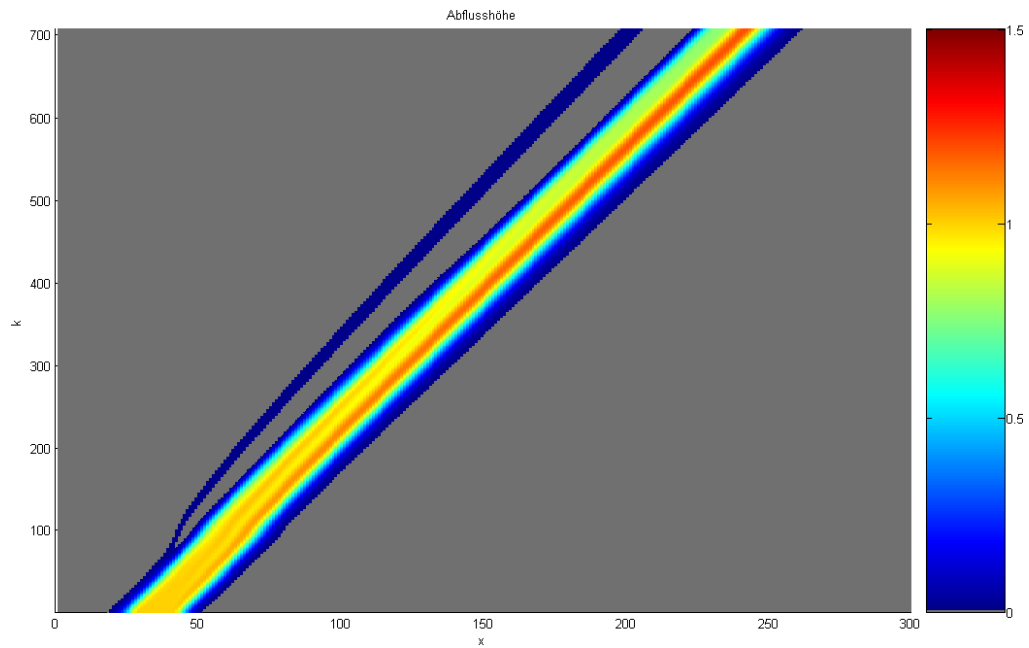
**Tabelle 5.1:** Testreihe 1D.1: konstante Hangneigung  $\psi \approx 26,6^\circ$ , nur Gravitationskraft  $F_g$ ,  $t = 8$  s

Diese fehlerhafte Zunahme der Masse kann durch Erhöhung der numerischen Diffusion verringert werden, ebenso das überhöhte  $h_{max}^8$ . Abbildung 5.3 lässt eine künstliche Wellenbildung erkennen, die die Lawinenfront nach oben drückt. Bei einem Diffusions-

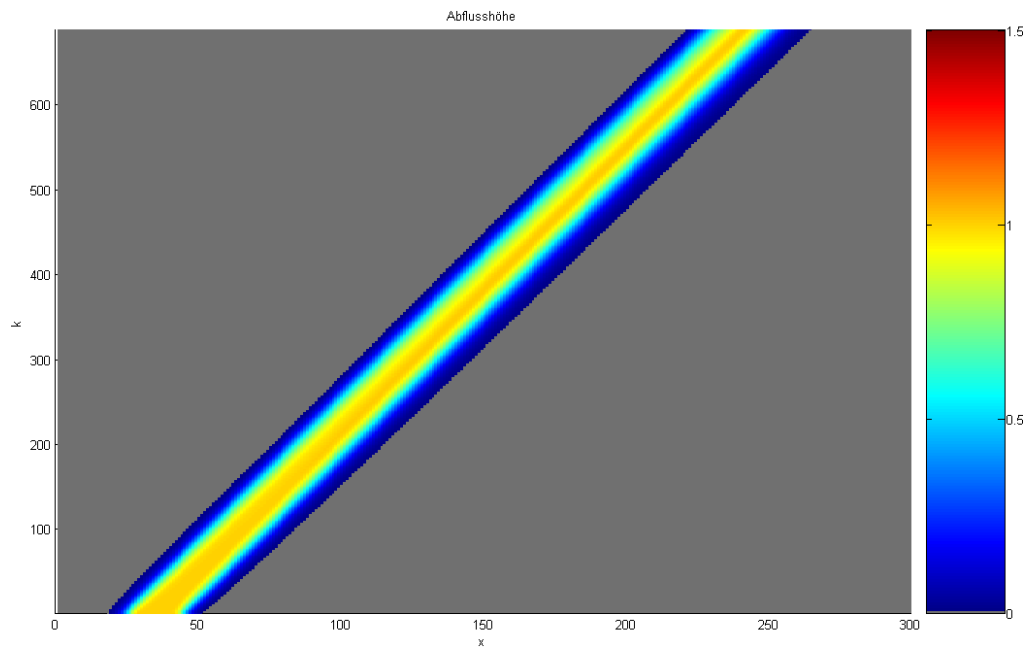
koeffizienten von  $\Psi = 0,7$  in Abb. 5.4 wird dieser Effekt verhindert (bzw. tritt nur mehr eine Welle auf), allerdings kommt es zu relativ starker Verschmierung.

Auch das MTVDLF Verfahren mit Minmod Limiter zeigt sich problematisch, siehe Abb. 5.5, da anti-diffuse Effekte auftreten. Die Maximalhöhe steigt um ca. 42 % an, der Lawinenkörper wird enger. Gänzlich unbrauchbar ist das MTVDLF Verfahren mit Superbee Limiter (ohne Abbildung), mit einem Höhenzuwachs von ca. 178 % an den Rändern des Körpers.

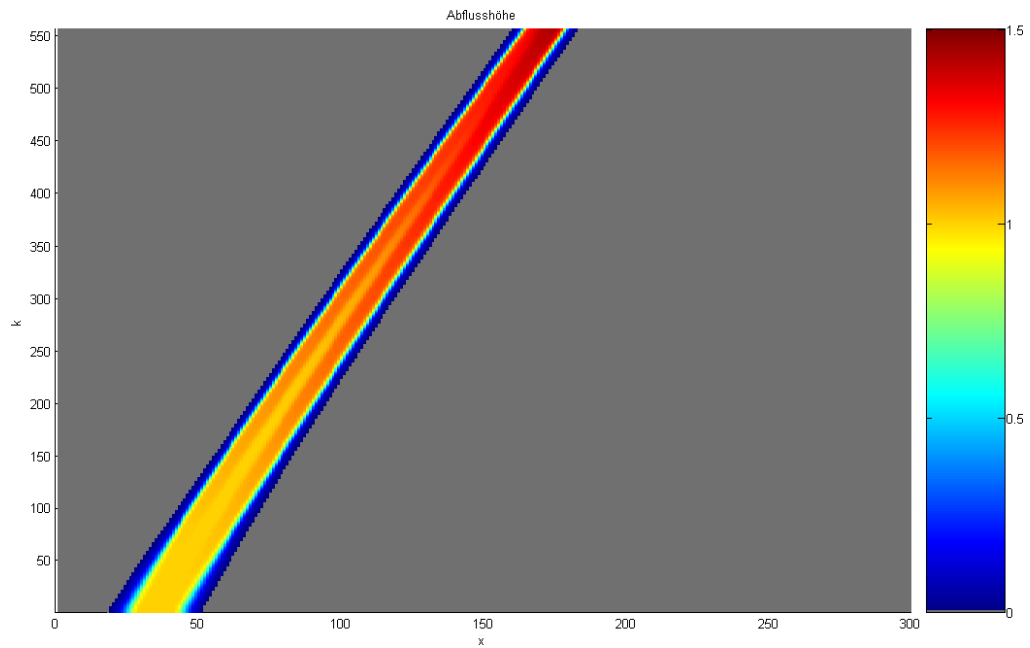
Das NOC Schema behauptet sich in allen Varianten sehr gut. Abbildung 5.6 zeigt das Schema mit Superbee Limiter in Jakobimatrix-Form – es ist fast keine Verformung zu bemerken. Weiters sind die Unterschiede in den Abflussgeschwindigkeiten auffällig. Im MacCormack Verfahren gleitet die Lawine den Hang rund 50 % schneller hinab (und fließt damit in den 8 s erheblich weiter) als im NOC Schema.



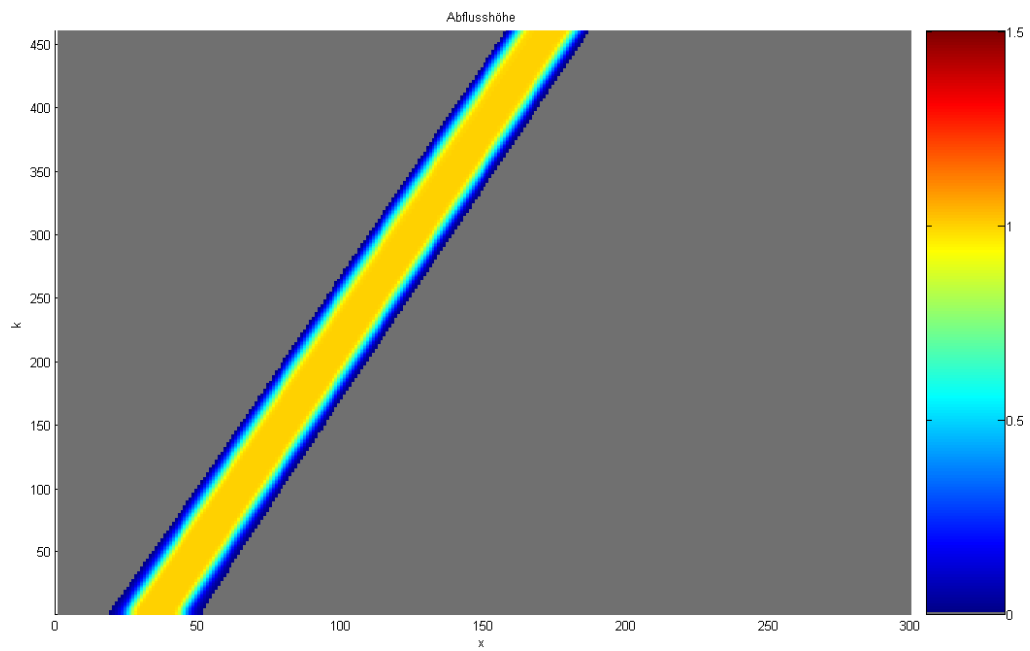
**Abbildung 5.3:** Testreihe 1D.1: Abflusshöhe im MacCormack Verfahren mit Diffusionskoeffizient  $\Psi = 0$  in lokalen Koordinaten, nur Gravitationskraft  $F_g$



