دانشجو: سید محمدامین طالقانی

ش. دانشجویی: ۹۹۲۱۱۲۰۹

۱. أ.

برای مختصات استوانه‌ای

$$h_1 = h_2 = 1, h_2 = r; \quad x_1 = r, x_2 = \theta, x_3 = z$$

بنابراین

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{1}\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{r}{1}\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right] = \frac{1}{r}\left[\cancelto{1}{\frac{\partial r}{\partial r}}\frac{\partial T}{\partial r} + r\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + r\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r}\left[r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)\right] = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$

ب. در کد پیوست شده به پروژه، هفت روش به ازای مقدار معینی از تقسیمات شبکه اجرا می‌شوند. در این بخش، معادلات گسسته‌سازی شده‌ی در هر روش ارائه می‌گردند:

- **روش تکراری ژاکوبی:**

$$\frac{T^n_{i+1,j} - 2T^{n+1}_{i,j} + T^n_{i-1,j}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_{i,j}}\frac{T^n_{i+1,j} - T^n_{i-1,j}}{2\Delta r} + \frac{1}{r^2_{i,j}}\frac{T^n_{i,j+1} - 2T^{n+1}_{i,j} + T^n_{i,j-1}}{(\Delta\theta)^2} = 0$$

$$T^{n+1}_{i,j} = \frac{\dfrac{T^n_{i+1,j} + T^n_{i-1,j}}{\Delta r^2} + \dfrac{T^n_{i+1,j} - T^n_{i-1,j}}{2r_{i,j}\Delta r} + \dfrac{T^n_{i,j+1} + T^n_{i,j-1}}{(r_{i,j}\Delta\theta)^2}}{2(\dfrac{1}{\Delta r^2} + \dfrac{1}{(r_{i,j}\Delta\theta)^2})}$$

- **روش تکراری گاوس-سایدل نقطه‌ای:**

$$T_{i,j}^{n+1}=\frac{\dfrac{T_{i+1,j}^{n}+T_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta r^2}+\dfrac{T_{i+1,j}^{n}-T_{i-1,j}^{n+1}}{2r_{i,j}\Delta r}+\dfrac{T_{i,j+1}^{n}+T_{i,j-1}^{n+1}}{(r_{i,j}\Delta\theta)^2}}{2\left(\dfrac{1}{\Delta r^2}+\dfrac{1}{(r_{i,j}\Delta\theta)^2}\right)}$$

- **روش تکراری گاوس-سایدل خطی (جاروب در راستای r):**

$$\left(\frac{1}{(\Delta r)^2}-\frac{1}{2r_{i,j}\Delta r}\right)T_{i-1,j}^{n+1}-2\left(\frac{1}{(\Delta r)^2}+\frac{1}{(r_{i,j}\Delta\theta)^2}\right)T_{i,j}^{n+1}+\left(\frac{1}{(\Delta r)^2}+\frac{1}{2r_{i,j}\Delta r}\right)T_{i+1,j}^{n+1}=-\frac{T_{i,j+1}^{n}+T_{i,j-1}^{n}}{(r_{i,j}\Delta\theta)^2}$$

$$A_{i,j}T_{i-1,j}^{n+1}+B_{i,j}T_{i,j}^{n+1}+C_{i,j}T_{i+1,j}^{n+1}=R_{i,j}$$

در این روش، ماتریس درنظر گرفته شده بدین صورت است:

$$\begin{pmatrix}
B_{2,j} & C_{2,j} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
A_{3,j} & B_{3,j} & C_{3,j} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & A_{4,j} & B_{4,j} & C_{4,j} & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & A_{5,j} & B_{5,j} & C_{5,j} & 0 & \vdots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & A_{I_{max-3},j} & B_{I_{max-3},j} & C_{I_{max-3},j} & 0\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{I_{max-2},j} & B_{I_{max-2},j} & C_{I_{max-2},j}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{I_{max-1},j} & B_{I_{max-1},j}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
T_{2,j}\\ T_{3,j}\\ T_{4,j}\\ T_{5,j}\\ \vdots\\ \vdots\\ T_{I_{max-3},j}\\ T_{I_{max-2},j}\\ T_{I_{max-1},j}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
R_{2,j}-A_{2,j}T_{1,j}\\ R_{3,j}\\ R_{4,j}\\ R_{5,j}\\ \vdots\\ \vdots\\ R_{I_{max-3},j}\\ R_{I_{max-2},j}\\ R_{I_{max-1},j}-C_{I_{max-1},j}T_{I_{max},j}
\end{pmatrix}$$

نحوه پر کردن ماتریس برای نقاط $i=2$ الی $i=I_{max}$ مشابه یک‌دیگر است. بنابراین، در کد نوشته شده سطرهای مربوط به این نقاط در یک حلقه پر شده‌اند و سطر ابتدایی و انتهایی ماتریس در خارج حلقه مقداردهی شده است. این ماتریس یک ماتریس سه‌قطری است و از به‌وسیله‌ی الگوریتم توماس نوشته شده در کد، حل می‌گردد. لازم به ذکر است که تابع thomas (A [ ] [j_{max}], B [ ]) به‌کار گرفته شده در کد با بررسی الگوریتم توماس در پیوست کتاب هافمن نوشته شده است و از الگوریتم آماده و ارسال شده استفاده نگردیده است. همچنین تابع ذکر

شده بر خلاف الگوریتم‌های آماده، کل آرایه‌ی حاوی ماتریس ضرایب و معلومات را یک‌جا دریافت می‌کند و مقدار همه‌ی مجهولات را به صورت یک بردار بر می‌گرداند.

