



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO INGENIERÍA MECÁNICA



**Modelado de diferentes escenarios de disipación de energía y su impacto en la
dinámica rotacional de un satélite**

POR

Jorge Luis Estrada Aguayo

Proyecto de Ingeniería Aeroespacial presentado a la Facultad de Ingeniería de la Universidad de
Concepción para optar al título profesional de Ingeniero Civil Aeronáutico

Profesor Guía:
PhD, Bernardo Hernández Vicente
PhD (C), Elías Obreque Sepúlveda

Diciembre 2023
Concepción (Chile)

© 2023 Jorge Luis Estrada Aguayo

© 2023 Jorge Luis Estrada Aguayo

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o
procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento

Resumen

Las disipaciones de energía son algo inherente a cualquier sistema ingenieril, los satélites no están exentos, y durante su operación se encuentran bajo disipaciones de energía cinética externas e internas, esto es un problema, ya que afectan directamente a la actitud del satélite comprometiendo la misión. Tal es el caso del primer satélite lanzado por USA, el cual tuvo un cambio inesperado en su actitud y producto de disipaciones internas de energía pasó de rotar en su eje de mínima inercia al eje de máxima inercia.

Por lo anterior, sería importante estudiar este fenómeno y responder a preguntas como: ¿Cuánto tiempo pasará antes de que el satélite se desestabilice de su eje de rotación?, ¿Podría afectar a la actitud del satélite usar una rueda de reacción cuando esté sin operar?, ¿De qué forma se vería afectada la actitud del satélite con paneles solares desplegados?

En el presente trabajo se aborda este tema modelando dos mecanismos de disipación de energía bajo los cuales se puede encontrar un satélite, el primero de ellos, un rotor interno (representativo de una rueda de reacción, por nombrar uno solo) rotando libremente. El otro mecanismo es la disipación de energía por la deformación de paneles solares. En este proyecto se estudiaron ambos mecanismos en distintos casos, en los que la disipación de energía tuviera mas o menos preponderancia dependiendo de un factor numérico característico de cada mecanismo estudiado. Todos los cálculos fueron hechos de forma numérica a través del lenguaje Python.

En cuanto a los resultados, se logró modelar de forma correcta ambos mecanismos de disipación de energía actuando por separado sobre el satélite, utilizando un rotor, el satélite alcanza el estado de mínima energía de rotación en el eje de máxima inercia, antes de los 200 [s] en los escenarios estudiados. Sin embargo, la configuración de paneles que se simuló con el modelo no tuvo un efecto significativo en la actitud del satélite. Con los resultados obtenidos, vale la pena explorar más y estudiar otras configuraciones que a priori, podrían ser más significativas en la disipación de energía. También sería útil hacer un modelo más complejo y quitar algunas de las simplificaciones consideradas en este estudio.

Palabras clave: Disipación, energía, satélite, rotor, panel.

Abstract

Energy dissipation is inherent to any engineering system, and satellites are not exempt. During their operation, they experience both external and internal energy dissipation, posing a significant challenge as it directly impacts the satellite's attitude, thereby compromising its mission. An illustrative example is the first satellite launched by the USA, which unexpectedly underwent a change in attitude. This was a result of internal energy dissipation causing it to transition from rotating about its axis of minimum inertia to the axis of maximum inertia.

Therefore, it is crucial to investigate this phenomenon and address questions such as: How long will it take for the satellite to destabilize from its rotation axis? Could using a reaction wheel when the wheel is off affect the attitude of the satellite? In what way would the attitude of the satellite be impacted with deployed solar panels?

In the present work this issue is addressed by modeling two energy dissipation mechanisms under which a satellite can be found. The first mechanism involves an internal rotor (representative of a reaction wheel, to name just one) rotating freely. The other mechanism is energy dissipation due to the deformation of solar panels. Both mechanisms were studied under various scenarios, with the dominance of energy dissipation determined by a numerical factor characteristic of each mechanism. All calculations were numerically performed using the Python programming language.

Regarding the results, both energy dissipation mechanisms were successfully modeled acting independently on the satellite. When using a rotor, the satellite reaches the state of minimum rotational energy about the axis of maximum inertia before 200 seconds in the studied scenarios. However, the simulated panel configuration did not have a significant effect on the satellite's attitude. With these findings, further exploration and study of other configurations that could potentially have a more pronounced impact on energy dissipation are warranted. Additionally, developing a more complex model and removing some of the simplifications considered in this study would be beneficial.

Keywords: Dissipation, energy, satellite, rotor, panel.

Tabla de Contenidos

Lista de Figuras	ii
Glosario	iii
1 CAPÍTULO 1: Introducción.....	1
1.1 Contexto.....	1
1.2 Misiones satelitales.....	1
1.3 Mecanismos de disipación de energía	3
1.4 Actualidad nacional satelital.....	3
1.5 Objetivos.....	4
1.6 Hipótesis	4
1.7 Metodología.....	5
1.8 Carta Gantt.....	5
2 CAPÍTULO 2: Marco teórico	6
2.1 Marcos de referencia	6
2.2 Ecuaciones del movimiento.....	7
2.3 Relación entre la energía cinética y el momento angular	8
2.4 Dinámica de elementos flexibles	10
3 CAPÍTULO 3: Estado del arte	12
3.1 Disipación de energía en dual spin SC	12
3.2 Disipación de energía por elementos no rígidos.....	14
4 CAPÍTULO 4: Modelo de cuerpo rígido	18
4.1 Ecuaciones de cuerpo rígido.....	18
4.2 Resultados.....	18
5 CAPÍTULO 5: Cálculo de la disipación de energía cinética en DSSC.....	20
5.1 Modelo propuesto	20
5.2 Resultados obtenidos	21
5.3 Análisis de sensibilidad de la energía cinética	23
6 CAPÍTULO 6: Disipación de energía por deformación de elementos flexibles.....	24
6.1 Modelo propuesto	24
6.2 Resultados obtenidos	27
6.3 Análisis de sensibilidad para distintos valores del factor de amortiguamiento ξ	28
7 Capítulo 7: Conclusiones	30
Trabajos Futuros	31
8 Referencias	32
9 Anexos.....	34

Lista de Figuras

Figura 1.1: Satélite Explorer One (Fuente [1])	1
Figura 1.2: Ciclo de vida de un proyecto (Fuente [4])	2
Figura 1.3: Satélite SUCHAI (Cubesat 1U) (Fuente [12]).....	4
Figura 2.1: Marcos de referencia. (Fuente [13])	6
Figura 2.2: Marco de referencia fijo al satélite. (Fuente [14])	7
Figura 2.3: Marco de referencia inercial centrado en la Tierra (ECI). (Fuente [15]).....	7
Figura 2.4: Esquema general de la intersección de la energía y el momento angular (Fuente [16]). ..	9
Figura 2.5: Estados de mínima, intermedia y máxima energía respectivamente. (Fuente [15]).	9
Figura 2.6: Elemento de viga para la discretización mediante MEF (Fuente [17]).	10
Figura 3.1: Modelo de DSSC con giro-amortiguador (Fuente [19]).....	13
Figura 3.2: Modelo de DSSC magnético (Fuente [19])	13
Figura 3.3: Modelo generalizado para el análisis de un girostato (Fuente [20]).....	14
Figura 3.4: Modelo de elementos finitos de satélite con paneles solares (Fuente [22])	15
Figura 3.5: Esquema del satélite flexible (a) en la trayectoria orbital y (b) el sistema de referencia utilizado (Fuente [23]).....	16
Figura 3.6: Modelo dinámico del sistema de despliegue de paneles (Fuente [24]).	17
Figura 4.1: Placa rígida usada como ejemplo de implementación de modelo de cuerpo rígido (Fuente [13]).....	18
Figura 4.2: Velocidades angulares del modelo de cuerpo rígido	19
Figura 5.1: Velocidades angulares del DSSC con $f = 0.01$	21
Figura 5.2: Momento angular del DSSC con $f = 0.01$	22
Figura 5.3: Energía cinética rotacional del DSSC con $f = 0.01$	22
Figura 5.4: Energía cinética rotacional para los tres escenarios de disipación de energía.....	23
Figura 6.1: Posición y desplazamiento nodal en el body frame.....	25
Figura 6.2: Desplazamiento verticales de los extremos libres de los paneles solares del satélite para $\xi = 0.01$	27
Figura 6.3: Desplazamiento verticales de los extremos libres de los paneles solares del satélite para $\xi = 0.01$	27
Figura 6.4: Velocidades angulares del satélite con $\xi=0.01$	28

Glosario

FACH	:	Fuerza Aérea de Chile
LEO	:	Low Earth Orbit
NASA	:	National Aeronautics and Space Administration
SNSat	:	Sistema Nacional Satelital
ECI	:	Earth Centered Inertial
DSSC	:	Dual Spin Spacecraft
GEO	:	Geosynchronous Equatorial Orbit
CMG	:	Control Momentum Gyro
MEF	:	Método de elementos finitos

Simbolos

I_i	:	Momento de inercia de masa con respecto al eje i
\bar{I}	:	Segundo momento de área con respecto al eje de flexión
ω	:	Velocidad angular del satélite
Ω	:	Velocidad angular del rotor
θ	:	Ángulo de inclinación del rotor
v	:	Velocidad lineal
m	:	Masa del panel
h	:	Espesor del panel
E	:	Módulo de elasticidad
\vec{x}	:	Vector estado
$[M]$:	Matriz de masa
$[K]$:	Matris de rigidez
$[C]$:	Matriz de amortiguamiento
$[I]$:	Tensor de inercia de masa

CAPÍTULO 1: Introducción

1.1 Contexto

El despliegue de carga útil en el espacio es una tarea ingenieril compleja y en muchos casos no se tiene certeza total de que el sistema espacial pueda funcionar tal como fue diseñado. Tal es el caso del primer satélite lanzado por Estados Unidos en 1958, el Explorer One, el cual se aprecia en la Figura 1.1.



Figura 1.1: Satélite Explorer One (Fuente [1])

Este satélite, de forma alargada con antenas flexibles, estaba diseñado para girar en torno al eje de mínima inercia, sin embargo, luego de su lanzamiento este comenzó a rotar en torno al eje de máxima inercia [2]. Este fenómeno se produjo debido a la disipación de energía cinética debido a la flexión de las antenas, las cuales se comportaron como un sistema masa resorte amortiguador. Este cambio en la actitud es algo que no se pudo corregir, ya que el satélite no tenía actuación pasiva.

Las disipaciones de energía redujeron la velocidad angular del satélite y por la conservación del momento angular, ocurre con un cambio del eje de rotación, pasando del eje de mínima inercia al eje de máxima inercia [3]. Este comportamiento se conoce como el efecto Dzhanibekov, cuyo nombre se debe al cosmonauta Vladimir Dzhanibekov, quién descubrió este fenómeno.

El estado de rotación que se alcanza producto de las disipaciones de energía es un escenario desfavorable, ya que altera completamente el propósito de la misión. Un satélite debe mantenerse en una orientación específica, por diversos motivos dependiendo de la misión, tales como observación, comunicación, entre otros. Debido a esto, hay que tener en cuenta esta condición en el diseño de misiones satelitales.

1.2 Misiones satelitales

En cuanto a la ejecución del despliegue de satélites, y misiones de esta índole, según NASA (National Aeronautics and Space Administration), un proyecto tiene el ciclo de vida definido por 7 fases, este ciclo se presenta en la Figura 1.2.

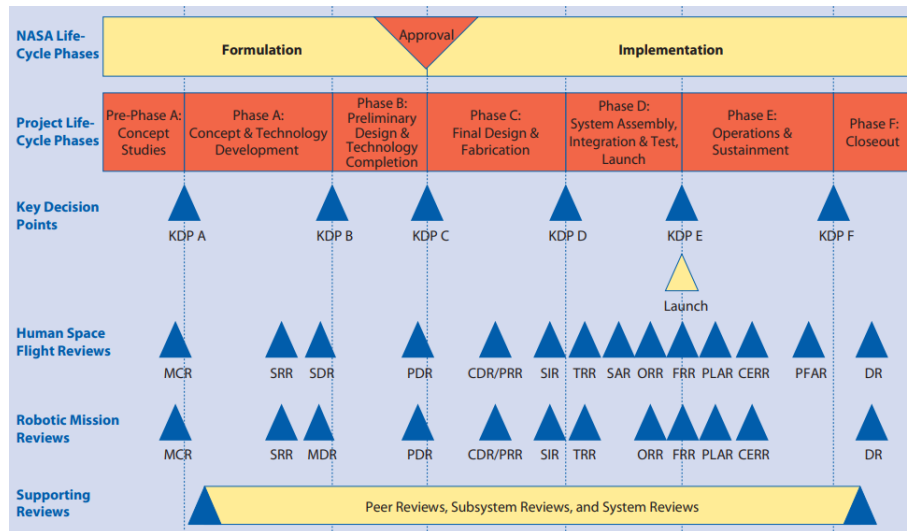


Figura 1.2: Ciclo de vida de un proyecto (Fuente [4])

Según el libro de la NASA, la fase A: Desarrollo de conceptos y tecnología [4], se caracteriza por algunas actividades pertinentes en el contexto del desarrollo del estudio de esta problemática, las cuales, se presentan a continuación.

