Theoretische Informatik und Logik
Übungsblatt 2 (2017W)

Aufgabe 2.1 Geben Sie jeweils eine kontextfreie Grammatik an, welche die folgenden Sprachen erzeugt, sowie eine Linksableitung und einen Ableitungsbaum für ein von Ihnen gewähltes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq 6$. Transformieren Sie die jeweils erhaltene Grammatik schrittweise in Chomsky Normalform.

a) Die Łukasiewicz-Sprache[1] L über dem Alphabet $\{\underline{a}, \underline{b}\}$ ist die kleinste Menge, für die gilt:
   - $\underline{b} \in L$
   - sind $u, w \in L$ so ist auch $\underline{a}uw \in L$.

b) $L = \{\underline{a}^m \underline{b}^n \underline{c}^p \underline{d}^q \mid m, n, p, q \geq 0, m + n = p + q\}$

Aufgabe 2.2 Sind folgende Sprachen L kontextfrei? Falls ja, so beweisen Sie dies mit Hilfe des Satzes von Chomsky-Schützenberger (indem Sie entsprechende Sprachen D_n und R sowie einen entsprechenden Homomorphismus h angeben). Geben Sie in diesem Fall auch eine kontextfreie Grammatik an, welche L erzeugt. Ist hingegen L nicht kontextfrei, so beweisen Sie dies mittels einer Methode Ihrer Wahl. (Sie können dabei davon ausgehen, dass eine Sprache der Form $\{\underline{a}^{kn}\underline{b}^{ln}\underline{c}^{mn} \mid n \geq 0\}$ für beliebige Konstanten $k, l, m > 0$ als nicht kontextfrei bekannt ist).

a) $L = \{\underline{a}^n \underline{b}^m \mid m \geq n$ und $m - n$ ist gerade$\}$

b) $L = \{(\underline{0}^n \underline{1}^n)^n \mid n \geq 2\}$

c) $L = \{ww^r \mid w \in \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}^*\} \ \cap \ \{\underline{a}^n \underline{b}^k \underline{a}^n \mid k, n \geq 0\}$
   (*Hinweis*: Bestimmen Sie zunächst L.)

d) $L = \{\underline{a}^{4n} \underline{b}^{4n} \underline{c}^{2m} \underline{b}^k \underline{d}^m \mid n, m, k \geq 0\} \ \cap \ \{\underline{a}^{2n} \underline{b}^{2m} \underline{c}^{4m} \underline{b}^{2017} \underline{d}^{2n} \mid n, m \geq 0\}$
   (*Hinweis*: Bestimmen Sie zunächst L.)

Aufgabe 2.3 Sind folgende Aussagen korrekt? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Sei L kontextfrei und R regulär. Dann ist $R - L$ kontextfrei.

b) Sei L kontextfrei und R regulär. Dann ist $L - R$ kontextfrei.

c) Eine kontextfreie Grammatik in Chomsky Normalform ist immer eindeutig.

d) Seien $L_1, ...L_k$ Sprachen über einem Alphabet Σ so, dass:
   - für alle $i \neq j$ gilt: $L_i \cap L_j = \{\}$
   - $L_1 \cup L_2 \cup ... \cup L_k = \Sigma^*$
   - jede dieser Sprachen $L_i, 1 \leq i \leq k$, rekursiv aufzählbar ist.

   Dann ist jede dieser Sprachen L_i rekursiv (entscheidbar).

e) Sei $\Sigma = \{\underline{1}\}$. Dann gibt es mindestens eine unentscheidbare Sprache über Σ.

