تمرین درس ریاضیات گسسته

مبحث تمرین : استقرا

شماره تمرین	2
تاریخ	1405/02/04
مهلت ارسال پاسخ	1405/02/11
دستیار آموزشی	محمدرضا حسنی – عرفان مرادی @Mohammadreza_has @Er_NotFun

ردیف	سوالات تئوری
1	الف) دنباله فیبوناچی با جملات a_0 = 0 و a_1 = 1 مفروض است. برای n >= 2 داریم: (5 نمره) a_n = a_n-1 + a_n-2 با استفاده از استقرا ثابت کنید: n >= 1 ➔ (a_1)^2 + (a_2)^2 + ... + (a_n)^2 = a_n * a_n+1 ب) رابطه بازگشتی زیر را با فرض a_1 = 1 و a_2 = 3 برای n >= 2 تعریف میکنیم: (5 نمره) a_n = 2a_n-1 – a_n-2 + 2 ^ (n - 2) با استفاده از استقرا ثابت کنید: n >= 1 ➔ a_n = 2 ^ (n - 1)
2	الف) در یک بازی نوبتی دو نفره، ستونی از سنگ ها روی هم چیده شده است. هر شخص می‌تواند در نوبت خود، 2 ^ k سنگ را از روی ستون بردارد(k >= 0). با استقرای قوی اثبات کنید نفر اول برنده است، اگر و تنها اگر تعداد سنگ ها مضربی از ۳ نباشد. (5 نمره) ب) فرض کنید n عدد پاکت پول داریم که از 0 تا n – 1 شماره گذاری شده اند. در هر پاکت پول به شماره i ، به اندازه 2 ^ i تومان پول قرار دارد. با استفاده از استقرا ثابت کنید: (5 نمره) به ازای هر مقدار 2 ^ (n - 1) > k >= 1 ، می‌توان با برداشتن پول تعدادی از پاکت ها، k تومن پول جمع آوری کرد.
3	با استفاده از استقرا ثابت کنید به ازای مقادیر صحیح و مثبت n عبارات زیر برقرار هستند: (هر کدام 9 نمره) 64 | 3 ^ (2n+2) + 56n + 55 1 ^ 2 * 2 ^ 1 + 2 ^ 2 * 2 ^ 2 + 3 ^ 2 * 2 ^ 3 + ... + n^2 * 2 ^ n = (n ^ 2) * (2 ^ (n + 1)) + n * (2 ^ (n + 2)) + 3 * (2 ^ (n + 1)) – 6
4	با استفاده از استقرا ثابت کنید: الف) n صفحه متمایز که از یک نقطه چنان می‌گذرند که هیچ سه تای آنها در یک خط مشترک نیستند، فضا را به n^2 – n + 2 ناحیه تقسیم می‌کنند. (9 نمره) ب) به ازای هر مجموعه n + 1 تایی از اعداد صحیح مثبت که از 2n بزرگتر نباشند، حداقل یک عدد مضرب دیگری است. (9 نمره)

5	الف) دو نفر با هم یک بازی انجام می‌دهند به طوریکه نفر اول ابتدا یک حرف A یا B روی تخته می‌نویسد، و در هر نوبت خود یک حرف جدید A یا B را به سمت راست کلمه قبلی اضافه می‌کند. نفر دوم در هر نوبت می تواند یا جای دو حرف از حروف نوشته شده را با هم عوض کند، یا در نوبت خود هیچ کار نکند. پس از 2n مرحله بازی به اتمام می‌رسد. ثابت کنید نفر دوم می‌تواند کاری کند که کلمه نهایی، آینه‌ای باشد (از هر دو طرف به یک شکل خوانده شود). (12 نمره) ب) برای هر عدد طبیعی n >= 1، تابعی به صورت زیر در نظر بگیرید: $F(n) = \sum_{K=1}^{n} k*2^{(n-k)}$ با استفاده از استقرا ثابت کنید که: (12 امتیاز) $F(n) = (2^{(n+1)}) - (n + 2)$
امتیازی	یک بازی دو نفره نوبتی داریم. در ابتدا k دسته سنگ داریم. در هر نوبت، بازیکنی که نوبت اوست باید یکی از دسته ها را انتخاب کند و تعدادی نامنفی از سنگ ها آن دسته را حذف کند (می‌تواند همه سنگ ها را نیز بردارد). بازیکنی که آخرین سنگ (یا سنگ ها) را حذف کند، برنده است. با استفاده از استقرا اثبات کنید اگر xor تعداد سنگ های دسته ها ناصفر باشد، آنگاه بازیکن اول همواره می‌تواند بازی را ببرد. (20 امتیاز)