- **روش تکراری گاوس-سایدل خطی (جاروب در راستای θ):**

$$\left(\frac{1}{(r_{i,j}\Delta\theta)^2}\right)T_{i,j-1}^{n+1}-2\left(\frac{1}{(\Delta r)^2}+\frac{1}{(r_{i,j}\Delta\theta)^2}\right)T_{i,j}^{n+1}+\left(\frac{1}{(r_{i,j}\Delta\theta)^2}\right)T_{i,j+1}^{n+1}=-\left(\frac{1}{(\Delta r)^2}-\frac{1}{2r_{i,j}\Delta r}\right)T_{i-1,j}^{n}$$
$$-\left(\frac{1}{(\Delta r)^2}+\frac{1}{2r_{i,j}\Delta r}\right)T_{i+1,j}^{n}$$

$$A_{i,j}T_{i,j-1}^{n+1}+B_{i,j}T_{i,j}^{n+1}+C_{i,j}T_{i,j+1}^{n+1}=R_{i,j}$$

و ماتریس سه‌قطری مربوط به آن:

$$\begin{pmatrix}
B_{i,2} & C_{i,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
A_{i,3} & B_{i,3} & C_{i,3} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & A_{i,4} & B_{i,4} & C_{i,4} & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & A_{i,5} & B_{i,5} & C_{i,5} & 0 & \vdots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & A_{i,J_{max-3}} & B_{i,J_{max-3}} & C_{i,J_{max-3}} & 0\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{I_{max-2},j} & B_{i,J_{max-2}} & C_{i,J_{max-2}}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{i,J_{max-1}} & B_{i,J_{max-1}}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
T_{i,2}\\ T_{i,3}\\ T_{i,4}\\ T_{i,5}\\ \vdots\\ \vdots\\ T_{i,J_{max-3}}\\ T_{i,J_{max-2}}\\ T_{i,J_{max-1}}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
R_{i,2}-A_{i,2}T_{i,1}\\ R_{i,3}\\ R_{i,4}\\ R_{i,5}\\ \vdots\\ \vdots\\ R_{i,J_{max-3}}\\ R_{i,J_{max-2}}\\ R_{i,J_{max-1}}-C_{i,J_{max-1},j}T_{i,J_{max}}
\end{pmatrix}$$

- **روش تکراری جاروبی دوگانه (ابتدا در راستای r سپس θ):**

روابط همانند دو روش قبل است با این تفاوت که ابتدا جاروب در راستای r صورت می‌گیرد و پس از یک‌بار جاروب در این راستا، بلافاصله جاروب در راستای θ انجام می‌شود.

- **روش تکراری جاروبی دوگانه (ابتدا در راستای θ سپس r):**

برای بررسی اثر ترتیب جاروب‌ها بر روی همگرایی حل، روش قبل برعکس انجام شده است.

- **روش تکراری فوق تخفیفی (SOR) برای روش گاوس-سایدل و یافتن مقدار بهینه‌ی ω:**

برای یافتن مقدار بهینه‌ی ω در روش SOR، رابطه‌ی $\nabla^2 T = 0$ را در دامنه‌ی محاسباتی و با فرض تقسیمات Δx و Δy گسسته‌سازی می‌کنیم:

$$\frac{T^n_{i+1,j} - 2T^{n+1}_{i,j} + T^n_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T^n_{i,j+1} - 2T^{n+1}_{i,j} + T^n_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

فرض می‌شود که $\Delta x = \Delta y = h$، یا به عبارت دیگر شبکه مربعی و تقسیمات شبکه یک‌نواخت باشد. در این‌صورت روش گاوس-سایدل نقطه‌ای تبدیل می‌شود به

$$T^{n+1}_{i,j} = \frac{1}{4}\left(T^{n+1}_{i-1,j} + T^n_{i+1,j} + T^{n+1}_{i,j-1} + T^n_{i,j+1}\right)$$

با اعمال روش SOR به این رابطه

$$T^{n+1}_{i,j} = T^n_{i,j} + \frac{\omega}{4}\left(T^{n+1}_{i-1,j} + T^n_{i+1,j} + T^{n+1}_{i,j-1} + T^n_{i,j+1} - 4T^n_{i,j}\right)$$

برای بررسی نرخ هم‌گرایی، دما در هر لحظه و مکان را به این صورت فرض می‌کنیم. [۱]

$$T^n_{i,j} = \hat{T}^n e^{i(\alpha x + \beta y)}$$

که در آن

$$\alpha = \frac{m\pi}{L}, \quad \beta = \frac{n\pi}{L}, \quad m,n = 1,2,\ldots,N-1$$

با جایگزینی این عبارت در معادله‌ی گسسته‌سازی شده:

$$\hat{T}^{n+1}e^{i(\alpha x+\beta y)}=\hat{T}^{n}e^{i(\alpha x+\beta y)}+\frac{\omega}{4}\left(\begin{array}{l}\hat{T}^{n+1}e^{i(\alpha(x-\Delta x)+\beta y)}+\hat{T}^{n}e^{i(\alpha(x+\Delta x)+\beta y)}+\hat{T}^{n+1}e^{i(\alpha x+\beta(y-\Delta y))}\\ +\hat{T}^{n}e^{i(\alpha x+\beta(y+\Delta y))}-4\hat{T}^{n}e^{i(\alpha x+\beta y)}\end{array}\right)$$

$$\hat{T}=1+\frac{\omega}{4}\left(\hat{T}(e^{-i\alpha\Delta x}+e^{-i\beta\Delta y})+e^{i\alpha\Delta x}+e^{i\beta\Delta y}-4\right)$$

فرض می‌کنیم $e^{i\alpha\Delta x}+e^{i\alpha\Delta y}$ یک عدد مختلط مانند z باشد.

