```
Attributes[mod] = {HoldFirst};
mod[Power[b_, etwas_], m_] := PowerMod[b, etwas, m];
mod[etwas_ /; Head[etwas] =!= Power, m_] := Mod[etwas, m]
(* Karstens Beweis. Induktionsvoraussetung ist links vg rechts *)
VIK[vg_[links_, rechts_], regeln_, n_ ≥ startwert_] :=
  Module[{startlinks, startrechts, links1,
     links2, links3, hl, sf, rs, links4, rechts1, rechts2, rechts3},
    Print["Vermutung: ∀ ", n, " >= ", startwert, " gilt: ",
     HoldForm[vg[links, rechts]]];
    links1 = links /. (n → n + 1);
    links2 = links1 /. regeln;
    links3 = FullSimplify[links2];
    hl = Head[links];
    If[(links === hl[n]) && (vg === Equal) ,
     sf = (rechts /. n → #) &;
     links4 = links3 /. (hl → sf),
     links4 = Assuming[vg[links, rechts], FullSimplify[ReleaseHold[links3]]] ];
    rechts1 = rechts /. (n → n + 1);
    rechts2 = rechts1 /. regeln;
    rechts3 = FullSimplify[rechts2];
    Switch[Assuming[vg[links, rechts], FullSimplify[vg[links4, rechts3]]],
     True,
     Print["Induktionsschritt : (In der linken Seite wird n durch n+1 ersetzt:)"];
     Print[links1, " == (Die eingegebenen Regeln werden eingesetzt:)"] ;
     Print[links2, " == (Der Term wird vereinfacht:)"];
     Print[links3,
      " == (Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung wird der Term vereinfacht:)"];
     Print[links4, " == (der vereinfachten rechten Seite für ", n, "+1:)"];
     Print[rechts3,
      " == (der rechten Seite für ", n, "+1 nach Einsatz der Regeln :)"];
     Print[rechts2, " == (der rechten Seite für ", n, "+1 :)"];
     Print[rechts1, " . Der Induktionsschritt wurde erfolgreich durchgeführt!"],
     False,
     Print[
      "Der Induktionsschritt lässt sich falsifizieren, die Vermutung war inkorrkt!"];
     Return[],
     _,
     Print["Die Algorithmen von Mma haben leider nicht
        ausgereicht, um den Induktionsschritt durchzuführen..."];
     Return[]];
    Print[" Überprüfung des Startwertes (Induktionsankers): "];
    startlinks = FullSimplify[(links /. n → startwert) //. regeln];
    startrechts = FullSimplify[(rechts /. n → startwert) //. regeln];
    Switch[FullSimplify[vg[startlinks, startrechts]],
     False,
     Print["Die Vermutung konnte für ", n, " == ", startwert, " falsifiziert werden!"];
     Return[],
     True, Print["Für ", n, " == ", startwert, " gilt: ", links, " == ",
      startlinks, HoldForm[vg[" ", " "]], rechts, " == ", startrechts,
      ". Damit ist die Vermutung für alle n ≥ ", startwert, " bewiesen!"],
     _,
     Print["Die Algorithmen von Mma haben leider nicht ausgereicht, um mit Startwert ",
      n, " == ", startwert, " den Beweis zu führen!"]]
```

```
  ];
SetAttributes[VIK, HoldFirst];
VIS[vg_[lVonN_, rVonN_], indvar_ ≥ startwert_] :=
  Module[{lVE, rVE, liAkt, reAkt, lp1, rp1, lip1Ev, rep1Ev,
     differenz, quot},
    Print["Vermutung: ∀ ", indvar,
     " >= ", startwert, " gilt: ", HoldForm[vg[lVonN, rVonN]]];
    lVE = HoldForm[lVonN];
    rVE = HoldForm[rVonN];
    liAkt = lVE /.indvar → startwert;
    reAkt = rVE /.indvar → startwert;
    If[
     FullSimplify[ReleaseHold[vg[liAkt, reAkt]], Element[indvar, Integers]] == True,
     Print["Induktionsanfang: Für ", indvar, " == ", startwert, " gilt: ",
      liAkt, " == ", FullSimplify[ReleaseHold[liAkt]],
      HoldForm[vg[" ", " "]], reAkt, " == ", FullSimplify[ReleaseHold[reAkt]]],
     Print["Die Vermutung ist für ", indvar, " == ", startwert, " falsifiziert"];
     Return[]];
    lp1 = HoldForm[lVonN] /.indvar → indvar + 1;
    rp1 = HoldForm[rVonN] /.indvar → indvar + 1;
    lip1Ev = lVE /.indvar → indvar + 1;
    rep1Ev = rVE /. indvar → indvar + 1;
    differenz =
     FullSimplify[ReleaseHold[lip1Ev - lVE]] //. (Gamma[etwas_] :→ (etwas - 1) !);
    If[FullSimplify[ReleaseHold[vg[lip1Ev, rep1Ev]],
       {Element[indvar, Integers], indvar ≥ startwert}] == True,
     If[(Head[lVonN ] === mod) && (Head[lVonN ] === Mod),
      Print["Da ", vg[lVonN, rVonN], " für ", indvar, " == ", startwert];
      Print[" und da mod[", First[First[lp1]],
       " - ", First[lVonN], ",", Last[lVonN], "] == ",
       mod[FullSimplify[First[First[lp1]] - First[lVonN]], Last[lVonN]] ==
        rVonN, ", gilt die Vermutung für alle ", indvar ≥ startwert],
      Print["Induktionsschritt: ", lp1, " == ",
       HoldForm[lVonN] + differenz, HoldForm[vg[" ", " "]],
       HoldForm[rVonN] + differenz, " == ", rp1, "    q.e.d"]],
     Print["Induktionsschritt klappt nicht!"]]] /;
   Head[VIS[vg[lVonN, rVonN], indvar ≥ startwert]] === VIS;
SetAttributes[VIS, HoldFirst];
```

```
Remove["Global`*"] (* Diese Zeile NICHT mit Shift+Enter evaluieren,
damit werden alle Befehle der Package wieder vergessen! Sie dient nur dazu, wenn ich
 eine Funktion umprogrammiere,
daß alte Definitionen gelöscht werden. Wenn diese Zeile versehentlich evaluiert wird,
dann muß der erste Block erneut eingelesen werden! *)
```

