Mitschrift zur Vorlesung

Analysis III

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen*

11. November 2019

Inhaltsverzeichnis

*im Wintersemester 2019/20 gelesen von Prof. Bernhard Leeb, Ph.D.

I Maßtheorie

I.1 Maßproblem und Paradoxien

14.10.2019

Maßtheorie ist die Theorie des Volumens. Motivierende Beispiele sind:

i) Volumina von Teilmengen des euklidischen Raums

ii) Wahrscheinlichkeiten (= "Volumina von Ereignissen")

Wir konzentrieren uns im Rest des Abschnitts auf $\mathbb{R}^d$. Wir wollen einen leistungsfähigen Volumenbegriff haben, sodass die Volumina von möglich vielen Teilmengen flexibel gemessen werden können. Unser erster "naiver" Ansatz wäre, dass wir Volumenmessung für *alle* Teilmengen verlangen, also eine Funktion

$$\mathrm{vol} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0.\infty]$$

Unsere grundlegende Forderung ist die Additivität von Volumina bei Zerlegungen, also

(i) **(endliche) Additivität**: Sind $M_1, ..., M_n \subset \mathbb{R}^d$ paarweise disjunkt, so gilt

$$\mathrm{vol}(M_1 \cup ... \cup M_n) = \mathrm{vol}(M_1) + ... + \mathrm{vol}(M_n)$$

Volumina als geometrische Größen sollten durch die metrische Struktur (Längenmessung) bestimmt sein, also invariant unter Symmetrien der metrischen Struktur:

(ii) **Bewegungsinvarianz**: Für jede Bewegung $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ und jede Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ gilt

$$\mathrm{vol}(\varphi(A)) = \mathrm{vol}(A)$$

(iii) **Normierung**: $\mathrm{vol}([0,1]^d) = 1$.

Verstärke Forderung (i): (Borel, Lebesgue)

(i') **σ-Additivität**[1]: Für Folgen $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Teilmengen $M_n \subset \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\mathrm{vol}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\mathrm{vol}(M_n)}_{\in[0,\infty]}$$

Bemerkung. Wegen des Umordnungssatzes spielt die Reihenfolge der Summanden keine Rolle, da sie alle positiv sind.

$\rightsquigarrow$ flexibilisiert Volumenmessung entscheidend, wir können also komplizierte Figuren durch einfach Figuren approximieren.

Cantons Mengenlehre $\rightsquigarrow$ Existenz von "naiver" Volumenfunktion wurde hinterfragt:

[1] σ: abzählbar, unendlich oft.

Maßproblem Existiert eine Volumenfunktion $\mathrm{vol} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0,\infty]$ mit (i') + (ii) + (iii)?

Satz (Vitali, 1905)**.** Nein, das naive Maßproblem ist unlösbar.

Beweis. Aus dem Auswahlaxiom folgt die Existenz "verrückter" (d.h. geometrisch unvorstellbarer) Teilmengen des $\mathbb{R}^d$. Hier existiert $M \subset \mathbb{R}^d$, ein *Vertretersystem* für Nebenklassen von $\mathbb{Q}^d$ (Untergruppe von $\mathbb{R}^d$) in $\mathbb{R}^d$. Der Quotient abelscher Gruppen $\mathbb{R}^d/\mathbb{Q}^d$ ist also die Menge der Nebenklassen. Die Nebenklassen $a+\mathbb{Q}^d$ für $a \in \mathbb{R}^d$ partitionieren (d.h. zerlegen disjunkt) $\mathbb{R}^d$ (überabzählbar viele). Für alle $a, b \in \mathbb{R}^d$ besteht Dichotomie:

i) entweder $a+\mathbb{Q}^d = b+\mathbb{Q}^d$ (nämlich wenn $a-b \in \mathbb{Q}^d$),

ii) oder $(a+\mathbb{Q}^d) \cap (b+\mathbb{Q}^d) = \varnothing$ (nämlich wenn $a-b \notin \mathbb{Q}^d$).

D.h. für alle $a \in \mathbb{R}^d$ besteht $M \cap (a+\mathbb{Q}^d)$ aus genau einem Element. Daraus folgt, die Translate $q+M$ (abzählbar viele) für $q \in \mathbb{Q}^d$ partitionieren $\mathbb{R}^d$. Aus der σ-Additivität von Volumen folgt

$$\underbrace{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^d)}_{>0} = \sum_{q\in\mathbb{Q}^d} \underbrace{\mathrm{vol}(q+M)}_{\overset{\text{Bew Inv}}{=}\mathrm{vol}(M)}$$

und somit also $\mathrm{vol}(M) > 0$.
Jetzt wähle M spezieller, nämlich beschränkt, z.B. für $O \subset \mathbb{R}^d$ offen können wir M so wählen, dass $M \subset O$, weil $a+\mathbb{Q}^d$ dicht in $\mathbb{R}^d$, also $(a+\mathbb{Q}^d) \cap O \neq \varnothing$. Z.B. wähle $M \subset (0,\frac{1}{2})^d$, so enthält $[0,1]^d$ abzählbar unendlich viele paarweise disjunkte Translate $q+M$, nämlich für alle $q \in \mathbb{Q}^d \cap (0,\frac{1}{2})^d$ gilt

$$V := \bigcup_{q\in(0,\frac{1}{2})^d\cap\mathbb{Q}^d} (q+M) \subset [0,1]^d$$

weil $\mathrm{vol}(V) + \underbrace{\mathrm{vol}([0,1]^d - V)}_{\geq 0} = \underbrace{\mathrm{vol}([0,1]^d)}_{=1}$. Daraus folgt $\mathrm{vol}(V) \leq 1 < \infty$ und

$$\mathrm{vol}(V) = \sum_{q\in(0,\frac{1}{2})^d\cap\mathbb{Q}^d} \underbrace{\mathrm{vol}(q+M)}_{=\mathrm{vol}(M)}$$

Somit muss gelten $\mathrm{vol}(M) = 0$. $\lightning$ ■

Noch dramatischer: In dim ≥ 3 kann man je zwei Teilmengen (unter sehr allgemeinen Annahmen) aus demselben (abzählbaren, oft sogar endlichen) "Bausatz" zusammensetzen.

Satz (Banach-Tarski, 1924)**.** Seien $A, B \subset \mathbb{R}^d$ Teilmengen mit nichtleerem Inneren.

(i) Sei $d \geq 3$ und seien A, B beschränkt. Dann existieren endlich viele Teilmengen $M_k \subset \mathbb{R}^d$ und Bewegungen φ_k des $\mathbb{R}^d$, so dass *disjunkte Zerlegungen* $A = \bigsqcup_k M_k$ und $B = \bigsqcup_k \varphi(M_k)$ bestehen.

(ii) Jetzt $d \geq 1$ beliebig und A, B nicht notwendig beschränkt. Dann existieren abzählbar viele Teilmengen $M_k \subset \mathbb{R}^d$ und Bewegungen φ_k, sodass *disjunkte Zerlegungen* $A = \bigsqcup_k M_k$ und $B = \bigsqcup_k \varphi(M_k)$ bestehen.

Der Beweis verwendet Gruppentheorie, Struktur von orthogonalen Gruppen $\mathrm{O}(d)$. (nicht mehr auflösbar für $d \geq 3$.)

Das naive *Inhaltsproblem*, also eine Volumenfunktion mit Eigenschaften (i), (ii) und (iii), ist lösbar in $d \leq 2$, aber nicht eindeutig, nicht lösbar in $d \geq 3$. (Banach 1923, Hausdorff 1914) Dies führt zu:

Maßproblem (post-paradox) : Man definiere eine Volumenfunktion $\mathrm{vol} : \mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty]$ mit Eigenschaften (i'), (ii) und (iii) auf einer möglich großen und flexiblen Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, die die geometrisch wichtigen Teilmengen umfasst und abgeschlossen ist unter grundlegenden mengentheoretischen Operationen (Vereinigung, Schnitt, Differenz und Komplement).

