آقای دکتر کریم مظاهری
ترم ۱ – نیم‌سال تحصیلی ۱۳۹۹
تاریخ: ۲۱ / ۰۹ / ۱۳۹۹

بسمه تعالی

پروژه دوم

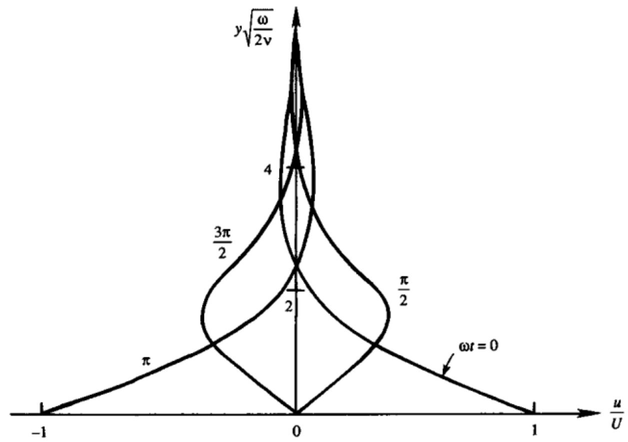
دینامیک سیالات محاسباتی ۱

۴۵۸۳۰- گروه ۲

موعد تحویل: ۵ / ۰۱۰ / ۱۳۹۹

---

۱. دیواره‌ای را در نظر بگیرید، که با سرعت $u_W = U\cos\omega t$ در حال نوسان است. می‌توان نشان داد که طبق مسئله دوم استوکس[1]، نمودار سرعت جریان روی دیواره به‌صورت زیر خواهد بود:



شکل ۱ – نمودار سرعت بی‌بعد $\frac{u}{U}$ بر حسب طول بی‌بعد $y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$ – کتاب مکانیک سیالات Kundu

با فرض جریان یک‌بعدی و بدون وجود گرادیان فشار می‌توان نشان داد که معادله مومنتوم در راستای x به معادله زیر تقلیل پیدا می‌کند:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \upsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (۱)$$

که شرایط مرزی و اولیه به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} u &= U\cos\omega t \quad &\text{at} \quad & y = 0,\ t > 0 \\ u &\to 0 \quad &\text{at} \quad & y \to \infty, t > 0 \\ u &= 0 \quad &\text{at} \quad & t = 0,\ 0 \le y \le \infty \end{aligned} \qquad (۲)$$

أ. با استفاده از پارامترهای بی‌بعد نشان داده شده، معادله را بی‌بعد نمایید. (* نماد بی‌بعدی)

$$u^* = \frac{u}{U}, \qquad t^* = t\omega, \qquad y^* = y\sqrt{\frac{\omega}{\upsilon}}$$

حل تحلیلی این مسأله به‌صورت زیر است:

$$u_{\text{Exact}}\left(y,t\right) = U\exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\upsilon}}y\right)\cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\upsilon}}y\right) \qquad (۳)$$

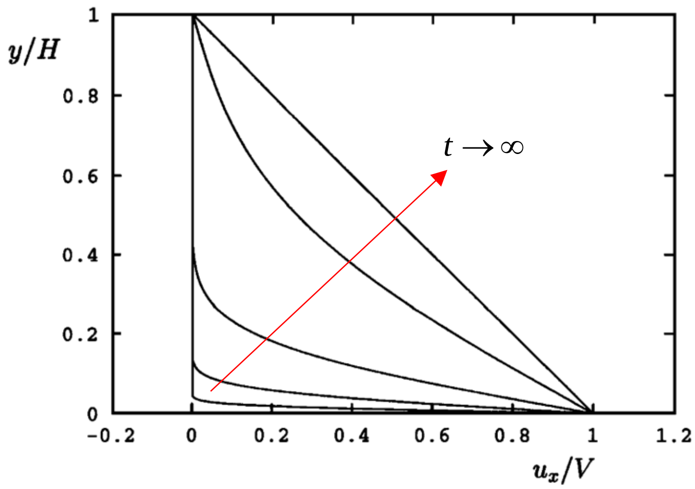
ب. معادله (۱) به‌ازای شرایط مرزی (۲)، حل پایا خواهد داشت یا خیر؟ چرا؟ پس ماهیت حل چگونه است؟

---

[1] *Stokes' Second Problem*

۲. درصورت تغییر شرایط مرزی به‌صورت زیر، مسئله مربوط‌به جریان محصور بین دو دیواره با یک دیواره متحرک[1] تغییر پیدا خواهد کرد:

$$\begin{array}{lll} u=V & \text{at} & y=0,\ t>0 \\ u=0 & \text{at} & y=H, t>0 \end{array}, \quad \text{for this problem start with} \rightarrow \begin{cases} u(y,0)=1 & \text{for} \quad y=0 \\ u(y,0)=0 & \text{for} \quad \text{Anywhere else.} \end{cases} \tag{۴}$$



شکل ۲ – نمودار سرعت بی‌بعد $\frac{u_x}{V}$ برحسب طول بی‌بعد $\frac{y}{H}$، کتاب جریان لزج Papanastasiou

ت. با استفاده پارامترهای بی‌بعدی زیر

$$u^* = \frac{u}{V}, \qquad t^* = \frac{t}{H/V}, \qquad y^* = \frac{y}{H}, \qquad \mathrm{Re}_H = \frac{VH}{\upsilon}$$

معادله حاکم و شرایط مرزی را بی‌بعد کنید.