- Desarrollar requisitos y limitaciones de nivel superior.
- Desarrollar criterios de evaluación y métricas correspondientes.
- Realizar y archivar análisis de opciones (*trade off*).
- Establecer estimaciones de recursos técnicos.

Teniendo en cuenta los puntos previos, la discusión sobre este problema debería situarse en la fase A. En efecto, para garantizar el correcto funcionamiento de un satélite, es necesario contar con una serie de dispositivos que lleven a cabo su misión. El despliegue de estos dispositivos puede alterar la dinámica rotacional del satélite al disipar energía, ya sea por impacto o por movimientos internos de masa, entre otros factores. Tareas como desarrollar requisitos y limitaciones físicas permiten desarrollar las capacidades necesarias en el marco del estudio de una problemática como la que se estudia en el presente informe.

En cuanto a la actualidad espacial, un tipo de satélite que ha cobrado mucha relevancia los últimos años es el cubesat, los cuáles son una clase de nanosatélites, tienen dimensiones estándar (Unidades o “U”) de 10 [cm] x 10 [cm] x 10 [cm], pueden estar en una configuración de 1U, 2U, 3U o 6U, con un peso típico de 1.33 [kg] por U [5]. La ventaja de este tipo de satélites está en su bajo costo de implementación, esto es parte de la filosofía NewSpace, la cual se basa en crear dispositivos más rápido y barato, esto es posible gracias a los bajos costes y a la miniaturización cada vez mayor de los componentes electrónicos. Los nanosatélites permiten algo que tradicionalmente solo era posible para grandes agencias espaciales y compañías con gran capacidad, actualmente el acceso al espacio está más al alcance de empresas que antes no habrían podido costear una misión espacial satelital [6].

Además de sus ventajas, tal como cualquier sistema aeroespacial, una de sus características inherentes, es lo limitados que se encuentran en la cantidad de energía que pueden almacenar, ya sea en forma de

combustible o baterías, por lo tanto, no se pueden controlar de forma constante si existe la restricción de ahorrar energía. Este fue el caso del Explorer One, cuya historia fue mencionada en la sección anterior de este capítulo, no tenía actuadores para controlar la actitud y producto de las disipaciones de energía cambió su eje de rotación. En este contexto, hay que considerar las posibles disipaciones de energía y como se puede controlar este comportamiento considerando las limitaciones mencionadas.

1.3 Mecanismos de disipación de energía

Algunas disipaciones de energía cinética se producen por el movimiento interno de masas, uno de los fines de hacer esto es para hacer control pasivo de un satélite. En el trabajo citado [7], se analiza la estabilidad de un satélite en su eje de giro en spin donde se produce disipación de energía interna producto del movimiento interno de una masa puntual. El movimiento de la masa ocurre en un plano perpendicular al eje de spin. Se hace un análisis de la estabilidad de la rotación del satélite en los ejes perpendiculares al eje de spin y se determinan los niveles de empuje en base a las disipaciones de energía interna, es decir, el empuje que permite una rotación estable está limitado por las masas, amortiguamientos y rigideces del sistema. Cabe destacar que la disipación de energía es producto del amortiguamiento, es decir por la existencia de una constante de amortiguamiento mayor a 0.

Tal como se mencionó antes, un satélite cuenta con una serie de elementos no rígidos externos, tales como antenas y paneles solares. Es muy común en las misiones espaciales utilizar satélites con un centro rígido y paneles solares de geometría esbelta y flexibles, debido a estas características físicas, se generan vibraciones, en las que también existe una componente de amortiguamiento. Sin embargo, dadas las propiedades flexibles de los paneles solares, la deflexión de estos tiene un efecto importante en el rendimiento dinámico y el control del satélite. Por esta razón controlar la vibración producida por estos dispositivos es un tema muy importante relacionado al control de satélites con estructuras flexibles. [8]

Es importante destacar que la disipación de energía no solo se produce producto del movimiento de componentes internos o externos. Otra causa es el movimiento libre de fluidos en el interior del satélite, tales como combustible o líquidos para experimentos en ambiente espacial.

1.4 Actualidad nacional satelital

Dentro del contexto del proyecto es muy importante mencionar el contexto espacial del país. Recientemente fue lanzado el FaSat-Delta, operado por la FaCh (Fuerza aérea de Chile), es el primer satélite del SnSat (Sistema nacional satelital), el cual está orbitando a una altura de 550 km [9]. Otro proyecto nacional satelital es el SUCHAI (Satellite of the University of Chile for Aerospace Investigation) es el primer satélite desarrollado completamente en Chile, es un cubesat 1U utilizado para la investigación científica, orbita a una altura de 505 [km] [10,11]. Otros satélites, de la misma casa de estudios, son el SUCHAI 2, SUCHAI 3 y PlantSat, los cuales son cubesats en una configuración 3U todos orbitando en la región LEO (Low Earth Orbit), al igual que su predecesor, se

utilizan para la investigación científica, todos ellos con misiones diferentes, tales como el estudio de sistema de comunicación, imágenes y experimentos biológicos [12]. Por lo anterior los resultados del estudio de la problemática pueden ser relevantes para el desarrollo de futuros proyectos satelitales.

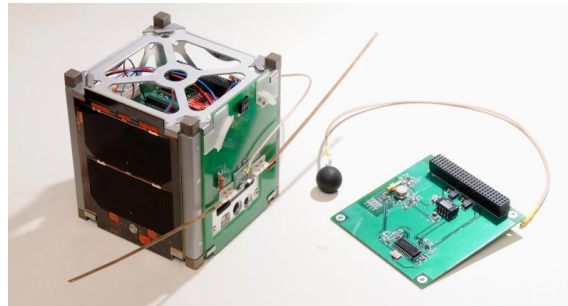


Figura 1.3: Satélite SUCHAI (Cubesat 1U) (Fuente [12])

1.5 Objetivos

Objetivo general:

Desarrollar un modelo físico que permita estudiar el efecto de los mecanismos de disipación de energía cinética en la dinámica rotacional de un satélite de interés nacional. Estudiar el movimiento libre del satélite en distintos escenarios de disipación de energía, en cada uno de ellos, cuantificar el efecto de disipación de energía mediante la magnitud de magnitudes físicas.

Objetivos específicos:

1. Modelar la dinámica y cinemática rotacional del satélite utilizando las ecuaciones de Euler de rotación de cuerpo rígido.
2. Verificar los resultados del modelo en condiciones de movimiento libre y sin disipación interna de energía, es decir, movimiento de cuerpo rígido.
3. Modelar un elemento rotativo interno que genere disipación de energía.
4. Modelar elementos estructurales no rígidos externos al satélite. Esto con el objetivo de simular elementos no rígidos externos, tales como antenas y paneles solares.
5. Desarrollar un modelo que permita integrar ambos mecanismos de disipación interna de energía.
6. Cuantificar el efecto de disipación de energía cinética mediante la magnitud de las velocidades angulares, la energía cinética rotacional y el momento angular.

1.6 Hipótesis

Se desarrolla un modelo físico matemático que permita:

Analizar el estado de la dinámica rotacional del satélite en distintos escenarios de disipación de energía. Se espera desarrollar un modelo que permita analizar ambos mecanismos de disipación de energía propuestos en los objetivos, y utilizar el modelo para entender el efecto de la disipación de energía sobre la dinámica del satélite.

1.7 Metodología

Para el desarrollo del proyecto se propone la siguiente metodología:

Formulación fisicomatemática: Mediante las ecuaciones de Euler obtener los resultados que representen la rotación de un cubesat en los 3 ejes de giro, es decir, se tendrían 3 ecuaciones diferenciales de rotación. En la modelación no se consideran perturbaciones, ya que el foco son las fuentes internas de disipación de energía.

Verificación del modelo: Verificar los resultados realizando una comparación con modelos estudiados en la literatura. Este es un paso intermedio en el transcurso del proyecto, ya que previo a estudiar resultados que involucren disipación de energía interna, se debe verificar que el modelo se comporte de forma realista considerando únicamente la hipótesis de cuerpo rígido, sin disipación de energía.

Disipación de energía por rotación interna de masas: Utilizar el modelo de cuerpo rígido ya formulado para estudiar el movimiento del satélite en condiciones donde se disipe energía producto del roce entre el elemento rotativo y su eje. Para hacer esto, al sistema ya formulado se acopla 1 ecuación diferencial, en la literatura revisada para el contexto del proyecto se encontraron trabajos en los que el elemento rotativo representa un elemento de rotación pasiva para estabilizar el satélite o un actuador para controlar la actitud del satélite.

Disipación de energía por movimiento externo de masas: La idea de este paso es simular y analizar los resultados de un modelo en el que la disipación de energía se produzca por el movimiento de elementos no rígidos que están en la parte externa del satélite, paneles solares y antenas. Debido a las características de la modelación de elementos no rígidos es necesario realizar simplificaciones, la más importante de ellas es discretizar el elemento no rígido despreciando los modos de alta frecuencia. La discretización se basará en aquellos trabajos donde se estudia la influencia de los elementos no rígidos en la dinámica del satélite.

Análisis de resultados: En el transcurso del proyecto, se hará un análisis de sensibilidad de distintas condiciones de disipación de energía, variando parámetros que caractericen la disipación de energía. Para el análisis se consideran las velocidades de rotación del satélite con respecto al eje inercial, la magnitud del momento angular y la energía cinética rotacional.

Plataforma de cálculo: Para ejecutar todos los cálculos descritos en los pasos anteriores se utilizará un computador personal, el lenguaje de programación utilizado será Python.

1.8 Carta Gantt

La Carta Gantt de la organización del proyecto se encuentra en el Anexo A.1 Carta Gantt.

CAPÍTULO 2: Marco teórico

Tal como se mencionó en el capítulo anterior, el foco del proyecto es el estudio de la dinámica rotacional y cómo las disipaciones de energía afectan a su comportamiento. En este capítulo se presentan algunas definiciones clave, necesarias para comprender correctamente el desarrollo del proyecto.

2.1 Marcos de referencia

Quando se estudian cuerpos en rotación, es necesario definir los marcos de referencia en los cuáles serán planteadas las ecuaciones. En la Figura 2.1 se presentan los dos marcos relevantes en el desarrollo de este proyecto. El primero de ellos, el marco de referencia inercial no acelera ni rota. Por otro lado, está el marco de referencia no inercial, puede acelerar y además rotar a una velocidad angular $\vec{\Omega}$, esta velocidad se puede definir en términos del marco de referencia no inercial. Convenientemente está centrado en el punto G (centro de masa) del cuerpo en rotación y su velocidad angular $\vec{\Omega}$ es la misma que la velocidad angular del cuerpo en rotación $\vec{\omega}$, es decir $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$. [13]

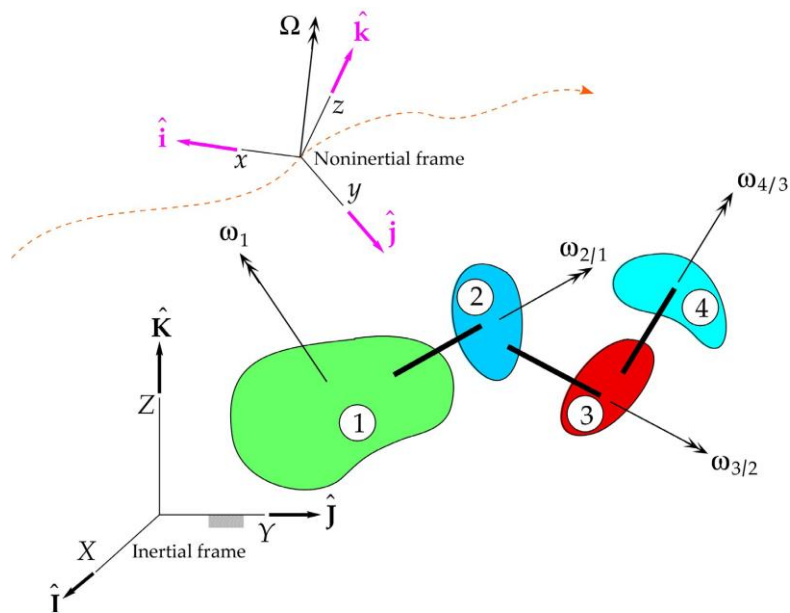


Figura 2.1: Marcos de referencia. (Fuente [13])

Para una mejor comprensión de los marcos de referencia, se presenta en la Figura 2.2 un marco de referencia fijo a los ejes principales de inercia de un satélite cubesat 3U. Este es el marco de referencia que se utilizará para el planteamiento de las ecuaciones de rotación.

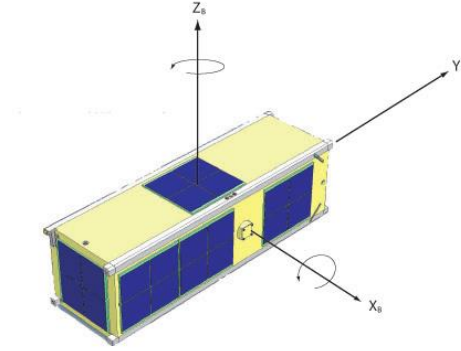


Figura 2.2: Marco de referencia fijo al satélite. (Fuente [14])

Para comprender mejor el marco de referencia inercial o marco ECI (Earth centered Inertial), se presenta la figura X, el marco de referencia inercial centrado en la tierra, lo importante de este marco de referencia es que no acelera ni rota. El marco ECI también se puede centrar en el satélite, de hecho como se verá más adelante las ecuaciones de rotación permiten obtener las velocidades angulares del *body frame* con respecto al marco ECI en términos del *body frame*.