**Abbildung 5.4:** Testreihe 1D.1: Abflusshöhe im MacCormack Verfahren mit Diffusionskoeffizient  $\Psi = 0,7$  in lokalen Koordinaten, nur Gravitationskraft  $F_g$



**Abbildung 5.5:** Testreihe 1D.1: Abflusshöhe im MTVDLF Verfahren mit Minmod Limiter in lokalen Koordinaten, nur Gravitationskraft  $F_g$



**Abbildung 5.6:** Testreihe 1D.1: Abflusshöhe im NOC Schema mit Superbee Limiter in Jakobimatrix-Form in lokalen Koordinaten, nur Gravitationskraft  $F_g$



## 5.1.2 Testreihe 1D.2

Der Hang in Testreihe 1D.2 besitzt bis zum Punkt  $x = 80$  m ebenfalls Neigung  $\psi \approx 26,6^\circ$ . Dort erfolgt ein glatter Übergang mit Länge 40 m auf eine ebene Auslaufzone, siehe Abb. 5.7. Da in dieser Testreihe zusätzlich hydrostatischer Druck  $F_{ph}$  und trockene Reibung  $F_d$  in Verwendung treten, fließt die Lawine nicht beliebig weit. Bei einer simulierten Dauer von 22 s reicht es daher  $x_{max}$  auf 180 m zu setzen. Der Gleitreibungsparameter  $\mu$  ist auf 0,3 gestellt.

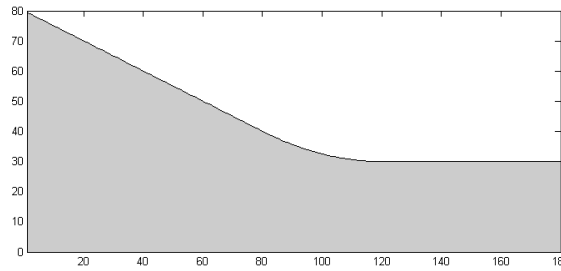


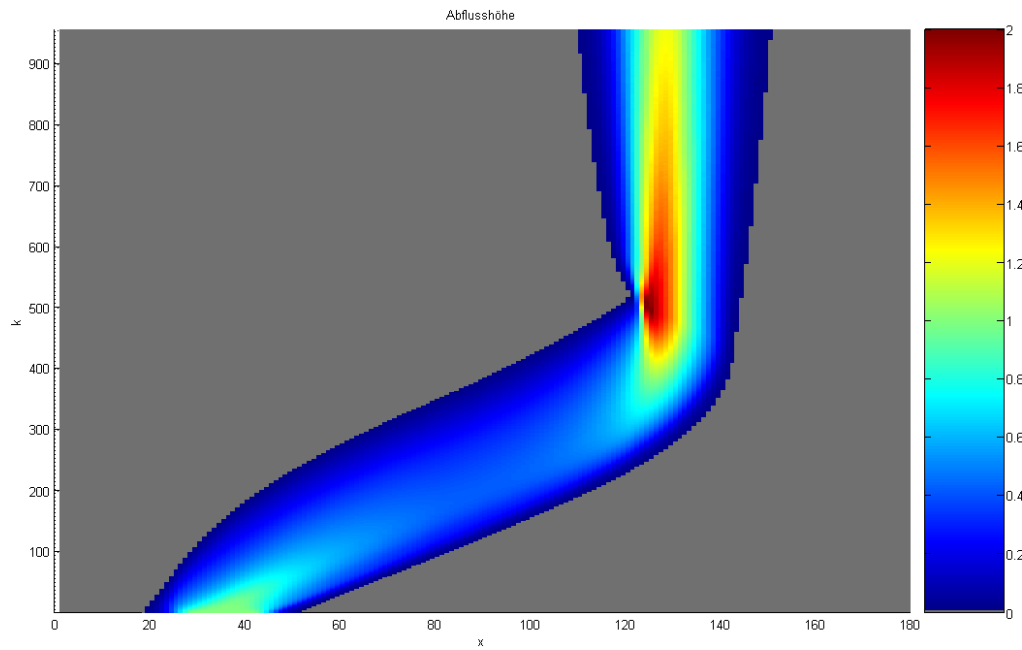
Abbildung 5.7: Topographie in Testreihe 1D.2: auslaufender Hang

Tabelle 5.2 zeigt die Simulationsergebnisse. Das bereits in Testreihe 1D.1 auffällig anti-diffuse MTVDLF Schema mit Superbee Limiter erweist sich als instabil, ebenso das NOC Schema mit Superbee Limiter in Jakobimatrix-freier Form. Der Superbee Limiter ist für Verfahren zur Simulation nicht-trivialer konvektionsdominanter Probleme vermutlich ungeeignet, vgl. auch [WHP04].

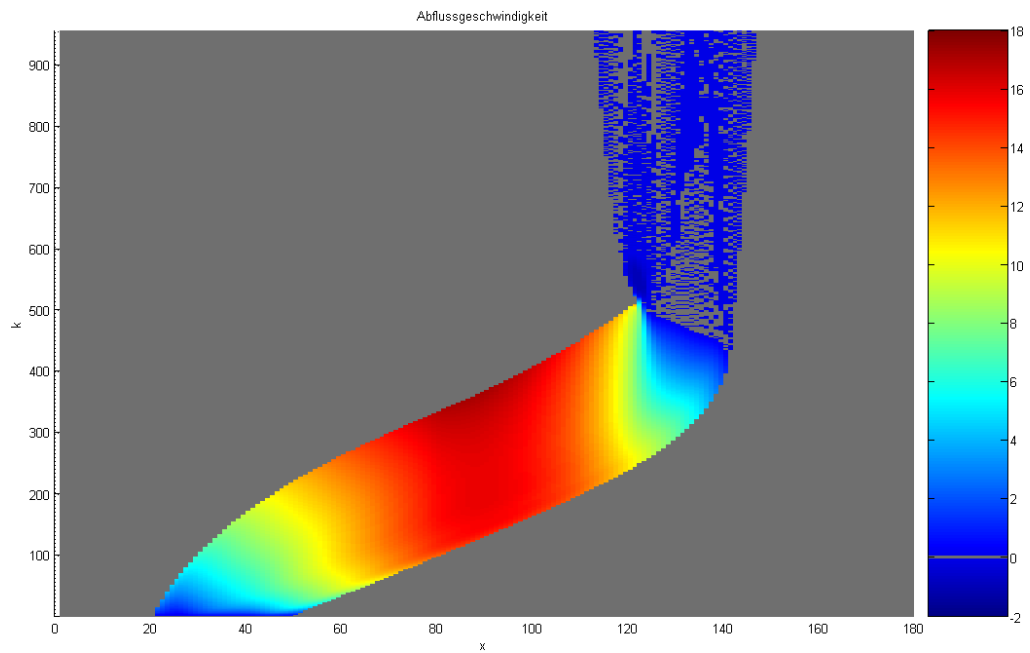
Verfahren	$h_{max}$	$u_{max}$	$k$	$\Delta m$	Abb.
MC 0,70	2,025	17,21	956	+0,65 %	5.8, 5.9
MTVDLF mm	1,752	14,61	739	-0,00 %	5.10, 5.11
MTVDLF sb	instabil				—
NOC JFF mm	1,782	14,26	688	+0,00 %	5.12, 5.13
NOC JFF sb	instabil				—
NOC JAC mm	1,526	14,48	676	+0,00 %	5.14, 5.15
NOC JAC sb	1,652	14,22	646	+0,00 %	—

Tabelle 5.2: Testreihe 1D.2: auslaufender Hang  $\psi \approx 26,6^\circ \rightarrow 0^\circ$ , Kräfte  $F_g$ ,  $F_{ph}$ ,  $F_d$ ,  $t = 22$  s

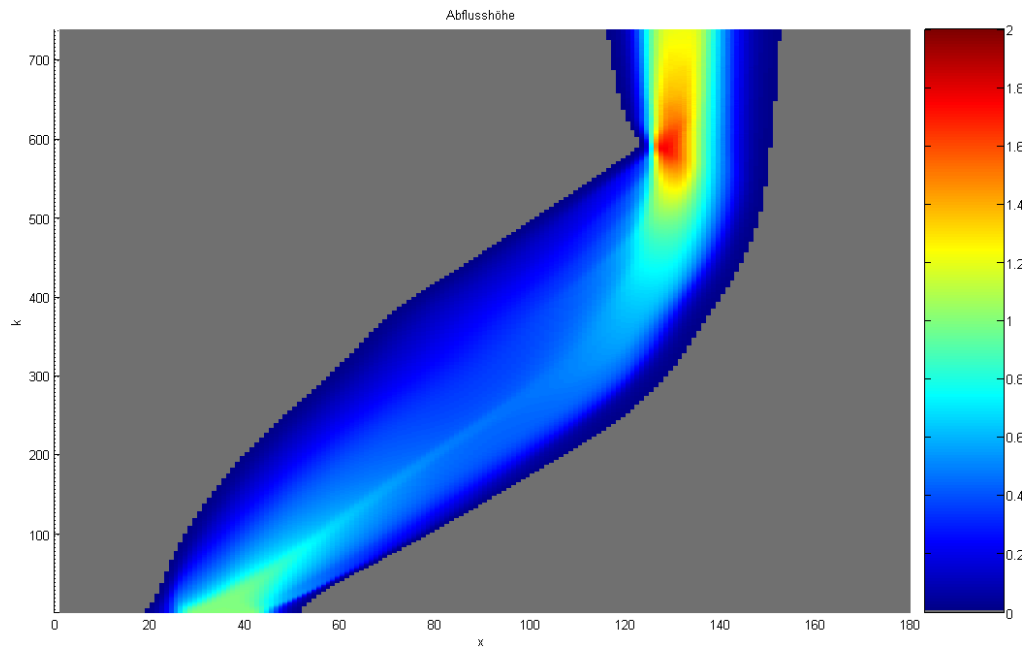
In den Abbildungen zum MTVDLF Schema weisen die Graphiken um  $k = 380$  am hinteren Teil des Fluids eine „Wölbung“ auf, da dort höhere Geschwindigkeiten außerhalb des sichtbaren Bereiches vorherrschen und sich der Zeitschritt verringert. In einer zeit-statt indexbezogenen Darstellung wären diese numerischen Effekte nicht auszumachen.