Die Funktion VIK erfordert drei Eingabeparameter:

(1) Ganz links kommt unsere Vermutung, in Form einer Gleichung mit == wie beim Solve-Befehl. Diese Reihenfolge ist aus Programmierersicht besser als erst die Angabe der zugrundeliegenden Funktion(en), weil *Mathematica* in Zukunft manche Vermutungen selbst formulieren soll

(2) In der Mitte kommt eine Liste, in der die zugrundeliegenden Funktionen *als Regeln* angegeben werden, da bei einer vollständigen Definition *Mathematica* die Funktionen evaluieren würde! Bestenfalls käme dann ein

Ergebnis wie True == True heraus, das ein User kaum als einleuchtenden Beweis akzeptieren

würde, schlimmstenfalls aber begänne *Mathematica* mit der Berechnung unnötiger Rekursionen, die in diesem Leben nicht zuende berechnet wären.
Die Regeln kommen alle zusammen in einem paar geschweifter Klammern. Man kann hierbei eine Ergibt-Anweisung = durch einen Pfeil → ersetzen, und eine Formeldefinition := durch eine verzögerte Regel :→
Wir schauen uns z.B. folgende Funktion an
u[1]=1;
u[n_] := u[n-1] + 3;
und vermuten, daß
u[n] == 3*n -2
Nach Obengesagtem kommt als Input von VIK zuerst die Vermutung, gefolgt von einem Komma, und dann die Liste {u[1] → 1, u[n_] :→ u[n - 1] + 3}.
Für den Induktionsschritt würde auch die Liste {u[1] → 1, u[n_ + 1] :→ u[n] + 3} genügen, doch für die Berechnung des Startwertes kommt man nicht umhin, die Regeln temporär wie eine Funktion zu behandeln,
daher ist die erstgenannte Liste zu bevorzugen.
(3) Hier wird der Startwert festgelegt, der zugehörige Variablenname ist genau wie beim Solve-Befehl wichtig, schließlich gibt es auch Funktionen mit mehr als einer Variable.
Das besprochene Beispiel lautet komplett:

```
VIK[u[n] == 3 * n - 2, {u[1] → 1, u[n_ ] :→ u[n - 1] + 3}, n ≥ 1]
```

```
Vermutung: ∀ n >= 1 gilt: u[n] == 3 n - 2

Induktionsschritt : (In der linken Seite wird n durch n+1 ersetzt:)

u[1 + n] == (Die eingegebenen Regeln werden eingesetzt:)

3 + u[n] == (Der Term wird vereinfacht:)

3 + u[n] == (Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung wird der Term vereinfacht:)

1 + 3 n == (der vereinfachten rechten Seite für n+1:)

1 + 3 n == (der rechten Seite für n+1 nach Einsatz der Regeln :)

-2 + 3 (1 + n) == (der rechten Seite für n+1 :)

-2 + 3 (1 + n) . Der Induktionsschritt wurde erfolgreich durchgeführt!

 Überprüfung des Startwertes (Induktionsankers):

Für n == 1 gilt: u[n] == 1 == -2 + 3 n == 1. Damit ist die Vermutung für alle n ≥ 1 bewiesen!
```

Beispiel von Karsten - Hauptnäherungsbrüche:

```
VIK[a[n]^2 - a[n] * b[n] - b[n] ^2 == 1, {a[1] -> 3, b[1] → 2,
  a[(n_) ] :→ a[n - 1] ^2 + b[n - 1] ^2, b[n_ ] :→ b[n - 1] * (2 * a[n - 1] - b[n - 1])}, n ≥ 1]
```

```
Vermutung: ∀ n >= 1 gilt: a[n]^2 - a[n] × b[n] - b[n]^2 == 1

Induktionsschritt : (In der linken Seite wird n durch n+1 ersetzt:)

a[1 + n]^2 - a[1 + n] × b[1 + n] - b[1 + n]^2 == (Die eingegebenen Regeln werden eingesetzt:)

-(2 a[n] - b[n])^2 b[n]^2 - (2 a[n] - b[n]) b[n] (a[n]^2 + b[n]^2) + (a[n]^2 + b[n]^2)^2
  == (Der Term wird vereinfacht:)

(-a[n]^2 + a[n] × b[n] + b[n]^2)^2
  == (Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung wird der Term vereinfacht:)

1 == (der vereinfachten rechten Seite für n+1:)

1 == (der rechten Seite für n+1 nach Einsatz der Regeln :)

1 == (der rechten Seite für n+1 :)

1 . Der Induktionsschritt wurde erfolgreich durchgeführt!

 Überprüfung des Startwertes (Induktionsankers):

Die Vermutung konnte für n == 1 falsifiziert werden!
```

```
VIK[a[n]^2 - a[n] * b[n] - b[n] ^2 == 1, {a[1] -> 3, b[1] → 2,
  a[(n_) ] :→ a[n - 1] ^2 + b[n - 1] ^2, b[n_ ] :→ b[n - 1] * (2 * a[n - 1] - b[n - 1])}, n ≥ 2]
```

```
Vermutung: ∀ n >= 2 gilt: a[n]^2 - a[n] × b[n] - b[n]^2 == 1

Induktionsschritt : (In der linken Seite wird n durch n+1 ersetzt:)

a[1 + n]^2 - a[1 + n] × b[1 + n] - b[1 + n]^2 == (Die eingegebenen Regeln werden eingesetzt:)

-(2 a[n] - b[n])^2 b[n]^2 - (2 a[n] - b[n]) b[n] (a[n]^2 + b[n]^2) + (a[n]^2 + b[n]^2)^2
  == (Der Term wird vereinfacht:)

(-a[n]^2 + a[n] × b[n] + b[n]^2)^2
  == (Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung wird der Term vereinfacht:)

1 == (der vereinfachten rechten Seite für n+1:)

1 == (der rechten Seite für n+1 nach Einsatz der Regeln :)

1 == (der rechten Seite für n+1 :)

1 . Der Induktionsschritt wurde erfolgreich durchgeführt!

 Überprüfung des Startwertes (Induktionsankers):

Für n == 2 gilt: a[n]^2 - a[n] × b[n] - b[n]^2 == 1
  == 1 == 1. Damit ist die Vermutung für alle n ≥ 2 bewiesen!
```