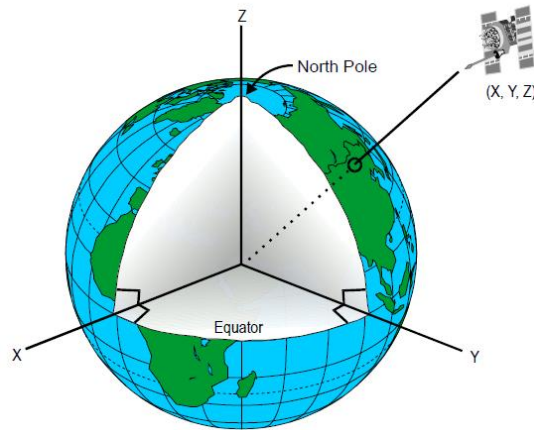


Figura 2.3: Marco de referencia inercial centrado en la Tierra (ECI). (Fuente [15])

2.2 Ecuaciones del movimiento

Para hacer el estudio de distintos mecanismos de disipación de energía, primero se deben plantear las ecuaciones de rotación de cuerpo rígido. La ecuación (1) define la cantidad de movimiento angular en un marco de referencia no inercial, es el primer paso para la obtención de las ecuaciones del movimiento.

$$\vec{H} = H_x \hat{i} + H_y \hat{j} + H_z \hat{k} \quad (1)$$

$$\vec{H} = [I] \vec{\omega} = I_x \omega_x \hat{i} + I_y \omega_y \hat{j} + I_z \omega_z \hat{k} \quad (1)$$

Donde $[I]$ es el tensor de inercia expresado en los ejes principales y ω_x , ω_y , ω_z son las velocidades angulares con respecto a los ejes principales. Para esta definición se considera que el marco de

referencia no inercial está alineado con los ejes principales de inercia y que los momentos de inercia son constantes en el tiempo [13].

A continuación, se muestran las ecuaciones de Euler que permiten obtener las velocidades angulares del marco de referencia del cuerpo con respecto al marco de referencia inercial, en términos del marco de referencia no inercial. El momento externo neto es igual a la derivada del momento angular. Al derivar de forma vectorial se obtienen las ecuaciones del movimiento en rotación.

$$\begin{aligned}\vec{M}_{net} &= \dot{\vec{H}} = \vec{0} \\ \dot{\vec{H}} &= (\dot{\vec{H}})_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{H}\end{aligned}\quad (2)$$

Seleccionando los ejes principales de inercia como el marco de referencia del cuerpo y haciendo el desarrollo correspondiente, se obtienen las ecuaciones de rotación de cuerpo rígido [13]. El momento externo es igual a 0 ya que en el caso de estudio de las disipaciones internas de energía no se considera el efecto de las perturbaciones externas.

$$I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z = 0 \quad (3)$$

$$I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x = 0 \quad (4)$$

$$I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = 0 \quad (5)$$

2.3 Relación entre la energía cinética y el momento angular

A partir de la integración de las ecuaciones (3), (4) y (5), se obtienen las velocidades angulares en los 3 ejes del marco de referencia del cuerpo. Este resultado permite el cálculo de la energía cinética rotacional [13]. La ecuación se presenta a continuación y es válida solo cuando el tensor de inercia es diagonal.

$$T_R = \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 \quad (6)$$

La energía también se puede definir en términos del momento angular, a continuación, se presenta la ecuación.

$$T_R = \frac{H_x^2}{2I_x} + \frac{H_y^2}{2I_y} + \frac{H_z^2}{2I_z} \quad (6)$$

Existe una forma gráfica de estudiar la relación que tienen las variables de energía y momento, esto es relevante, ya que en presencia de torque neto nulo el momento angular es constante. Esto significa que en un sistema coordenado donde cada uno de los ejes representa el momento angular en una dirección, la representación gráfica es una esfera, tal como se muestra en la siguiente ecuación.

$$|\vec{H}|^2 = H^2 = H_x^2 + H_y^2 + H_z^2 \quad (7)$$

Mientras que la energía cinética forma un elipsoide, cuya ecuación se presenta a continuación.

$$1 = \frac{H_x^2}{2T_R I_x} + \frac{H_y^2}{2T_R I_y} + \frac{H_z^2}{2T_R I_z} \quad (8)$$

La intersección de ambas geometrías representa las posibles trayectorias de $\vec{\omega}$. Un ejemplo genérico de esto se puede apreciar en la Figura 2.4, donde cada uno de los ejes corresponde al momento angular en uno de los 3 ejes principales de inercia del cuerpo rígido [16].

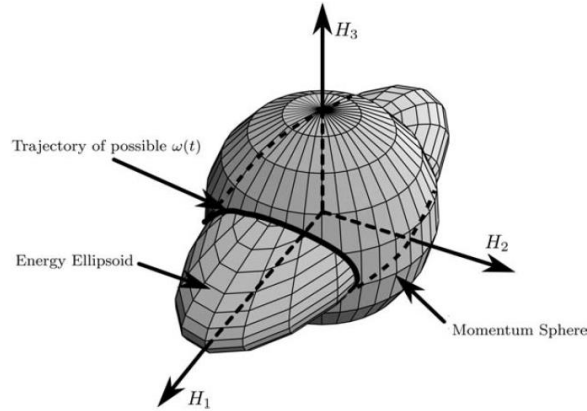


Figura 2.4: Esquema general de la intersección de la energía y el momento angular (Fuente [16]).

A continuación, en la Figura 2.5 se presenta un ejemplo de la representación gráfica mencionada para casos de mínima energía, energía intermedia y máxima energía.

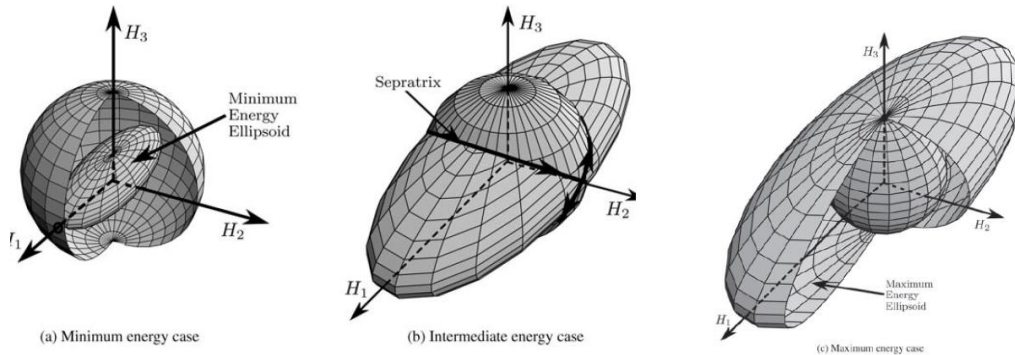


Figura 2.5: Estados de mínima, intermedia y máxima energía respectivamente. (Fuente [15]).

Si se considera que los momentos de inercia cumplen la relación de $I_x \geq I_y \geq I_z$, entonces esto significa que un estado de máxima energía según la Figura 2.5, corresponde a un giro en torno al eje de mínima inercia, mientras que un estado de mínima energía corresponde a rotación en torno al eje 1 de máxima inercia [16]. Estos son algunos aspectos generales que servirán para futuros análisis dentro del proyecto.

La importancia de esta representación gráfica radica en que es una herramienta muy útil para el estudio de la rotación de cuerpo rígido. Algunas ventajas es que permite visualizar el eje instantáneo de

rotación del cuerpo rígido, es decir, la dirección de su velocidad angular $\vec{\omega}$, además de visualizar el estado de energía en el que se encuentra el cuerpo rígido. Es una herramienta utilizada en algunos trabajos afines al presente proyecto, trabajos que serán revisados en el capítulo estado del arte.

2.4 Dinámica de elementos flexibles

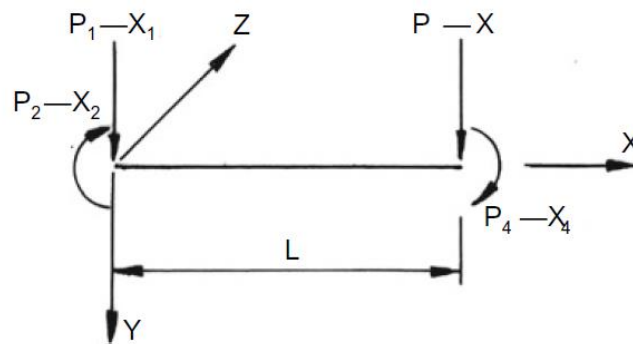
Algunas disipaciones de energía vienen dadas por el amortiguamiento asociado a la deflexión de componentes del satélite, como los paneles solares, en el capítulo de estado del arte se profundizará en este tema. Mediante el MEF (Método de elementos finitos) se puede discretizar un sólido para obtener sus ecuaciones del movimiento y así, calcular sus desplazamientos, esto significa que un sólido continuo se reduce a una cantidad finita de elementos formado por una cierta cantidad de nodos, donde cada uno de ellos tiene un determinado número de grados de libertad, cada grado de libertad es una ecuación del movimiento. La forma general de la ecuación del movimiento, que engloba a todos los grados de libertad se presenta a continuación.

$$[M]\ddot{\vec{x}} + [C]\dot{\vec{x}} + [K]\vec{x} = \vec{f} \quad (9)$$

Donde \vec{x} corresponde el vector de grados de libertad, $[M]$ es la matriz de masa, $[C]$ es la matriz de amortiguamiento, $[K]$ es la matriz de rigidez y \vec{f} es el vector de cargas externas. [17]

El tipo de elemento usado para la discretización depende de varios factores, tales como la geometría del sólido que se quiere modelar o el costo computacional. En efecto, se intenta reducir al máximo el costo computacional utilizando un elemento de viga para la discretización, esta aproximación también fue usada en el estudio de la referencia [7].

En cuanto a la modelación del elemento de viga, éste está compuesto por 2 nodos con 2 grados de libertad cada uno, desplazamiento y rotación. En la Figura 2.6 se presenta un esquema del elemento de viga y el vector de desplazamientos lineales y angulares.



$$\vec{x} = [w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2]^T$$

Figura 2.6: Elemento de viga para la discretización mediante MEF (Fuente [17]).

La matriz de masa corresponde a la matriz de masas concentradas para una viga en flexión, tal como se muestra a continuación.

$$[M] = \begin{pmatrix} m/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde m es la masa de un panel. Luego, la matriz de rigidez se define a partir de las relaciones constitutivas de mecánica de sólidos y la discretización mediante MEF. Mediante el principio de mínima energía potencial es posible obtener la solución que se presenta a continuación. [17]

$$[K] = \int_0^a \int_0^b [B]^T [D] [B] dx dy$$

Donde a y b representan el largo y ancho del elemento de placa, la matriz $[B]$ es la relación entre deformación y desplazamiento, se obtuve a través del planteamiento de las funciones de forma que permiten interpolar el desplazamiento a lo largo del elemento. La matriz $[D]$ representa la relación constitutiva entre esfuerzo y deformación. [17]

$$[K] = \frac{E\bar{I}}{L^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix}$$

Esta matriz corresponde a la matriz de rigidez de una viga en flexión, E es el módulo de elasticidad del material del panel, \bar{I} es el segundo momento de área y L es el largo, o sea, la distancia entre el extremo fijo y el extremo libre.

CAPÍTULO 3: Estado del arte

En este capítulo se muestra la literatura asociada a las disipaciones de energía en satélites, algunos puntos importantes, son como puede afectar a la dinámica del satélite, debido a perturbaciones internas y como esto puede servir para estabilizar un satélite.

3.1 Disipación de energía en dual spin SC

Un concepto importante son los DSSC (Dual spin spacecraft). Este tipo de satélites es un sistema donde la actitud es estabilizada de forma pasiva mediante el acople de un volante de inercia. En el caso de un cuerpo rígido solo el eje rotación en torno al eje de máxima inercia es estable en presencia de disipaciones de energía, en varias aplicaciones sería una gran ventaja poder estabilizar un satélite en torno a cualquier eje. Un ejemplo de esta aplicación es los satélites de órbita GEO (órbita geoestacionaria), los cuales deben mantenerse apuntando hacia un punto en la tierra, para esto se requiere que la velocidad angular sea de una revolución por órbita, donde esta velocidad se mantiene por la acción de dispositivos similares al descrito en el párrafo anterior. Desde un punto de vista más general este tipo de satélites representan cualquier satélite que utilice una rueda de reacción o un CMG (rotor de control de momento) [16].