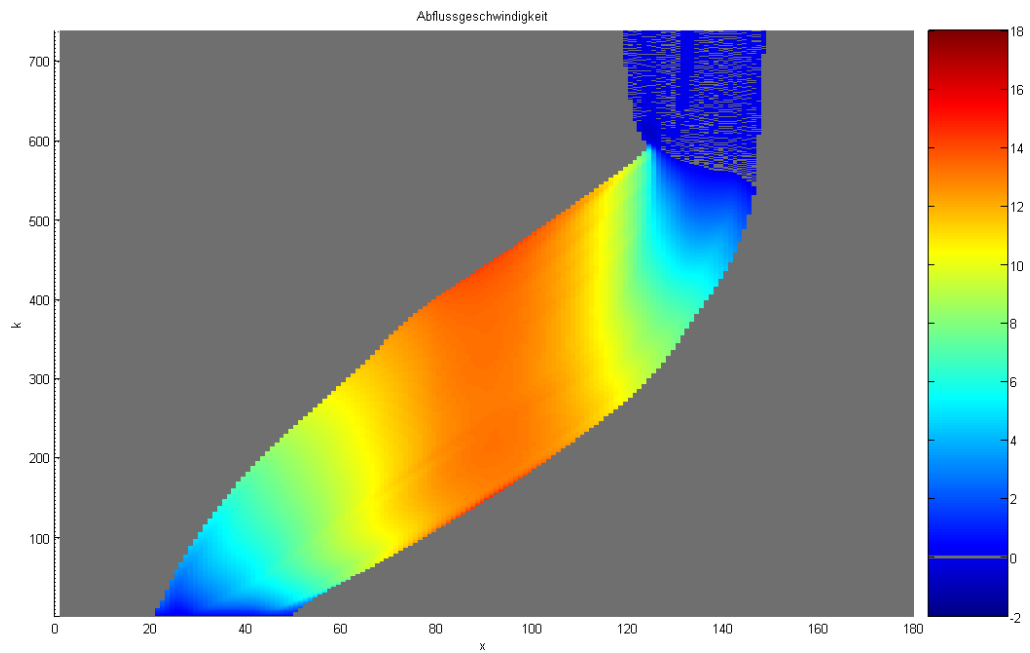
**Abbildung 5.8:** Testreihe 1D.2: Abflusshöhe im MacCormack Verfahren mit Diffusionskoeffizient  $\Psi = 0,7$  in lokalen Koordinaten, Kräfte  $F_g, F_{ph}, F_d, t = 22\text{ s}$



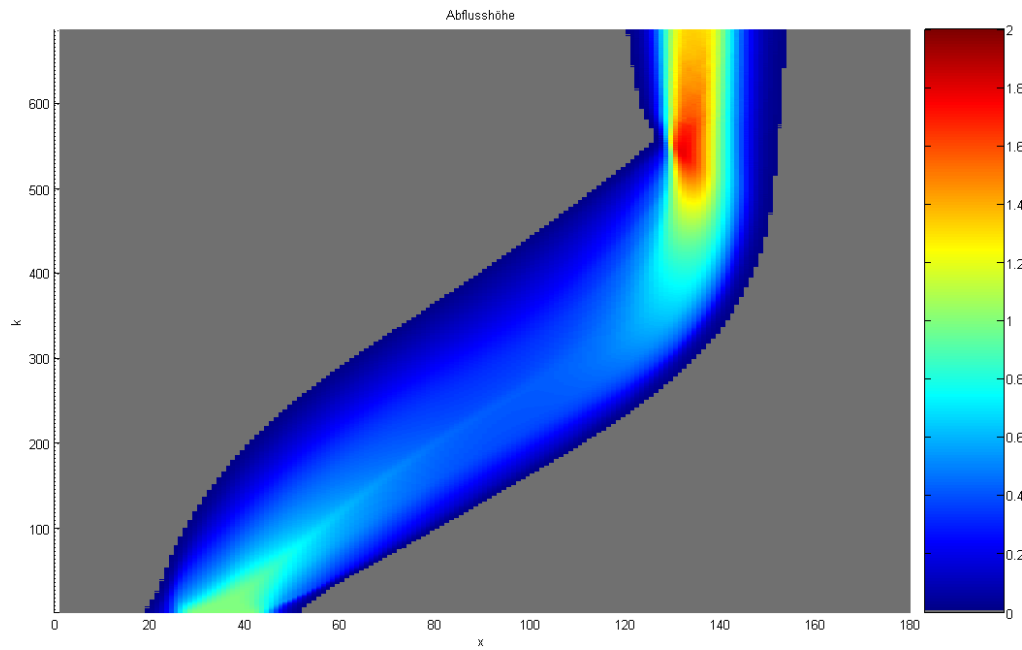
**Abbildung 5.9:** Testreihe 1D.2: Abflussgeschwindigkeit im MacCormack Verfahren mit Diffusionskoeffizient  $\Psi = 0,7$  in lokalen Koordinaten, Kräfte  $F_g, F_{ph}, F_d, t = 22\text{ s}$



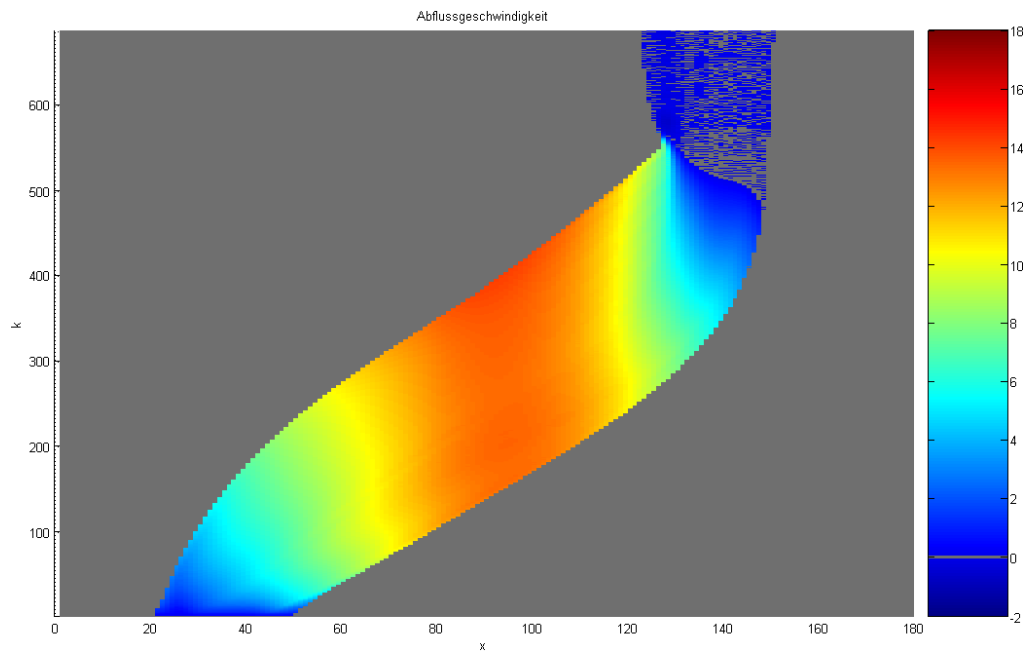
**Abbildung 5.10:** Testreihe 1D.2: Abflusshöhe im MTVDLF Verfahren mit Minmod Limiter in lokalen Koordinaten, Kräfte  $F_g$ ,  $F_{ph}$ ,  $F_d$ ,  $t = 22$  s



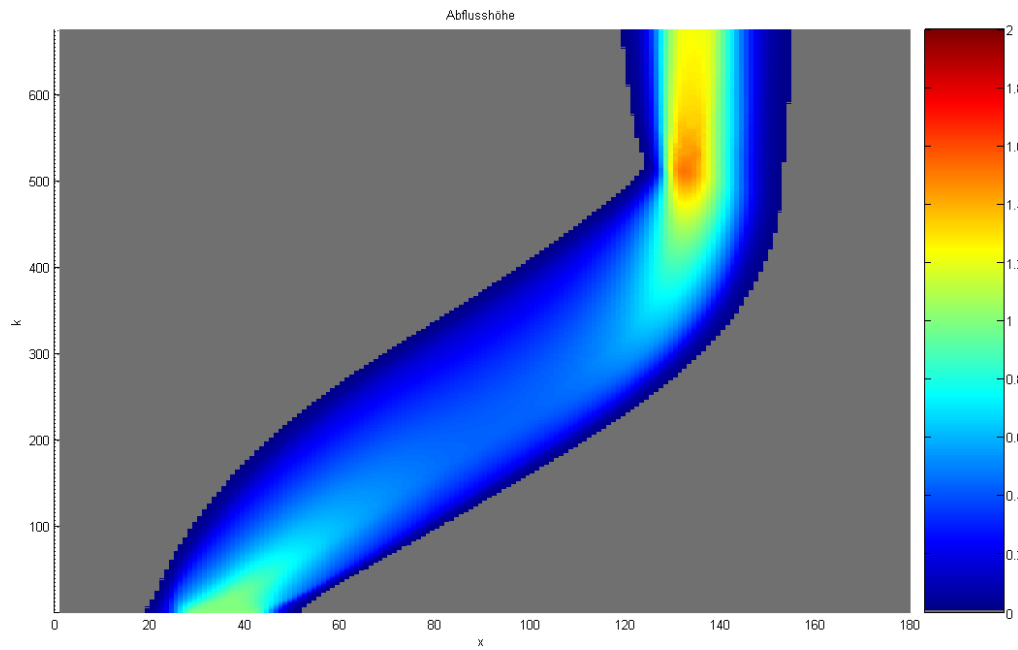
**Abbildung 5.11:** Testreihe 1D.2: Abflussgeschwindigkeit im MTVDLF Verfahren mit Minmod Limiter in lokalen Koordinaten, Kräfte  $F_g$ ,  $F_{ph}$ ,  $F_d$ ,  $t = 22$  s