$$z=\frac{\omega}{4}(e^{i\alpha\Delta x}+e^{i\beta\Delta y})=\xi+i\eta\rightarrow\overline{z}=\frac{\omega}{4}(e^{-i\alpha\Delta x}+e^{-i\beta\Delta y})=\xi-i\eta$$

بنابراین

$$\hat{T}=1+\overline{z}\,\hat{T}+z-\omega\rightarrow\hat{T}=\frac{1+z-\omega}{1-\overline{z}}$$

اندازه‌ی $\hat{T}$ نرخ هم‌گرایی را تعیین می‌کند.

$$\left|\hat{T}\right|^{2}=\frac{(1+\xi-\omega)^{2}+\eta^{2}}{(1-\xi)^{2}+\eta^{2}}$$

می‌توان نشان داد که $\left|\hat{T}\right|$ زمانی به ۱ نزدیک خواهد بود که α و β تا حد ممکن کوچک باشند ($\beta=\frac{\pi}{L},\ \alpha=\frac{\pi}{L}$) و ξ نزدیک $\frac{\omega}{2}$ باشد. در این‌صورت:

$$\xi=(\frac{\omega}{2})\sin\frac{\pi\Delta x}{L},\ \eta=(\frac{\omega}{2})\sin\frac{\pi\Delta y}{L}$$
$$\Delta x=\Delta y\rightarrow\xi=\eta=(\frac{\omega}{2})\sin\frac{\pi\Delta x}{L}$$

$$\left|\hat{T}\right|^{2}=\frac{\omega^{2}+4(1-\omega)^{2}+4\omega(1-\omega)\cos(\frac{\pi}{N})}{\omega^{2}+4-4\omega\cos(\frac{\pi}{N})}$$

با بدست آوردن اکسترمم عبارت فوق، مقدار بهینه‌ی ω بدست می‌آید.

$$\omega = 2 - 2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos(\frac{\pi}{N})}$$

$$N \gg 1 \rightarrow 1-\cos(\frac{\pi}{N}) = \frac{\pi^2}{2N^2} \rightarrow \omega = 2(1-\frac{\pi}{N})$$

به عنوان مثال، برای یک شبکه‌ی ٦٥×٦٥، مقدار بهینه‌ی ω برابر است با ۱/۹۰۳.

ت. گسسته‌سازی‌های به‌کار رفته در همه‌ی روش‌ها از یک نوع می‌باشد (Central Space). بنابراین خطای قطع برای همه‌ی روش‌ها یکسان می‌باشد.

محاسبه‌ی خطای قطع جمله‌ی $\frac{T^n_{i+1,j} - 2T^{n+1}_{i,j} + T^n_{i-1,j}}{\Delta r^2}$:

$$T(r_i+\Delta r,\theta_i) = T(r_i,\theta_i) + \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{(r_i,\theta_i)} \frac{\Delta r}{1!} + \left.\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)_{(r_i,\theta_i)} \frac{(\Delta r)^2}{2!} + \cdots$$

$$T(r_i-\Delta r,\theta_i) = T(r_i,\theta_i) - \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{(r_i,\theta_i)} \frac{\Delta r}{1!} + \left.\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)_{(r_i,\theta_i)} \frac{(\Delta r)^2}{2!} \pm \cdots$$

$$T(r_i+\Delta r,\theta_i) + T(r_i-\Delta r,\theta_i) = 2T(r_i,\theta_i) + 2\left.\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)_{(r_i,\theta_i)} \frac{(\Delta r)^2}{2!} + 2\left.\frac{\partial^4 T}{\partial r^4}\right)_{(r_i,\theta_i)} \frac{(\Delta r)^4}{4!} + \cdots$$

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)_{(r_i,\theta_i)} = \frac{T(r_i-\Delta r,\theta_i) - 2T(r_i,\theta_i) + T(r_i+\Delta r,\theta_i)}{(\Delta r)^2} - \left.\frac{\partial^4 T}{\partial r^4}\right)_{(r_i,\theta_i)} \frac{(\Delta r)^2}{12} \pm \cdots$$

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)_{(r_i,\theta_i)} = \frac{T(r_i-\Delta r,\theta_i) - 2T(r_i,\theta_i) + T(r_i+\Delta r,\theta_i)}{(\Delta r)^2} + O(\Delta r^2)$$

محاسبه‌ی خطای قطع جمله‌ی $\frac{1}{r_{i,j}}\frac{T^n_{i+1,j} - T^n_{i-1,j}}{2\Delta r}$:

$$T(r_i+\Delta r,\theta_i)=T(r_i,\theta_i)+\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{(r_i,\theta_i)}\frac{\Delta r}{1!}+\left.\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)_{(r_i,\theta_i)}\frac{(\Delta r)^2}{2!}+\cdots$$

$$T(r_i-\Delta r,\theta_i)=T(r_i,\theta_i)-\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{(r_i,\theta_i)}\frac{\Delta r}{1!}+\left.\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)_{(r_i,\theta_i)}\frac{(\Delta r)^2}{2!}\pm\cdots$$

$$T(r_i+\Delta r,\theta_i)-T(r_i-\Delta r,\theta_i)=2\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{(r_i,\theta_i)}\frac{\Delta r}{1!}+2\left.\frac{\partial^3 T}{\partial r^3}\right)_{(r_i,\theta_i)}\frac{(\Delta r)^3}{3!}+\cdots$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{(r_i,\theta_i)}=\frac{T(r_i+\Delta r,\theta_i)-T(r_i-\Delta r,\theta_i)}{2\Delta r}-\left.\frac{\partial^3 T}{\partial r^3}\right)_{(r_i,\theta_i)}\frac{(\Delta r)^2}{3!}\pm\cdots$$

$$\left.\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{(r_i,\theta_i)}=\frac{1}{r_{i,j}}\frac{T(r_i+\Delta r,\theta_i)-T(r_i-\Delta r,\theta_i)}{2\Delta r}+O\left(\frac{\Delta r^2}{r_{i,j}}\right)$$