Debido a la importancia de este tipo de satélites es que el estudio de estos sigue siendo una de las partes importantes de la dinámica orbital moderna y la dinámica de la actitud de las naves espaciales. Esta área de investigación está estrechamente relacionada con trabajos clásicos del movimiento angular de cuerpos rígidos. En otras palabras, el problema de la dinámica de actitud de la DSSC es un campo independiente y amplio en la astronáutica y la mecánica clásica, que abarca muchos aspectos importantes del movimiento no perturbado/perturbado bajo la influencia de diversas perturbaciones externas e internas. [18]

En el trabajo [19], se estudia las oscilaciones de nutación de un DSSC con un amortiguador de la rotación. En la Figura 3.1 se presenta un esquema del modelo. El objetivo de este trabajo fue determinar los parámetros del sistema mediante los cuales las oscilaciones de nutación son amortiguadas con la mayor velocidad. Para evaluar la velocidad de la respuesta transitoria se utiliza un parámetro ξ , llamado grado de estabilidad. Cabe destacar que esta evaluación se hace sobre un sistema linealizado de las ecuaciones del movimiento.

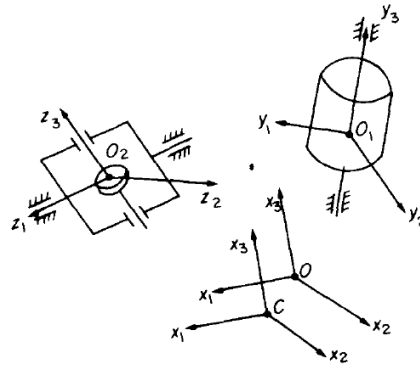
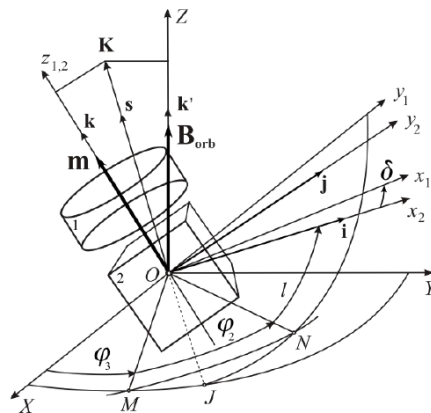


Fig. 1. Dual-spin satellite with a gyro-damper.

Figura 3.1: Modelo de DSSC con giro-amortiguador (Fuente [19])

En [18] se trabaja en la línea de investigación analítica de los problemas de dinámica de actitud con enfoque en la rotación de un DSSC magnético bajo la influencia del campo magnético constante. Primero se desarrolla un modelo de la dinámica de la actitud del DSSC, donde el rotor interno que caracteriza a los DSSC es un imán permanente con un cierto momento dipolar magnético, cuya magnitud es una variable de control, debido a esta característica el DSSC se encuentra sometido a un momento de restauración externo generado por el campo magnético de la tierra. El trabajo consiste en desarrollar, mediante herramientas matemáticas, soluciones analíticas para este problema. En la Figura 3.2 se muestra el modelo físico para este problema.

**Figura 3.2: Modelo de DSSC magnético (Fuente [19])**

En el trabajo anterior se considera un modelo ideal para el rotor, no se consideran disipaciones de energía por roce, lo cual no es completamente realista, ya que los dispositivos que se pueden modelar como el rotor de un DSSC, tienen una cierta cantidad de roce residual que genera disipaciones de energía.

En otro trabajo más reciente [20] se desarrolla un modelo de un girostato, se trata de un cuerpo rígido llevando un rotor, tal como un DSSC. Una de las aplicaciones de este estudio el control pasivo en satélites. En la Figura 3.3 se muestra el esquema del modelo.

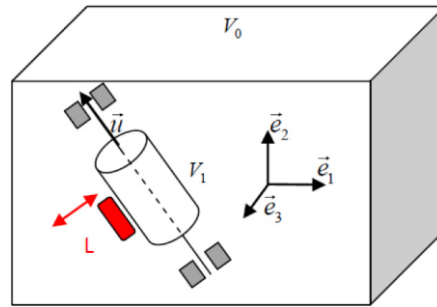


Figura 3.3: Modelo generalizado para el análisis de un girostato (Fuente [20])

La característica principal de este estudio es que no utiliza energía para llevar al satélite a una condición de estabilizar el satélite en un eje de giro, es decir es control pasivo. Existen una acción de control, que es liberar o bloquear la rotación relativa del rotor, para ejecutar el bloqueo, se debe hacer en el instante que la velocidad angular relativa del rotor sea nula. La conclusión es que se debe considerar una cierta cantidad de fricción entre el rotor y su eje para generar una disipación de energía que estabilice el satélite en un cierto eje de rotación [20].

En los trabajos mencionados se puede notar la misma lógica, el objetivo es estabilizar la actitud de un satélite para lograr una orientación específica en función de la aplicación. El enfoque del presente proyecto es estudiar que ocurre con la cinemática del satélite en presencia de mecanismos de disipación de energía tales como los mencionados. Anteriormente se mencionó que un DSSC permite modelar un satélite equipado con dispositivos rotatorios como ruedas de reacción. Para establecer la diferencia entre el presente trabajo y los anteriormente citados, en términos generales, es utilizar modelos como los anteriores y estudiar la cinemática del satélite cuando una acción de control no está siendo ejecutada.

3.2 Disipación de energía por elementos no rígidos

Hasta ahora se ha revisado la literatura sobre los DSSC y como se pueden utilizar para hacer control pasivo. Sin embargo, hay muchas otras formas en las que se pueden producir disipaciones de energía en un satélite, una de ellas, es el amortiguamiento asociado a la deformación de elementos no rígidos.

Conforme indica el texto citado [19], para cuerpos ligeramente no rígidos, los momentos de inercia en estados deformados apenas difieren de los de su estado no estresado. Por lo tanto, el único movimiento rotacional estable para cuerpos no rígidos y disipativos en libertad es la rotación alrededor del eje principal máxima inercia.

El argumento anterior no constituye una prueba de su conclusión, ya que se basa en varias suposiciones no comprobadas. Principalmente, entre estas suposiciones se encuentran: (1) que para el "movimiento de cuerpo rígido" de un cuerpo no rígido, el vector de velocidad angular debe ser paralelo a un eje principal, y (2) que la energía mecánica total de un cuerpo deformable es aproximadamente igual a la energía cinética, por lo que los cambios en la energía potencial ("energía de deformación") pueden ser despreciados. El último supuesto se descarta de la discusión, ya que para analizar las

disipaciones de energía hay que considerar esas variaciones dadas por el amortiguamiento asociado a la deformación.

Las implicaciones de la suposición (1) son más cruciales en este contexto. La validez de esta suposición depende principalmente de la naturaleza de la deformabilidad del cuerpo; si cada punto del cuerpo puede moverse con respecto a cualquier otro punto, como en un sólido elástico, la suposición puede ser válida, pero si el cuerpo consta de elementos rígidos separadas que pueden moverse entre sí de formas restringidas, el cuerpo puede ser capaz de realizar movimientos que contradicen esta suposición [21].

Relacionando la explicación anterior con la literatura, en el trabajo citado se analiza la disipación de energía en satélite un satélite de órbita GEO que lleva paneles solares. Se utiliza FEM (Finite element method) para modelar la deflexión dinámica de los paneles solares, en la Figura 3.4 se muestra un esquema del satélite modelado. En el estudio se utiliza el modelo de cuerpo rígido en cada iteración para obtener una matriz de inercia nueva en cada paso de tiempo, es la forma de modelar la variación en el tiempo del tensor de inercia rotacional del sistema. De esta forma se hace un análisis de sensibilidad de la energía cinética rotacional considerando distintos valores del coeficiente de amortiguamiento. La contribución de este estudio está en la modelación de la rotación no uniforme de restos espaciales y satélites que dejan de operar. [22]

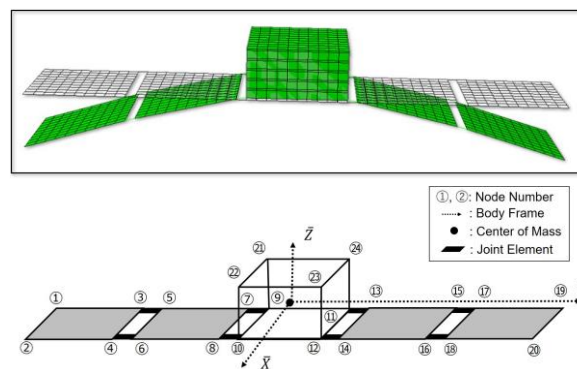


Figura 3.4: Modelo de elementos finitos de satélite con paneles solares (Fuente [22])

Otro enfoque en el tópico de los satélites flexibles es el control de las vibraciones que se producen debido a maniobras de apuntamiento, éstas maniobras de causarán vibraciones en los elementos flexibles del satélite. Estas vibraciones podrían alterar el rendimiento del satélite y su misión, por lo que es importante controlarlas.

En el trabajo [23], se desarrolló un modelo de dinámica rotacional de tres ejes de un satélite flexible orbitando la tierra. El modelo del satélite consiste en un módulo central rígido y dos paneles flexibles con capas piezoeléctricas representativas de sensores y actuadores. En la Figura 3.5 se presenta un esquema del modelo estudiado.

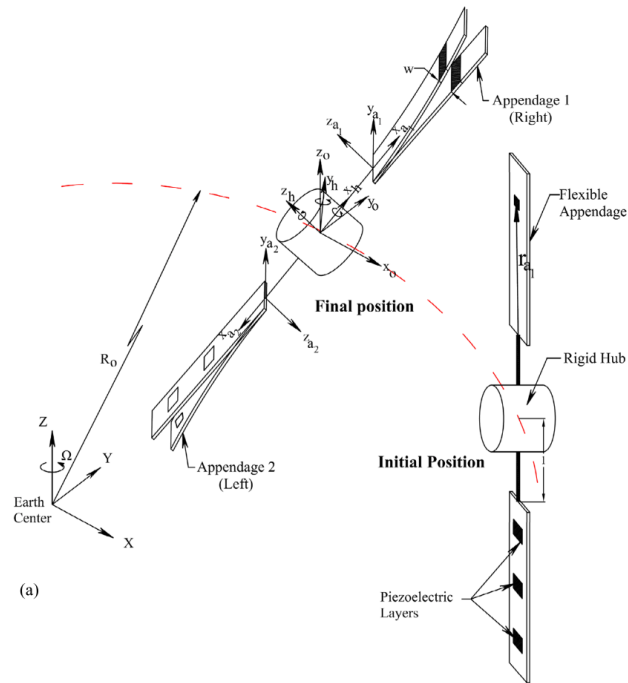


Figura 3.5: Esquema del satélite flexible (a) en la trayectoria orbital y (b) el sistema de referencia utilizado (Fuente [23]).

El objetivo de este estudio fue derivar las ecuaciones del movimiento, controlar la orientación en los 3 ejes del satélite y controlar la vibración de los paneles. La obtención de las ecuaciones del movimiento acopladas fue a través del método de Lagrange. Con respecto al control, se utilizó la teoría de la perturbación singular, el sistema se dividió en dos subsistemas, uno rápido y lento. Una estructura de control variable se aplicó al control de orientación del satélite (subsistema lento) y un control basado en la función de Lyapunov fue usado para suprimir las vibraciones de los paneles. [23]

En el trabajo anterior se estudió el control de las vibraciones de paneles solares causadas por maniobras del satélite, sin embargo, otro momento crítico en una misión satelital es el despliegue de los paneles solares, si ocurre una falla durante el despliegue de dichos elementos, podría ser un desastre para la misión. La investigación [24] es acerca del modelado de la dinámica de una satélite con paneles solares desplegables, equipados con un SEH (strain energy hinges), que en palabras simples funciona como una bisagra que tiene una propiedad física muy útil, adecuada para el despliegue de paneles solares.

Cuando los paneles solares se despliegan cada uno de los SEH actúan como un torque de restauración sobre el panel solar, este torque tiene un cierto efecto en la actitud del satélite. En [24] se deriva un modelo dinámico capaz de predecir con gran precisión el despliegue de paneles solares en el espacio. El modelo está compuesto por múltiples cuerpos rígidos conectados por miembros elásticos no lineales de masa despreciable, estos elementos representan el SEH, el cuál actúa como un resorte torsional sobre los paneles solares. De esta manera, el sistema de despliegue de paneles solares se puede modelar como una serie de cuerpos rígidos conectados mediante el SEH, este modelo se presenta en la Figura 3.6. Para la obtención de ecuaciones del movimiento se utilizó el método de

Lagrange y se consideró movimiento plano, en este proceso se consideró además la existencia de fuerzas disipativas en el despliegue de los paneles.

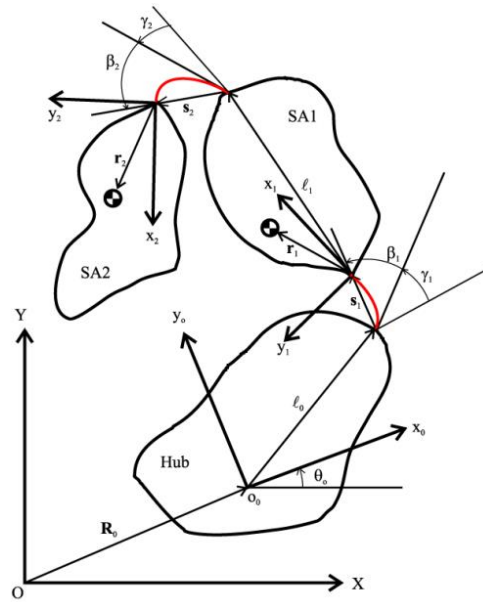


Figura 3.6: Modelo dinámico del sistema de despliegue de paneles (Fuente [24]).