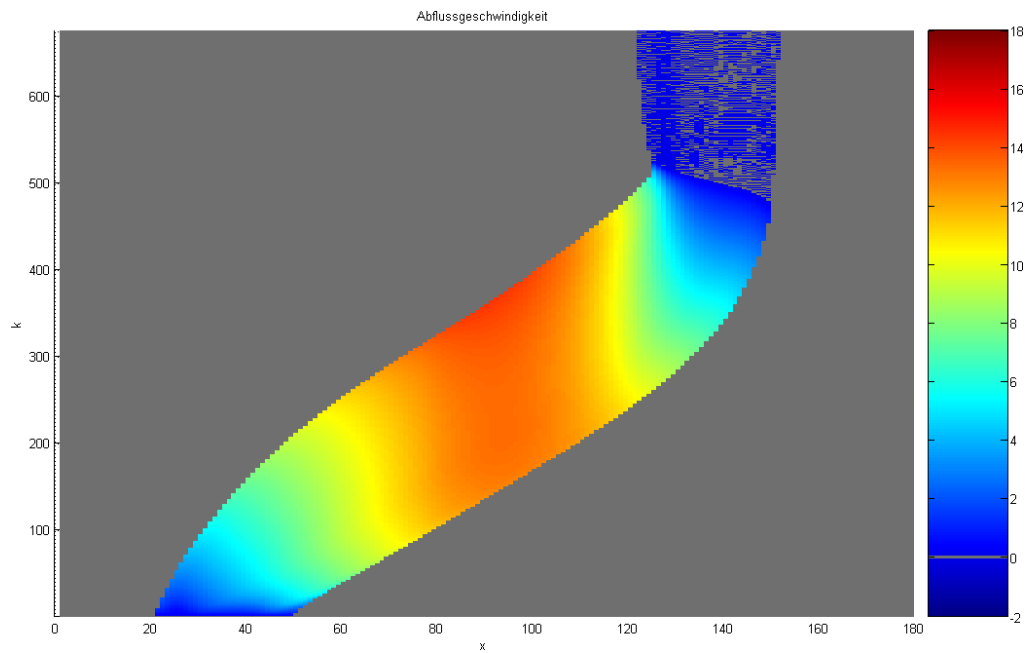
**Abbildung 5.12:** Testreihe 1D.2: Abflusshöhe im NOC Schema mit Minmod Limiter in Jakobimatrix-freier Form in lokalen Koordinaten, Kräfte  $F_g$ ,  $F_{ph}$ ,  $F_d$ ,  $t = 22$  s



**Abbildung 5.13:** Testreihe 1D.2: Abflussgeschwindigkeit im NOC Schema mit Minmod Limiter in Jakobimatrix-freier Form in lokalen Koordinaten, Kräfte  $F_g$ ,  $F_{ph}$ ,  $F_d$ ,  $t = 22$  s



**Abbildung 5.14:** Testreihe 1D.2: Abflusshöhe im NOC Schema mit Minmod Limiter in Jakobimatrix-Form in lokalen Koordinaten, Kräfte  $F_g$ ,  $F_{ph}$ ,  $F_d$ ,  $t = 22$  s



**Abbildung 5.15:** Testreihe 1D.2: Abflussgeschwindigkeit im NOC Schema mit Minmod Limiter in Jakobimatrix-Form in lokalen Koordinaten, Kräfte  $F_g$ ,  $F_{ph}$ ,  $F_d$ ,  $t = 22$  s

In den Abflusshöhen beim MTVDLF Verfahren, siehe Abb. 5.10, und NOC Schema in Jakobimatrix-freier Form, siehe Abb. 5.12, zeigen sich durch die Limiter erzeugte numerische Effekte, die zu leichter Kantenbildung führen. Dort wo keine bzw. weniger Limiter zum Einsatz kommen – im MacCormack Verfahren, siehe Abb. 5.8, und NOC Schema in Jakobimatrix-Form, siehe Abb. 5.14 – sind diese Effekte nicht zu bemerken.

## 5.2 Zweidimensionale Testreihen

Im Zweidimensionalen spannt das Rechengebiet den Bereich  $[1, x_{max}] \times [1, y_{max}]$  auf. Der Lawinenkörper aus Abschnitt 5.1 ist glatt auf zwei Dimensionen erweitert (mit Auf- und Kreuzriss ident zu der in Abb. 5.1 sichtbaren Form), sein Zentrum liegt zu  $t = 0$  s an der Stelle  $\{x_{max}/2, 35\}$ . Die Hänge in diesem Abschnitt fallen in Richtung wachsender y-Koordinaten, entlang der x-Achse sind Geländehöhenwerte konstant.

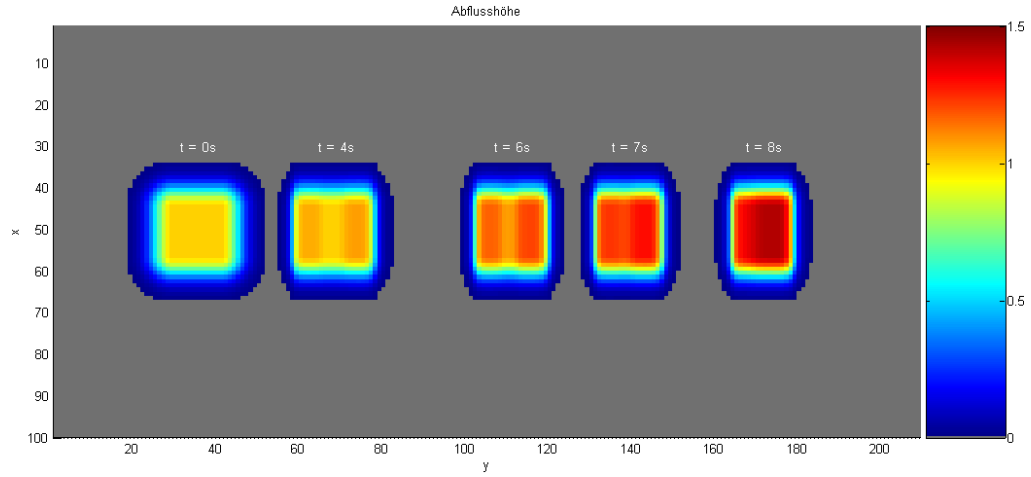
### 5.2.1 Testreihe 2D.1

Die in diesem Abschnitt behandelte Testreihe ist eine natürliche Erweiterung von Testreihe 1D.1 aus Abschnitt 5.1.1. Abbildung 5.2 stellt den Kreuzriss des verwendeten Hanges dar, mit y- statt x-Koordinaten auf der horizontalen Achse. Die x-Ausbreitung des Rechengebietes beträgt 100 m. Es wird 8 s lang simuliert.

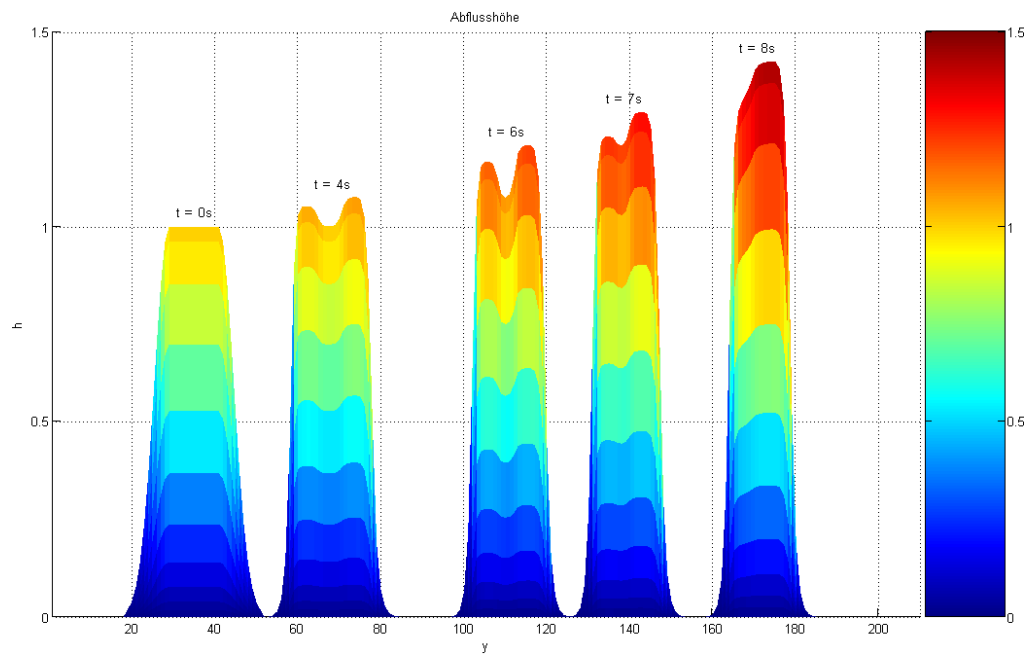
Die Simulationsergebnisse sind in Tabelle 5.3 gezeigt. Das MacCormack Verfahren ist hochgradig instabil, auch bei Anwendung künstlicher Diffusion (ohne Abbildung): Es bilden sich nach kurzer Zeit extreme Höhenschwankungen, die Masse nimmt stark zu. Das MTVDLF Verfahren ist hier nur deshalb möglich anzuwenden, da es keine Geschwindigkeiten in x-Richtung gibt. Wie zu erwarten stimmen die Ergebnisse, siehe Abb. 5.16 und Abb. 5.17, mit dem eindimensionalen Fall überein, vgl. Tabelle 5.1. Im NOC Schema zeigt sich diesmal ein höherer Grad an Diffusion: Abflusshöhenwerte nehmen deutlich ab, es findet Verschmierung in beide Achsenrichtungen statt, siehe Abb. 5.18 und Abb. 5.19.