I.2 Ringe und Algebren

17.10.2019

Wir untersuchen Familien von Teilmengen (einer festen Menge), die unter grundlegenden (endlichen) Mengenoperationen abgeschlossen/ stabil sind. ($\cup, \cap, \setminus, \complement$)
Sie werden Definitionsbereiche der allgemeinsten von uns betrachteten Volumenfunktion sein. ("Inhalte")

I.2.1 Die Ringstruktur auf Potenzmengen

Sei X eine Menge. Die Potenzmenge ist definiert als die Familie aller Teilmengen $\mathcal{P}(X)$. Wir können die Potenzmenge ebenfalls auffassen als

$$\mathcal{P}(X) \underset{\text{bij}}{\overset{\cong}{\longleftrightarrow}} \{0,1\}^X = \{f : X \longrightarrow \{0,1\}\}$$

da

$$\begin{aligned} A \longmapsto \chi_A(x) &= \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ f^{-1}(1) \longleftarrow\!\shortmid f & \end{aligned}$$

wobei χ_A de charakteristische Funktion von A ist.

Wir fassen nun $\{0,1\}$ auf als den Körper mit 2 Elementen (Restklassen modulo 2). So ist $\{0,1\}^X$ ein kommutativer Ring mit Eins (multiplikatives Einselement) (im Sinne der Algebra), sogar eine $\mathbb{F}_2$-Algebra.

Bemerkung. Die Addition und Multiplikation von Funktionen erfolgen punktweise:

- $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$
- $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$

und $\{0,1\} = \mathbb{F}_2$ ist ein Körper mit zwei Elementen.
Die Nullelement ist $f \equiv 0$, also $\chi_\varnothing$ und das Einselement ist $\chi_X (\equiv 1)$. Die Addition von charakteristischen Funktionen entspricht der symmetrischen Differenz $A \triangle B$ und die Multiplikation entspricht dem Duchrschnitt von Mengen. Also

$$\begin{aligned} \chi_A + \chi_B &= A \triangle B \\ \chi_A \cdot \chi_B &= A \cap B \end{aligned}$$

Somit ist $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap) \cong (\mathbb{F}_2^X, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit dem Nullelement $\varnothing$ bzw. $\chi_\varnothing$ und dem Einselement X bzw. χ_X.

I.2.2 Ringe und Algebren

Definition. Eine Familie $\mathscr{R} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt

(ρ) ein **Ring** auf X, falls sie ein Unterring von $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ ist.

(α) eine **Algebra** auf X, falls sie außerdem das Einselement enthält, d.h. $X \in \mathscr{R}$.

Bemerkung. "Algebra" wird in verschiedenen Bedingungen verwendet, nämlich die Algebra als ein mathematisches Gebiet, eine Algebra als algebraische Struktur im Sinne der Algebra und eine Algebra im Sinne der obigen Definition.

(ρ) bedeutet $\varnothing \in \mathscr{R}$, abgeschlossen unter Addition ($\triangle$) (dasselbe wie Subtraktion, da mod 2) und Multiplikation ($\cap$), d.h.

$$A, B \in \mathscr{R} \implies A \triangle B, A \cap B \in \mathscr{R}$$

d.h. $\triangle$- stabil und $\cap$- stabil. Wir können $\triangle, \cap$ ausdrücken durch $\setminus$ und $\cup$:

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ A \cap B &= A \setminus (A \setminus B) \end{aligned}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} A \setminus B &= (A \triangle B) \cap A \\ A \cup B &= (A \triangle B) \triangle (A \cap B) \end{aligned}$$

Bemerkung. Die letzte Gleichung gilt, da $(A \triangle B)$ und $(A \cap B)$ disjunkt sind.

Daraus folgt die Charakterisierung von Ringen:

Lemma. Eine Familie $\mathscr{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ist genau dann ein Ring auf X, wenn

(i) $\varnothing \in \mathscr{R}$,

(ii) $\setminus$- stabil, d.h. $A, B \in \mathscr{R} \implies A \setminus B \in \mathscr{R}$,

(iii) $\cup$- stabil, d.h. $A, B \in \mathscr{R} \implies A \cup B \in \mathscr{R}$.

entspricht für Algebren:

Lemma. Eine Familie $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ist genau dann eine Algebra auf X, wenn

(i) $\varnothing \in \mathscr{A}$,

(iii) $\cup$- stabil,

(iv) $\complement$- stabil, d.h. $A \in \mathscr{A} \implies \complement A := X \setminus A \in \mathscr{A}$.

Beweis. Sind diese Eigenschaften erfüllt, so implizieren (i + iv), dass

$$X = \complement \varnothing \in \mathscr{A}$$

"$\setminus$" kann ausgedrückt werden durch "$\cup$" und "$\complement$": Aus

$$\complement(A \setminus B) = (\complement A) \cup B$$

folgt

$$A \setminus B = \complement\Big((\complement A) \cup B\Big)$$

Also ist $\mathscr{A}$ ein Ring, und damit $\mathscr{A}$ eine Algebra.
Ist umgekehrt $\mathscr{A}$ eine Algebra, so gelten (i + iii). Da auch $X \in \mathscr{A}$, können wir "$\complement$" durch "\" ausdrücken

$$\complement A = X \setminus A$$

Also gilt auch (iv). ■

Folgerung. Ist $\mathscr{R}$ ein Ring auf X und $A, B \in \mathscr{R}$, so auch $A \setminus B, A \cap B, B \setminus A$ und $A \cup B \in \mathscr{R}$. (*Bem.* Alle in $A \cup B$ enthalten.) Ist $\mathscr{A}$ eine Algebra auf X und $A, B \in \mathscr{A}$, so ist außerdem auch $\complement(A \cup B) \in \mathscr{A}$.

Beispiel.

(o) $\{\varnothing\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist ein Ring auf X,
$\{\varnothing, X\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist die kleinste Algebra auf X, $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ die größte.

(i) $\{\varnothing, A\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist ein Ring auf X für ein $A \in \mathcal{P}(X)$,
$\{\varnothing, A, \complement A, X\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist eine Algebra auf X.

(ii) Die Familie der endlichen (bzw. abzählbaren) Teilmengen von X ist ein Ring. (eine Algebra, nur falls X selbst endlich bzw. abzählbar)
Die Familie der Teilmengen, die endlich (bzw. abzählbar) sind oder endliches (bzw. abzählbares) Komplement haben, ist eine Algebra.

Weitere Beispiele folgen nach der Diskussion vom Erzeugendensystem.

Beobachtung. Der Durchschnitt beliebig vieler Ringe (bzw. Algebren) auf einer festen Menge ist wieder ein Ring (bzw. eine Algebra). Zu jeder Menge $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ gibt es eine(n) bezüglich mengentheoretischer Inklusion kleinste(n) Ring (bzw. Algebra), der (die) $\mathcal{E}$ umfasst, nämlich den Durchschnitt aller Ringe (bzw. Algebren), die $\mathcal{E}$ umfassen.

Definition (**Erzeugendensystem**)**.** Der von einer Familie $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ erzeugte Ring auf X ist der kleinste Ring, der sie enthält. Man nennt $\mathcal{E}$ ein *Erzeugendensystem* dieses Rings, oder *Erzeuger*. (Analog für Algebren)

Die Algebra eines Erzeugendensystems ist oft die einfachste Art, eine(n) Ring bzw. Algebra zu beschreiben.

Ein Ring geht aus einem Erzeugendensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ *konstruktiv* durch einen *abzählbaren* (induktiv!) Prozess hervor, ebenso eine Algebra.

Ring. Definiere induktiv eine Folge von Familien $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset ... \subset \mathcal{F}_n \subset ... \subset \mathcal{P}(X)$ mit

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_0 :=& \mathcal{E} \cup \{\varnothing\}\\ \mathcal{F}_n :=& \{A \setminus B, A \cup B \mid A, B \in \mathcal{F}_{n-1}\},\ n \geq 1\end{aligned}$$

So ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n \subset \mathcal{P}(x)$ \- und $\cup$-stabil, also ein Ring.

Algebra. analog.

I.2.3 Halbringe

Hat ein Erzeugendensystem strukturelle Eigenschaft, so ist die Beschreibung des erzeugenden Rings einfach. Eine natürliche auftretende Bedingung ist:

Definition (Halbringe). Eine Familie $\mathscr{H} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt ein *Halbring* auf X, falls

(i) $\varnothing \in \mathscr{H}$,

(ii) $\mathscr{H}$ ist $\cap$- stabil,

(iii) Für $A, B \in \mathscr{H}$ existieren *disjunkte* Teilmengen $C_1, ..., C_n \in \mathscr{H}$ mit $A \setminus B = C_1 \sqcup ... \sqcup C_n$.

Bemerkung. Halbring ist eine Verallgemeinerung des Begriffs Ring, Ringe sind also Halbringe.

