1 開始講故事

賭博自古就有，西方，宗教革命，就從 god's will 變成當作一門學問來看。
學了機率論，慢慢會改變一些直覺。
De Moivre 在 1733 第一個證明中央極限定理
牛頓是鑄幣局長，在生計上幫他
老師 1983 在 MIT 訪問，大家在慶祝 CIT 證明 250 周年
20 世紀才開始，幾率論有公理化的探討。
Kolmogorov 1933
做證明，如果把題目搞得很清楚，大概就做好了一半了。
社科的問題，用數學模型，如何描述
模型一定是不對的，只是對理想狀態的描述，要思考 Uncertainty 的問題

2 開始講一些基本觀念

2.1 σ - algebra

你們知道 Sigma-algebra 對不對
M

$$\sigma - algebra \tag{1}$$

random phenomenon

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &: \Omega \to \mathbb{R} \\ A &= \{\mathbf{X} \leq a\} \\ B &= \{\mathbf{X} \geq b\} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\mathfrak{B}: \text{ Borel } \sigma\text{- algebra the smallest } \sigma \text{ -algebra containing all the open sets (interxxx) in } \mathbb{R} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \Omega\mathcal{F} &\xrightarrow{X} \Omega'\mathcal{F}' \\ x^{-1}(\mathcal{F}') &\subset \mathcal{F} \end{aligned} \tag{4}$$

X is called a Ω- xxx
random variable (function, element)

$$\sigma(x) \equiv X^{-1}(\varepsilon)$$

如果沒有 σ - algebra 的基礎，很難繼續

2.2 Probability

A Probability P on $\mathcal{F}$

$$\mathsf{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$$

(1) P(Ω)=1
(2)P($\cup_1^\infty A_n$) =$\sum_{n=1}^\infty A_n$
if $A_n \in \mathcal{F}$ and $A_n \bigcap A_M = \emptyset$ if $n \neq m$

(3) Countable additivity

finite additivity.

vector measure:

$$\mathsf{P} : \mathcal{F} \to \mathcal{B}$$

P($\cup_1^\infty A_n$) =$\sum_{n=1}^\infty P(A_n)$

2.3 Stochastic Process 隨機過程

現在都叫 Stochastic Process，因爲 Stochastic 看起來比較有學問，以前叫作 random.

起名字很重要。

有人說 random number 叫亂數翻譯很不好。

$$I = 1$$

$$\{X(t); t \in I\}$$

I: index set

$X(t)$ is a Stochastic process if $X(t)$ is a r.v. $\forall t \in I$

$I = [0, T)$ or $I = [0, \infty)$

$I = \mathbb{R}$ or $I = \mathbb{R}^k$ random field

I 有次序

$$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\})t \in I$$

Filtration

$$\forall t, \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}, if s \leq t$$

$\mathcal{F}_t$: information w.r.t time t

$$\mathcal{F}_{t^+} \equiv \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$$

right continuous Filtration

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$$

通常都假設右連續

—

$X(t)$ is a Stochastic process adapted to $\{\mathcal{F}_t\}$ if $X(t) \in \mathcal{F}_t, \forall t$

$\sigma(X(t)) \subseteq \mathcal{F}_t$

Usual condition

$\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P$

$\mathcal{F}$ 先做 condition under P

if $\mathcal{F}_t$ contains all the null sets in $\mathcal{F}$ and $\{\mathcal{F}_t\}$ is right continuous

*

統計和機率的差異

統計比較像自然科學，induction

機率比較，deduction

X:

什麼叫做我知道 X？
數學，至少要知道 X 的 distribution
$F_X(t) = P(X \le t)\, \forall t$
X and Y 什麼叫 2 個隨機變數一樣？
$F_X(t) = F_Y(t)\, \forall t$
$X \overset{w}{\sim} Y$ weakly
$X \overset{d}{\sim} Y$
X and Y ，什麼叫 2 個隨機過程一樣？
最弱的要求：finite-dimensional distributions 要一樣

$$P_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X(t_1) \le x_1, \dots, X(t_n) \le x_n)$$

$$X(t), t \in I$$

$$P_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X(t_1) \le x_1, \dots, X(t_n) \le x_n), n \in \mathbf{N}, t_1, \dots, t_n \in [0, \infty)$$

the family of all finite-dim distributions is consistent

$$P_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n) = P_{t_{\pi(1)},\dots,t_{\pi(n)}}(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})$$

$$\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$$

permutation

2.4 隨機過程的不同解釋

1. $\{X(t), t \le s\}, X(t)$ is a r.v.
2. L^2 Theory , $\mathbb{E}\, X^2(t) < \infty \forall t$
$t \mapsto X(t, \cdot) \in L^2(P) = \{Y : \mathbb{E}\, y^2 < \infty\}$ is a curve in $L^2(P)$
通常都假設 $X(t)$ is continuous in $L^2(P)$
spectral Theory
Karhunen–Loève expansion
北歐
$cov(t, s) = \mathbb{E}\, X(t)$