Verfahren	$h_{max}^8$	$u_{max}^8$	$k$	Abb.
MC 0,00	instabil			–
MC 0,70	instabil			–
MTVDLF mm	1,424	38,67	556	5.16, 5.17
NOC JFF mm	0,936	35,01	502	–
NOC JAC mm	0,940	35,01	490	5.18, 5.19

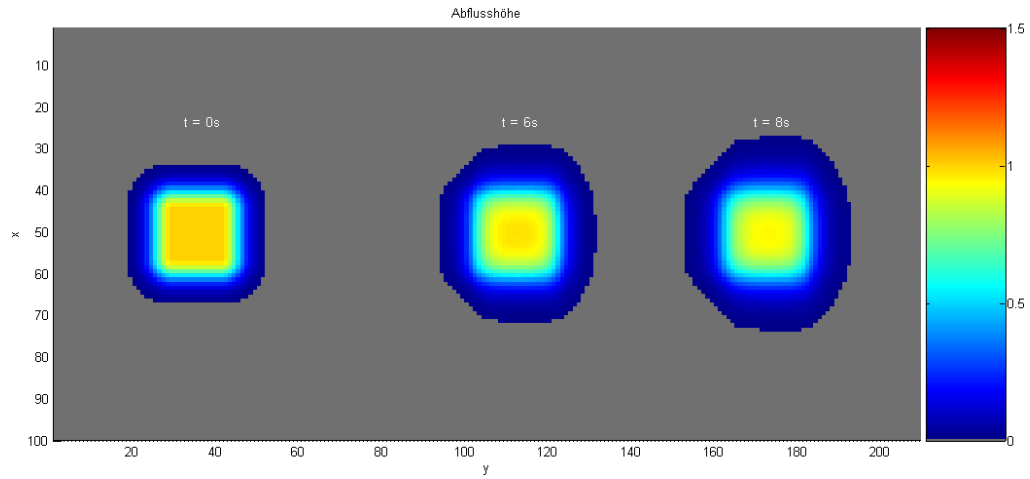
**Tabelle 5.3:** Testreihe 2D.1: konstante Hangneigung  $\psi \approx 26,6^\circ$ , nur Gravitationskraft  $F_g$ ,  $t = 8$  s



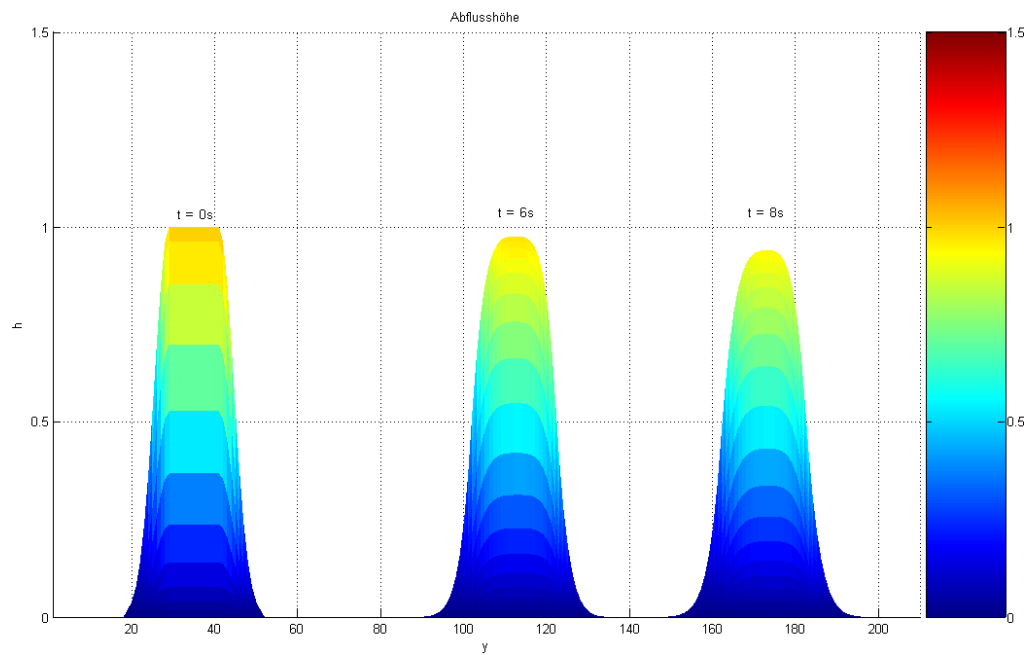
**Abbildung 5.16:** Testreihe 2D.1: Grundriss der Abflusshöhe im MTVDLF Schema mit Minmod Limiter in lokalen Koordinaten, nur Gravitationskraft  $F_g$ , Zeitpunkte:  $t = 0\text{ s}, 4\text{ s}, 6\text{ s}, 7\text{ s}, 8\text{ s}$



**Abbildung 5.17:** Testreihe 2D.1: Seitenansicht des Lawinenkörpers im MTVDLF Schema mit Minmod Limiter in lokalen Koordinaten, nur Gravitationskraft  $F_g$ , Zeitpunkte:  $t = 0\text{ s}, 4\text{ s}, 6\text{ s}, 7\text{ s}, 8\text{ s}$



**Abbildung 5.18:** Testreihe 2D.1: Grundriss der Abflusshöhe im NOC Schema mit Minmod Limiter in Jakobimatrix-Form in lokalen Koordinaten, nur Gravitationskraft  $F_g$ , Zeitpunkte:  $t = 0\text{ s}, 4\text{ s}, 6\text{ s}, 8\text{ s}$



**Abbildung 5.19:** Testreihe 2D.1: Seitenansicht des Lawinenkörpers im NOC Schema mit Minmod Limiter in Jakobimatrix-Form in lokalen Koordinaten, nur Gravitationskraft  $F_g$ , Zeitpunkte:  $t = 0\text{ s}, 6\text{ s}, 8\text{ s}$



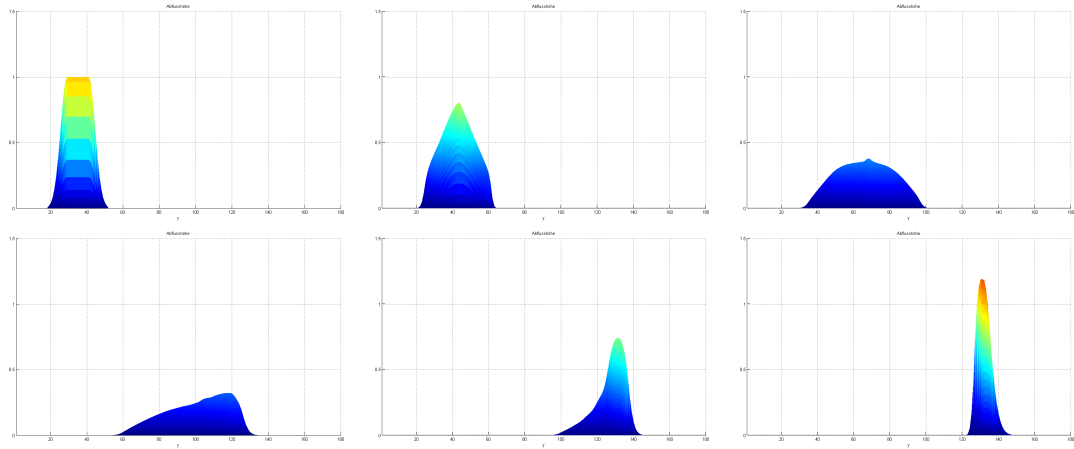
### 5.2.2 Testreihe 2D.2

Die Testreihe in diesem Abschnitt ist eine zweidimensionale Erweiterung von Testreihe 1D.2 aus Abschnitt 5.1.2. Die Hangform ist ident mit der in Abb. 5.7, entlang der x-Richtung sind Höhenwerte konstant. Getestet wird das NOC Schema mit Minmod Limiter, in den Varianten JFF und JAC. Eingesetzte Kräfte sind  $F_g$ ,  $F_d$ , und  $F_{ph}$ , die Simulationsdauer beträgt 22 s. Es erfolgt in dieser Testreihe erstmals eine laterale Ausbreitung des Lawinenkörpers aufgrund des hydrostatischen Drucks. Die Graphiken aus Abb. 5.21 veranschaulichen Topographie und Abflusshöhen in der JAC Variante in einer perspektivischen Darstellung, Abb. 5.20 stellt die dazugehörigen Seitenansichten in lokalen Koordinaten dar. Die Farbskalen wurden aus Platzgründen weggelassen; sie sind ident zu der Skala aus Abb. 5.18.

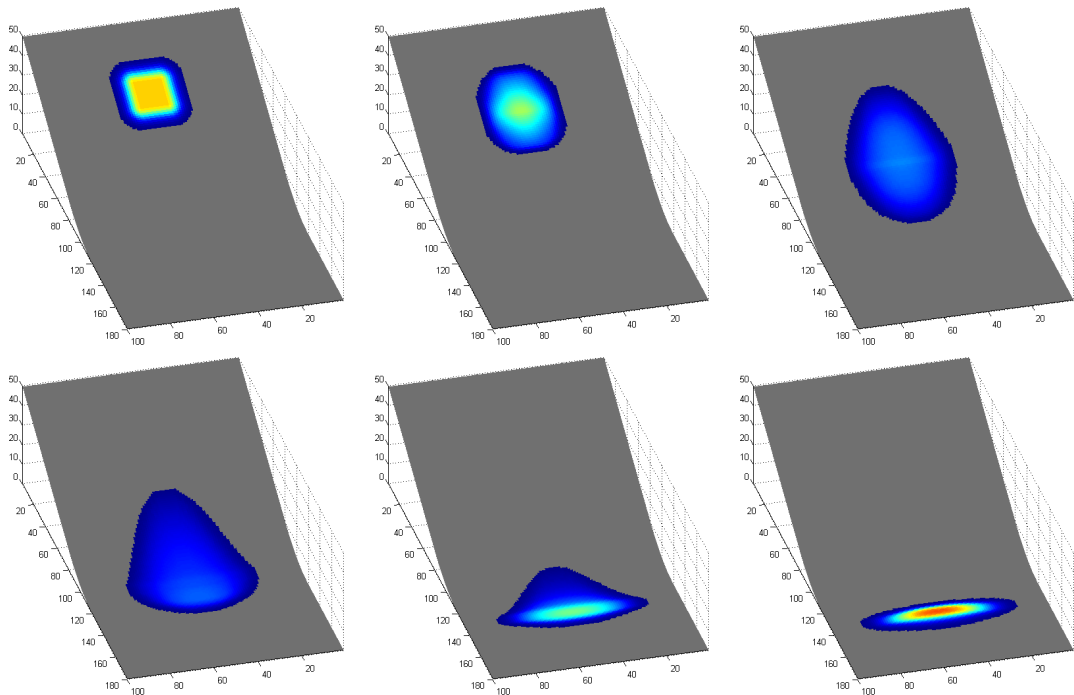
Aus den Ergebnissen in Tabelle 5.4 lässt sich erkennen dass Maximalgeschwindigkeiten sehr nahe zu den eindimensionalen Resultaten liegen, vgl. Tabelle 5.2. Die Maximalhöhen sind niedriger, was sich mit der seitlichen Ausbreitung der Masse erklären lässt. Es fällt weiters auf dass der Unterschied zwischen den Varianten JAC und JFF im Gegensatz zum Eindimensionalen verschwindend gering ist.