Beispiel.

(o) $\{\varnothing\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist ein Halbring auf X.

(i) Die Familie bestehend aus $\varnothing$ und allen (einelementigen) Teilmengen $\{\varnothing\} \cup \{\{a\} \mid a \in X\}$ ist ein Halbring auf X, sie erzeugt den Ring der endlichen Teilmengen von X.

Der Grundbaustein für später:

(ii) Die Familie der *halboffenen* Intervalle $[a, b) \subset \mathbb{R}$, falls $a < b$, also $\{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$, ist ein Halbring auf $\mathbb{R}$.

Beschreibe den von einem Halbring erzeugenden Ring, die folgende Beobachtung wird darüber hinaus nützlich sein:

Lemma (Simultane Zerlegung). Zu beliebigen Teilmengen $H_1, ..., H_m \in \mathscr{H}$ existieren paarweise disjunkte Teilmengen $H'_1, ..., H'_n \in \mathscr{H}$, sodass jedes H_i sich als die Vereinigung einiger H'_j's darstellen lässt.

Beweis. Betrachte die $2^m - 1$ Durchschnitte der Form $G_1 \cap ... \cap G_m$, wobei $G_i = H_i$ oder $\complement H_i$ und nicht alle gleich $\complement H_i$. Sie sind paarweise disjunkt und zerlegen $H_1 \cup ... \cup H_m$. Jedes H_i ist die Vereinigung von 2^{m-1} von ihnen. Es genügt zu zeigen, dass diese Durchschnitte disjunkte Vereinigungen von Teilmengen aus $\mathscr{H}$ sind. Da Halbringe $\cap$-stabil sind, reicht es zu zeigen, dass die Teilmengen der Form

$$H \cap \complement \widetilde{H}_l \cap ... \cap \complement \widetilde{H}_1 \quad \text{mit } H, \widetilde{H}_1, ..., \widetilde{H}_l \in \mathscr{H}$$

disjunkte Vereinigungen von Teilmengen in $\mathscr{H}$ sind.
Da für $H \cap \complement \widetilde{H}_l = H \setminus \widetilde{H}_l$ (Axiom (iii)) gilt, reduziert die Behauptung für l auf Behauptung für $l - 1$, mit Induktion liefert dann die Behauptung. ∎

21.10.2019

Proposition. Jede Teilmenge im von einem Halbring $\mathscr{H}$ erzeugten Ring $\mathscr{R}$ ist eine endliche disjunkte Vereinigung von Teilmengen in $\mathscr{H}$, d.h. (ein einfacher Erzeugungsprozess!)

$$\mathscr{R} = \left\{ \bigsqcup_{k=1}^{n} H_k \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, H_1, ..., H_n \in \mathscr{H} \right\} \tag{I.1}$$

Beweis. Sei $\mathscr{R}$ die Familie der endlichen *disjunkten* Vereinigungen von Teilmengen in $\mathscr{H}$. Mit dem letzten Lemma "Simultane Zerlegung" ist $\mathscr{R}$ gleich der Familie aller endlichen Vereinigungen von Teilmengen in $\mathscr{H}$. Sie ist offensichtlich $\cup$-stabil. Zu verifizieren bleibt die \- Stabilität. Seien hierzu $A = A_1 \cup ... \cup A_m$ und $B = B_1 \cup ... \cup B_n$, $A_i, B_j \in \mathscr{H}$. Aus dem Lemma "Simultane Zerlegung" folgt, dass es endlich viele nichtleere, *paarweise disjunkte* $H'_k \in \mathscr{H}$ existieren, sodass jedes A_i und B_j eine Vereinigung einiger H'_k's ist. Daraus folgt, dass auch A und B Vereinigungen einiger H'_k's sind. So ist auch $A \setminus B$ die Vereinigung einiger H'_k's, nämlich derer, die in A, aber nicht in B enthalten sind. Also ist $\mathscr{R}$ ein Ring, enthalten in von $\mathscr{H}$ erzeugendem Ring(denn Ringe sind $\cup$-stabil), also gleich. ∎

Bemerkung. Man kann den von einer Familie $\mathcal{E}$ erzeugten Halbring nicht (analog zu Ringen und Algebren) definieren, denn das Halbring-Axiom (iii) vererbt nicht auf Durchschnitte von Familien. Es gibt Durchschnitte von Halbringen, die keine Halbringe sind. M.a.W. existieren Familien, die nicht in einem eindeutigen kleinsten Halbring enthalten sind.

I.2.4 Produkte von Halbringen und Ringen

Sind $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{P}(X_i), i = 1, ..., n$ Familien von Teilmengen, so entsteht das Produkt von "Quadern"

$$\mathcal{F}_1 * ... * \mathcal{F}_n := \{\underbrace{M_1 \times ... \times M_n}_{\subset X_1 \times ... \times X_n} \mid M_i \in \mathcal{F}_i \text{ für } i = 1, ..., n\}$$
$$\subset \mathcal{P}(X_1 \times ... \times X_n)$$

und die $\cup$-stabile Hülle, die Familie $\mathcal{F}_1 \boxtimes ... \boxtimes \mathcal{F}_n$ der endlichen Vereinigungen von "Quadern" in $\mathcal{F}_1 * ... * \mathcal{F}_n$, die Figuren,

$$\mathcal{F}_1 \boxtimes ... \boxtimes \mathcal{F}_n = \{\text{endlcihe Vereinigungen von Teilmengen in } \mathcal{F}_1 * ... * \mathcal{F}_n\}$$

Beide Produkte $*$ und $\boxtimes$ sind *assoziativ*, d.h.

$$(\mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2) * \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2 * \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 * (\mathcal{F}_2 * \mathcal{F}_3) \text{ und } (\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2) \boxtimes \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 \boxtimes (\mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{F}_3).$$

Wir definieren weiter

$$\mathcal{Z}(\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n)$$

die Familie der **Zylindermengen** bestehend aus

$$\pi_k^{-1}(M_k) = X_1 \times ... \times X_{k-1} \times M_k \times X_{k+1} \times ... \times X_n$$
$$\text{mit } 1 \le k \le n, M_k \in \mathcal{F}_k$$

wobei $\pi_k : X_1 \times ... \times X_n \to X_k, (x_1, ..., x_n) \mapsto x_k$ die natürliche Projektion ist.
Falls $X_i \in \mathcal{F}_i \; \forall i$, so ist $\mathcal{Z}(\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n) \subset \mathcal{F}_1 * ... * \mathcal{F}_n$.

Proposition.

(i) Seien $\mathscr{H}_i \subset \mathcal{P}(X_i)$ Halbringe $(i = 1, ..., n)$ und $\mathscr{R}_i \subset \mathcal{P}(X_i)$ die von ihnen erzeugten Ringe. Dann ist $\mathscr{H}_1 * ... * \mathscr{H}_n$ ein Halbring auf $X_1 \times ... \times X_n$ und $\mathscr{H}_1 \boxtimes ... \boxtimes \mathscr{H}_n = \mathscr{R}_1 \boxtimes ... \boxtimes \mathscr{R}_n$ der von ihm erzeugte Ring.

(ii) Sind $\mathscr{R}_i \subset \mathcal{P}(X_i)$ Ringe und $\mathcal{E}_i \subset \mathscr{R}_i$ Erzeugendensysteme für $i = 1, ..., n$, so wird der Produktring $\mathscr{R}_i \boxtimes ... \boxtimes \mathscr{R}_n$ von $\mathcal{E}_1 * ... \mathcal{E}_n$ erzeugt.

(iii) Sind die $\mathscr{R}_i$ Algebren, so wird der Produktring von $\mathcal{Z}(\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n)$ erzeugt.

Beweis.