Aufgabe 2.4 Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob diese korrekt ist, oder nicht, und begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

---

[1] Die Łukasiewicz-Sprache beschreibt arithmetische Ausdrücke in der polnischen Notation, wobei das Symbol $\underline{a}$ für einen zweistelligen Operator und das Symbol $\underline{b}$ für eine arithmetische Variable bzw. eine Konstante stehen. Dem Wort $\underline{aabaabbbb}$ entspricht z.B. der Ausdruck $+*2*+3456$ in der polnischen Notation bzw. $(2*((3+4)*5))+6$ in der gewohnten Infix-Notation.

a) Sei $A \leq_p B$. Dann gilt: Wenn B **NP**-vollständig ist, so ist auch A **NP**-vollständig.

b) Sei $A, B \subseteq \Sigma^*$ und $A \leq_p B$. Dann gilt auch $\overline{A} \leq_p \overline{B}$.

c) Angenommen, A ist **NP**-vollständig und $\overline{A} \in$ **NP**. Dann gilt $\overline{L} \in$ **NP** für jede Sprache $L \in$ **NP**.

d) Das Problem A sei **NP**-hart. Dann gilt: wenn **P** $=$ **NP** ist, dann kann A in polynomieller Zeit gelöst werden.

e) Wenn $A \leq_p B$ und B und C in **NP** sind, dann ist auch $A \cup C \in$ **NP**.

Aufgabe 2.5 Sie wollen zur Festzeit Ihr Haus mit bunten Lampen dekorieren. Dazu haben Sie Ihren guten Freund, einen Elektrotechnikstudenten, um Hilfe gebeten und nun ist die Beleuchtung derart kompliziert, daß Sie Schwierigkeiten haben, sie überhaupt anzuschalten.
Ein *Boole'sches Schaltnetz* besteht aus ein einem gerichteten, azyklischen Graphen mit Eingangsknoten $x_1, x_2, ..., x_n$ sowie einem Ausgangsknoten x_{out}. Die Eingangsknoten haben dabei nur eine ausgehende Kante und der Ausgangsknoten nur eine eingehende Kante. Alle weiteren Knoten sind markiert als ODER-, UND- oder NICHT-Gatter, darüberhinaus sind auch Verzweigungen möglich.

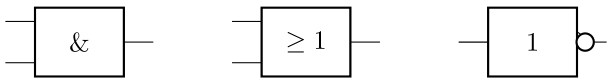
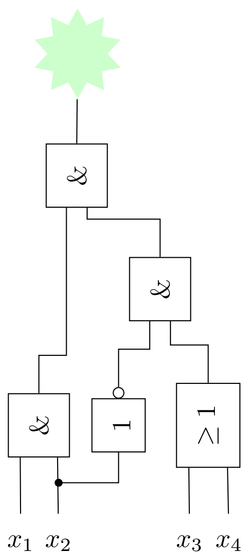


Abbildung 1: UND-, ODER- und NICHT-Gatter

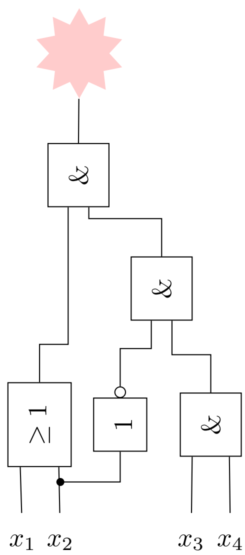
Für das Entscheidungsproblem *BOOLEAN CIRCUIT* ist ein solches Schaltnetz gegeben und die zugehörige Frage ist, ob es dafür eine erfüllende Belegung gibt.

a) Die folgenden Schaltungen hat Ihr Freund in die Beleuchtung verbaut, mit der Behauptung, daß die jeweilige Lichterkette angeht, wenn man die Schalter $x_1, x_2, ..., x_n$ in die richtige Stellung bringt. Ist dies tatsächlich für beide Schaltungen möglich? Wenn ja, geben Sie eine Schalterstellung an, die Ihr Haus festlich beleuchtet.

Schaltung 1:



Schaltung 2:



b) Reduzieren Sie das oben beschriebene Problem *BOOLEAN CIRCUIT* auf das Problem *SAT* (s. Folie 221), d.h., zeigen Sie $BOOLEANCIRCUIT \leq_p SAT$.

(Denken Sie dabei an Tannengeruch, Sternspritzer, oder einen duftenden Truthahn. ☺)