Ein noch schwierigeres Beispiel mit je zwei Rekursionsaufrufen:

```
VIK[v[n] == 2^n + 1, {v[0] → 2, v[1] → 3, v[n_] :→ 3 v[n - 1] - 2 v[n - 2]}, n ≥ 2]
```

Vermutung: ∀ n >= 2 gilt: $v[n] == 2^n + 1$

Induktionsschritt : (In der linken Seite wird n durch n+1 ersetzt:)

$v[1+n]$ == (Die eingegebenen Regeln werden eingesetzt:)

$-2\,v[-1+n] + 3\,v[n]$ == (Der Term wird vereinfacht:)

$-2\,v[-1+n] + 3\,v[n]$ == (Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung wird der Term vereinfacht:)

$-2\left(1+2^{-1+n}\right) + 3\left(1+2^n\right)$ == (der vereinfachten rechten Seite für n+1:)

$1+2^{1+n}$ == (der rechten Seite für n+1 nach Einsatz der Regeln :)

$1+2^{1+n}$ == (der rechten Seite für n+1 :)

$1+2^{1+n}$. Der Induktionsschritt wurde erfolgreich durchgeführt!

Überprüfung des Startwertes (Induktionsankers):

Für n == 2 gilt: $v[n] == 5 == 1 + 2^n == 5$. Damit ist die Vermutung für alle $n \geq 2$ bewiesen!

```
VIK[summe[(2 j - 1), {j, 1, n}] == n^2, {summe[(2 j - 1), {j, 1, 1}] → 1,
  summe[(2 j - 1), {j, 1, n_}] :→ summe[(2 j - 1), {j, 1, n - 1}] + (2 n - 1)}, n ≥ 1]
```

Vermutung: ∀ n >= 1 gilt: $summe[2j-1, \{j, 1, n\}] == n^2$

Induktionsschritt : (In der linken Seite wird n durch n+1 ersetzt:)

$summe[-1+2j, \{j, 1, 1+n\}]$ == (Die eingegebenen Regeln werden eingesetzt:)

$-1+2(1+n) + summe[-1+2j, \{j, 1, n\}]$ == (Der Term wird vereinfacht:)

$1+2n + summe[-1+2j, \{j, 1, n\}]$
  == (Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung wird der Term vereinfacht:)

$1+2n + summe[-1+2j, \{j, 1, n\}]$ == (der vereinfachten rechten Seite für n+1:)

$(1+n)^2$ == (der rechten Seite für n+1 nach Einsatz der Regeln :)

$(1+n)^2$ == (der rechten Seite für n+1 :)

$(1+n)^2$. Der Induktionsschritt wurde erfolgreich durchgeführt!

Überprüfung des Startwertes (Induktionsankers):

Für n == 1 gilt: $summe[-1+2j, \{j, 1, n\}] == 1$
  $== n^2 == 1$. Damit ist die Vermutung für alle $n \geq 1$ bewiesen!

Im folgenden eine Experimentalversion, die nur in Spezialfällen funktionieren wird, nämlich für Vermutungen, die Mathematica selbst formulieren kann und daher auf Regeln verzichtet werden kann.
Im gegenwärtigen Stadium muß man die Vermutung noch selbst eingeben:

```
Sum[2 j - 1, {j, 1, n}]
```

n^2

```
HoldForm[Sum[2 j - 1, {j, 1, n}]]
```

$$\sum_{j=1}^{n} (2j-1)$$

VIS$\left[\sum_{j=1}^{n}(2j-1) == n^2, n \geq 1\right]$

Vermutung: $\forall$ n >= 1 gilt: $\sum_{j=1}^{n}(2j-1) == n^2$

Induktionsanfang: Für n == 1 gilt: $\sum_{j=1}^{1}(2j-1) == 1 == 1^2 == 1$

Induktionsschritt: $\sum_{j=1}^{1+n}(2j-1) == 1+2n+\sum_{j=1}^{n}(2j-1) == 1+2n+n^2 == (1+n)^2$ q.e.d

VIS$\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 == \frac{n(n+1)(2n+1)}{n}, n \geq 1\right]$

Vermutung: $\forall$ n >= 1 gilt: $\sum_{i=1}^{n} i^2 == \frac{n(n+1)(2n+1)}{n}$

Die Vermutung ist für n == 1 falsifiziert

VIS$\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 == \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), n \geq 1\right]$