(i) Zunächst im Fall $n = 2$. Klar enthält $\mathscr{H}_1 * \mathscr{H}_2$ auch $\varnothing$ und ist $\cap$-stabil. Wir betrachten die disjunkte Zerlegung

$$(A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2) =$$
$$\Big(\underbrace{(A_1 \cap B_1)}_{\in \mathscr{H}_1} \times \underbrace{(A_2 \setminus B_2)}_{\substack{\text{zerlegbar in} \\ \text{Teilmengen} \\ \text{aus } \mathscr{H}_2}}\Big) \sqcup \underbrace{\Big(\underbrace{(A_1 \setminus B_1)}_{\substack{\text{zerlegbar in} \\ \text{Teilmengen} \\ \text{aus } \mathscr{H}_1}} \times \underbrace{(A_2 \setminus B_2)}_{\substack{\text{zerlegbar in} \\ \text{Teilmengen} \\ \text{aus } \mathscr{H}_2}}\Big)}_{\text{zerlegbar in Teilmengen aus } \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2} \sqcup \underbrace{\Big((A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \cap B_2)\Big)}_{\text{analog zerlegbar}}$$

Also ist $(A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2)$ disjunkt zerlegbar in Teilmengen aus $\mathscr{H}_1 * \mathscr{H}_2$, also erfüllt Axiom (iii) für Halbringe, d.h. $\mathscr{H}_1 * \mathscr{H}_2$ ist ein Halbring.
Mit Induktion liefert dann die Behauptung auch für $\mathscr{H}_1 * ... * \mathscr{H}_n, n \geq 1$.
Aus (I.1) folgt, dass $\mathscr{H}_1 \boxtimes ... \boxtimes \mathscr{H}_n$ der von $\mathscr{H}_1 * ... * \mathscr{H}_n$ erzeugte Ring ist.

(ii) Für jedes i wird der Ring auf $X_1 \times ... \times X_n$ bestehend aus den Zylindermengen $\pi_i^{-1}(M_i)$ für $M_i \in \mathscr{R}_i$ von der Familie der Zylindermengen $\pi_i^{-1}(E_i)$ für $E_i \in \mathcal{E}_i$ erzeugt, denn jede Teilmenge $M_i \in \mathscr{R}_i$ kann durch endlich viele Mengenoperationen aus Teilmengen $E_{ij} \in \mathcal{E}_i$ hergestellt werden und $\pi_i^{-1}(M_i)$ entsprechend aus den $\pi_i^{-1}(E_{ij})$.
Daraus folgt, dass $\mathcal{Z}(\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n)$ erzeugt denselben Ring wie $\mathcal{Z}(\mathscr{R}_1, ..., \mathscr{R}_n)$ und denselben wie $\mathscr{R} * ... * \mathscr{R}_n$, also den Produktring $\mathscr{R}_1 \boxtimes ... \boxtimes \mathscr{R}_n$.

■

Definition. Wir nennen den Halbring $\mathscr{H}_1 * ... * \mathscr{H}_n$ das Produkt der Halbringe $\mathscr{H}_i$, den Ring $\mathscr{R}_1 \boxtimes ... \boxtimes \mathscr{R}_n$ das Produkt der Ringe $\mathscr{R}_i$.

Hauptbeispiel (Quader und Figuren in $\mathbb{R}^d$)**.** Ist $a, b \in \mathbb{R}^d$ mit $a_i < b_i \forall i$, so entsteht ein achsenparalleler halboffener Quader

$$[a, b) := [a_1, b_1) \times ... \times [a_d, b_d)$$

Wir bezeichnen

$$\mathcal{Q}^d := \text{Familie dieser Quader}$$

und

$$\mathcal{I} := \mathcal{Q}^1, \text{Familie der halboffenen Intervalle}$$

Also gilt

$$\mathcal{Q}^d = \underbrace{\mathcal{I} * ... * \mathcal{I}}_{d\text{-Mal}}$$

Aus der letzten Proposition folgt, dass $\mathcal{Q}^d$ ein Halbring auf $\mathbb{R}^d$ ist. Es folgt ebenfalls, dass

$$\mathcal{F}^d := \underbrace{\mathcal{I} \boxtimes ... \boxtimes \mathcal{I}}_{d\text{-Mal}}$$

der Ring erzeugt von $\mathcal{Q}^d$ ist, also der Ring der d-dimensionale "Figuren". Wir haben gesehen: Figuren sind disjunkte Vereinigungen von Quadern.

Wir arbeiten aus technischen Gründen mit halboffenen Intervallen und Quadern. Besonders übersichtliche sind Halbringe, die abgeschlossen unter Produktbildung sind, jedoch nicht die Teilmengen enthalten, die uns geometrisch primär interessieren: die offenen und abgeschlossenen Quader, die nicht achsenparallele sind, Polygone und Polytope, gekrümmte "elementare Geometrie" sowie Gebilde: Scheiben, Bälle, Zylinder und Kegel. Deshalb müssen wir unsere Ringe weiter anreichern und flexibilisieren, damit sie stabil unter abzählbaren Vereinigungen sind. $\rightsquigarrow$ σ-Algebra.

I.3 Inhalte und Prämaße

Wir beginnen mit der Untersuchung von Volumenfunktionen. Die grundlegende Forderung ist die *Additivität*. Volumina dürfen nicht negativ sein, d.h. $\in [0, \infty] := [0, \infty) \cup \{\infty\}$, also die erweiterte positive Halbgerade.

Bemerkung. Die erweiterten reellen Zahlen ist definiert als $\overline{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit natürlichen Konventionen

$$x + \infty = \infty \text{ für } x > -\infty$$
$$x \cdot \infty = \infty \text{ für } x > 0$$

Später werden wir außerdem sehen $0 \cdot \infty = 0$ (da $0 \cdot n \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$).

I.3.1 Inhalte auf Halbringen und Ringen

Die allgemeinste Sorte von uns betrachteter Volumenfunktion ist endlich additiv und definiert auf Halbringen.

Definition (Inhalt). Ein Inhalt auf einer Halbring $\mathscr{H}$ ist eine Funktion $\mu : \mathscr{H} \to [0, \infty]$ mit den Eigenschaften:

(i) $\mu(\varnothing) = 0$,

(ii) *Additivität*: Sind $A_1, ..., A_n \in \mathscr{H}$ paarweise disjunkt mit $A_1 \sqcup ... \sqcup A_n \in \mathscr{H}$ [2], so gilt $\mu(A_1 \sqcup ... \sqcup A_n) = \mu(A_1) + ... + \mu(A_n)$.

[2] Die Voraussetzung ist redundant, falls $\mathscr{H}$ ein Ring ist.

Beispiel.

(o) $\mu \equiv 0$ "der Nullinhalt" und

$\nu(A) = \begin{cases} 0, & A = \varnothing \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$ sind stets Inhalte auf beliebigen Halbringen.

(i) Sei X nichtleer. Betrachte die Algebra $\{\varnothing, X\} \subset \mathcal{P}(X)$. So wird ein Inhalt $\begin{cases} \varnothing \mapsto 0 \\ x \mapsto v \in [0, \infty] \text{ beliebig} \end{cases}$ definiert.

Beispiel (Halboffene Intervalle in $\mathbb{R}$, der Grundbaustein für Lebesgue-Maß)**.** Wir betrachten den Halbring $\mathcal{I} = \mathcal{Q}^1 \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$. So wird ein Inhalt gegeben durch die euklidische Länge

$$\lambda^1_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \to [0, \infty), \quad \lambda^1_{\mathcal{I}}\Big([a, b)\Big) := b - a \ (a < b) \tag{I.2}$$

Wir überprüfen die Additivität: Sei $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ eine Unterteilung von $[a, b)$. So entsteht die disjunkte Zerlegung $[a, b) = [a, x_1) \sqcup ... \sqcup [x_{n-1}, b)$. Es folgt

$$\underbrace{\lambda^1_{\mathcal{I}}\Big([a, b)\Big]}_{b-a} = \underbrace{\lambda^1_{\mathcal{I}}\Big([a, x_1)\Big)}_{x_1-a} + \underbrace{\lambda^1_{\mathcal{I}}\Big([x_1, x_2)\Big)}_{x_2-x_1} + ... + \underbrace{\lambda^1_{\mathcal{I}}\Big([x_{n-1}, b)\Big)}_{b-x_{n-1}}$$

24.10.2019

Lemma (Einfache Eigenschaften von Inhalten)**.** Seien $\mathscr{H}$ ein Halbring und $\mu : \mathscr{H} \longrightarrow [0, \infty]$ ein Inhalt. Dann gilt:

(i) *Monotonie*: Ist $A, B \in \mathscr{H}$ mit $A \subset B$, so ist $\mu(A) \leq \mu(B)$,

(ii) *Subadditivität:* Seien $A_1, ..., A_n \in \mathscr{H}$ *(nicht notwendigerweise disjunkt!)* mit $A_1 \cup ... \cup A_n \in \mathscr{H}$, dann gilt

$$\mu(A_1 \cup .... \cup A_n) \leq \mu(A_1) + ... + \mu(A_n).$$

Beweis.