محاسبه‌ی خطای قطع جمله‌ی $\frac{1}{r_{i,j}^2}\frac{T_{i,j+1}^n-2T_{i,j}^{n+1}+T_{i,j-1}^n}{(\Delta\theta)^2}$:

$$T(r_i,\theta_i+\Delta\theta)=T(r_i,\theta_i)+\left.\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)_{(r_i,\theta_i)}\frac{\Delta\theta}{1!}+\left.\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}\right)_{(r_i,\theta_i)}\frac{(\Delta\theta)^2}{2!}+\cdots$$

$$T(r_i,\theta_i-\Delta\theta)=T(r_i,\theta_i)-\left.\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)_{(r_i,\theta_i)}\frac{\Delta\theta}{1!}+\left.\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}\right)_{(r_i,\theta_i)}\frac{(\Delta\theta)^2}{2!}\pm\cdots$$

$$T(r_i,\theta_i+\Delta\theta)+T(r_i,\theta_i-\Delta\theta)=2T(r_i,\theta_i)+2\left.\frac{\partial^4 T}{\partial\theta^4}\right)_{(r_i,\theta_i)}\frac{(\Delta\theta)^2}{2!}+2\left.\frac{\partial^4 T}{\partial\theta^4}\right)_{(r_i,\theta_i)}\frac{(\Delta\theta)^4}{4!}+\cdots$$

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}\right)_{(r_i,\theta_i)}=\frac{T(r_i,\theta_i+\Delta\theta)-2T(r_i,\theta_i)+T(r_i,\theta_i-\Delta\theta)}{(\Delta\theta)^2}-\left.\frac{\partial^4 T}{\partial\theta^4}\right)_{(r_i,\theta_i)}\frac{(\Delta\theta)^2}{12}+\cdots$$

$$\left.\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4 T}{\partial\theta^4}\right)_{(r_i,\theta_i)}=\frac{1}{{r_{i,j}}^2}\frac{T(r_i,\theta_i+\Delta\theta)-2T(r_i,\theta_i)+T(r_i,\theta_i-\Delta\theta)}{(\Delta\theta)^2}+O\left(\frac{\Delta\theta^2}{{r_{i,j}}^2}\right)\cdots$$

از خطای قطع سه جمله‌ی فوق نتیجه می‌شود:

$$\nabla^2_{(r,\theta)}T=\frac{T^n_{i+1,j}-2T^{n+1}_{i,j}+T^n_{i-1,j}}{\Delta r^2}+\frac{1}{r_{i,j}}\frac{T^n_{i+1,j}-T^n_{i-1,j}}{2\Delta r}+\frac{1}{r^2_{i,j}}\frac{T^n_{i,j+1}-2T^{n+1}_{i,j}+T^n_{i,j-1}}{(\Delta\theta)^2}+O(\Delta r^2)+O(\frac{\Delta r^2}{r_{i,j}})+O(\frac{\Delta\theta^2}{{r_{i,j}}^2})$$

$$=\frac{T^n_{i+1,j}-2T^{n+1}_{i,j}+T^n_{i-1,j}}{\Delta r^2}+\frac{1}{r_{i,j}}\frac{T^n_{i+1,j}-T^n_{i-1,j}}{2\Delta r}+\frac{1}{r^2_{i,j}}\frac{T^n_{i,j+1}-2T^{n+1}_{i,j}+T^n_{i,j-1}}{(\Delta\theta)^2}+O(\Delta r^2,\frac{\Delta\theta^2}{{r_{i,j}}^2})$$

بنابراین خطای قطع از مرتبه‌ی Δr^2و $\frac{\Delta\theta^2}{{r_{i,j}}^2}$ می‌باشد. مقدار این خطا نیز در بخش ث محاسبه شده است.

ث. برای حالت پایا، همه‌ی روش‌ها از لحاظ خطای قطع و سازگاری یکسان می‌باشند. جملات اول خطای بدین صورت می‌باشند:

$$|T.E.|=\left.\frac{\partial^4T}{\partial r^4}\right)_{(r_i,\theta_i)}\frac{(\Delta r)^2}{12}+\left.\frac{\partial^3T}{\partial r^3}\right)_{(r_i,\theta_i)}\frac{1}{r_{i,j}}\frac{(\Delta r)^2}{3!}+\left.\frac{\partial^4T}{\partial\theta^4}\right)_{(r_i,\theta_i)}\frac{1}{{r_{i,j}}^2}\frac{(\Delta\theta)^2}{12}$$