حل تحلیلی این مسئله به‌صورت زیر است:

$$u_{\text{Exact}}(y,t) = V\left(1-\frac{y}{H}\right) - \frac{2V}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\left(\frac{k\pi y}{H}\right)\exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{H^2}\upsilon t\right) \tag{۵}$$

ث. آیا این مسئله حل پایا دارد؟ دلیل خود را به‌صورت ریاضی بیان کنید.

❖ **یکی از دومسأله اخیر را جهت بررسی روش عددی پیش‌رو برگزینید، در نتیجه فقط کافی‌است به سؤالات متناظربا روش انتخابی خود پاسخ دهید. در صورت حل و بررسی دو روش، نمره امتیازی داده خواهد شد.**

[1] Couette

حل معادله نفوذ با استفاده از روش‌های θ

مجموعه روش‌های θ که برروی مشتق مکانی موجود در معادلات سهوی مانند معادله نفوذ، قابل اعمال هستند به‌صورت زیر قابل نمایش می‌باشند.

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=\alpha\frac{\theta\delta_x^2u_j^{n+1}+\left(1-\theta\right)\delta_x^2u_j^n}{\left(\Delta x\right)^2},\qquad r=\frac{\alpha\Delta t}{\left(\Delta x\right)^2} \tag{۶}$$

توجه شود که مقدار α (ضریب نفوذ) که در مسائل اخیر، معرف شدت نفوذ سرعت دیواره به جریان سیال بالادست می‌باشد، در هر یک از این مسائل مقداری متفاوت است.

می‌توان نشان داد که این روش به ازای مقادیر مختلف از θ معادل روشِ خاصی می‌باشد:

Simple Explicit $\quad\theta=0$

Crank-Nicolson $\quad\theta=1/2$

Simple Implicit $\quad\theta=1$

ج. با استفاده از روش وُن‌نیومن پایداری روش فوق را به‌ازای هر سه مقدار θ مورد بررسی قرار داده و نمودار ضریب بزرگ‌نمایی G[1] را برحسب β در $r=\frac{1}{2}$ رسم نمایید و با نمودار G برحسب β برای PDE مقایسه نمایید.

ح. در خصوص نحوه اثر تغییرات β در یک r ثابت، برروی پایداری روش بحث کنید. (به‌ازای تمامی مقادیر θ)

خ. در خصوص نحوه اثر تغییرات r در یک β ثابت، برروی پایداری روش بحث کنید. (به‌ازای تمامی مقادیر θ)

د. با استفاده از ۳ روش معرفی‌شده در یک دامنه محاسباتی بی‌بعد، به‌ازای اعداد رینولدز $\mathrm{Re_H}=20,100$، مسأله دوم را به ازای مقادیر $r=\frac{1}{4},\frac{1}{2},1,2,5$، حل کرده و تغییرات سرعت بی‌بعد $\frac{u}{V}$ را برحسب $\frac{y}{H}$ پس از رسیدن به مقدار نُرم $\|u^{n+1}-u^n\|<10^{-5}$، در یک نمودار رسم کرده و بایکدیگر و با حل تحلیلی مقایسه کنید، نحوه مقایسه بصورت زیر می‌باشد:

- رسم تمامی مقادیر r برای یک روش در یک نمودار به‌ازای مقادیر مختلف عدد رینولدز
- رسم تمامی روش‌ها در r-های ثابت در یک نمودار به‌ازای مقادیر مختلف عدد رینولدز

ذ. با استفاده از ۳ روش معرفی شده، مسأله اول را در طول زمان به‌ازای مقادیر $r=\frac{1}{4},\frac{1}{2},1,2,5$ حل کرده و نمودار تغییرات سرعت بی‌بعد $\frac{u}{U}$ را برحسب $y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$ در زمان‌های $t^*=0,,0.5\pi,\pi,1.5\pi,2\pi$ رسم کرده (تمامی زمان‌ها به‌ازای هر r، در یک نمودار واحد، جهت مقایسه قرار داشته باشند.) حالت‌های مختلف را مشابه روند اخیر، باهم و با حل تحلیلی مقایسه و بااستفاده از یک نُرم، مقدار خطا را تعیین نمایید. اگر اثر دیواره در دامنه داخلی را محدود به فاصله‌ای از مرتبه δ نسبت به دیواره دانسته و آن‌را عمق نفوذ[2] بنامیم، آیا می‌توان با استفاده از داده‌های به‌دست آمده، این مقدار را محاسبه نمود؟ ($\delta=$ فاصله‌ای که جریان یک درصد کل مختل شده است.)

ر. توزیع سرعت در فضای دوبعدی (x,t) را در مسأله اول تا زمان $t^*=2\pi$ و درمسأله دوم تا زمانی که شرط $\|u^{n+1}-u^n\|<10^{-5}$، ارضا گردد، رسم نمایید، تغییر عدد رینولدز چه اثری برروی توزیع سرعت در مسأله دوم دارد؟

ز. در صورتیکه یکی از مسائل جواب پایا داشت، تعداد دفعات تکرار مورد نیاز جهت رسیدن به حالت پایا را به‌ازای θ و r رسم نمایید.

س. نشان دهید که به‌ازای مقدار $\theta=\frac{1}{2}-\frac{(\Delta x)^2}{12\alpha\Delta t}$ و $\frac{(\Delta x)^2}{\alpha\Delta t}=\sqrt{20}$، دقت روش مذکور، از مرتبه ۶ در مکان و مرتبه ۲ در زمان است.

[1] Amplification Factor
[2] Depth of Penetration or Diffusion Distance