(i) Setze $B \setminus A = C_1 \sqcup ... \sqcup C_n$ mit $C_i \in \mathscr{H}$ paarweise disjunkt, bzw. $B = A \sqcup C_1 \sqcup ... \sqcup C_n$. Aus der Additivität folgt dann $\mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(C_1) + ... + \mu(C_n)}_{\geq 0} \geq \mu(A)$.

(ii) Aus dem Lemma "simultane Zerlegung" folgt, dass es paarweise disjunkte $H_i \in \mathscr{H}$ existieren, sodass jedes A_j die Vereinigung einiger von H_i ist. Entsprechend summieren sich die Volumina auf. Die Ungleichung folgt, denn jedes $\mu(H_j)$ *genau einmal* auf der linken Seite und je *mindestens einmal* auf der rechten Seite.

■

I.3.2 Fortsetzung von Inhalten von Halbringen auf Ringe

Satz. Jeder Inhalt μ auf einem Halbring $\mathscr{H}$ besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einem Inhalt $\overline{\mu}$ auf dem von $\mathscr{H}$ erzeugten Ring $\mathscr{R}$.

Beweis.

- *Eindeutigkeit* folgt aus der Additivität von Inhalten und Beschreibung des erzeugten Rings $\mathscr{R}$. Jede Teilmenge in $\mathscr{R}$ ist eine disjunkte Vereinigung (wegen (I.1)) $A_1 \sqcup ... \sqcup A_n$ mit $A_i \in \mathscr{H}$. Daher notwendig
$$\overline{\mu}(A_1 \sqcup ... \sqcup A_n) = \underbrace{\mu(A_1)}_{=\overline{\mu}(A_1)} + ... + \overline{\mu}(A_n) \tag{I.3}$$
- *Existenz* bzw. *Wohldefiniertheit* von $\overline{\mu}$ durch (I.3): Wir betrachten eine weitere disjunkte Zerlegung derselben Teilmengen
$$A_1 \sqcup ... \sqcup A_n = B_1 \sqcup ... \sqcup B_m \in \mathscr{R}, A_i, B_j \in \mathscr{H}$$
so entstehen Zerlegungen
$$A_i = \bigsqcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j)$$
$$B_j = \bigsqcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B_j)$$
Daraus folgt *(Wir bemerken, dass $A_i \cap B_j \in \mathscr{H}$, denn $\mathscr{H}$ $\cap$-stabil ist.)*
$$\sum_i \mu(A_i) = \sum_i \underbrace{\sum_j \mu(A_i \cap B_j)}_{\mu(A_i)} = \sum_j \underbrace{\sum_i \mu(A_i \cap B_j)}_{\mu(B_j)} = \sum_j \mu(B_j)$$
Also ist $\overline{\mu}$ wohldefiniert.
- Es bleibt zu zeigen, dass $\overline{\mu}$ tatsächlich ein Inhalt ist. $\overline{\mu}$ ist laut der Definition (I.3) offensichtlich additiv und somit ein Inhalt.

■

Bemerkung. Hat μ endliche Werte, so hat $\overline{\mu}$ auch endliche Werte.

Beispiel. Wir setzen den in dem letzten Beispiel definierten Inhalt (I.2)
$$\lambda^1_{\mathcal{Q}^1} : \mathcal{I} \underset{\text{Halbring}}{=} \mathcal{Q}^1 \longrightarrow [0, \infty)$$
auf den Halbring $\mathcal{I}$ fort zu
$$\lambda^1_{\mathcal{F}^1} : \mathcal{F}^1 \longrightarrow [0, \infty)$$
wobei $\mathcal{F}^1$ den von $\mathcal{Q}^1$ erzeugten Ring der 1-dimensionale Figuren bezeichnen, also ist $\lambda^1_{\mathcal{F}}$ definiert als die Summe der Längen der Teilintervalle.

Bemerkung. Die Fortsetzung von Inhalten von Ringen auf Algebren ist nicht eindeutig. Z.B. betrachten wir die vom Ring $\mathscr{R} = \{\varnothing\}$ erzeugte Algebra $\mathscr{A} = \{\varnothing, X\}$, so können wir den Inhalt von X beliebig $\in [0, \infty)$ wählen.

I.3.3 Prämaße

Wir betrachten Verhalten von Volumina bei gewissen Grenzprozessen. (Approximation von innen und außen) Wir arbeiten mit Teilmengen einer festen Menge X.

Falls $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von Teilmengen von X mit

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A, \quad A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ... \subset X$$

so schreiben wir $A_n \nearrow A$.

Falls $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ absteigend mit

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A'_n = A, \quad X \supset A'_1 \supset A'_2 \supset ... \supset A'_n \supset ...$$

so schreiben wir $A'_n \searrow A$.

Beobachtung. Es gelten

$$\begin{aligned} A_n \nearrow A &\iff A \setminus A_n \searrow \varnothing \\ A'_n \searrow A &\iff A'_n \setminus A \searrow \varnothing \end{aligned}$$

Sei $\mu : \mathscr{R} \longrightarrow [0, \infty]$ ein Inhalt. Dann gilt

$$A_n \nearrow A \swarrow A'_n \xRightarrow{\text{Monotonie}} \underbrace{\mu(A_n)}_{\text{wächst}} \leq \mu(A) \leq \underbrace{\mu(A'_n)}_{\text{fällt}}$$

Da $\mu(A_n)$ und $\mu(A'_n)$ nur *schwach* monoton sind, folgt nur die Ungleichung

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu(A) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(A'_n) \tag{I.4}$$

Wir formulieren nun einen disjunkte Zerlegung für A_n durch einen Induktiven Prozess: (Man beachte, dass $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge ist.)

$$\begin{aligned} A_0 &:= \varnothing \\ \widetilde{A}_n &:= A_n \setminus A_{n-1} \end{aligned}$$

so entsteht die disjunkte Zerlegung

$$A = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{A}_n$$

Dann ist (I.4) äquivalent zu: Für Folgen $(\widetilde{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Teilmengen mit $A := \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{A}_n \in \mathscr{R}$ gilt

$$\mu\Bigg(\underbrace{\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{A}_n}_{=A}\Bigg) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\widetilde{A}_n) \tag{σ-Supadditivität}$$

Gilt in einer der Gleichung (I.4) die Gleichheit, so fassen wir das als **Stetigkeitseigenschaften** auf. Wir vergleichen nun die Stetigkeitseigenschaften:

Proposition. Für einen Inhalt $\mu : \mathscr{R} \longrightarrow [0,\infty]$ auf einem Ring $\mathscr{R}$ sind die beiden folgenden Eigenschaften äquivalent:

(i) *σ-Additivität:* Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen in $\mathscr{R}$ mit $\bigsqcup_n A_n \in \mathscr{R}$, so gilt

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(ii) *Stetigkeit von unten:* Ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge in $\mathscr{R}$, so gilt

$$B_n \nearrow B \in \mathscr{R} \implies \mu(B_n) \nearrow \mu(B).$$

Sie implizieren die beiden folgenden, ebenfalls zueinander äquivalenten, Eigenschaften:

(iii) *Stetigkeit von oben:* Ist $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge in $\mathscr{R}$ **mit** $\mu(C_n) < \infty$, so gilt

$$C_n \searrow C \in \mathscr{R} \implies \mu(C_n) \searrow \mu(C).$$

(iv) *Stetigkeit von $\varnothing$:* Ist $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge in $\mathscr{R}$ **mit** $\mu(D_n) < \infty$, so gilt

$$D_n \searrow \varnothing \implies \mu(D_n) \searrow 0.$$

Falls μ endliche Werte hat, gilt umgekehrt (iii), (iv) $\implies$ (i), (ii).

Beweis.