Vermutung: $\forall$ n >= 1 gilt: $\sum_{i=1}^{n} i^2 == \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

Induktionsanfang: Für n == 1 gilt: $\sum_{i=1}^{1} i^2 == 1 == \frac{1}{6}(1+1)(2\times 1+1) == 1$

Induktionsschritt: $\sum_{i=1}^{1+n} i^2 == (1+n)^2 + \sum_{i=1}^{n} i^2 ==$

$(1+n)^2 + \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) == \frac{1}{6}(1+n)((1+n)+1)(2(1+n)+1)$ q.e.d

VIK[summe[i^2, {i, 1, n}] == $\frac{1}{6}$ **n (n + 1) (2 n + 1), {summe[i ^2, {i, 1, 1}] → 1,**
summe[i ^2, {i, 1, n_}] :→ summe[i ^2, {i, 1, n − 1}] + n^2 }, n ≥ 1]

Vermutung: $\forall$ n >= 1 gilt: summe$[i^2, \{i, 1, n\}] == \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

Induktionsschritt : (In der linken Seite wird n durch n+1 ersetzt:)

summe$[i^2, \{i, 1, 1+n\}]$ == (Die eingegebenen Regeln werden eingesetzt:)

$(1+n)^2 +$ summe$[i^2, \{i, 1, n\}]$ == (Der Term wird vereinfacht:)

$(1+n)^2 +$ summe$[i^2, \{i, 1, n\}]$
== (Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung wird der Term vereinfacht:)

$(1+n)^2 +$ summe$[i^2, \{i, 1, n\}]$ == (der vereinfachten rechten Seite für n+1:)

$\frac{1}{6}(1+n)(2+n)(3+2n)$ == (der rechten Seite für n+1 nach Einsatz der Regeln :)

$\frac{1}{6}(1+n)(2+n)(1+2(1+n))$ == (der rechten Seite für n+1 :)

$\frac{1}{6}(1+n)(2+n)(1+2(1+n))$. Der Induktionsschritt wurde erfolgreich durchgeführt!

Überprüfung des Startwertes (Induktionsankers):

Für n == 1 gilt: summe$[i^2, \{i, 1, n\}]$ == 1 ==
$\frac{1}{6} n(1+n)(1+2n)$ == 1. Damit ist die Vermutung für alle n ≥ 1 bewiesen!

VIK[summe[2^j, {j, 0, n - 1}] == 2^n - 1, {summe[2^j, {j, 0, 0}] → 1, summe[2^j, {j, 0, n_}] :→ summe[2^j, {j, 0, n - 1}] + 2^n }, n ≥ 1]

Vermutung: ∀ n >= 1 gilt: summe$[2^j, \{j, 0, n-1\}] == 2^n - 1$

Induktionsschritt : (In der linken Seite wird n durch n+1 ersetzt:)

summe$[2^j, \{j, 0, n\}]$ == (Die eingegebenen Regeln werden eingesetzt:)

$2^n +$ summe$[2^j, \{j, 0, -1+n\}]$ == (Der Term wird vereinfacht:)

$2^n +$ summe$[2^j, \{j, 0, -1+n\}]$
== (Unter Annahme der Induktionsvoraussetzung wird der Term vereinfacht:)

$-1 + 2^{1+n}$ == (der vereinfachten rechten Seite für n+1:)

$-1 + 2^{1+n}$ == (der rechten Seite für n+1 nach Einsatz der Regeln :)

$-1 + 2^{1+n}$ == (der rechten Seite für n+1 :)

$-1 + 2^{1+n}$. Der Induktionsschritt wurde erfolgreich durchgeführt!

Überprüfung des Startwertes (Induktionsankers):

Für n == 1 gilt: summe$[2^j, \{j, 0, -1+n\}]$ == 1 ==
$-1 + 2^n$ == 1. Damit ist die Vermutung für alle n ≥ 1 bewiesen!

VIS$\left[\sum_{j=0}^{n-1} (2\text{^}j) == 2\text{^}n - 1, n \geq 1\right]$

Vermutung: ∀ n >= 1 gilt: $\sum_{j=0}^{n-1} 2^j == 2^n - 1$

Induktionsanfang: Für n == 1 gilt: $\sum_{j=0}^{1-1} 2^j == 1 == 2^1 - 1 == 1$

Induktionsschritt: $\sum_{j=0}^{(1+n)-1} 2^j == 2^n + \sum_{j=0}^{n-1} 2^j == 2^n + (2^n - 1) == 2^{1+n} - 1$ q.e.d

VIS$\left[\sum_{j=1}^{n} ((-1)\text{^}(j-1) * j\text{^}2) == (-1)\text{^}(n-1) * n * (n+1) / 2, n \geq 1\right]$

Vermutung: ∀ n >= 1 gilt: $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} j^2 == \frac{1}{2} (-1)^{n-1} n (n+1)$

Induktionsanfang: Für n == 1 gilt: $\sum_{j=1}^{1} (-1)^{j-1} j^2 == 1 == \frac{1}{2} (-1)^{1-1} (1+1) == 1$

Induktionsschritt: $\sum_{j=1}^{1+n} (-1)^{j-1} j^2 == (-1)^n (1+n)^2 + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} j^2 ==$

$(-1)^n (1+n)^2 + \frac{1}{2} (-1)^{n-1} n (n+1) == \frac{1}{2} (-1)^{(1+n)-1} (1+n) ((1+n)+1)$ q.e.d

$\text{VIS}\left[\sum_{j=1}^{n} j\text{^}3 == (n * (n+1)/2)\text{^}2,\ n \ge 1\right]$

