Theoretische Informatik und Logik
Übungsblatt 1 (2017W)
Lösungen

Martin Szalay - 1526755

Aufgabe 1.1

Sei die Sprache L gegeben durch folgende induktive Definition: L ist die kleinste Menge, sodass

- $\underline{\$} \in L$
- $w \in L \Rightarrow xwx \in L$ für $x \in \{\underline{\mathsf{a}}, \underline{\mathsf{b}}\}$

(*Anmerkung*: L beschreibt Palindrome über $\{\underline{\mathsf{a}}, \underline{\mathsf{b}}\}$, bei welchen das Symbol $\underline{\$}$ als Trennzeichen zwischen einem Wort und seinem Spiegelbild fungiert.)

a) Geben Sie eine deterministische Turingmaschine M an, welche die Sprache L akzeptiert, und erläutern Sie (jeweils) auch kurz verbal die Arbeitsweise Ihrer Maschine. Es steht Ihnen dabei frei, ob Sie das auf Folie 26 definierte Modell (mit einem Band) oder das auf Folie 72 definierte Modell (mit zwei Bändern, einem Eingabe- und einem Arbeitsband, wobei M in diesem Fall die Kellerautomatenbedingung erfüllen soll) verwenden.

b) Erweitern Sie Ihre unter a) gefundene Maschine so, dass sie $L' = \{w\underline{\$}w^r \mid w \in \Sigma^*\}$, wobei $\Sigma = \{\underline{\mathsf{a}}_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, akzeptiert.

Lösung 1.1

a)

δ	a	b	\$	X	B
q_0	(q_0,a,R)	(q_0,b,R)	(q_1,\$,R)	(q_0,X,R)	
q_1	(q_2,X,L)	(q_3,X,L)	(q_1,\$,L)	(q_1,X,L)	(q_4,B,R)
q_2	(q_0,X,R)		(q_2,\$,L)	(q_2,X,L)	
q_3		(q_0,X,R)	(q_1,\$,R)	(q_3,X,R)	
q_4					(q_5,S,L)
q_5					

$M = (\{q_i j 0 \leq i \leq 5\}, \{a, b, \$\}, \{a, b, \$, X, B\}, \delta, q_0, B, \{q_5\})$

Idee: Es wird das erste Symbol rechts vom Trennzeichen \$ und allen X genommen, danach wird in einen bestimmten Zustand gewechselt, welcher den aktuellen Buchstaben repraesentiert.

q1 beliebiges Zeichen (a,b) darf eingelesen werden
q2 steht fuer a

q3 steht fuer b
X steht fuer "gelesen"

Im Grunde faehrt die Maschine von rechts nach links bis diese ein Blank Symbol trifft, danach wird die andere Seite vom $ angeschaut und haelt dann in q_5.
Ein Blank Symbol kann nur beim einlesen nach rechts gefunden werden, sobald eines getroffen wird, haelt die Maschine.

b) $\delta = \big\{(q_0, q_\mathrm{i}; q_0, a_\mathrm{i}, R)j1 \leq i \leq n\big\} \rightarrow Istzustand, Folgezustand$
$\cup\big\{(q_0, \$; q_\mathrm{i}, \$, L)|1 \leq i \leq n\big\}$
$\cup\big\{(q_1, \$; q_1, \$, L), (q_1, X; q_1, X, L), (q_1, B; q_{\mathrm{n}+2}, B, R),\big\} \rightarrow zusammengefasst, weiliabhaengig$
$\cup\big\{(q_1, a_\mathrm{i}; q_{\mathrm{i}+1}, X, R)|1 \leq i \leq n\big\}$
$\cup\big\{q_{\mathrm{i}+1}, a_\mathrm{i}; q_1, X, L)|1 \leq i \leq n\big\}$
$\cup\big\{q_{\mathrm{i}+1}, \$; q_{\mathrm{i}+1}, \$, R)|1 \leq i \leq n\big\}$
$\cup\big\{q_{\mathrm{i}+1}, X; q_{\mathrm{i}+1}, X, R)|1 \leq i \leq n\big\}$

$\cup\big\{q_{\mathrm{n}+2}, \$; q_{\mathrm{n}+2}, \$, R), \leftarrow vorletzterzustand, zus.weiln - abh.$
$(q_{\mathrm{n}+2}, X; q_{\mathrm{n}+2}, X, R), \leftarrow vorletzterzustand$
$(q_{\mathrm{n}+2}, B; q_{\mathrm{n}+3}, B, S), \leftarrow endzustandbeiqn + 3\big\}$

Aufgabe 1.2
Seien A, B, C und D Sprachen, die rekursiv aufzählbar sein können oder auch nicht. Wir wissen allerdings Folgendes:

- $A \leq B$
- $B \leq C$
- $D \leq C$

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie

- *jedenfalls* zutrifft (unabhängig davon, um welche Probleme es sich bei A bis D handelt)
- *vielleicht* zutrifft (je nach dem worum es sich bei A bis D handelt)
- *keinesfalls* zutrifft (unabhängig davon, um welche Probleme es sich bei A bis D handelt)

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Ist A entscheidbar, so ist auch das Komplement von C entscheidbar.

b) Ist das Komplement von B nicht entscheidbar, so kann das Komplement von C entscheidbar sein.

c) Ist C rekursiv aufzählbar, so ist auch $B \cup D$ rekursiv aufzählbar.

d) Ist A rekursiv aufzählbar, so ist B entscheidbar.

e) Ist C nicht entscheidbar, so ist auch D nicht entscheidbar.