- (i) $\iff$ (ii). Übergang durch $B_n = A_1 \sqcup ... \sqcup A_n$, bzw. $A_n = B_n \setminus B_{n-1}$, $B = \bigsqcup_n A_n$. Aus der endlichen Additivität folgt $\mu(B_n) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$. Daraus folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$. Außerdem gilt $\mu(B) = \mu(\bigsqcup_n A_n)$. ✓
- (ii) $\implies$ (iii). Sei $C_n \searrow C$ mit endlichen Inhalten. Setze $B_n := C_1 \setminus C_n \in \mathscr{R}$ und $B := C_1 \setminus C$, d.h. $C_1 = B_n \sqcup C_n$ und $C_1 = B \sqcup C$. Daraus folgt wegen der Additivität des Inhalts $\mu(C_1) = \mu(B_n) + \mu(C_n) = \mu(B) + \mu(C)$. Es gilt n.V. $\mu(B_n) \nearrow \mu(B)$, da $B_n \nearrow B$. Da alle Inhalte endlich sind, gilt $\mu(B_n) = \mu(C_1) - \mu(C_n)$ und $\mu(B) = \mu(C_1) - \mu(C)$. Also gilt $\mu(C_1) - \mu(C_n) \nearrow \mu(C_1) - \mu(C)$. Daraus folgt, dass $\mu(C_n) \searrow \mu(C)$, also (iii).
- (iii) $\Longleftarrow$ (iv). (Die andere Richtung ist klar, da (iv) ist Spezialfall von (iii)!) Sei $C_n \searrow C$ mit endlichen Inhalten. Setze $D_n := \underbrace{C_n \setminus C}_{\in\mathscr{R}} \searrow \varnothing$. Dann ist $C_n = D_n \sqcup C$ und somit $\mu(C_n) = \mu(D_n) + \mu(C)$. Da alle Inhalte endlich sind, gilt $\underbrace{\mu(D_n)}_{\searrow 0 \text{ wegen (iv)}} = \mu(C_n) - \mu(C)$. Daraus folgt $\mu(C_n) \searrow \mu(C)$, also (iii).
- μ habe endliche Werte, es gelte (iv). Zeige (ii). Sei $B_n \nearrow B$. Setze $D_n := B \setminus B_n$. Da $\underbrace{\mu(D_n)}_{\searrow 0 \text{ wg (iv)}} = \mu(B) - \mu(B_n)$ und alle Inhalte endlich sind, gilt $\mu(B_n) \nearrow \mu(B)$, d.h. (ii).

■

Es ist natürlich und geboten, von Inhalten σ-Additivität zu verlangen. $\rightsquigarrow$ leistungsfähige Volumentheorie. (E. Borel, Lebesgue $\sim$1900)

Definition. Ein **Prämaß** auf einem *Ring* ist ein σ-additiver Inhalt.

Beispiel. Sei X unendlich. Betrachte $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$ die Algebra erzeugt von endlichen Teilmengen, besteht aus endlichen Teilmengen und deren Komplementen. Definieren Inhalt μ auf $\mathscr{A}$ durch

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ endlich} \\ 1, & \text{falls } \complement A \text{ endlich} \end{cases}$$

Sind $A_1, ..., A_n$ paarweise disjunkt und nicht alle A_i endlich, so gibt es genau ein A_i unendlich. Daraus folgt

$$\underbrace{\mu(A_1) + ...\mu(A_n)}_{\text{genau ein Beitrag 1}} = 1 = \mu(A_1 \sqcup ... \sqcup A_n).$$

Also war die endliche Additivität. Die σ-Additivität wird genau dann verletzt, falls X abzählbare Zerlegung in endlichen Teilmengen ($\iff$ X abzählbar) zulässt. (Zum Beispiel betrachten wir die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Es gilt $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{n\}) = 0 \neq 1 = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n\}\right)$.) Daraus folgt: μ Prämaß $\iff$ X überabzählbar (z.B. $X = \mathbb{R}$).

Satz. Der Inhalt $\lambda^1_{\mathcal{F}^1}$ ist ein Prämaß.

(Später, nach Produkten, Beweis in beliebiger Dimension.)

Beweis. Zu zeigen ist die σ-Additivität. Dies ist wegen endlicher Werte von $\lambda^1_{\mathcal{F}^1}$ äquivalent zu Stetigkeit in $\varnothing$. Diese weisen wir jetzt nach. Das Argument beruht auf *topologischen* Eigenschaften von $\mathbb{R}$, nämlich Lokalkompaktheit. Wir betrachten eine Folge absteigender Figuren (d.h. *endliche* Vereinigung halboffener Intervalle $[a, b)$), nämlich

$$F_1 \supset F_2 \supset ... \supset ... \supset F_n \supset ... \quad \text{mit } F_n \in \mathcal{F}^1.$$

Stetigkeit in $\varnothing$ bedeutet: $\underbrace{F_n \searrow \varnothing}_{\iff \bigcap_n F_n = \varnothing} \implies \lambda^1_{\mathcal{F}^1}(F_n) \searrow 0$. Wir notieren $\lambda = \lambda^1_{\mathcal{F}^1}$.

Annahme: $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(F_n) \geq v_0 > 0$. Zu zeigen: $\bigcap_n F_n \neq \varnothing$.
Dazu approximieren wir von innen durch eine geschachtelte Folge von Kompakta K_n. Sei $\varepsilon_n \searrow 0$. Dann existieren $F'_n \in \mathcal{F}^1$ und Kompakta $K_n \subset \mathbb{R}$ sodass $F'_n \subset K_n \subset F_n$ (*Bem.* K_n sind nicht notwendigweise geschachtelt. Wir brauchen F'_n, denn μ ist nicht auf Kompakta definiert.) und $\lambda(F'_n) > \lambda(F_n) - \varepsilon_n$. Wir vergleichen absteigende Folgen

$$\bigcap_{i\leq n} F'_i \subset \bigcap_{i\leq n} K_i \subset \underbrace{\bigcap_{i\leq n} F_i}_{=F_n}.$$

Es genügt zu zeigen, dass

$$\bigcap_{i\leq n} K_i \neq \varnothing \quad \forall n, \tag{I.5}$$

denn (I.5) $\xRightarrow{\text{Topologie}} \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \varnothing \implies \bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \varnothing$.
Es gilt

$$\underbrace{\left(\bigcap_{i\leq n} F_i\right)}_{F_n} \setminus \left(\bigcap_{i\leq n} F_i'\right) = \bigcup_{i\leq n} (\underbrace{F_n}_{\subset F_i} \setminus F_i') \subset \bigcup_{i\leq n} (F_i \setminus F_i'),$$

also

$$F_n = \bigcap_{i\leq n} F_i \subset \left(\bigcap_{i\leq n} F_i'\right) \cup \bigcup_{i\leq n} (F_i \setminus F_i'),$$

d.h. Überdeckung von F_n durch $n+1$ Teilmengen aus $\mathcal{F}^1$. Aus der σ-Subaddtivität folgt dann

$$\lambda(F_n) \leq \lambda\left(\bigcap_{i\leq n} F_i'\right) + \sum_{i\leq n} \underbrace{\lambda(F_i \setminus F_i')}_{<\varepsilon_i}$$

Da λ endlich-wertig ist, können wir die Gleichung umstellen zu

$$\lambda\left(\bigcap_{i\leq n} F_i'\right) \geq \underbrace{\lambda(F_n)}_{\geq v_0} - \sum_{i\leq n} \varepsilon_i > v_0 - \sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n$$

Wähle (ε_n) so, dass $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n < v_0$. Dann folgt

$$\lambda\left(\bigcap_{i\leq n} F_i'\right) > 0 \implies \bigcap_{i\leq n} F_i' \neq \varnothing \implies \bigcap_{i\leq n} K_i \neq \varnothing$$

Also haben wir (I.5) gezeigt und somit war die Behauptung. ■

Definition. $\lambda^1_{\mathcal{F}^1}$ heißt das 1-dimensionale **Lebesgue-Prämaß**.