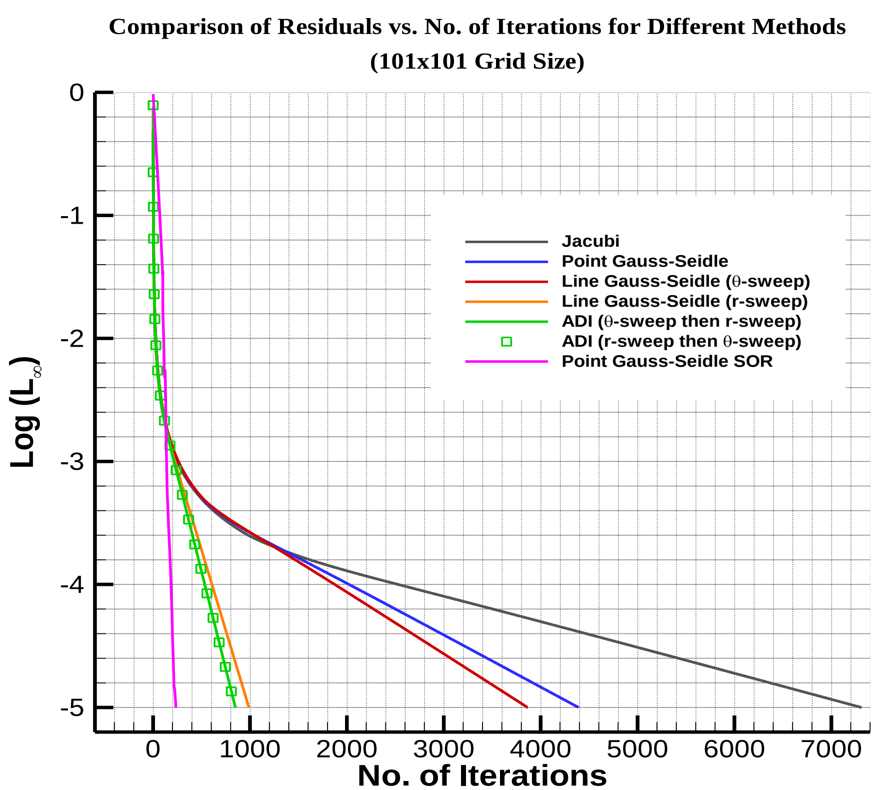
چون خطای قطع تابعی از پارامترهای گسسته‌سازی است، هماهنگی برقرار است. برای بررسی سازگاری باید اختلاف حل عددی و PDE (یا همان خطای خطای قطع) با ریزکردن شبکه صفر شود.

$$\lim_{\Delta r,\Delta\theta\to0}|T.E.|=\lim_{\Delta r,\Delta\theta\to0}\left[\left.\frac{\partial^4T}{\partial r^4}\right)_{(r_i,\theta_i)}\frac{(\Delta r)^2}{12}+\left.\frac{\partial^3T}{\partial r^3}\right)_{(r_i,\theta_i)}\frac{1}{r_{i,j}}\frac{(\Delta r)^2}{3!}+\left.\frac{\partial^4T}{\partial\theta^4}\right)_{(r_i,\theta_i)}\frac{1}{{r_{i,j}}^2}\frac{(\Delta\theta)^2}{12}\right]=0$$

بنابراین سازگاری نیز برقرار است.

ج. در کدهای نوشته شده، حدس اولیه هنگام اجرای کد بر روی صفحه‌ی نمایش داده می‌شود. این حدس کدها به صورت پیش‌فرض صفر درنظر گرفته شده است.

خ. شکل ۱) نشان‌دهنده‌ی نمودار نرم باقی‌مانده‌ها بر حسب تعداد تکرارها برای روش‌های مختلف می‌باشد. شبکه‌ی مورد انتخاب نیز دارای تعداد نقاط ۱۰۱در۱۰۱ می‌باشد تا تفاوت روش‌ها بهتر نمایان گردد. بر این اساس ملاحظه می‌گردد به ترتیب از تعداد تکرار زیاد به کم روش ژاکوبی، گاوس–سایدل نقطه‌ای، گاوس–سایدل خطی (در راستای شعاعی)، گاوس–سایدل خطی (در راستای مماسی)، جاروبی دوگانه (بدون تاثیر در ترتیب جاروب) و روش تخفیفی بر روی گاوس–سایدل نقطه‌ای بیش‌ترین تعداد تکرار را تا پایان رساندن حل نیازمند هستند. همچنین قابل توجه است که در روش خطی، انتخاب جهت جاروب مناسب تاثیر بسزایی در کاهش تعداد تکرارها دارد (در این مسئله جاروب در جهت شعاعی به مراتب سریع‌تر هم‌گرا می‌شود). همچنین، در روش جاروبی دوگانه ترتیب جاروب‌ها تاثیری بر بهبود یا بدتر شدن هم‌گرایی ندارد. مشاهده‌ی مهم دیگر نیز مربوط به روش



شکل ۱) نرم خطا بر حسب تعداد تکرارها برای روش‌های مختلف در شبکه‌ی ۱۰۱X۱۰۱

فوق تخفیفی است که در آن مقدار بهینه‌ی فاکتور تخفیفی (ω) استفاده شده است و هم‌گرایی فوق‌العاده سریعی دارد. البته روش تخفیفی بر روی روش تکرار گاوس–سایدل نقطه‌ای اعمال شده است. طبیعتا اگر روش تخفیفی بر روی الگوریتم قوی‌تری مانند گاوس–سایدل خطی اعمال شود و مقدار بهینه‌ی فاکتور برای آن محاسبه شود، هم‌گرایی سریع‌تری را شاهد خواهیم بود. به دلیل زمان‌بر بودن محاسبات این کار، تنها به اعمال این روش بر روی گاوس–سایدل نقطه‌ای بسنده شده است.