CAPÍTULO 4: Modelo de cuerpo rígido

En este capítulo se construye un modelo de cuerpo rígido con el objetivo de verificar que la implementación del modelo se hizo correctamente, la importancia de esto radica en la obtención de resultados futuros correctos. El modelo de cuerpo rígido representa la rotación libre de una placa con sus 3 momentos de inercia diferentes, el objetivo es simular el teorema del eje intermedio para evaluar el desempeño del modelo.

4.1 Ecuaciones de cuerpo rígido

Se plantean las ecuaciones de rotación de cuerpo rígido, que ya se revisaron el capítulo 3. Cabe volver a destacar los supuestos de estas ecuaciones: (a) la velocidad angular del marco de referencia es igual a la velocidad angular del cuerpo en rotación y (b) el marco de referencia no inercial coincide con los ejes principales de inercia. Las ecuaciones (3), (4), (5) representan el conjunto de ecuaciones diferenciales que describe la rotación del satélite.

$$\dot{\omega}_x = -\frac{(I_z - I_y)}{I_x} \omega_y \omega_z \quad (3)$$

$$\dot{\omega}_y = -\frac{(I_x - I_z)}{I_y} \omega_z \omega_x \quad (4)$$

$$\dot{\omega}_z = -\frac{(I_y - I_x)}{I_z} \omega_x \omega_y \quad (5)$$

4.2 Resultados

Para comprobar la veracidad de los resultados se implementó uno de los ejercicios del texto citado [13]. En la Figura 4.1 se muestra el cuerpo en estudio, corresponde a una placa cuyos momentos de inercia principales son $I_x = 1000 \text{ [kg m}^2\text{]}$, $I_y = 300 \text{ [kg m}^2\text{]}$, $I_z = 800 \text{ [kg m}^2\text{]}$. La velocidad inicial del cuerpo es $\vec{\omega} = 10^{-8}\hat{i} + 10^{-8}\hat{j} + 1\hat{k} \text{ [rad/s]}$.

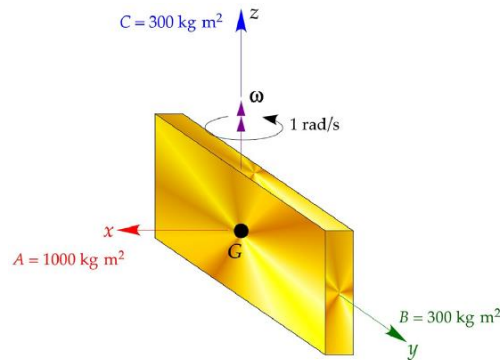


Figura 4.1: Placa rígida usada como ejemplo de implementación de modelo de cuerpo rígido (Fuente [13])

Para calcular los resultados se integraron las ecuaciones (3), (4) y (5). Para esto se utilizó el método de integración Runge-Kutta 45 de la librería Scipy de Python. Los resultados obtenidos se grafican en la Figura 4.2.

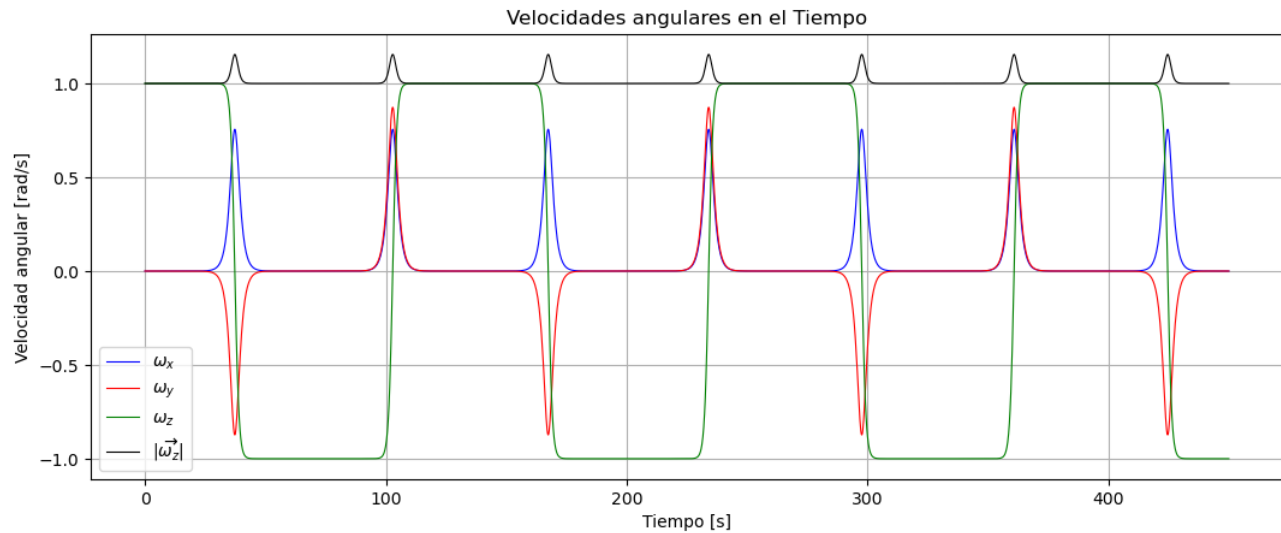


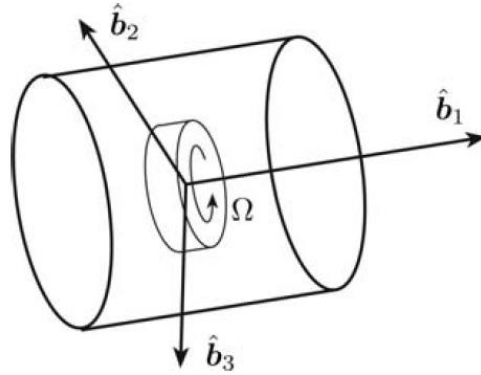
Figura 4.2: Velocidades angulares del modelo de cuerpo rígido

A partir de la Figura 4.2 y lo que se obtuvo en el texto citado [13], se concluye que el modelo de cuerpo rígido desarrollado permite modelar correctamente la rotación. Según la referencia [13] cuando existe una perturbación en los ejes de máxima o mínima inercia, estas perturbaciones se incrementarán en el tiempo, en el caso del ejercicio expuesto, la perturbación corresponde a una velocidad inicial de 10^{-8} [rad/s] en los ejes x e y. Los picos que se aprecian en la Figura 4.2 corresponden al crecimiento de las perturbaciones, físicamente lo que ocurre es un cambio de sentido del eje de rotación del eje z. Dado que no hay otro tipo de perturbaciones, tales como disipaciones internas de energía o torques externos, el comportamiento dinámico es periódico.

CAPÍTULO 5: Cálculo de la disipación de energía cinética en DSSC

Tal como se mencionó en el capítulo 3, los DSSC son un importante objeto de estudio en el campo aeroespacial. En este capítulo se implementa un modelo basado en el estado del arte para analizar lo que ocurre ante distintos escenarios de disipación de energía.

5.1 Modelo propuesto



A continuación, en la ecuación (9) se presenta el modelo para estudiar la disipación de energía en DSSC. Según el libro citado [15] se puede plantear las ecuaciones de dinámica de rotación de un DSSC mediante el siguiente planteamiento.

$$\vec{H} = \vec{M}_{\text{net}} = ([I_S] + [I_W])\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times ([I_S] + [I_W])\vec{\omega} + [I_W](\dot{\Omega}\hat{u}) + \vec{\omega} \times ([I_W](\dot{\Omega}\hat{u})) \quad (9)$$

Donde $\text{diag}([I_S]) = [I_{x,s}, I_{y,s}, I_{z,s}]$ son los momentos de inercia principales del satélite. $\text{diag}([I_W]) = [I_{x,w}, I_{y,w}, I_{z,w}]$ son los momentos de inercia principales del rotor, $\vec{\omega}$ es el vector velocidad angular del satélite, Ω es la velocidad angular del rotor relativa al satélite, \hat{u} es la dirección del eje del rotor en términos del marco de referencia del satélite, por lo tanto, es un vector constante en dicho marco. De la misma forma que se hizo en [18] se utilizó un vector $\hat{u} = (\cos(\theta), 0, \sin(\theta))$, para dirigir el eje del rotor en cualquier dirección en el plano del primer y tercer eje de los ejes principales de inercia.

El desarrollo de la ecuación anterior permite obtener el set de ecuaciones diferenciales que representan la dinámica del satélite.

$$I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z + J \cos(\theta) \dot{\Omega} + J \sin(\theta) \Omega \omega_y = 0 \quad (10)$$

$$I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z + J \cos(\theta) \Omega \omega_z - J \sin(\theta) \Omega \omega_x = 0 \quad (11)$$

$$I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y + J \sin(\theta) \dot{\Omega} - J \cos(\theta) \Omega \omega_y = 0 \quad (12)$$

Donde $\text{diag}([I_S] + [I_W]) = [I_x, I_y, I_z]$, J es el momento axial de inercia del rotor, de manera que si $\theta = 90^\circ$, $J = I_{z,w}$.

La cuarta ecuación está dada por el trabajo [18], es la ecuación que modela el rotor del DSSC.

$$J(\dot{\Omega} + \vec{\omega} \cdot \hat{u}) = -f\Omega$$

Donde f representa el coeficiente de fricción viscosa entre el rotor y su eje. Desarrollando la expresión anterior se obtiene la ecuación que permite modelar el rotor.

$$\dot{\Omega} + f\Omega + \dot{\omega}_x \cos(\theta) + \dot{\omega}_z \sin(\theta) = 0 \quad (13)$$

Haciendo el despeje correspondiente se pueden calcular las ecuaciones diferenciales con el método de integración RK45. En la Tabla 5.1 se presentan los valores de inercia y condiciones iniciales para el cálculo, estos valores están basados en la referencia [16].

Tabla 5.1: Momentos de inercia y condiciones iniciales del modelo del DSSC.

$I_{x,s}$	$I_{y,s}$	$I_{z,s}$	θ	$I_{x,w}$	$I_{y,w}$	$I_{z,w}$	$\omega_{x,0}$	$\omega_{y,0}$	$\omega_{z,0}$	Ω_0
15	8	6	90°	5	5	4	0.75	2	5.83	-29.98
[kgm ²]	[kgm ²]	[kgm ²]		[kgm ²]	[kgm ²]	[kgm ²]	[rad/s]	[rad/s]	[rad/s]	[rad/s]

5.2 Resultados obtenidos

En esta sección se muestran los resultados obtenidos de la integración numérica de las ecuaciones (10), (11), (12), (13). El cálculo fue hecho bajo tres escenarios de disipación de energía, con valores de f de 0.01, 0.05 y 0.1. Este corresponde a un análisis que no se había realizado en otros trabajos dentro del campo de estudio de los DSSC.