I.3.4 Produkte von Inhalten und Prämaßen

Man kann in natürlicher Weise Produkte von Inhalten auf Halbringen und Ringen bilden. Zunächst Halbringe:

Satz. Seien μ_i Inhalte auf Halbringen $\mathscr{H}_i \subset \mathcal{P}(X_i), i = 1, ..., n$. Dann wird durch

$$(\mu_1 \times ... \times \mu_n)\Big(H_1 \times ... \times H_n\Big) := \mu(H_1) \cdot ... \cdot \mu(H_n), H_i \in \mathscr{H}_i$$

ein Inhalt $\mu_1 \times ... \times \mu_n$ auf dem Produkthalbring $\mathscr{H}_1 * ... * \mathscr{H}_n \subset \mathcal{P}(X_1 \times ... \times X_n)$ definiert.
Zusätzliche *Konvention* für Multiplikation auf $\mathbb{R}$: $0 \cdot \infty = 0$, weil $0 \cdot n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Beweis. (Für $n = 2$, der allgemeiner Fall folgt mit Induktion.)
Wir müssen die *Additivität* nachweisen. Betrachte die endliche Zerlegung eines "Rechtecks" $H_1 \times H_2 \in \mathscr{H}_1 * \mathscr{H}_2$ in endlich viele paarweise disjunkte "Rechtecken" $H_1^{(j)} \times H_2^{(j)} \in \mathscr{H}_1 * \mathscr{H}_2$:

$$H_1 \cdot H_2 = \bigsqcup_j (H_1^{(j)} \times H_2^{(j)}).$$

Aus dem Lemma "simultane Zerlegung" folgt, dass wir H_i in $H_i'^{(k)} \in \mathscr{H}_i, k \in \underset{\text{endlich!}}{K_i}$ zerlegen können, sodass jedes $H_i^{(j)}$ die disjunkte Vereinigung einiger $H_i'^{(k)}$ ist, also

$$H_i^{(j)} = \bigsqcup_{k \in K_i^{(j)}} H_i'^{(k)}, K_i^{(j)} \subset K_i.$$

So entsteht die "karierte" Zerlegung

$$H_1 \times H_2 = \bigsqcup_{(k_1,k_2) \in K_1 \times K_2} \Big(H_1'^{(k_1)} \times H_2'^{(k_2)} \Big)$$

bzw.

$$H_1^{(j)} \times H_2^{(j)} = \bigsqcup_{(k_1,k_2) \in K_1^{(j)} \times K_2^{(j)}} \Big(H_1'^{(k_1)} \times H_2'^{(k_2)} \Big).$$

Es gilt die Zerlegung der Indexmenge

$$K_1 \times K_2 = \bigsqcup_j \Big(K_1^{(j)} \times K_2^{(j)} \Big).$$

Da μ_i additiv ist, folgt

$$\mu_i(H_i) = \sum_{k \in K_i} \mu_i(H_i'^{(k)})$$

bzw.

$$\mu_i(H_i^{(j)}) = \sum_{k \in K_i^{(j)}} \mu_i(H_i'^{(k)}).$$

Es folgt (Die Additivität von $\mu_1 \times \mu_2$ ist klar für "karierte" Zerlegung)

$$\begin{aligned}(\mu_1 \times \mu_2)\Big(H_1 \times H_2\Big) &= \sum_{(k_1,k_2) \in K_1 \times K_2} (\mu_1 \times \mu_2)\Big(H_1'^{(k_1)} \times H_2'^{(k_2)}\Big) \\ &= \sum_j \underbrace{\sum_{(k_1,k_2) \in K_1^{(j)} \times K_2^{(j)}} (\mu_1 \times \mu_2)\Big(H_1'^{(k_1)} \times H_2'^{(k_2)}\Big)}_{=\mu_1 \times \mu_2 (H_1^{(j)} \times H_2^{(j)})}.\end{aligned}$$

Also war die Additivität von $\mu_1 \times \mu_2$. ■

Definition. Wir nennen den Inhalt $\mu_1 \times ... \times \mu_n$ auf dem Halbring $\mathscr{H}_1 * ... * \mathscr{H}_n$ das Produkte der Inhalte μ_i.

Hauptbeispiel (Elementarinhalt). Der Elementarinhalt achsenparalleler Quader $[a, b) \subset \mathbb{R}^d$ für $a, b \in \mathbb{R}^d$ mit $a_i < b_i$ ist definiert als ihr d-dimensionales euklidisches Volumen

$$\lambda^d_{\mathcal{Q}^d}\Big([a, b)\Big) := (b_1 - a_1) \cdot ... \cdot (b_d - a_d)$$

Der Elementarinhalt $\lambda^d_{\mathcal{Q}^d}$ ist ein Inhalt, denn

$$\lambda^d_{\mathcal{Q}^d} = \underbrace{\lambda^1_{\mathcal{I}} \times ... \times \lambda^1_{\mathcal{I}}}_{d\text{-mal}}$$

bezüglich der Zerlegung $\mathcal{Q}^d = \mathcal{I} \times ... \times \mathcal{I}$.

Für Ringe folgt mit dem Fortsetzungsresultat für Inhalte von Halbringen auf (die von den erzeugte) Ringe:

Korollar. Seien μ_i Inhalte auf Ringen $\mathscr{R}_i \subset \mathcal{P}(X_i)$, $(i = 1, ..., n)$. Dann existiert einen eindeutigen Inhalt $\mu_1 \boxtimes .... \boxtimes \mu_n$ auf dem Produktring $\mathscr{R}_1 \boxtimes ... \boxtimes \mathscr{R}_n \subset \mathcal{P}(X_1 \times ... \times X_n)$ mit

$$(\mu_1 \boxtimes ... \boxtimes \mu_n)\Big(R_1 \times ... R_n\Big) = \mu_1(R_1) \cdot ... \mu_n(R_n), R_i \in \mathscr{R}_i$$

Hauptbeispiel. Der Elementarinhalt $\lambda^d_{\mathcal{Q}^d} : \mathcal{Q}^d \longrightarrow [0, \infty)$ setzt sich eindeutig fort zu einem Inhalt

$$\lambda^d_{\mathcal{F}^d} : \mathcal{F}^d \longrightarrow [0, \infty)$$

auf d-dimensionalen Figuren, den wir als *d-dimensionales euklidisches Volumen* auffassen.

Auch Prämaße verhalten sich gut unter Produkten:

Satz. Endliche Produkte von Prämaßen sind wieder Prämaße.

Beweis. ($n = 2$, der allgemeiner Fall folgt mit Induktion.)
Seien μ_i Prämaße auf Ringen $\mathscr{R}_i \subset \mathcal{P}(X_i)$, $i = 1, 2$. und der Produktinhalt $\mu_1 \boxtimes \mu_2$ auf $\mathscr{R}_1 \boxtimes \mathscr{R}_2$ gegeben durch

$$(\mu_1 \boxtimes \mu_2)(R_1 \times R_2) = \mu_1(R_1) \cdot \mu_2(R_2), R_i \in \mathscr{R}_i.$$

Jetzt müssen wir die Additivität des Volumens nachweisen bei *abzählbaren* Zerlegungen von Figuren (d.h. Teilmengen aus $\mathscr{R}_1 \boxtimes \mathscr{R}_2$) in Figuren. Weil Figuren endliche disjunkte Vereinigungen von Quadern sind und der Inhalt $\mu_1 \boxtimes \mu_2$ (endlich) additiv ist, genügt es, abzählbare disjunkte Zerlegungen

$$A_1 \times A_2 = \bigsqcup_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ \text{abzählbar!}}} (A_{1,m} \times A_{2,m})$$

mit $A_i, A_{i,m} \in \mathscr{R}_i$ zu betrachten. Zu zeigen ist also

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} \underbrace{\mu_1(A_{1,m}) \cdot \mu_2(A_{2,m})}_{(\mu_1 \boxtimes \mu_2)(A_{1,m} \times A_{2,m})} = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$$

Wegen der Monotonie von Inhalten gilt die Richtung "$\leq$", zu zeigen ist "$\geq$". Hierbei wird verwendet, dass μ_i Prämaße sind. Wir brauchen eine *untere* Abschätzung von der Summe der Teilvolumina. Betrachte eine Folge approximierender Figuren 31.10.2019

$$F_m := \bigsqcup_{i \leq m} (A_{1,m} \times A_{2,m}).$$

Wir schätzen $(\mu_1 \boxtimes \mu_2)(F_m)$ nach unten ab. Die X_2-Querschnitte für $x_1 \in A_1$

$$S_{2,m}(x_1) \subset A_2$$

sind definiert durch

$$\{x_1\} \times S_{2,m}(x_1) = F_m \cap (\{x_1\} \times A_2).$$

Dann folgt

$$S_{2,m}(x_1) \in \mathscr{R}_2$$

da $S_{2,m}(x_1)$ die Vereinigung einiger $A_{2,i}$ ist. $S_{2,m}(x_1)$ wachsen mit m und $S_{2,m}(x_1) \nearrow A_2$ für $m \to \infty$ und festes x_1.
Für festes m treten endlich viele Querschnitte auf. Die Punkte $x_1 \in A_1$, für die $S_{2,m}(x_1)$ ein bestimmter Querschnitt ist, bilden eine Figur $\in \mathscr{R}_1$. (Liegt im Unterring erzeugt von $A_{1,i}$.)
Für $0 < v_2 < \mu_2(A_2)$ setze

$$B_{1,m}(v_2) := \{x_1 \in A_1 \mid \mu_2(S_{2,m}(x_1)) \geq v_2\} \in \mathscr{R}_1.$$