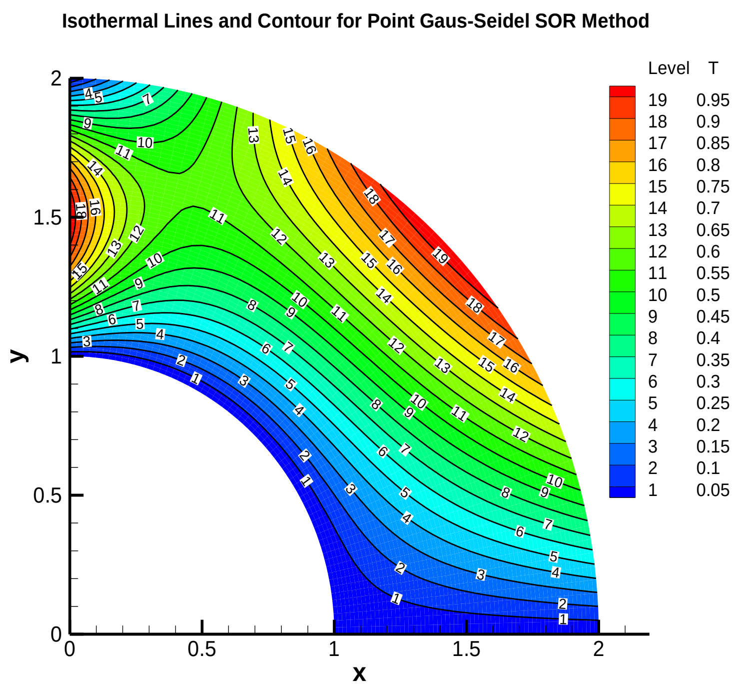
د. در پوشه‌ی د از فایل‌های پیوست شده، فایل‌های پروژه‌ی Visual Studio برای پنج شبکه با ابعاد ۹x۹، ۱۷x۱۷، ۳۳x۳۳، ٦٥x٦٥ و ۱۰۱x۱۰۱ قرار داده شده است. با اجرای کد یا پروژه‌ی مربوط به هر شبکه، نتایج همه‌ی روش‌های استفاده شده ایجاد می‌شود.

ذ. منحنی‌های دما ثابت برای روش فوق تخفیفی گاوس–سایدل نقطه‌ای در شکل ۲ نمایش داده شده است.

ر. حل دقیق این مسئله به کمک نرم‌افزار Maple 2020.2 بدست آمده است. فایل میپل مربوط به این حل در پوشه‌ی اصلی پیوست پروژه و تحت نام CFDI Proj 1.mw ذخیره شده است.

$$T(r,\theta)=\frac{4\sin(2\theta)\left(r^4-1\right)}{15r^2}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2\sin\left(\frac{n\pi\ln(r)}{\ln(2)}\right)e^{\frac{n\pi^2}{2\ln(2)}}\left(\int_1^2\frac{\sin\left(\frac{n\pi\ln(r)}{\ln(2)}\right)\sin(\pi r)}{r}dr\right)\left(e^{\frac{n\pi\theta}{\ln(2)}}-e^{-\frac{n\pi\theta}{\ln(2)}}\right)}{\ln(2)\left(e^{\frac{n\pi^2}{\ln(2)}}-1\right)}\right)$$

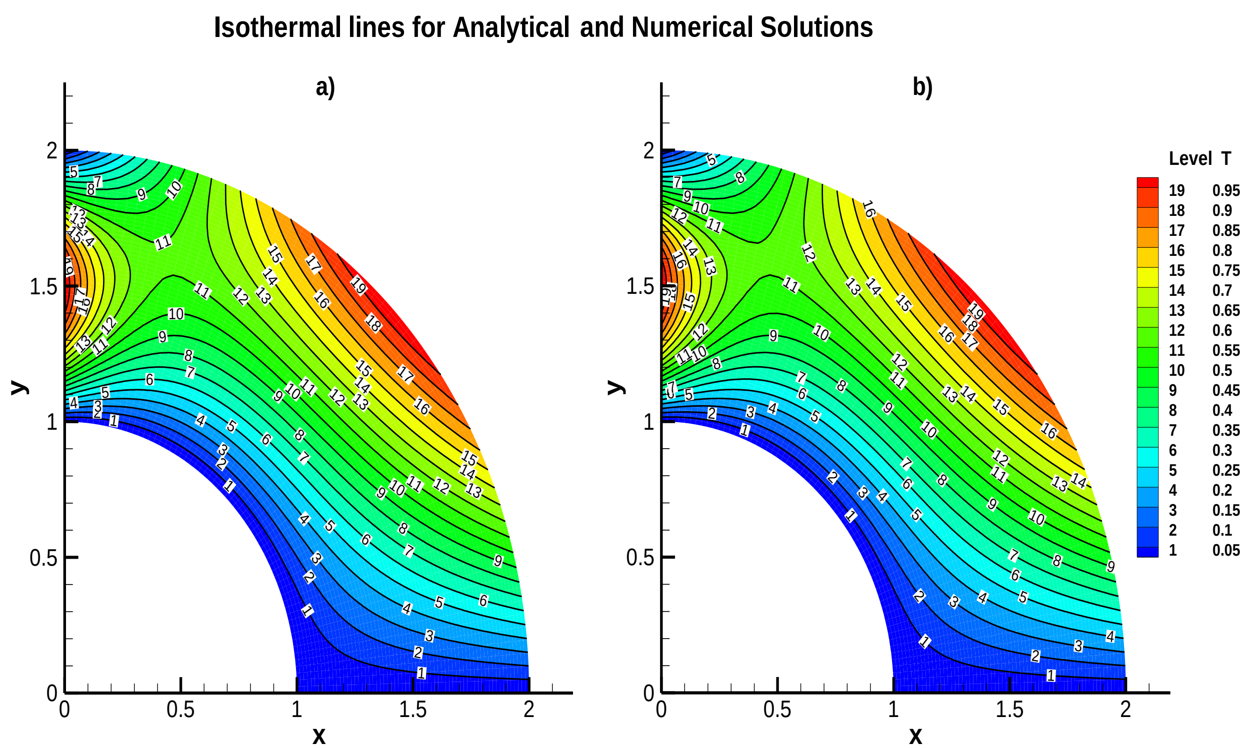
منحنی‌های دما ثابت برای حل عددی و تحلیلی در شکل ۳ در کنار یک‌دیگر قرار داده شده است. ملاحظه می‌شود که این دو حل بسیار به یک‌دیگر نزدیک هستند.