Verfahren	$h_{max}$	$u_{max}$	$k$	Abb.
NOC JFF mm	1,275	14,04	700	–
NOC JAC mm	1,280	14,06	704	5.20, 5.21

**Tabelle 5.4:** Testreihe 2D.2: auslaufender Hang  $\psi \approx 26,6^\circ \rightarrow 0^\circ$ , Kräfte  $F_g$ ,  $F_{ph}$ ,  $F_d$ ,  $t = 22$  s



**Abbildung 5.20:** Testreihe 2D.2: Seitenansicht des Lawinenkörpers im NOC Schema mit Minmod Limiter in Jakobimatrix-Form in lokalen Koordinaten, Kräfte  $F_g$ ,  $F_{ph}$ ,  $F_d$ , Zeitpunkte:  $t = 0\text{ s}, 3\text{ s}, 6\text{ s}, 9\text{ s}, 12\text{ s}, 15\text{ s}$



**Abbildung 5.21:** Testreihe 2D.2: Topographie mit Abflusshöhe im NOC Schema mit Minmod Limiter in Jakobimatrix-Form, Kräfte  $F_g$ ,  $F_{ph}$ ,  $F_d$ , Zeitpunkte:  $t = 0\text{ s}, 3\text{ s}, 6\text{ s}, 9\text{ s}, 12\text{ s}, 15\text{ s}$

## 5.2.3 Testreihe 2D.3

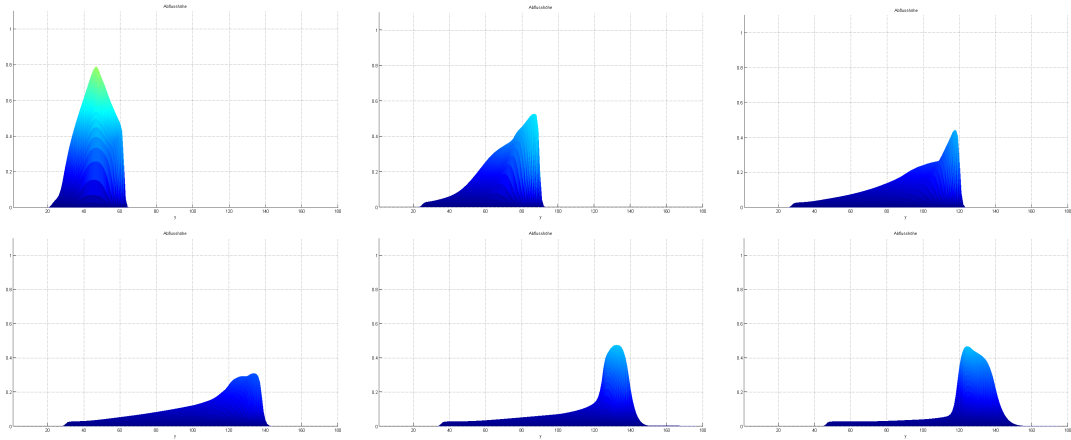
Das NOC Schema mit Minmod Limiter in Jakobimatrix-Form wird in dieser Testreihe fixiert und die turbulente Reibungskraft  $F_e$  zu den im vorigen Abschnitt verwendeten Kräften dazugenommen. Untersucht wird eine Variation des Parameters  $h_e$ , der den Höhenwert angibt über dem die turbulente Reibungskomponente in Kraft tritt, vgl. Abschnitt 2.6. Der Hang startet 20 m weiter links, bzw. erfolgt der Übergang auf die Auslaufzone erst 20 m später als in auslaufenden Hängen früherer Testreihen, im  $y$ -Intervall  $[100, 140]$ . Weiters wird der Trockenreibungsparameter  $\mu$  auf 0,2 gesetzt. Diese Maßnahmen werden getroffen damit nicht zu niedrige Geschwindigkeiten auftreten und die Auswirkungen der turbulenten Reibung besser festgestellt werden können. Simuliert wird 30 s lang, die Ergebnisse sind in Tabelle 5.5 und den darauffolgenden Abbildungen zu sehen.

$h_e$	$\Delta y_{min}^{30}$	$u_{max}$	$k$	Abb.
0,0125	7	10,83	1476	–
0,025	26	10,83	1470	5.22, 5.23
0,05	60	10,84	1416	–
0,1	95	11,17	1270	5.24, 5.25

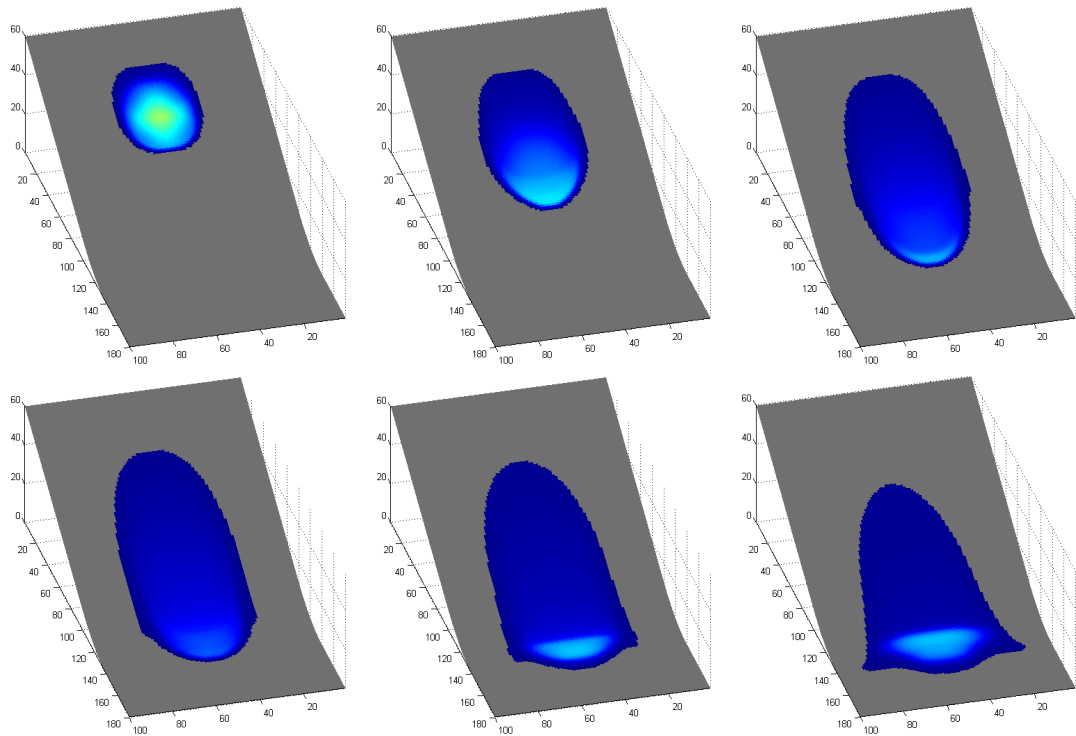
**Tabelle 5.5:** Testreihe 2D.3: auslaufender Hang  $\psi \approx 26,6^\circ \rightarrow 0^\circ$ , Kräfte  $F_g, F_{ph}, F_d, F_e, t = 30$  s

Bei einer Rauigkeitslänge von  $k_s = 0,1$  m beträgt laut Gültigkeitsbereich (2.28) der minimal zulässige Wert für  $h_e$ :  $h_e^{min} = 0,1/12 \text{ m} = 0,008\bar{3} \text{ m}$ . ELBA+ verwendet  $h_e = 0,1$  m, weil unter  $h_c = h_e = 0,1$  m Schneeablagerung erfolgt. Da das neue Berechnungsschema direkt Differentialgleichungen approximiert und damit „kontinuierlicher“ ist, ist nicht klar wie groß diese Konstanten optimalerweise zu sein haben. Die Spalte  $\Delta y_{min}^{30}$  gibt an wie weit der minimale (über  $10^{-3}$  m liegende)  $y$ -Wert, d. h. das Ende des Lawinenkörpers, nach 30 s in  $y$ -Richtung gewandert ist. Der Zusammenhang mit  $h_e$  wird bei Betrachtung der Abbildungen 5.22–5.25 klar: Je kleiner  $h_e$ , desto länger und langsamer der Lawinenschweif, da die turbulente Reibung an mehr Stellen in Wirkung tritt. Bei  $h_e = 0,1$  m bilden sich außerdem zwei Arme mit relativ geringen Abflusshöhen, die den zentralen Hauptteil am Rand überholen.

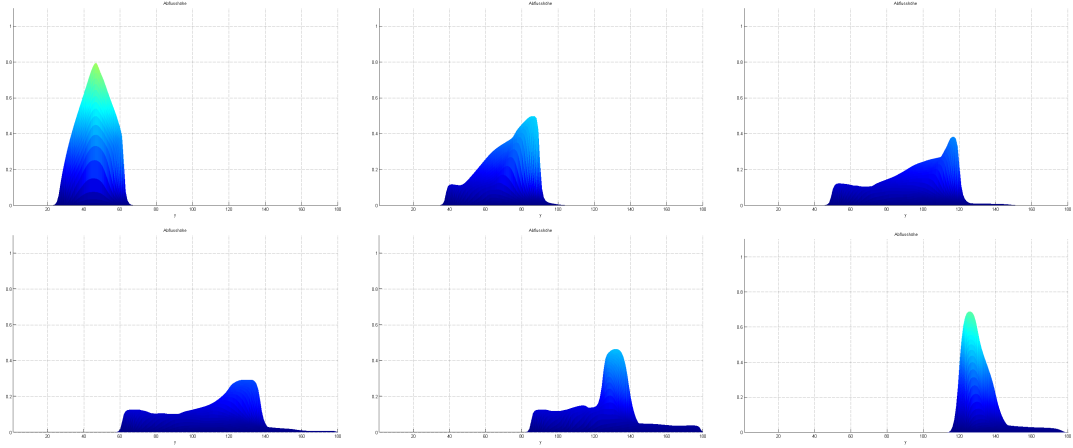
Abbildung 5.26 zeigt die Ablagerungen von Testläufen mit  $h_e = 0,05$  m,  $h_e = 0,075$  m und  $h_e = 0,1$  m im Vergleich zur Anfangsverteilung, eine diskretere Farbskala mit 0,05 m-Schritten benutzend. Da kein Abbruchkriterium existiert, sei unter Ablagerung die Verteilung der Abflusshöhe zu dem Zeitpunkt zu verstehen, an dem keine konvektiven Kräfte mehr auftreten und der Körper allein aufgrund des hydrostatischen Drucks langsam zerfließt.