Lösung 1.2

a) Jedenfalls, wenn C entscheidbar ist, so ist auch das Komplement entscheidbar. Da die Reduktion ist transitiv.

b) Keinesfalls, wenn das Komplement von B nicht entscheidbar ist, so kann Komp von C auch nicht entscheidbar sein.

c) Jedenfalls, da die Vereinigung von B und D auch eine Teilmenge von C ist.

d) Vielleicht, aber nur wenn A entscheidbar ist.

e) Vielleicht, da D entscheidbar sein koennte.

Aufgabe 1.3

Geben Sie an, ob folgende Probleme (un)entscheidbar sind, und begründen Sie jeweils Ihre Antwort. Sofern möglich, verwenden Sie dafür den *Satz von Rice*. (Das Alphabet ist dabei jeweils $\Sigma = \{\underline{0}, \underline{1}\}$.)

a) Gibt es für die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache genau eine Turingmaschine, die sie akzeptiert?

b) Ist die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache das Komplement von Σ^*?

c) Ist die Codierung der Turingmaschine, welche die Sprache L akzeptiert, weniger als 1000 Symbole lang?

d) Ist das Komplement der von einer Turingmaschine akzeptierten Sprache endlich?

e) Ist die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache eine Teilmenge von Σ^*?

Lösung 1.3

a) Entscheidbar, da es mindestens eine TM gibt. Satz von Rice nicht anwendbar.

b) Entscheidbar, wenn das Komplement von Σ^* L=$\{\}$ ist. Laut Satz des Rice handelt es sich hierbei um eine triviale Eigenschaft.

c) Unentscheidbar, da die TM nur dann akzeptiert wenn sie haelt. Sie koennte auch somit nicht halten.

d) Unentscheidbar, da es nicht entscheidbar ist, ob eine Sprache endlich viele Woerter hat. zB L={} Komplement von L = Σ^* somit unendlich... nicht trivial L=Σ^+ und das Komplement von L=$\{\epsilon\}$ ... ist trivial

e) Entscheidbar, da jede Sprache Woerter von Σ^* enthaelt.

Aufgabe 1.4
Sind folgende Aussagen korrekt? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Ist L_1 regulär, so ist auch $L_1 \cup L_2$ regulär.

b) Ist $L_1 \cap L_2$ entscheidbar, so sind L_1 und auch L_2 entscheidbar.

c) Für jede rekursiv aufzählbare Sprache L gilt: $L \cup \overline{L}$ ist entscheidbar.

d) Jedes unentscheidbare Problem enthält eine entscheidbare Teilmenge.

e) Jede Teilmenge einer regulären Sprache ist regulär.

Lösung 1.4

a) Falsch. Da man nicht weiss was L_2 ist. Es koennte nicht regulaer sein. Somit wir durch $L_1 \cup L_2$ die daraus resultierende Sprache auch nicht regulaer.

b) Falsch. Es ware entscheidbar unter der Annahme dass sowohl L_1 als auch L_2 entscheidbar waren.

c) Falsch.

d) Falsch, da ein unentscheidbares Problem auch keine entscheidbaren Probleme enthalten kann.

e) Richtig, da eine regulare Sprache aus kleinsten Teilmengen von regularen Sprachen besteht.

Aufgabe 1.5
Sind folgende Sprachen regulär? Falls ja, so geben Sie einen entsprechenden deterministischen endlichen Automaten an; falls nein, so beweisen Sie dies mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen. (Wählen Sie mindestens zwei Unterpunkte.) (*Hinweis*: Nur eine der folgenden drei Sprachen ist regulär.)

a) $\{u\underline{\#}v^r \mid u$ ist Binärdarstellung (ohne führende Nullen) von n, und v jene von $n+1, n > 0\}$.

(Wörter in dieser Sprache sind also z.B. $\underline{1}\underline{0}\underline{1}\underline{\#}\underline{0}\underline{1}\underline{1}$ und $\underline{1}\underline{1}\underline{1}\underline{1}\underline{\#}\underline{0}\underline{0}\underline{0}\underline{0}\underline{1}$)

b) Die Menge aller Binärstrings (also Wörter über $\Sigma = \{\underline{0}, \underline{1}\}$), welche, interpretiert als Binärzahl, nicht durch 5 teilbar sind (ohne Berücksichtigung führender Nullen).

c) $\{uu^r u \mid u \in \{\underline{\texttt{a}}, \underline{\texttt{b}}, \underline{\texttt{c}}\}^*\}$

(*Hinweis*: w^r bezeichnet das Spiegelbild von w.)

