# Równanie Burgersa

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} + u\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , \quad x \in (0, L), \quad u = u(t, x), \quad D > 0 \\ \qquad\qquad u(t, 0) = u(t, L) \\ \qquad\qquad u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

$$u_0(x) = \begin{cases} 0\ , & x \in [0, 0.25L\ ] \\ 4x - 1\ , & x \in (0.25L, 0.5L] \\ -4x + 3\ , & x \in (0.5L, 0.75L] \\ 0, & x \in (0.75L, L] \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\frac{1}{2}u^2 - D\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}\right) = 0$$

Stosuję aproksymację metodą różnic skończonych – schematem MacCormacka.

Schemat MacCormacka jest metodą typu predyktor-korektor drugiego rzędu.

n- numer kroku czasowego, j – numer węzła na długości

$$r = D * \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

Predyktor:

$$upr_j^n = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[0.5 * (u_{j+1}^n)^2 - 0.5 * (u_j^n)^2\right] + r * (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

Korektor:

$$u_j^{n+1} = 0.5 * [u_j^n + upr_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[0.5 * (upr_j^n)^2 - 0.5 * (upr_{j-1}^n)^2\right] + \\ + r * (upr_{j+1}^n - 2upr_j^n + upr_{j-1}^n)]$$

Działanie predyktor-korektor powtarzamy w pętli n-1 razy. Powyższe wzory są całkowicie słuszne dla j≠1 i j≠J, gdzie J to numer ostatniego węzła na długości.

Aby uwzględnić periodyczny warunek brzegowy w kodzie, należy w każdej pętli j od 1 do J, dla j=1 zastąpić wyraz poprzedni j-1 przez wyraz ostatni j=J, i analogicznie dla wyrazu ostatniego j=J należy kolejny wyraz j+1 zastąpić wyrazem pierwszym j=1.

Przy definiowaniu $\Delta t, \Delta x$ należy pamiętać o warunku Couranta-Friedrichsa-Lewiego (CFL): Rozwiązanie numeryczne danego równania różniczkowego cząstkowego jest stabilne, gdy liczba Couranta $C = u\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ (dla przypadku 1D). Dodatkowo, należy dobrać $\Delta x$ niezbyt małe, gdyż metoda może dać wtedy fałszywe wyniki.

Przykładowo można dobrać:

$D = 0.01,$
$T = 1sek, -czas\ pomiaru$
$\Delta t = 0.001sek,$
$\Delta x = 0.01L$