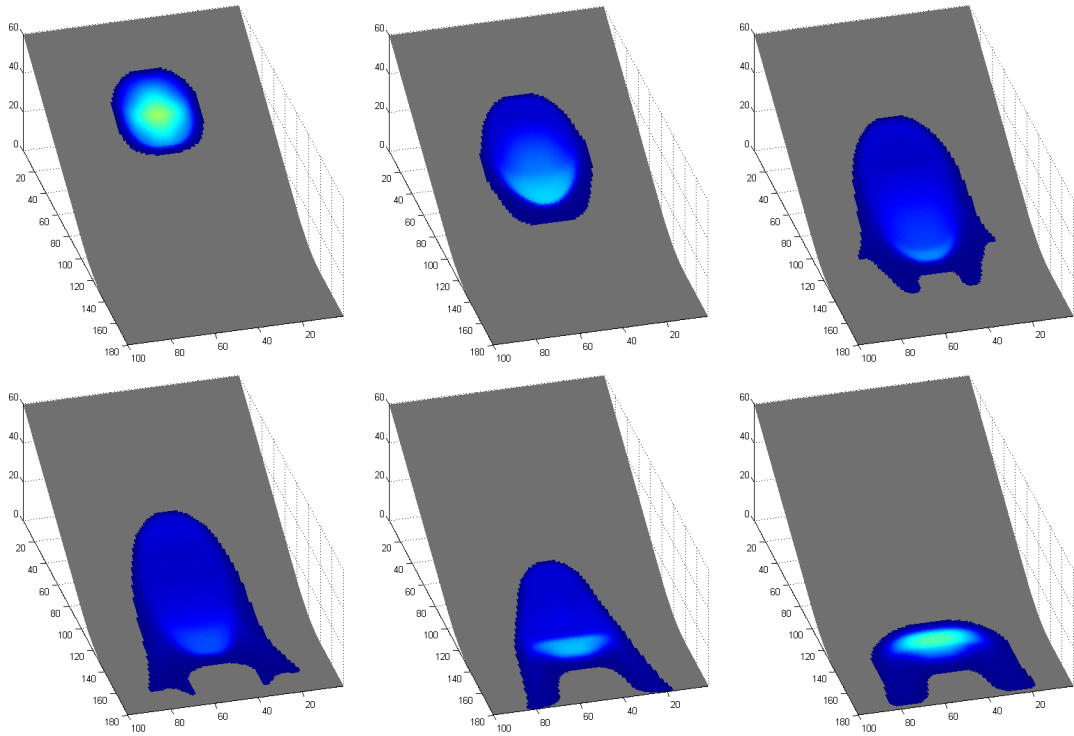
**Abbildung 5.22:** Testreihe 2D.3: Seitenansicht des Lawinenkörpers im NOC Schema mit Min-mod Limiter in Jakobimatrix-Form mit  $h_e = 0,025$  m in lokalen Koordinaten, Kräfte  $F_g$ ,  $F_{ph}$ ,  $F_d$ ,  $F_e$ , Zeitpunkte:  $t = 3$  s, 6 s, 9 s, 12 s, 18 s, 30 s



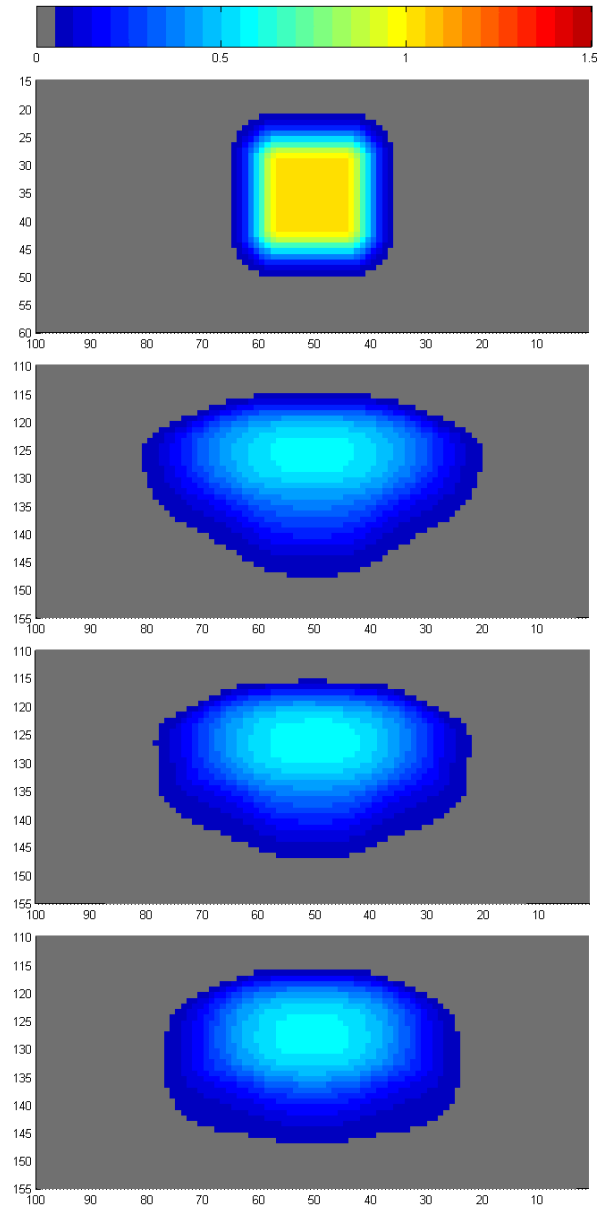
**Abbildung 5.23:** Testreihe 2D.3: Topographie mit Abflusshöhe im NOC Schema mit Min-mod Limiter in Jakobimatrix-Form mit  $h_e = 0,025$  m, Kräfte  $F_g$ ,  $F_{ph}$ ,  $F_d$ ,  $F_e$ , Zeitpunkte:  $t = 3$  s, 6 s, 9 s, 12 s, 18 s, 30 s



**Abbildung 5.24:** Testreihe 2D.3: Seitenansicht des Lawinenkörpers im NOC Schema mit Min-mod Limiter in Jakobimatrix-Form mit  $h_e = 0,1$  m in lokalen Koordinaten, Kräfte  $F_g$ ,  $F_{ph}$ ,  $F_d$ ,  $F_e$ , Zeitpunkte:  $t = 3$  s,  $6$  s,  $9$  s,  $12$  s,  $18$  s,  $30$  s



**Abbildung 5.25:** Testreihe 2D.3: Topographie mit Abflusshöhe im NOC Schema mit Min-mod Limiter in Jakobimatrix-Form mit  $h_e = 0,1$  m, Kräfte  $F_g$ ,  $F_{ph}$ ,  $F_d$ ,  $F_e$ , Zeitpunkte:  $t = 3$  s,  $6$  s,  $9$  s,  $12$  s,  $18$  s,  $30$  s



**Abbildung 5.26:** Testreihe 2D.3: Farbskala (1. Graphik von oben), Anfangsverteilung (2. Graphik von oben), Ablagerung bei  $h_e = 0,05$  m (3. Graphik von oben), Ablagerung bei  $h_e = 0,075$  m (4. Graphik von oben), Ablagerung bei  $h_e = 0,1$  m (5. Graphik von oben); jeweils Abflusshöhe im NOC Schema mit Minmod Limiter in Jakobimatrix-Form, Kräfte  $F_g$ ,  $F_{ph}$ ,  $F_d$ ,  $F_e$

## Kapitel 6

# Abschließende Bemerkungen

In diesem Kapitel findet eine Zusammenfassung der Arbeit und seiner Ergebnisse statt. Es wird außerdem ein Ausblick auf weitere mögliche Betätigungsfelder gegeben.

### 6.1 Zusammenfassung

Es wurde in dieser Diplomarbeit das Berechnungsschema und der mathematische Hintergrund des ELBA-Lawinensimulationsmodells so detailliert wie noch nie zuvor unter die Lupe genommen. Nach einer Auflistung aller in ELBA getroffenen Annahmen und einer Herleitung der Modellkräfte wurde ein System von Differentialgleichungen basierend auf herkömmlichen strömungsmechanischen Ansätzen entwickelt. In Kapitel 3 folgte eine genaue Offenlegung des Rechenschemas des auf den ELBA-Modellkräften aufbauenden Lawinensimulators ELBA+. Jenes Kapitel wurde abgeschlossen mit der Erkenntnis, dass der einzigartige Algorithmus von ELBA+ mit herkömmlichen Methoden nicht vergleichbar, daher schwierig analysierbar ist und die Herleitung eines neuen Rechenschemas sinnvoll erscheint.

Kapitel 4 bot eine Diskussion von klassischen expliziten Finite Differenzen Methoden, mitsamt den Problemen mit denen man auf diesem Gebiet zu kämpfen hat: Oszillation, Diffusion. In Hinblick auf das hergeleitete Differentialgleichungssystem, welches ein konvektionsdominantes Phänomen beschreibt, wurden unter Berufung auf jüngste Publikationen aus dem Gebiet der Fluid- und Lawinendynamik hochauflösende Methoden vorgestellt: TVD (Total Variation Diminishing) Lax-Friedrichs Verfahren, sowie das NOC (Non-Oscillatory Central) Schema. Während es für die Erweiterung von TVD Verfahren in zwei Dimensionen in der Theorie Schwierigkeiten gibt, hatte dies beim NOC Schema erfolgen können: Eingesetzt rund um das Savage-Hutter-Modell hatte dieses Verfahren auf einfachen gekrümmten Geometrien bereits ansehnliche Ergebnisse erzielen können.

Ausgerüstet mit diesem Know-How wurden numerische Experimente in neu erstellten MATLAB-Testimplementierungen des Modells durchgeführt und die Ergebnisse in Kapitel 5 präsentiert. Sie werden im nächsten Abschnitt zusammengefasst.

## 6.2 Ergebnisse

Zunächst in eindimensionalen Testreihen wurden das MacCormack Prädiktor-Korrektor und ein modifiziertes TVD Lax-Friedrichs Verfahren verglichen, sowie das NOC Schema in vier Varianten. In der ersten Testreihe mit konstant geneigtem Hang und Einbeziehung von nur Gravitationskraft wurde das Ausmaß der numerischen Diffusion bzw. Anti-Diffusion der Verfahren festgestellt. Das MacCormack Verfahren neigte bei niedrigen Diffusionskoeffizienten zu künstlicher Wellenbildung und einer Zunahme der Masse. Diese Effekte konnten durch höhere Koeffizienten vermindert werden, allerdings kam es so zu einer relativ großen Verschmierung der Lösung. Das MTVDLF Verfahren mit Minmod Limiter neigte zu nicht unerheblicher Anti-Diffusion, zeigte aber sonst kein nachteiliges Verhalten. Mit dem Superbee Limiter, dem anti-diffusivsten Limiter, war das Ergebnis unbrauchbar. Alle Varianten des NOC Schemas lieferten schließlich hervorragende Resultate mit Fehlern im Promillebereich.