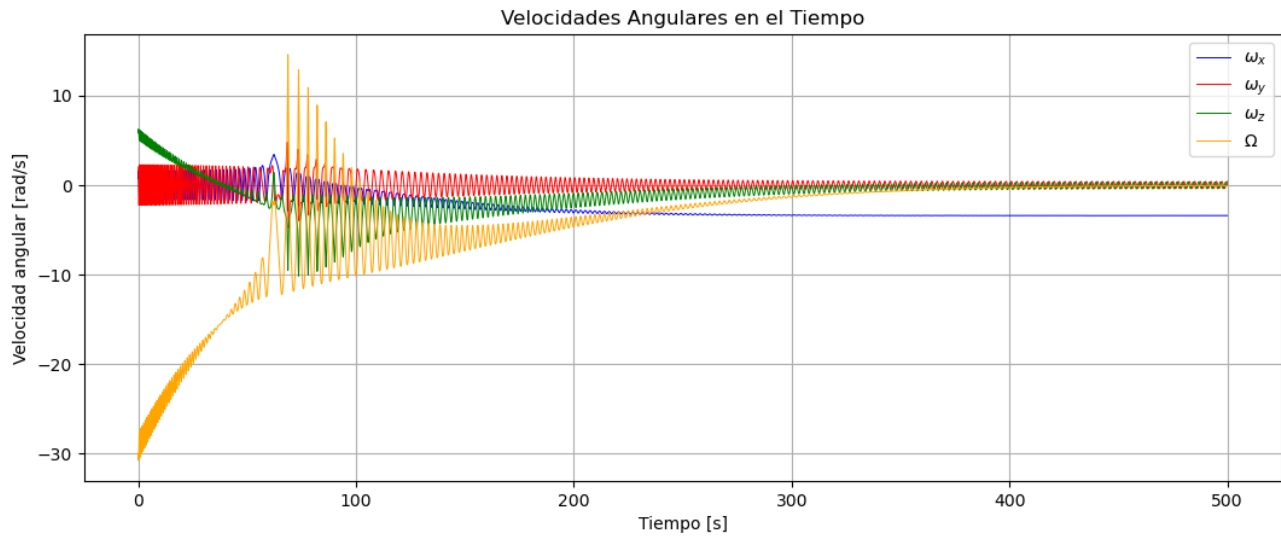


Figura 5.1: Velocidades angulares del DSSC con $f = 0.01$

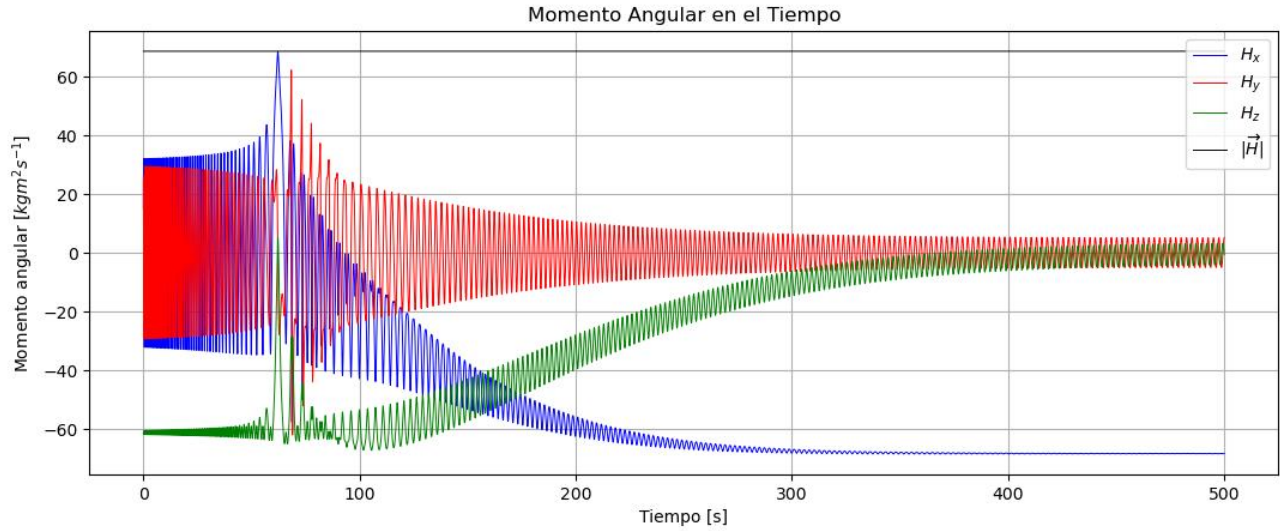


Figura 5.2: Momento angular del DSSC con $f = 0.01$

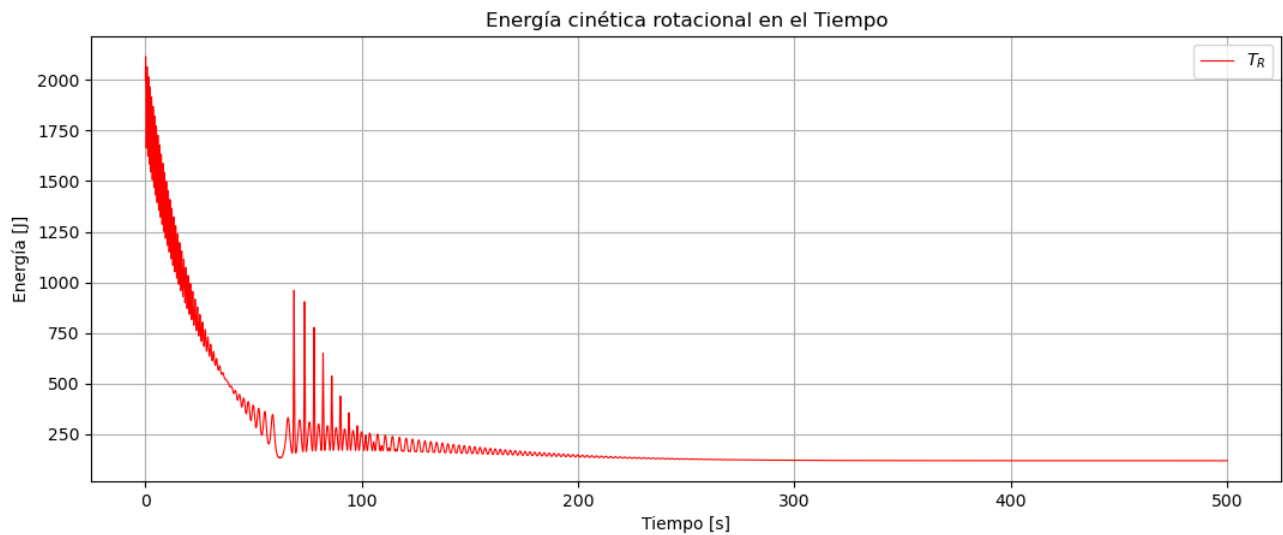


Figura 5.3: Energía cinética rotacional del DSSC con $f = 0.01$

De los resultados obtenidos para un f de 0.01 es posible notar la conservación del momento angular, de manera que la fricción del rotor solo disipa energía, no induce cambios en el momento angular. Además, de los resultados de las velocidades angulares, queda en evidencia el cambio de eje de rotación producto de la disipación de energía, el eje inicial de rotación está dado por la velocidad angular inicial, el eje final de rotación corresponde el eje de máxima inercia, este comportamiento queda evidenciado en la Figura 5.1, donde ω_x tiene un comportamiento oscilatorio al inicio de la simulación y alcanza un valor constante luego de 300 [s] aproximadamente. Para los casos con un f de 0.05 y 0.1, fue menor el tiempo en que se alcanzó un valor constante de ω_x . En los otros dos ejes se

mantiene una velocidad angular oscilatoria en torno a 0, este comportamiento se repitió en todos los escenarios de disipación de energía.

5.3 Análisis de sensibilidad de la energía cinética

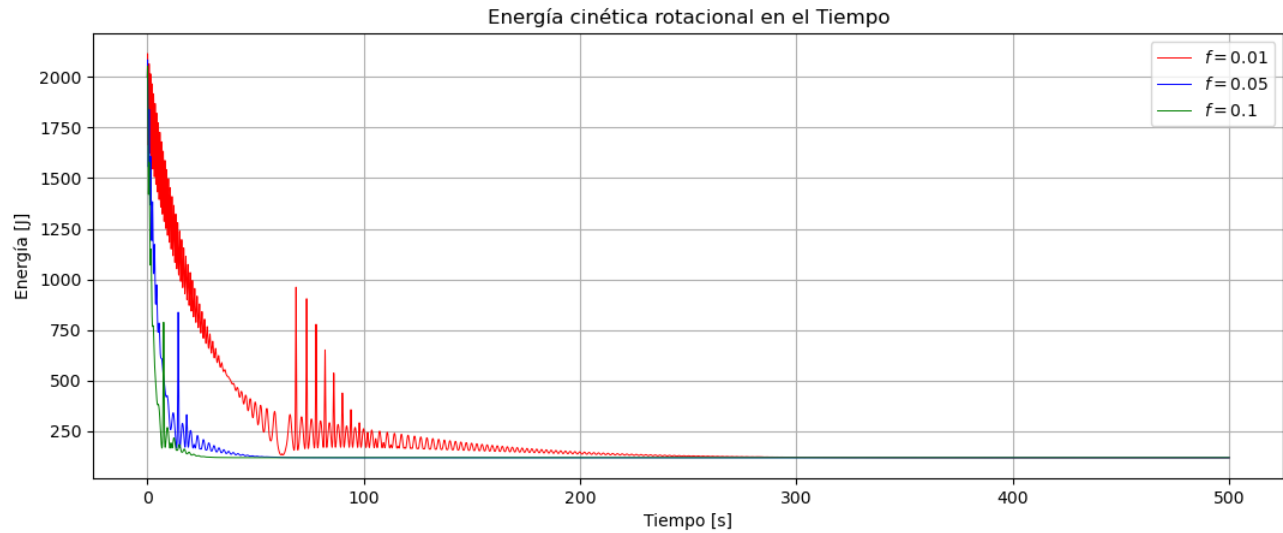


Figura 5.4: Energía cinética rotacional para los tres escenarios de disipación de energía.

En la Figura 5.4 se presenta la magnitud de la energía cinética rotacional en el tiempo para los tres escenarios de disipación de energía. Se aprecia que la disminución de energía ocurre con una tendencia exponencial, de la misma forma en que ocurre en el estudio de la referencia [20]. Es posible notar que cuanto mayor es el valor de f , más rápido se alcanza el estado de mínima energía, el cual no depende de f , según [15], el estado de mínima energía depende de las condiciones iniciales, es decir, del momento angular y los momentos de inercia del sistema.

CAPÍTULO 6: Disipación de energía por deformación de elementos flexibles

Como se mencionó en el CAPÍTULO 3: Estado del arte, una fuente interna de perturbación de la actitud de un satélite ocurre por la deflexión de elementos considerados no rígidos debido a las deformaciones bajo las cuales se pueden encontrar. El elemento que se estudia en este capítulo son los paneles solares de un cubesat 3U.

6.1 Modelo propuesto

Se propone estudiar la deflexión de paneles solares mediante el modelo de elementos finitos, de forma análoga a como se realizó en el estudio de la referencia [22]. Con el propósito de mantener la simplicidad, se modela una configuración con dos paneles acoplados al satélite, donde el extremo de acople está empotrado y la discretización consiste en dos masas en el punto de acople y en la mitad del panel respectivamente, esto se muestra en la Figura 6.1.

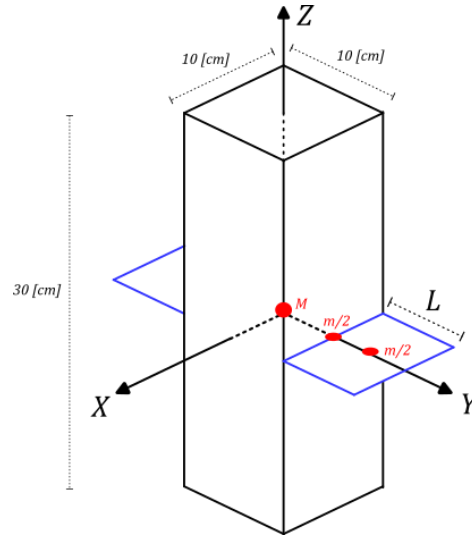


Figura 6.1: Discretización del Cubesat 3U con paneles solares desplegados.

En el capítulo de marco teórico se mencionó que la matriz de amortiguamiento se puede modelar como una combinación lineal de la matriz de masa y de rigidez.

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]$$

$$\alpha = \xi \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j}, \quad \beta = \xi \frac{2}{\omega_i + \omega_j}$$

Donde ω_i y ω_j son frecuencias naturales de vibración de los paneles asociadas a un factor de amortiguamiento ξ_i y ξ_j respectivamente [25], como aproximación y de forma análoga a lo que se hace en el estudio [23], se considera ambas frecuencias naturales son iguales y que ambas tienen el mismo factor de amortiguamiento asociado. En la Figura 6.2 se muestra una simulación de los paneles en vibraciones libres no amortiguadas, donde se calculó la frecuencia natural de forma aproximada con la cantidad de ciclos en 1 [s], y se obtuvo que la frecuencia natural $\omega_n = 25.02$ [Hz]. Como

aproximación, se considera que la frecuencia calculada es la que está asociada a todos los factores de amortiguamiento, esto es una aproximación porque un sistema amortiguado vibra a la frecuencia natural amortiguada.

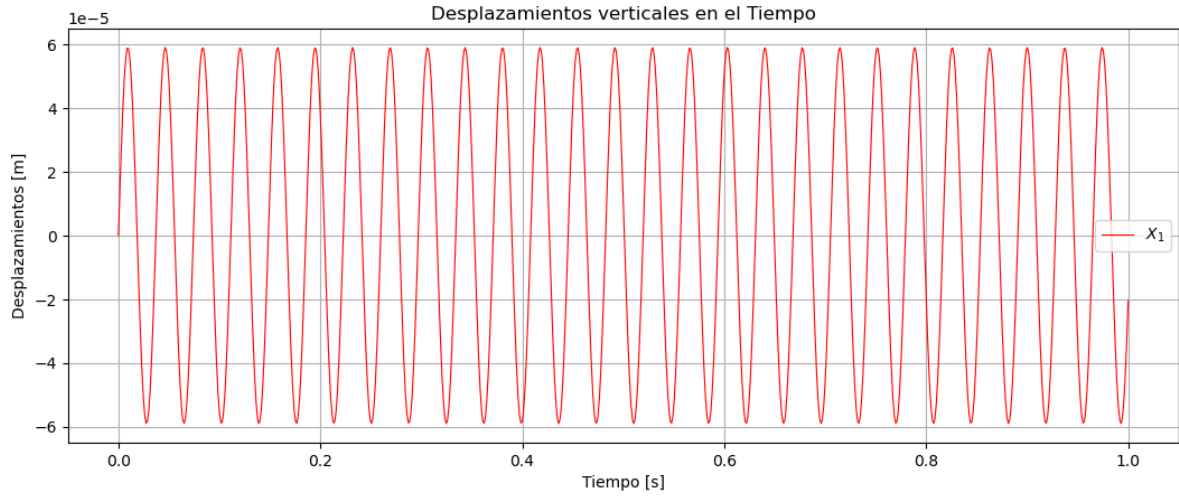


Figura 6.2: Simulación de los paneles solares con vibraciones libres no amortiguadas.