شکل ۲) منحنی‌های دما ثابت برای روش فوق تخفیفی گاوس-سایدل نقطه‌ای

ز. دقت حل برای روش‌های مختلف در شش جدول ذیل بررسی شده است. هر سه نرم مورد نظر محاسبه گردیده‌اند اما تنها نرم L_2 برای محاسبه‌ی دقت معیار قرار داده شده است.

Jacubi							
Grid Size	Δr	$\log(\Delta r)$	L_1	L_2	L_∞	$\log(L_2)$	Accuracy
9	1.25E-01	-0.903	2.67E-03	4.67E-03	1.533E-02	-2.331	-
17	6.25E-02	-1.204	8.28E-04	1.33E-03	4.133E-03	-2.875	1.807
33	3.13E-02	-1.505	2.27E-04	3.50E-04	1.059E-03	-3.456	1.929
65	1.56E-02	-1.806	5.92E-05	8.94E-05	2.687E-04	-4.049	1.970
Average		-	-	-	-	-	1.888



شکل ۳) کانتور دما و خطوط دما ثابت برای حل تحلیلی و عددی:a) حل تحلیلی، b) حل عددی به روش PSOR

Point Gauss-Seidel							
Grid Size	Δr	log(Δr)	L_1	L_2	L_∞	log(L_2)	Accuracy
9	1.25E-01	-0.903	2.67E-03	4.67E-03	1.533E-02	-2.331	-
17	6.25E-02	-1.204	8.28E-04	1.33E-03	4.133E-03	-2.875	1.807
33	3.13E-02	-1.505	2.27E-04	3.50E-04	1.059E-03	-3.456	1.929
65	1.56E-02	-1.806	5.92E-05	8.94E-05	2.687E-04	-4.049	1.970
Average		-	-	-	-	-	1.888

Line Gauss-Seidel (θ-sweep)							
Grid Size	Δr	$\log(\Delta r)$	L_1	L_2	L_∞	$\log(L_2)$	Accuracy
9	1.25E-01	-0.903	2.67E-03	4.67E-03	1.533E-02	-2.331	-
17	6.25E-02	-1.204	8.28E-04	1.33E-03	4.133E-03	-2.875	1.807
33	3.13E-02	-1.505	2.27E-04	3.50E-04	1.059E-03	-3.456	1.929
65	1.56E-02	-1.806	5.92E-05	8.94E-05	2.687E-04	-4.049	1.970
Average		-	-	-	-	-	1.888

Line Gauss-Seidel (r-sweep)							
Grid Size	Δr	$\log(\Delta r)$	L_1	L_2	L_∞	$\log(L_2)$	Accuracy
9	1.25E-01	-0.903	2.67E-03	4.67E-03	1.533E-02	-2.331	-
17	6.25E-02	-1.204	8.28E-04	1.33E-03	4.133E-03	-2.875	1.807
33	3.13E-02	-1.505	2.27E-04	3.50E-04	1.059E-03	-3.456	1.929
65	1.56E-02	-1.806	5.92E-05	8.94E-05	2.687E-04	-4.049	1.970
Average		-	-	-	-	-	1.888

ADI							
Grid Size	Δr	$\log(\Delta r)$	L_1	L_2	L_∞	$\log(L_2)$	Accuracy
9	1.25E-01	-0.903	2.67E-03	4.67E-03	1.533E-02	-2.331	-
17	6.25E-02	-1.204	8.28E-04	1.33E-03	4.133E-03	-2.875	1.807
33	3.13E-02	-1.505	2.27E-04	3.50E-04	1.059E-03	-3.456	1.929
65	1.56E-02	-1.806	5.92E-05	8.94E-05	2.687E-04	-4.049	1.970
Average		-	-	-	-	-	1.888

Point Gauss-Seidel SOR							
Grid Size	Δr	$\log(\Delta r)$	L_1	L_2	L_∞	$\log(L_2)$	Accuracy
9	1.25E-01	-0.903	2.67E-03	4.67E-03	1.533E-02	-2.331	-
17	6.25E-02	-1.204	8.28E-04	1.33E-03	4.133E-03	-2.875	1.807
33	3.13E-02	-1.505	2.27E-04	3.50E-04	1.059E-03	-3.456	1.929
65	1.56E-02	-1.806	5.92E-05	8.94E-05	2.687E-04	-4.049	1.970
Average		-	-	-	-	-	1.888

جدول‌های زیر نیز مقدار دقت روش‌ها را نسبت به کوچک کردن $\Delta\theta$ می‌سنجند.

Jacubi							
Grid Size	$\Delta\theta$	$\log(\Delta\theta)$	L_1	L_2	L_∞	$\log(L_2)$	Accuracy
9	1.96E-01	-0.707	2.67E-03	4.67E-03	1.533E-02	-2.331	-
17	9.82E-02	-1.008	8.28E-04	1.33E-03	4.133E-03	-2.875	1.807
33	4.91E-02	-1.309	2.27E-04	3.50E-04	1.059E-03	-3.456	1.929
65	2.45E-02	-1.610	5.92E-05	8.94E-05	2.687E-04	-4.049	1.970
Average		-	-	-	-	-	1.888

Point Gauss-Seidel							
Grid Size	$\Delta\theta$	$\log(\Delta\theta)$	L_1	L_2	L_∞	$\log(L_2)$	Accuracy
9	1.96E-01	-0.707	2.67E-03	4.67E-03	1.533E-02	-2.331	-
17	9.82E-02	-1.008	8.28E-04	1.33E-03	4.133E-03	-2.875	1.807
33	4.91E-02	-1.309	2.27E-04	3.50E-04	1.059E-03	-3.456	1.929
65	2.45E-02	-1.610	5.92E-05	8.94E-05	2.687E-04	-4.049	1.970
Average		-	-	-	-	-	1.888