Vermutung: ∀ n >= 1 gilt: $\sum_{j=1}^{n} j^3 == \left(\frac{1}{2}\, n\, (n+1)\right)^2$

Induktionsanfang: Für n == 1 gilt: $\sum_{j=1}^{1} j^3 == 1 == \left(\frac{1+1}{2}\right)^2 == 1$

Induktionsschritt: $\sum_{j=1}^{1+n} j^3 == (1+n)^3 + \sum_{j=1}^{n} j^3 ==$

$(1+n)^3 + \left(\frac{1}{2}\, n\, (n+1)\right)^2 == \left(\frac{1}{2}\, (1+n)\, ((1+n)+1)\right)^2$ q.e.d

$\text{VIS}\left[\sum_{j=0}^{n} q^j == \frac{1-q^{n+1}}{1-q},\ n \ge 0\right]$

Vermutung: ∀ n >= 0 gilt: $\sum_{j=0}^{n} q^j == \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Induktionsanfang: Für n == 0 gilt: $\sum_{j=0}^{0} q^j == 1 == \frac{1-q^{0+1}}{1-q} == 1$

Induktionsschritt: $\sum_{j=0}^{1+n} q^j == q^{1+n} + \sum_{j=0}^{n} q^j == q^{1+n} + \frac{1-q^{n+1}}{1-q} == \frac{1-q^{(1+n)+1}}{1-q}$ q.e.d

$\text{VIS}\left[\sum_{i=1}^{n} i\, (i+1) == \frac{1}{3}\, n\, (n+1)\, (n+2),\ n \ge 1\right]$

Vermutung: ∀ n >= 1 gilt: $\sum_{i=1}^{n} i\, (i+1) == \frac{1}{3}\, n\, (n+1)\, (n+2)$

Induktionsanfang: Für n == 1 gilt: $\sum_{i=1}^{1} i\, (i+1) == 2 == \frac{1}{3}\, (1+1)\, (1+2) == 2$

Induktionsschritt: $\sum_{i=1}^{1+n} i\, (i+1) == (1+n)\, (2+n) + \sum_{i=1}^{n} i\, (i+1) ==$

$(1+n)\, (2+n) + \frac{1}{3}\, n\, (n+1)\, (n+2) == \frac{1}{3}\, (1+n)\, ((1+n)+1)\, ((1+n)+2)$ q.e.d

$\text{VIS}\left[\sum_{i=1}^{n} i\, (i+1) == \frac{1}{3}\, n\, (n+1)\, (n+2),\ n \ge 1\right]$

Vermutung: ∀ n >= 1 gilt: $\sum_{i=1}^{n} i\, (i+1) == \frac{1}{3}\, n\, (n+1)\, (n+2)$

Induktionsanfang: Für n == 1 gilt: $\sum_{i=1}^{1} i\, (i+1) == 2 == \frac{1}{3}\, (1+1)\, (1+2) == 2$

Induktionsschritt: $\sum_{i=1}^{1+n} i\, (i+1) == (1+n)\, (2+n) + \sum_{i=1}^{n} i\, (i+1) ==$

$(1+n)\, (2+n) + \frac{1}{3}\, n\, (n+1)\, (n+2) == \frac{1}{3}\, (1+n)\, ((1+n)+1)\, ((1+n)+2)$ q.e.d

$$\text{VIS}\left[\sum_{i=1}^{n} i\,(i+1)\,(i+2) == \frac{1}{4}\, n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3),\ n \geq 1\right]$$

Vermutung: $\forall\ n >= 1$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} i\,(i+1)\,(i+2) == \frac{1}{4}\, n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)$

Induktionsanfang: Für $n == 1$ gilt: $\sum_{i=1}^{1} i\,(i+1)\,(i+2) == 6 == \frac{1}{4}\,(1+1)\,(1+2)\,(1+3) == 6$

Induktionsschritt: $\sum_{i=1}^{1+n} i\,(i+1)\,(i+2) == (1+n)\,(2+n)\,(3+n) + \sum_{i=1}^{n} i\,(i+1)\,(i+2)$

$== (1+n)\,(2+n)\,(3+n) + \frac{1}{4}\, n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3) ==$

$\frac{1}{4}\,(1+n)\,((1+n)+1)\,((1+n)+2)\,((1+n)+3)$ q.e.d

$$\text{VIS}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\,i-1)\,(2\,i+1)} == \frac{n}{2\,n+1},\ n \geq 1\right]$$

Vermutung: $\forall\ n >= 1$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\,i-1)\,(2\,i+1)} == \frac{n}{2\,n+1}$

Induktionsanfang: Für $n == 1$ gilt: $\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{(2\,i-1)\,(2\,i+1)} == \frac{1}{3} == \frac{1}{2\times 1+1} == \frac{1}{3}$

Induktionsschritt: $\sum_{i=1}^{1+n} \frac{1}{(2\,i-1)\,(2\,i+1)} ==$

$\frac{1}{3+4\,n\,(2+n)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\,i-1)\,(2\,i+1)} == \frac{1}{3+4\,n\,(2+n)} + \frac{n}{2\,n+1} == \frac{1+n}{2\,(1+n)+1}$ q.e.d

$$\text{VIS}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(a+j-1)\,(a+j)} == \frac{n}{a * (a+n)},\ n \geq 1\right]$$

Vermutung: $\forall\ n >= 1$ gilt: $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(a+j-1)\,(a+j)} == \frac{n}{a\,(a+n)}$

Induktionsanfang: Für $n == 1$ gilt: $\sum_{j=1}^{1} \frac{1}{(a+j-1)\,(a+j)} == \frac{1}{a+a^2} == \frac{1}{a\,(a+1)} == \frac{1}{a+a^2}$