También cabe destacar que, dadas las simplificaciones en el modelo de elementos finitos, la vibración que se aprecia en la Figura 6.2 corresponde al primer y único modo de vibrar de los paneles, debido a que la flexión de los paneles se redujo a solo 1 grado de libertad.

Habiendo mencionado lo más importante en cuanto a la discretización de los paneles a continuación se presenta la expresión de la fuerza de excitación sobre los paneles, para esto hay que volver a la ecuación (9) de la dinámica estructural, con el vector estado de una viga en flexión de dos nodos.

$$[M]\ddot{\vec{x}} + [C]\dot{\vec{x}} + [K]\vec{x} = \vec{f}, \quad \vec{x} = [x_1, \theta_1, x_2, \theta_2] \quad (9)$$

Donde el término \vec{f} representa una excitación sobre los paneles. Esta excitación se modela como una matriz de aceleración tridimensional [23].

$$\vec{f} = [\omega^2 I_{3 \times 3} - \vec{\omega} \vec{\omega} - \dot{\vec{\omega}}] \vec{r}$$

Donde \vec{r} es la posición de cada nodo en el *body frame* y se obtiene a partir de la posición del nodo en condición de equilibrio y los desplazamientos \vec{x} calculados mediante MEF. En la Figura 6.3 se presenta la diferencia entre la posición nodal y los desplazamientos.

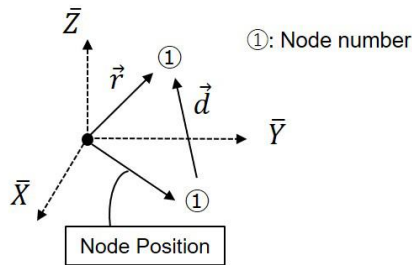


Figura 6.3: Posición y desplazamiento nodal en el body frame.

Luego, se definen las ecuaciones de rotación del satélite, estas ecuaciones incluyen el efecto de la variación de la inercia en el tiempo producto de la deformación de los paneles.

$$[I(t)]\dot{\vec{\omega}} = -\dot{[I(t)]}\vec{\omega} - [I(t)]\dot{\vec{\omega}} \quad (14)$$

Donde $[I(t)]$ es el tensor de inercia variable en el tiempo y $[I(t)]$ es su derivada en el tiempo. A continuación, se presenta la ecuación que permite obtener los tensores mencionados, tal como se mencionó en el capítulo de marco teórico, una posibilidad para la modelación de la matriz de masa es utilizar la matriz de masa concentradas, análogamente, los tensores de inercia se definen a partir de las masas concentradas.

$$[I(t)] = - \sum_{i=1}^N m_i \vec{r} \vec{r}$$

$$[I(t)] = - \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}} \dot{\vec{r}} + \sum_{i=1}^N m_i \vec{r} \dot{\vec{r}} \right)$$

Luego, se combinan las ecuaciones (9) y (14) para obtener la dinámica del satélite bajo el efecto de disipación de energía por deformación de los paneles. Para la simulación se aplicaron ciertos parámetros físicos y condiciones iniciales, las cuales se muestran en la Tabla 6.1, hay que destacar el hecho que para la simulación se utilizaron los momentos de inercia del satélite SUCHAI 3, un cubesat 3U.

Tabla 6.1: Parámetros para la simulación del satélite bajo el efecto de la deformación de paneles.

	Parámetro	Valor
Satélite	I_x	38910.833 [kg mm ²]
	I_y	38478.678 [kg mm ²]
	I_z	6873.717 [kg mm ²]
	$\omega_{x,0}$	1 [rad/s]
	$\omega_{y,0}$	1 [rad/s]
	$\omega_{z,0}$	1 [rad/s]
Paneles	m	46 [g]
	h	1.5 [mm]
	L	40 [mm]
	w	100 [mm]
	E	500 [MPa]
	$x_{1,0}$	0 [m]
	$x_{2,0}$	0 [m]
	$v_{1,0}$	0.01 [m/s]
	$v_{2,0}$	0.01 [m/s]

6.2 Resultados

A continuación, se presentan los resultados obtenidos a partir de la integración de las ecuaciones (9) y (14). El primer caso es para $\xi = 0.01$.

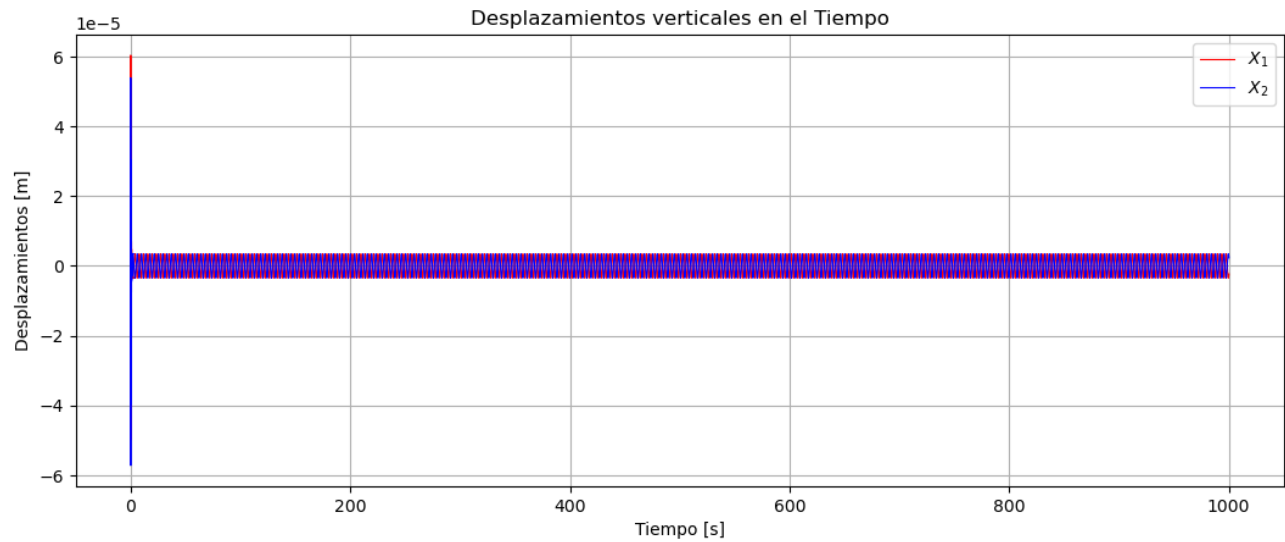


Figura 6.4: Desplazamiento verticales de los extremos libres de los paneles solares del satélite para $\xi = 0.01$.

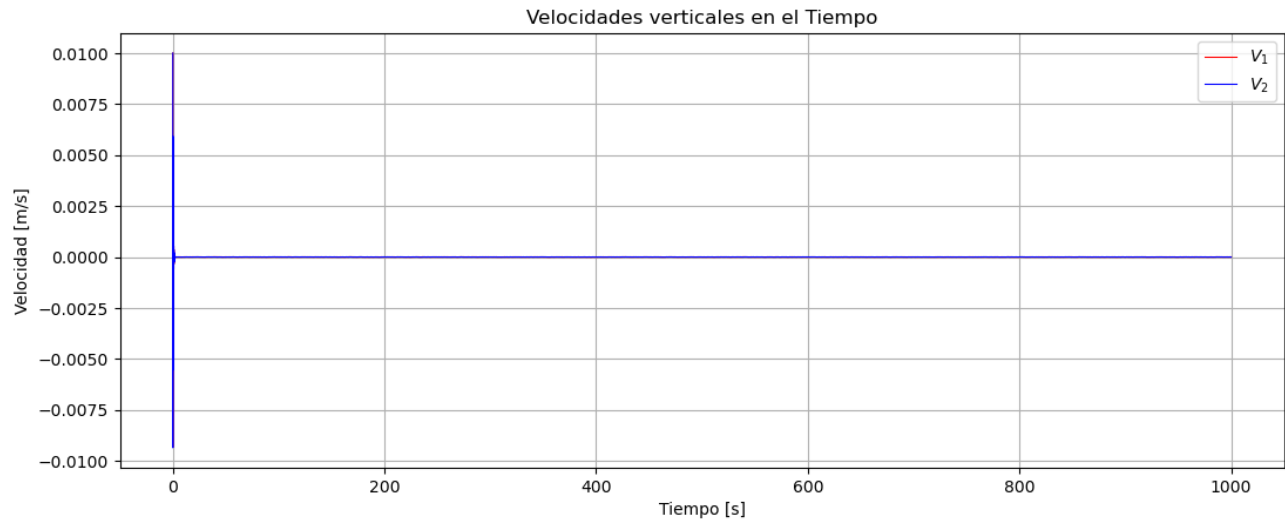


Figura 6.5: Desplazamiento verticales de los extremos libres de los paneles solares del satélite para $\xi = 0.01$.

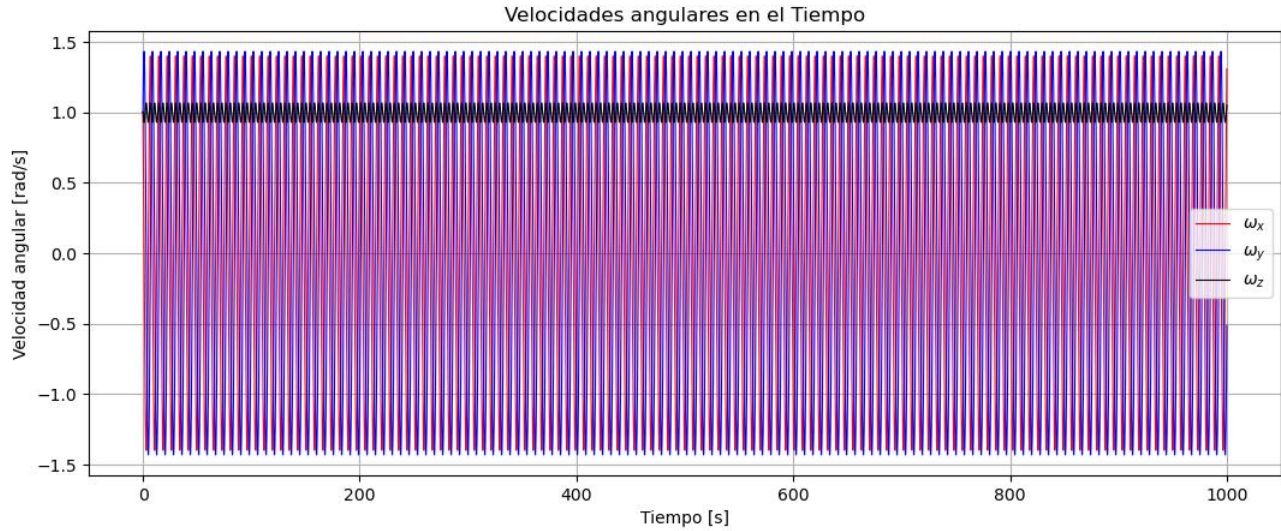


Figura 6.6: Velocidades angulares del satélite con $\xi = 0.01$.

De la Figura 6.4 se aprecia que la respuesta transitoria de los paneles es amortiguada en un periodo de tiempo no mayor a 20 [s] y además la amplitud estacionaria del desplazamiento de los extremos libres de los paneles está en el orden de 5 [μm]. Un comportamiento similar se puede apreciar en la Figura 6.5 donde se muestra la respuesta de la velocidad vibratoria de los paneles, donde la amplitud estacionaria es despreciable con relación a la velocidad inicial. Además, de la Figura 6.6, se aprecia que, en el lapso de la simulación, la dinámica del satélite no se vio afectada por la vibración de los paneles, esto debido a que se mantiene una amplitud constante de las 3 componentes de la velocidad angular. Este comportamiento se repitió para los casos de $\xi = 0.05$ y $\xi = 0.1$.

6.3 Análisis de sensibilidad para distintos valores del factor de amortiguamiento ξ

A partir de los resultados obtenidos de la integración de las ecuaciones (9) y (14), se hizo un análisis de la energía cinética del satélite con paneles solares. La ecuación mediante la cual se calculó la energía cinética se presenta a continuación, y corresponde a la suma de la energía cinética rotacional del satélite y la energía cinética de la vibración de los paneles.

$$T_R = \frac{1}{2}I_x\omega_x + \frac{1}{2}I_y\omega_y + \frac{1}{2}I_z\omega_z + \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

Donde I_x , I_y , I_z corresponden a los momentos de inercia del satélite con paneles y v_i son las velocidades verticales de la masa vibratoria de los paneles solares. En la Figura 6.7 se presenta un gráfico de la energía cinética para los tres casos analizados del factor de amortiguamiento.