Line Gauss-Seidel (θ-sweep)

Grid Size	$\Delta\theta$	$\log(\Delta\theta)$	L_1	L_2	L_∞	$\log(L_2)$	Accuracy
9	1.96E-01	-0.707	2.67E-03	4.67E-03	1.533E-02	-2.331	-
17	9.82E-02	-1.008	8.28E-04	1.33E-03	4.133E-03	-2.875	1.807
33	4.91E-02	-1.309	2.27E-04	3.50E-04	1.059E-03	-3.456	1.929
65	2.45E-02	-1.610	5.92E-05	8.94E-05	2.687E-04	-4.049	1.970
Average		-	-	-	-	-	1.888

Line Gauss-Seidel (r-sweep)

Grid Size	$\Delta\theta$	$\log(\Delta\theta)$	L_1	L_2	L_∞	$\log(L_2)$	Accuracy
9	1.96E-01	-0.707	2.67E-03	4.67E-03	1.533E-02	-2.331	-
17	9.82E-02	-1.008	8.28E-04	1.33E-03	4.133E-03	-2.875	1.807
33	4.91E-02	-1.309	2.27E-04	3.50E-04	1.059E-03	-3.456	1.929
65	2.45E-02	-1.610	5.92E-05	8.94E-05	2.687E-04	-4.049	1.970
Average		-	-	-	-	-	1.888

ADI

Grid Size	$\Delta\theta$	$\log(\Delta\theta)$	L_1	L_2	L_∞	$\log(L_2)$	Accuracy
9	1.96E-01	-0.707	2.67E-03	4.67E-03	1.533E-02	-2.331	-
17	9.82E-02	-1.008	8.28E-04	1.33E-03	4.133E-03	-2.875	1.807
33	4.91E-02	-1.309	2.27E-04	3.50E-04	1.059E-03	-3.456	1.929
65	2.45E-02	-1.610	5.92E-05	8.94E-05	2.687E-04	-4.049	1.970
Average		-	-	-	-	-	1.888

Point Gauss-Seidel SOR							
Grid Size	$\Delta\theta$	$\log(\Delta\theta)$	L_1	L_2	L_∞	$\log(L_2)$	Accuracy
9	1.96E-01	-0.707	2.67E-03	4.67E-03	1.533E-02	-2.331	-
17	9.82E-02	-1.008	8.28E-04	1.33E-03	4.133E-03	-2.875	1.807
33	4.91E-02	-1.309	2.27E-04	3.50E-04	1.059E-03	-3.456	1.929
65	2.45E-02	-1.610	5.92E-05	8.94E-05	2.687E-04	-4.049	1.970
Average		-	-	-	-	-	1.888

طبق جدول‌های فوق، ملاحظه می‌شود همه‌ی روش‌ها نسبت به هر دو متغیر گسسته‌سازی Δr و $\Delta\theta$ دارای دقت مرتبه ۲ می‌باشد. دلیل این امر این است که معادله‌ی گسسته‌سازی شده‌ی همه‌ی روش‌ها در حالت پایا از نظر دقت با یک‌دیگر تفاوتی ندارند و تنها در نحوه‌ی پیش‌روی تکرارها متفاوت‌اند. ممکن است در ابتدا به‌نظر آید که ایجاد جدول‌های دقت تنها برای یکی از متغیرهای گسسته‌سازی کافی می‌باشد، اما این‌طور نیست. در این روش خاص، دقت روش نسبت به هر دو متغیر یک‌سان است اما اگر روش ناشناخته‌ی دیگری مورد بررسی قرار می‌گرفت که دقت آن نسبت به هر متغیر متفاوت باشد، امکان بررسی دقت نسبت به هر متغیر گسسته‌سازی امکان‌پذیر نمی‌بود مگر با ایجاد جدول برای تمامی آن‌ها.

س. در جدول ذیل، تعداد تکرارها و متوسط زمان حل (به ازای ۳ اجرا) قرار داده شده است.

Method	**Computation Time (ms)**	**No. of Iterations**
Jacubi	4310.667	7311
Point Gauss-seidel	2549.000	4391
Line Gauss-seidel (θ-sweep)	8939.667	3866
Line Gauss-seidel (r-sweep)	1791.000	989

ADI	3308.000	850
Point Gauss-seidel SOR	151.333	235

ش. با توجه به جدول فوق بهینه‌ترین روش، روش فوق تخفیفی با اعمال بهینه‌ترین مقدار ω می‌باشد. البته لازم به ذکر است که همواره بدست آوردن مقدار بهینه‌ی این پارامتر کار ساده‌ای نیست، مخصوصا اگر شبکه غیر مربعی و یا غیر یکنواخت باشد. در مرحله‌ی بعد، روش جاروب دوگانه (صرف‌نظر از ترتیب جاروب‌ها) بهینه‌ترین روش است و پس از آن روش جاروب خطی (در راستای شعاعی). روش گاوس–سایدل نقطه‌ای هرچند تکرار بیش‌تری نسبت به روش جاروب خطی در راستای مماسی دارد، اما زمان محاسبه‌ی آن حدودا یک‌چهارم این روش است. بنابراین در جایگاه بعدی روش گاوس سایدل نقطه‌ای قرار می‌گیرد. روش جاروب خطی در راستای مماسی و روش ژاکوبی نیز به ترتیب در آخرین جایگاه قرار می‌گیرند.

مراجع

[۱] اصفهانیان، وحید. «دینامیک سیالات محاسباتی ۱». دانشگاه تهران