Induktionsschritt: $\sum_{j=1}^{1+n} \frac{1}{(a+j-1)\,(a+j)} == \frac{1}{(a+n)\,(1+a+n)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(a+j-1)\,(a+j)}$

$== \frac{1}{(a+n)\,(1+a+n)} + \frac{n}{a\,(a+n)} == \frac{1+n}{a\,(a+(1+n))}$ q.e.d

$$\text{VIS}\left[\sum_{i=1}^{n} i\ i! == (n+1)! - 1,\ n \geq 1\right]$$

Vermutung: $\forall\ n >= 1$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} i\ i! == (n+1)! - 1$

Induktionsanfang: Für $n == 1$ gilt: $\sum_{i=1}^{1} i\ i! == 1 == (1+1)! - 1 == 1$

Induktionsschritt: $\sum_{i=1}^{1+n} i\ i! == (1+n)\,(1+n)! + \sum_{i=1}^{n} i\ i!$

$== (1+n)\,(1+n)! + ((n+1)! - 1) == ((1+n)+1)! - 1$ q.e.d

VIS$\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} == \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i}, n \geq 1\right]$

Vermutung: ∀ n >= 1 gilt: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} == \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i}$

Induktionsanfang: Für n == 1 gilt: $\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{1+i} == \frac{1}{2} == \sum_{i=1}^{2\,1} \frac{(-1)^{i+1}}{i} == \frac{1}{2}$

Induktionsschritt klappt nicht!

VIS$[2^n > n, n \geq 1]$

Vermutung: ∀ n >= 1 gilt: $2^n > n$

Induktionsanfang: Für n == 1 gilt: $2^1 == 2 > 1 == 1$

Induktionsschritt: $2^{1+n} == 2^n + 2^n > 2^n + n == 1 + n$ q.e.d

VIS$\left[\sum_{k=0}^{n} (\text{Binomial}[2n-2k, n-k] * \text{Binomial}[2k, k]) == 4\text{^}n, n \geq 1\right]$

Vermutung: ∀ n >= 1 gilt: $\sum_{k=0}^{n} \text{Binomial}[2n-2k, n-k]\ \text{Binomial}[2k, k] == 4^n$

Induktionsanfang: Für n == 1 gilt: $\sum_{k=0}^{1} \text{Binomial}[2 \times 1 - 2k, 1-k]\ \text{Binomial}[2k, k] == 4 == 4^1 == 4$

Induktionsschritt: $\sum_{k=0}^{1+n} \text{Binomial}[2(1+n) - 2k, (1+n) - k]\ \text{Binomial}[2k, k] ==$

$3 \times 4^n + \sum_{k=0}^{n} \text{Binomial}[2n-2k, n-k]\ \text{Binomial}[2k, k] == 3 \times 4^n + 4^n == 4^{1+n}$ q.e.d

VIS$\left[\sum_{l=k-1}^{n-1} \text{Binomial}[l, k-1] == \text{Binomial}[n, k], n \geq 1\right]$

Vermutung: ∀ n >= 1 gilt: $\sum_{l=k-1}^{n-1} \text{Binomial}[l, k-1] == \text{Binomial}[n, k]$

Induktionsanfang: Für n == 1 gilt: $\sum_{l=k-1}^{1-1} \text{Binomial}[l, k-1]$

$== \frac{\text{Binomial}[0, -1+k]}{k} == \text{Binomial}[1, k] == \text{Binomial}[1, k]$

Induktionsschritt: $\sum_{l=k-1}^{(1+n)-1} \text{Binomial}[l, k-1] ==$

$\frac{(-1+k-n)\ \text{Binomial}[n, -1+k] + (2-k+n)\ \text{Binomial}[1+n, -1+k]}{k} + \sum_{l=k-1}^{n-1} \text{Binomial}[l, k-1]$

$== \frac{(-1+k-n)\ \text{Binomial}[n, -1+k] + (2-k+n)\ \text{Binomial}[1+n, -1+k]}{k} + \text{Binomial}[n, k]$

$== \text{Binomial}[1+n, k]$ q.e.d

VIS$\left[\sum_{k=0}^{m}\text{Binomial}[n+k,k] == \text{Binomial}[n+m+1,m],\ m\geq 0\right]$

Vermutung: ∀ m >= 0 gilt: $\sum_{k=0}^{m}\text{Binomial}[n+k,k] == \text{Binomial}[n+m+1,m]$

Induktionsanfang: Für m == 0 gilt: $\sum_{k=0}^{0}\text{Binomial}[n+k,k] == 1 == \text{Binomial}[n+0+1,0] == 1$

Induktionsschritt: $\sum_{k=0}^{1+m}\text{Binomial}[n+k,k] == \frac{(1+m+n)!}{(1+m)!\,n!}+\sum_{k=0}^{m}\text{Binomial}[n+k,k]$

$== \frac{(1+m+n)!}{(1+m)!\,n!}+\text{Binomial}[n+m+1,m] == \text{Binomial}[n+(1+m)+1,1+m]$ q.e.d

VIS$\left[(a+b)^n == \sum_{k=0}^{n}\text{Binomial}[n,k]\,a^{n-k}\,b^k,\ n\geq 1\right]$

Vermutung: ∀ n >= 1 gilt: $(a+b)^n == \sum_{k=0}^{n}\text{Binomial}[n,k]\,a^{n-k}\,b^k$

Induktionsanfang: Für n == 1 gilt: $(a+b)^1 == a+b == \sum_{k=0}^{1}\text{Binomial}[1,k]\,a^{1-k}\,b^k == a+b$