Lösung 1.5

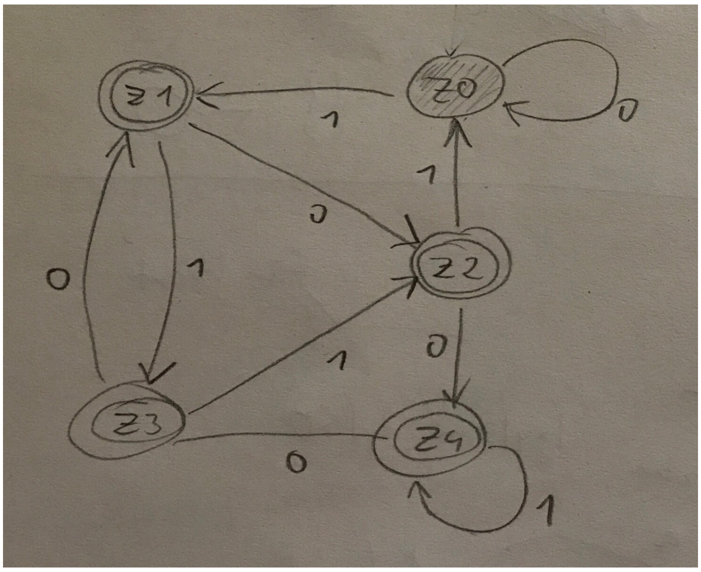
a) Diese Sprache ist nicht regulaer. Beweis mit Pumping-Lemma:

Wir waehlen ein Wort aus der Sprache, zB 1111#00001
Wir behaupten w=xyz, xy=1111 und z=#00001
Dies erfuellt die Bedingungen vom Pumping-Lemma, da $|xy|$ ≤m und $|y| > 0$
Laut Pumping-Lemma koennen wir schreiben: $w_i = xy^i z \in L$

Wir suchen nun fuer y ein i, sodass es nicht mehr in der Sprache liegt.

Probiere aus zB 2
Somit ware $w_i = xy^2 z = a^{m+2} b^m$... Wir sehen sofort, dass es mehr als a als b gibt. Dies ist ein Widerspruch. Da das Wort nun wie folgt aussieht:
111111#00001 .. links vom # sind mehr Symbole als rechts.
...nicht regulaer.

b) Diese Sprache ist regulaer. Beweis durch DEA

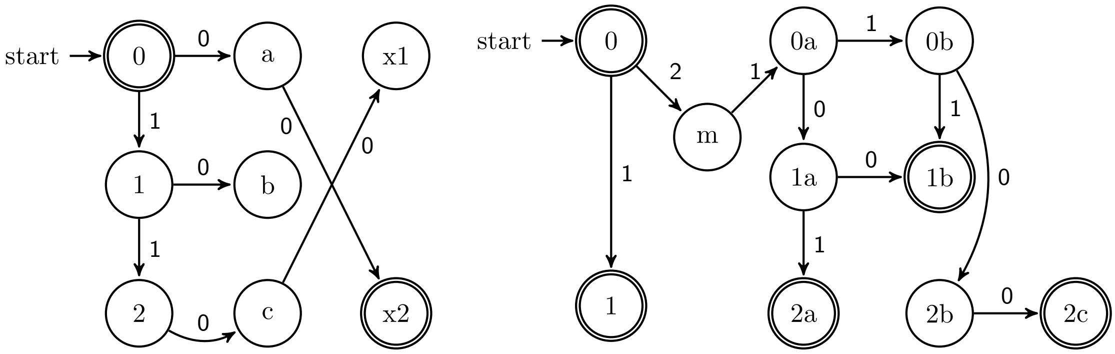


c) Diese Sprache ist nicht regulaer. Beweis mit Pumping-Lemma:

Wir waehlen ein Wort aus der Sprache, zB ab ba ab
Wir behaupten w=xyz, xy=ab und y=b
Pumping-Bedingung erfuellt, da $|xy|$ ≤m und $|y| > 0$
Wir schreiben $w_i = xy^i z \in L$

Wir suchen nun fuer y ein i, sodass es nicht mehr in der Sprache liegt.

Probiere 4 aus.
Somit ware das Wort ay^4baab. Dies ist ein Widerspruch, da es sich u^r kein Spiegelbild zum vorhergehenden u ist. Das Wort ware abbbbbaab.
$w = u^{m+4}u^ru^m$



(a) Subcaption 1 (b) Subcaption 2

Abbildung 1: EXaMPLe Automat