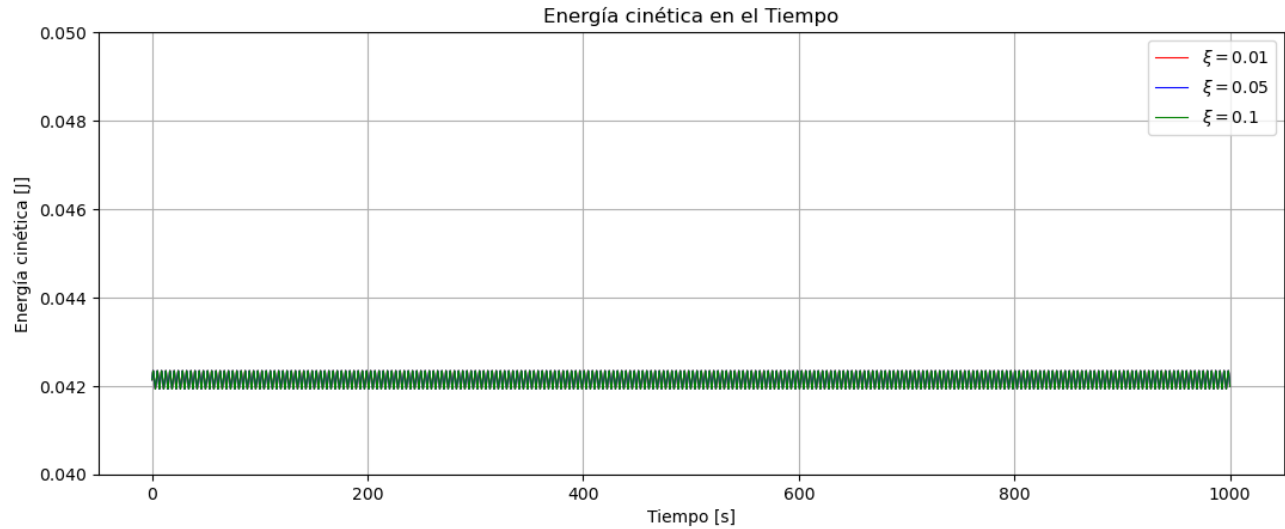


Figura 6.7: Energía cinética para los tres casos estudiados de ξ .

De la Figura 6.7 se aprecia que la energía cinética oscila en torno al mismo valor para los tres casos y que en el periodo de integración no disminuye su magnitud, la conclusión inmediata que se puede desprender del resultado anterior es que la vibración de los paneles en la configuración simulada no disipa energía de forma significativa para la dinámica del satélite.

Lo anterior no significa que los paneles solares no puedan producir disipaciones de energía, en el CAPÍTULO 3: Estado del arte se revisaron trabajos en los que la disipación de energía por deformación de paneles solares si era significativa para la actitud del satélite. Teniendo en cuenta lo anterior y el gráfico de la Figura 6.7, el resultado obtenido es atribuible a que la configuración en que se hizo la simulación tiene una inercia muy baja con relación al satélite, a diferencia de aquellas que se revisaron en la literatura, en las que las dimensiones de los paneles eran incluso mayores que las dimensiones de los paneles

Capítulo 7: Conclusiones

En este proyecto se ha hecho la simulación de dos escenarios de disipación de energía en los que se puede encontrar un satélite. Lo primero que se hizo fue investigar antecedentes históricos del tema, donde el más significativo de ellos fue la anomalía del cambio de eje de rotación que ocurrió con el Explorer One producto de la disipación de energía ocasionada por las antenas flexibles. Esto motivó a buscar como se solucionaba este problema en la actualidad.

A partir de investigaciones afines al tema se hizo un resumen de la teoría necesaria para desarrollar el tema, desde dinámica rotacional de cuerpo rígido, hasta método de elementos finitos. Teniendo una base teórica y la revisión del estado del arte se desarrolló el tema comenzando por una verificación de un modelo de cuerpo rígido, posteriormente, a este modelo se acoplaron las ecuaciones para la modelación de otros mecanismos de disipación de energía. Los mecanismos analizados fueron: disipación por un elemento rotativo interno, y disipación por deformación de paneles solares.

Se desarrollaron modelos que permitieron estudiar el efecto de la disipación de energía en satélite bajo los escenarios mencionados en el párrafo anterior. El primer modelo permitió verificar los resultados del modelo de cuerpo rígido, para esto se plantearon las condiciones necesarias para la simulación del efecto Dzhazibekov o teorema del eje intermedio, este primer modelo fue una base para la integración de otros escenarios de disipación de energía.

Posteriormente se desarrolló un modelo para estudiar la dinámica del satélite bajo el efecto de la disipación producto del roce en la rotación de un rotor interno, el modelo permitió estudiar escenarios en los que el roce fuera más o menos preponderante, esto se cuantificó mediante un factor constante f , proporcional a la velocidad de rotación del rotor.

El elemento rotativo mencionado puede representar, por ejemplo, ruedas de reacción o volantes de inercia utilizados para estabilizar satélites, que se sabe que su funcionamiento constituye una fuente de perturbación en la actitud del satélite. Específicamente, la perturbación analizada fue el roce al momento de encontrarse en rotación libre. De los resultados, se concluyó que cuanto mayor fuera el factor f , más rápido se estabiliza el satélite y alcanza el estado de mínima energía caracterizado por la rotación en torno al eje de máxima inercia.

El siguiente modelo desarrollado permitió analizar el efecto en el satélite cuando este tiene paneles solares que por su deformación disipan energía, en ciertas aplicaciones los paneles tienen una rigidez y dimensión tal que las maniobras del satélite causan vibraciones en los paneles, los cuáles también afectan negativamente la actitud del satélite. Para estudiar esto, se desarrolló un modelo de elementos finitos que permitiera modelar la deformación dinámica de los paneles y se acoplaron estas ecuaciones al modelo de cuerpo rígido inicial. De forma análoga al modelo anterior, se caracterizó el amortiguamiento de los paneles mediante el factor de amortiguamiento ξ . De los resultados se concluye que la configuración que se simuló con el modelo no alteró de forma significativa la dinámica del satélite.

En resumen, los modelos desarrollados permitieron analizar la respuesta del satélite, caracterizada por sus velocidades angulares en escenarios donde la disipación fuera más o menos preponderante, donde esta preponderancia estuvo caracterizada por un factor constante para los dos mecanismos de disipación estudiados.

Sin embargo, para llevar a cabo las simulaciones de los modelos desarrollados, se hicieron algunas simplificaciones. Para el modelo de disipación de energía en DSSC, se utilizó solo un rotor, que es algo común en la aplicación satelital con el objetivo de hacer control pasivo. Si bien se hizo una simulación de un escenario realista, hay otros escenarios que pueden constituir un efecto mayor sobre la actitud del satélite, por ejemplo, los satélites que utilizan varias ruedas de reacción en configuración piramidal.

En el modelo de disipación de energía por elementos flexibles se hicieron simplificaciones aún más grandes. La más importante de ellas fue modelar un panel solar mediante una viga en flexión, además de utilizar la matriz de masas concentradas. Lo anterior significa ignorar todos los modos de vibrar de alta frecuencia y quedarse solo con el primero. Esta simplificación se hizo debido al alto costo computacional que significaba modelar los paneles solares a través de la teoría de placa de Kirchhoff.

Otra simplificación muy importante es que todas las simulaciones fueron hechas despreciando el efecto de las perturbaciones externas, esto no es totalmente realista, ya que un satélite en operación se encuentra bajo torque gravitacional, arrastre atmosférico (principalmente en órbita LEO), presión por radiación solar, entre otros.

Trabajos Futuros

1. Analizar otras configuraciones de ruedas de reacción para estudiar la disipación de energía en DSSC, de esta forma se podría estudiar otros escenarios que eventualmente podrían significar una disipación de energía significativa para el satélite.
2. Investigar sobre la relación entre el rotor interno del satélite y el factor f que caracteriza la disipación de energía, ya que en este proyecto este factor se consideró constante, que podría no ser así siempre.
3. Replantear el modelo de elementos finitos, mediante la discretización de los paneles solares a través de la teoría de placa de Kirchhoff, de esta forma se podrían considerar otros modos de vibrar que a priori, podrían implicar una disipación de energía más preponderante para la actitud del satélite que el primer modo de vibrar que se estudió en este proyecto.
4. En el proyecto se hizo el estudio de una configuración de paneles pequeños en relación con las dimensiones del satélite, sin embargo, existen otras misiones de cubesats en las que se utilizan paneles más grandes debido a una mayor necesidad energética para la misión. Estudiar estas configuraciones sería útil para entender mejor la interacción entre la deformación de paneles y la actitud del satélite.
5. Estudiar la disipación de energía que se produce en satélites que llevan líquidos en su interior.

Referencias

- [1] NASA, «Explorer 1 Overview,» 3 Agosto 2017. [En línea]. Available: https://www.nasa.gov/mission_pages/explorer/explorer-overview.html. [Último acceso: 20 Agosto 2023].
- [2] M. Efroimsky, «Relaxation of wobbling asteroids and comets—theoretical problems, perspectives of experimental observation,» *Planetary and Space Science*, p. 937–955, 8 2001 Mayo.
- [3] Aerospacenerd, «Lessons Learnt: Spinning Satellites in Space | Explorer-1 Mission,» 11 Mayo 2020. [En línea]. Available: <https://blog.aerospacenerd.com/p/lessons-learnt-spinning-satellites-explorer-1>. [Último acceso: 20 Agosto 2023].
- [4] NASA, NASA Systems Engineering handbook, Washington, 2007.
- [5] NASA, «CubeSats Overview,» 2018 Febrero 2018. [En línea]. Available: https://www.nasa.gov/mission_pages/cubesats/overview. [Último acceso: 22 Agosto 2023].
- [6] Alén Space, «Guía básica de nanosatélites,» [En línea]. Available: <https://alen.space/es/guia-basica-nanosatelites/>. [Último acceso: 30 Agosto 2023].
- [7] F. L. Janssens y J. C. van der Ha, «Stability of Spinning Satellite Under Axial Thrust, Internal Mass Motion, and Damping,» *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2014.
- [8] W. He y S. Sam Ge, «Dynamic modeling and vibration control of a flexible satellite,» *IEEE TRANSACTIONS ON AEROSPACE AND ELECTRONIC SYSTEMS*, 2015.
- [9] C. Castro, «Fuerza Aérea de Chile,» 13 2023 Junio. [En línea]. Available: https://www.fach.mil.cl/noticias/2023/junio/13_fasatdelta/13_fasatdelta.html#:~:text=80%20minutos%20m%C3%A1s%20tarde%2C%20el,de%20altura%20desde%20la%20Tierra. [Último acceso: 30 Agosto 2023].
- [10] Uchile, Comunicaciones FCFM - Prensa, «Universidad de Chile,» 23 2017 Junio. [En línea]. Available: <https://uchile.cl/noticias/134455/suchai-el-primer-satelite-hecho-en-chile-ya-esta-en-orbita>. [Último acceso: 30 Agosto 2023].
- [11] Subdirección de Comunicaciones de la FCFM, «Universidad de Chile,» 20 Enero 2022. [En línea]. Available: <https://uchile.cl/noticias/183259/primera-constelacionenjambre-de-satelites-desarrollados-en-chile>. [Último acceso: 30 Agosto 2023].
- [12] SPEL, «Space and Planetary Laboratory,» [En línea]. Available: <https://spel.ing.uchile.cl/suchai.html>. [Último acceso: 30 Agosto 2023].

- [13] H. D. Curtis, *Orbital Mechanics for Engineering Students*, Cambridge: Elsevier Ltd., 2020.
- [14] K. Vega, D. Auslander y D. Pankow, «Satellites, Design and Modeling of an Active Attitude Control System for CubeSat Class,» de *Modeling and Simulation for Spacecraft Design*, Chicago, 2012.
- [15] B. Weber, «Orbital Mechanics & Astrodynamics,» Creative Commons, [En línea]. Available: <https://orbital-mechanics.space/intro/reference-frames.html>. [Último acceso: 06 12 2023].
- [16] J. L. Junkins y H. Schaub, *Analytical Mechanics of Space Systems*, Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 2009.
- [17] M. Mukhopadhyay y A. H. Sheikh, *Matrix and Finite Element Analyses of Structures*, Kharagpur, India: Springer, 2015.
- [18] A. Doroshin, «Exact solutions in attitude dynamics of a magnetic dual-spin spacecraft and a generalization of the Lagrange top,» vol. 12, n° 10, pp. 471-482, 2013.
- [19] V. A. Sarychev, S. A. Mirer y A. V. Isakov, «Dual-Spin satellites with gyro-damping,» *Acta Astronautica*, vol. 9, n° 5, pp. 285-289, 1982.
- [20] A. P. Ivanov, «Attenuation control of gyrostap without energy supply,» *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 154, 2023.
- [21] P. W. Likins, «Technical Report No. 32-860: Effects of Energy Dissipation on the Free Body Motions of Spacecraft,» Pasadena, California, 1966.
- [22] R. Sakamoto y D. J. Scheeres, «Modeling Energy Dissipation and De-tumbling of a Defunct Satellite Using a Finite Element Method,» de *Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies Conference*, Maui, Hawai, 2021.
- [23] M. Azadi, M. Eghtesad, S. A. Fazelzadeh y E. Azadi, «Dynamics and control of a smart flexible satellite moving,» *Multibody System Dynamics*, n° 35, pp. 1-23, 2015.
- [24] M. K. Kwak, S. Heo y H. B. Kim, «Dynamics of satellite with deployable rigid solar arrays,» *Multibody Systems Dynamics*, n° 20, p. 271–286, 2008.
- [25] K.-J. Bathe, *Finite Element Procedures*, New Jersey: Prentice-Hall, 1996.

Anexos

A.1 Carta Gantt

CARTA GANTT - Proyecto de Ingeniería Civil Aeroespacial