Induktionsschritt: $(a+b)^{1+n} == (-1+a+b)\,(a+b)^n+(a+b)^n ==$

$(-1+a+b)\,(a+b)^n+\sum_{k=0}^{n}\text{Binomial}[n,k]\,a^{n-k}\,b^k == \sum_{k=0}^{1+n}\text{Binomial}[1+n,k]\,a^{(1+n)-k}\,b^k$ q.e.d

Bei Kongruenzrelationen würde die allgemeine Form wie obenbeschrieben auch funktionieren, jedoch gibt es in diesem Spezialfall eine Argumentation, die viele "einleuchtender" finden und die so in VIS einprogrammiert ist: Bleibt bei einem bestimmten Term T[start] geteilt durch q ein Rest r, und bleibt bei (T[i+1] - T[i]) durch q ein Rest 0, dann bleibt bei allen T[i] mit i >= start, geteilt durch q, ein Rest r.

VIS[mod[2^(1 + 2^(3^k * 571)) , 3^k * 571] == 3^k * 571 - 1, k ≥ 2]

Vermutung: ∀ k >= 2 gilt: $\text{mod}\left[2^{1+2^{3^k\times 571}},\ 3^k\times 571\right] == 3^k\times 571-1$

Induktionsanfang: Für k == 2 gilt: $\text{mod}\left[2^{1+2^{3^2\times 571}},\ 3^2\times 571\right] == 5138 == 3^2\times 571-1 == 5138$

```
If[ (571 × 3^(1+k) == 1 + PowerMod[2, 1 + 2^(571×3^(1+k)), 571 × 3^(1+k)]) == True,
  If[Head[mod[2^(1+2^(3^k×571)), 3^k × 571]] === Mod,
   Print[Da , mod[2^(1+2^(3^k×571)), 3^k × 571] == 3^k × 571 − 1,  für , k,  == , 2];
   Print[ und da Mod[, First[First[lp1$1930]],  − , First[mod[2^(1+2^(3^k×571)), 3^k × 571]], ,,
    Last[mod[2^(1+2^(3^k×571)), 3^k × 571]], ]  == , Mod[FullSimplify[First[First[lp1$1930]] −
        First[mod[2^(1+2^(3^k×571)), 3^k × 571]]], Last[mod[2^(1+2^(3^k×571)), 3^k × 571]]] == 3^k × 571 − 1,
    , gilt die Vermutung für alle , k ≥ 2], Print[Induktionsschritt: , lp1$1930,
     == , mod[2^(1+2^(3^k×571)), 3^k × 571] + differenz$1930,   == , (3^k × 571 − 1) + differenz$1930,
     == , rp1$1930,    q.e.d]], Print[Induktionsschritt klappt nicht!]]
```

VIS$\left[\text{mod}\left[n^3+6n^2+14n,\ 3\right] == 0,\ n\geq 1\right]$

Vermutung: ∀ n >= 1 gilt: $\text{mod}\left[n^3+6n^2+14n,\ 3\right] == 0$

Induktionsanfang: Für n == 1 gilt: $\text{mod}\left[1^3+6\times 1^2+14\times 1,\ 3\right] == 0 == 0 == 0$

Da $\text{Mod}\left[14n+6n^2+n^3,\ 3\right] == 0$ für n == 1

und da $\text{Mod}[14(1+n)+6(1+n)^2+(1+n)^3-14n+6n^2+n^3,$
$3] == \text{Mod}[3(7+n(5+n)),3] == 0$, gilt die Vermutung für alle $n\geq 1$

VIS[(1 + ⅈ)^n == 2^(n/2) * (Cos[n * π / 4] + ⅈ * Sin[n * π / 4]), n ≥ 1]

Vermutung: ∀ n >= 1 gilt: $(1+i)^n == 2^{n/2}\left(\text{Cos}\left[\frac{n\pi}{4}\right] + i\,\text{Sin}\left[\frac{n\pi}{4}\right]\right)$

Induktionsanfang: Für n == 1 gilt: $(1+i)^1 == 1+i == \sqrt{2}\left(\text{Cos}\left[\frac{\pi}{4}\right] + i\,\text{Sin}\left[\frac{\pi}{4}\right]\right) == 1+i$

Induktionsschritt: $(1+i)^{1+n} == i\,(1+i)^n + (1+i)^n ==$

$i\,(1+i)^n + 2^{n/2}\left(\text{Cos}\left[\frac{n\pi}{4}\right] + i\,\text{Sin}\left[\frac{n\pi}{4}\right]\right) == 2^{\frac{1+n}{2}}\left(\text{Cos}\left[\frac{1}{4}(1+n)\pi\right] + i\,\text{Sin}\left[\frac{1}{4}(1+n)\pi\right]\right)$ q.e.d

VIS[2^(n/2) * (Cos[n * π / 4] + ⅈ * Sin[n * π / 4]) == (1 + ⅈ)^n, n ≥ 1]

Vermutung: ∀ n >= 1 gilt: $2^{n/2}\left(\text{Cos}\left[\frac{n\pi}{4}\right] + i\,\text{Sin}\left[\frac{n\pi}{4}\right]\right) == (1+i)^n$

Induktionsanfang: Für n == 1 gilt: $\sqrt{2}\left(\text{Cos}\left[\frac{\pi}{4}\right] + i\,\text{Sin}\left[\frac{\pi}{4}\right]\right) == 1+i == (1+i)^1 == 1+i$

Induktionsschritt: $2^{\frac{1+n}{2}}\left(\text{Cos}\left[\frac{1}{4}(1+n)\pi\right] + i\,\text{Sin}\left[\frac{1}{4}(1+n)\pi\right]\right) ==$