Die zweite eindimensionale Testreihe auf einem auslaufenden Hang und den zusätzlichen Modellkräften des hydrostatischen Drucks sowie der trockenen Reibung bestätigte die Ungeeignetheit des Superbee Limiters auch im NOC Schema. Das MTVDLF Verfahren lieferte ähnliche Resultate wie das NOC Schema mit Minmod Limiter und Jakobimatrixfreier Form, mit einer leichten Bildung von Kanten. In der Form mit Verwendung der Jakobimatriceinträge kam es zu einem glatten Ergebnis, aber mit einer niedrigeren Abflusshöhe am Punkt der höchsten Kompression. Auffällig waren in beiden Testreihen erhöhte Abflussgeschwindigkeiten im MacCormack Verfahren.

Die zweidimensionalen Tests erweiterten ihre eindimensionalen Gegenstücke durch laterale Ausweitung der Topographien auf konstanter Höhe. Das MacCormack Verfahren entpuppte sich mit extremen Oszillationen als hochgradig instabil; das NOC Schema verhielt sich weitaus diffuser als in einer Dimension, behauptete sich aber noch immer als die beste vorhandene Methode. Überprüft wurde weiters die Auswirkung des Parameters  $h_e$ , der die Abflusshöhe angibt über dem die turbulente Reibungskraft zum Einsatz kommt. Je kleiner  $h_e$ , desto länger und langsamer wird der Lawinenschweif.

Wie zu sehen bedarf es weiterer Untersuchungen und Modifikationen, bevor Verfahren die hier getestet wurden auf Lawinensimulationen angewendet werden können. Der Vergleich unterschiedlicher Methoden brachte Einblick in deren numerische Stärken und Schwächen bei der Simulation konvektionsdominanter Flüsse, und ließ das NOC Schema als aussichtsreichsten Kandidaten deutlich werden.



## 6.3 Ausblick

Die Ergebnisse dieser Arbeit sind nur der erste Schritt zu einer ELBA-Neuimplementierung. Durch Herleitung eines auf den ELBA-Modellkräften aufbauenden Differentialgleichungssystems wurde die Grundlage dafür geschaffen, offen bleibt allerdings ein wichtiges, vermutlich nicht leicht zu lösendes Problem, auf dessen Rücksichtnahme im Rahmen der Diplomarbeit verzichtet werden musste: Eine differentialgeometrisch korrekte Behandlung des lokalen Koordinatensystems. Wie in Abschnitt 2.3.2 erwähnt, sind neue Ansätze im Entstehen, die immer freier wählbare Topographien zulassen. Ob es in naher Zukunft möglich sein wird ein geometrisch fehlerfreies Rechenschema für beliebige Topographien und ohne sonstige Einschränkungen zu entwickeln ist allerdings ungewiss.

Weitere offene Punkte sind die vielen Vereinfachungen gegenüber den Annahmen und Voraussetzungen des ELBA-Modells, die im Zuge der MATLAB-Implementierung für die Testreihen in Kapitel 5 vorgenommen wurden. Es fällt die in der Simulation kleinere Maschenweite von 1 m auf, die nicht kompatibel mit derzeitigen GIS-Standards von mindestens 5 m ist. Will man nicht mit einem „sehr diskreten“ und auf grobe Auflösungen maßgeschneittenes Rechenschema wie dem vorhandenen Algorithmus von ELBA+ hantieren, scheint eine Interpolierung der GIS-Daten auf kleinere Maschenweiten für die Simulation ratsam zu sein.

Die Umsetzung der zusätzlichen ELBA-Funktionen Snow Entrainment und Schneeablagerung steht ebenfalls offen. Kriterien für den Abbruch einer Simulation sind nicht geklärt, würden sich aber z. B. durch Überprüfung der Maximalgeschwindigkeit anbieten. Außerdem ist der unstetige Übergang der turbulenten Reibungskraft  $F_e$  bei der Grenze  $h_e$  verbesserungswürdig. Das Anwachsen von  $F_e$  bei fallender Höhe (bei festgehaltener Geschwindigkeit) und das plötzliche Aussetzen unter  $h_e$  sollte nur als Übergangslösung auf dem Weg zu einer befriedigenden Methode angesehen werden. Eine Einführung von Reibungsphasen sollte kein Problem darstellen. Denkbar ist ebenfalls eine – wenn auch nicht so enge – Bounding Box zur Senkung der im Vergleich zu ELBA+ langen Simulationsdauer.

Erwähnt seien zur möglichen Verfeinerung genauere Zellrekonstruktionsverfahren mit Polynomen, die in [WHP04] eingesetzt bzw. angedeutet wurden, in der Diplomarbeit aber nicht mehr behandelt werden konnten: *ENO* (*Essentially Non-Oscillatory*) und *WENO* (*Weighted ENO*) Schemata.

# Literaturverzeichnis

- [BM98] BURROUGH, Peter A. ; McDONNELL, Rachael A.: *Principles of Geographical Information Systems*. New York : Oxford Press University Press Inc., 1998
- [Bol96] BOLLRICH, Gerhard: *Technische Hydromechanik*. Band 1. Grundlagen - 4., durchgesehene Auflage. Berlin, München : Verlag für Bauwesen, 1996
- [Chi06] CHIOU, Min-Ching: *Modelling Dry Granular Avalanches past Different Obstructions*, Technische Universität Darmstadt, Diss., 2006
- [CLS89] COCKBURN, Bernardo ; LIN, San-Yih ; SHU, Chi-Wang: TVB Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Conservation Laws III: One-Dimensional Systems. In: *Journal of Computational Physics* 84 (1989), S. 90–113
- [CMM88] CHOW, Ven T. ; MAIDMENT, David R. ; MAYS, Larry W.: *Applied Hydrology*. Singapore : McGraw-Hill, Inc., 1988
- [DH03] DONÉA, Jean ; HUERTA, Antonio: *Finite Element Methods for Flow Problems*. USA : John Wiley & Sons Inc., 2003
- [Eid05] EIDGENÖSSISCHES INSTITUT FÜR SCHNEE- UND LAWINENFORSCHUNG SLF (Hrsg.): *AVAL-1D Benutzerhandbuch*. Davos: Eidgenössisches Institut für Schnee- und Lawinenforschung SLF, April 2005
- [GWH99] GRAY, J. M. N. T. ; WIELAND, M. ; HUTTER, K.: Gravity-driven free surface flow of granular avalanches over complex basal topography. In: *Proc. R. Soc. Lond. A* 455 (1999), S. 1841–1874
- [Har83] HARTEN, Ami: High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. In: *Journal of Computational Physics* 49 (1983), S. 357–393
- [HC93] HOFFMANN, Klaus A. ; CHIANG, Steve T.: *Computational Fluid Dynamics for Engineers*. Volume I. Wichita, Kansas, 67208-1078, USA : Engineering Education System, 1993

- [Her02] HERWIG, Heinz: *Strömungsmechanik: Eine Einführung in die Physik und die mathematische Modellierung von Strömungen*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2002
- [Hir88] HIRSCH, Charles: *Numerical Computation of Internal and External Flows*. Vol. 1: Fundamentals of Numerical Discretization. Great Britain : John Wiley & Sons Ltd., 1988
- [Hir90] HIRSCH, Charles: *Numerical Computation of Internal and External Flows*. Vol. 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows. England : John Wiley & Sons Ltd., 1990
- [HK03] HUTTER, Kolumban ; KIRCHNER, Nina: *Dynamic Response of Granular and Porous Materials under Large and Catastrophic Deformations*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2003
- [HSG95] HAUGER, Werner ; SCHNELL, Walter ; GROSS, Dietmar: *Technische Mechanik*. Bd. 3. Kinetik. - 5. Aufl. Berlin Heidelberg : Springer Verlag, 1995
- [Kre68] KREYSZIG, Erwin: *Mathematical Expositions*. Bd. 16: *Introduction to Differential Geometry and Riemannian Geometry*. Canada : University of Toronto Press, 1968
- [LeV92] LEVEQUE, Randall J.: *Numerical Methods for Conservation Laws*. Basel : Birkhäuser Verlag, 1992
- [MM94] MORTON, K.W. ; MAYERS, D.F.: *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Cambridge, UK : Cambridge University Press, 1994
- [NiT05] NiT TECHNISCHES BÜRO GMBH (Hrsg.): *Handbuch ELBA+*. Pressbaum: NiT Technisches Büro GmbH, 24. Mai 2005
- [NT90] NESSYAHU, H. ; TADMOR, E.: Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws. In: *Journal of Computational Physics* 87 (1990), S. 408–463
- [PH07] PUDASAINI, Shiva P. ; HUTTER, Kolumban: *Avalanche Dynamics*. Dynamics of Rapid Flows of Dense Granular Avalanches. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2007
- [TO96] TÓTH, Gábor ; ODSTRČIL, Dušan: Comparison of Some Flux Corrected Transport and Total Variation Diminishing Numerical Schemes for Hydrodynamic and Magnetohydrodynamic Problems. In: *Journal of Computational Physics* 128 (1996), S. 82–100
- [Tru83] TRUCKENBRODT, Erich: *Lehrbuch der angewandten Fluidmechanik*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 1983

- 
- [Voe55] VOELLMY, A.: Über die Zerstörungskraft von Lawinen. In: *Schweizerische Bauzeitung* Sonderdruck aus dem 73. Jahrgang, Hefte 12, 15, 17, 19, und 37 (1955)
- [Wen92] WENDT, John F.: *Computational Fluid Dynamics: an introduction*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 1992
- [WG00] WOLF-GLADROW, Dieter A.: *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2000
- [WH01] WANG, Yongqi ; HUTTER, Kolumban: Comparisons of numerical methods with respect to convectively dominated problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 37 (2001), S. 721–745
- [WHP04] WANG, Yongqi ; HUTTER, Kolumban ; PUDASAINI, Shiva P.: The Savage-Hutter theory: A system of partial differential equations for avalanche flows of snow, debris, and mud. In: *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 84, No. 8 (2004), S. 507–527