$i\,2^{n/2}\,e^{\frac{i n\pi}{4}} + 2^{n/2}\left(\text{Cos}\left[\frac{n\pi}{4}\right] + i\,\text{Sin}\left[\frac{n\pi}{4}\right]\right) == i\,2^{n/2}\,e^{\frac{i n\pi}{4}} + (1+i)^n == (1+i)^{1+n}$ q.e.d

VIS[(Sqrt[3] - ⅈ)^n == 2^n * (Cos[n * π / 6] - ⅈ * Sin[n * π / 6]), n ≥ 1]

Vermutung: ∀ n >= 1 gilt: $\left(\sqrt{3}-i\right)^n == 2^n\left(\text{Cos}\left[\frac{n\pi}{6}\right] - i\,\text{Sin}\left[\frac{n\pi}{6}\right]\right)$

Induktionsanfang: Für n == 1 gilt: $\left(\sqrt{3}-i\right)^1$

$== -i+\sqrt{3} == 2^1\left(\text{Cos}\left[\frac{\pi}{6}\right] - i\,\text{Sin}\left[\frac{\pi}{6}\right]\right) == -i+\sqrt{3}$

Induktionsschritt: $\left(\sqrt{3}-i\right)^{1+n} == \left((-1-i)+\sqrt{3}\right)\left(-i+\sqrt{3}\right)^n + \left(\sqrt{3}-i\right)^n$

$== \left((-1-i)+\sqrt{3}\right)\left(-i+\sqrt{3}\right)^n + 2^n\left(\text{Cos}\left[\frac{n\pi}{6}\right] - i\,\text{Sin}\left[\frac{n\pi}{6}\right]\right)$

$== 2^{1+n}\left(\text{Cos}\left[\frac{1}{6}(1+n)\pi\right] - i\,\text{Sin}\left[\frac{1}{6}(1+n)\pi\right]\right)$ q.e.d

Und hier die bisherigen Grenzen unserer Funktionen:

VIS[$2^n > n^2$, n ≥ 5]

Vermutung: ∀ n >= 5 gilt: $2^n > n^2$

Induktionsanfang: Für n == 5 gilt: $2^5 == 32 > 5^2 == 25$

```
If[(2^(1+n) > (1 + n)^2) == True, If[Head[2^n] === Mod, Print[Da , 2^n > n^2,  für , n,  == , 5];
  Print[ und da Mod[, First[First[lp1]],  - , First[2^n], ,, Last[2^n], ] == , Mod[
     FullSimplify[First[First[lp1]] - First[2^n]], Last[2^n]] == n^2, , gilt die Vermutung
     für alle , n ≥ 5], Print[Induktionsschritt: , lp1,  == , 2^n + differenz,   > ,
   n^2 + differenz,  == , rp1,    q.e.d]], Print[Induktionsschritt klappt nicht!]]
```

VIK[2^n > n^2, {v[0] → 2, v[1] → 3, v[n_] :→ 3 v[n - 1] - 2 v[n - 2]}, n ≥ 5]

Vermutung: ∀ n >= 5 gilt: $2^n > n^2$

```
Die Algorithmen von Mma haben leider
  nicht ausgereicht, um den Induktionsschritt durchzuführen...
```

Gar nicht wahr, die effektivsten Algorithmen von Mathematica reichen aus, nur wurden sie nicht in FullSimplify, sondern stattdessen in der Funktion Reduce reingepackt.
Irgendwann sollten wir auch Reduce in unsere vollständige Induktion mit einflechten...

```
FullSimplify[(2^n > n^2) && (n ≥ 5), Integers]
```

$2^n > n^2$ && $n \geq 5$

```
Reduce[(2^n > n^2) && (n ≥ 5), n]
```

$n \geq 5$

```
Reduce[(2^n > n^2) && (n ≥ 5) ]
```

$n \geq 5$

```
Reduce[(2^n > n^2) && (n ≥ 5), Integers ]
```

Reduce::ztest1 : Unable to decide whether numeric quantity $2\left(2\,\text{Log}[2] + \text{ProductLog}\left[-1, -\frac{\text{Log}[2]}{2}\right]\right)$ is equal to zero. Assuming it is. ≫

n ∈ Integers && $n \geq 5$

```
VIS[2^(n+4) > (n + 4)^2, n ≥ 1]
```

Vermutung: ∀ n >= 1 gilt: $2^{n+4} > (n+4)^2$

Induktionsanfang: Für n == 1 gilt: 2^{1+4} == 32 > $(1+4)^2$ == 25

```
If[(2^(5+n) > (5 + n)^2) == True,
 If[Head[2^(n+4)] === Mod, Print[Da , 2^(n+4) > (n + 4)^2,  für , n,  == , 1];
  Print[ und da Mod[, First[First[lp1]],  - , First[2^(n+4)], ,, Last[2^(n+4)], ]  == ,
   Mod[FullSimplify[First[First[lp1]] - First[2^(n+4)]], Last[2^(n+4)]] == (n + 4)^2,
   , gilt die Vermutung für alle , n ≥ 1], Print[Induktionsschritt: , lp1,
    == , 2^(n+4) + differenz,   > , (n + 4)^2 + differenz,  == , rp1,    q.e.d]],
 Print[Induktionsschritt klappt nicht!]]
```

```
Reduce[(2^(5 + n) > (5 + n)^2) && (n ≥ 1), Integers ]
```

Reduce::ztest1 : Unable to decide whether numeric quantity $2\left(2\,\text{Log}[2] + \text{ProductLog}\left[-1, -\frac{\text{Log}[2]}{2}\right]\right)$ is equal to zero. Assuming it is. ≫

n ∈ Integers && $n \geq 1$