Dann erhalten wir die Volumenabschätzung:

$$(\mu_1 \boxtimes \mu_2)(F_m) \geq \mu_1(B_{1,m}(v_2)) \cdot v_2.$$

Somit:

$$\begin{aligned}
&S_{2,m}(x_1) \nearrow A_2 \\
\xRightarrow{\mu_2 \text{ Prämaß}} &\mu(S_{2,m}(x_1) \nearrow \mu_2(A_2) \\
\Longrightarrow &B_{1,m}(v_2) \nearrow A_1 \\
\xRightarrow{\mu_1 \text{ Prämaß}} &\mu_1(B_{1,m}(v_2)) \nearrow \mu_1(A_1) \\
\Longrightarrow &\lim_{m\to\infty} (\mu_1 \boxtimes \mu_2)(F_m) \geq \mu_1(A_1) \cdot v_2 \quad \forall v_2 \in (0, \mu_2(A_2)) \\
\Longrightarrow &\lim_{m\to\infty} (\mu_1 \boxtimes \mu_2)(F_m) \geq \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)
\end{aligned}$$

Also die Gleichheit, d.h. $\mu_1 \boxtimes \mu_2$ ist ein Prämaß. ■

Bemerkung. Der letzte Satz wird häufig erst im Rahmen der Integrationstheorie bewiesen (mit Satz von der monotonen Konvergenz).

Zurück zum unsren Hauptbeispiel: Weil der Inhalt $\lambda^d_{\mathcal{F}^d}$ die d-te Potenz des Prämaßes $\lambda^1_{\mathcal{F}^1}$ ist, folgt

Korollar. Der Inhalt $\lambda^d_{\mathcal{F}^d}$ ist ein Prämaß.

Definition. Das Prämaß $\lambda^d_{\mathcal{F}^d}$ heißt ***d*-dimensionales Lebesgue-Prämaß**.

I.4 σ-Algebren

I.4.1 σ-Algebren

Wir fordern von Teilmengenfamilien jetzt, dass sie *reichhaltiger* und *flexibel* sind, d.h. dass man innerhalb von ihnen zusätzlich zu den genannten endlichen Mengenoperationen auch gewisse *abzählbar unendliche* Operationen (nämlich Vereinigungen) durchführen kann. D.h. Sie sollen abgeschlossen sein unter gewissen *Grenzprozessen.*

Definition (σ-Algebra). Eine Familie $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt σ-Algebra auf X, falls:

(i) $\varnothing \in \mathscr{A}$,

(ii) σ-$\cup$-*stabil*, d.h. Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen mit $A_n \in \mathscr{A}$ gilt $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$,

(iii) $\complement$-*stabil*, d.h. $A \in \mathscr{A} \implies \complement A \in \mathscr{A}$.

Man kann (i) bzw. (iii) ersetzen durch die bezüglich Komplementbildung duale Forderung:

(i*) $X \in \mathscr{A}$,

(ii*) δ-$\cap$-*stabil*, d.h. Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen mit $A_n \in \mathscr{A}$ gilt $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.

Leicht können wir einsehen, dass σ-Algebren Algebren sind.

Bemerkung. (i) Beachte formale Ähnlichkeit von (iii) bzw. (iii*) mit Definition einer Topologie: Die Topologie ist die Familie aller offenen Teilmengen, sie ist stabil unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten.

(ii) In σ-Algebren gilt: Alle von innen bzw. außen durch Teilmengen in der σ-Algebra approximierbaren Teilmengen gehören wieder zur σ-Algebra.

Wie im Fall von Ringen und Algebren: Beliebige Durchschnitte von σ-Algebren sind wieder σ-Algebren, deswegen ist die folgende Definition sinnvoll:

Definition (Erzeugendensystem von σ-Algebren). Die von einer Familie $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ *erzeugte* σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ ist die eindeutige kleinste sie enthaltende σ-Algebra. Man nennt $\mathcal{E}$ ein(en) *Erzeugendensystem* oder *Erzeuger* von $\sigma(\mathcal{E})$.

Die Definition einer σ-Algebra durch ein Erzeugendensystem ist nicht *konstruktiv*! Im Fall von Ringen und Algebren kann man die enthaltenen Teilmengen ausgehend von einem Erzeugendensystem noch explizit angeben, nämlich *induktiv* in *abzählbaren vielen* Schritten konstruieren. Diese ist bei σ-Algebren abgesehen von Ausnahmenfällen nicht mehr möglich, sondern man benötigt zur Konstruktion aus einem Erzeugendensystem einen Prozess mit *überabzählbaren vielen* Schritten. (siehe transfinite Induktion) Dieser Umstand reflektiert, dass die in σ-Algebren enthaltenen Teilmengen i.A. so kompliziert sind, dass man sie nicht mehr explizit beschreiben kann.

Ergänzend: Ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, so kann man durch Anwenden abzählbarer Mengenoperationen immer größere Teilmengenfamilien angeben, die zu $\sigma(\mathcal{E})$ gehören müssen und deren "Verwandtschaftsgrad" zu $\mathcal{E}$ gleichzeitig sukzessive abnimmt.
Zu $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ definiere

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^\nu &:= \left\{\begin{matrix}\text{abzählbare Vereinigungen von Teilmengen in } \mathcal{F} \\ \text{sowie deren Komplementen}\end{matrix}\right\} \subset \mathcal{P}(X) \\
\mathcal{E}_0 &:= \mathcal{E} \cup \{\varnothing\} \\
\mathcal{E}_n &:= \mathcal{E}_{n-1}^\nu \text{ für } n \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Anfang der "Borel-Hierarchie", fortsetzen mit transfiniter Induktion.

Einfachste Beispiele.

(o) $\{\varnothing, X\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist eine σ-Algebra auf X, erzeugt von $\varnothing$.
$\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ ist ebenfalls eine σ-Algebra.

(i) Ist $A \subset X$, so ist $\{\varnothing, A, \complement A, X\}$ eine σ-Algebra auf X, erzeugt von $\mathcal{E} = \{A\}$.

(ii) Die Teilmengen von X, die abzählbar sind oder abzählbares Komplement haben, bilden eine σ-Algebra $\mathscr{A}$ auf X, erzeugt von den *einelementigen* Teilmengen. Es gilt: $\mathscr{A} \neq \mathcal{P}(X) \iff X$ überabzählbar.

Von zentraler Wichtigkeit sind Beispiele *topologischen* Ursprungs:

Beispiel.

(i) (**Borelsche σ-Algebra, Borel-Mengen**) Jeder topologische Raum $(X, \mathcal{T})$ trägt eine natürliche σ-Algebra, nämlich die von seiner Topologie erzeugte σ-Algebra

$$\mathscr{B}(X) := \sigma(\mathcal{T}).$$

Wir nennen $\mathscr{B}(X)$ die *Borelsche σ-Algebra* von X. In ihnen enthaltenen Teilmengen heißen *Borel-Mengen.*
Notation:

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) =: \mathscr{B}^d$$
$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) =: \mathscr{B}$$

(ii) Jeder *metrische* Raum (X, d) trägt eine natürliche Topologie, die von den offenen metrischen Bällen erzeugte Topologie $\mathcal{T}_d$ und damit eine natürliche σ-Algebra

$$\mathscr{B}(X) := \sigma(\mathcal{T}_d).$$

Bemerkung.

(i) Die Borelsche σ-Algebra eines topologischen Raumes wird ebenfalls von den abgeschlossenen Teilmengen erzeugt. (vgl. die Stabilität unter Komplementbildung)

(ii) Ist die Topologie *Hausdorffsch*, so sind kompakte Teilmengen abgeschlossen[3], und daher die von den Kompakta erzeugte σ-Algebra in der Borelschen enthalten. Besitzt der Raum eine abzählbare Überdeckung durch Kompakta, so sind beide σ-Algebren gleich.

Wir haben also gesehen: 4.11.2019

$$\underbrace{(X, \mathcal{T})}_{\text{topologischer Raum}} \rightsquigarrow \text{Borelsche } \sigma\text{-Algebra } \mathscr{B}(X) := \sigma(\mathcal{T}).$$

$\mathscr{B}^d = \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ hat verschiedene natürliche Erzeuger, z.B.

- die Familie der offenen Teilmengen,
- die Familie der abgeschlossenen Teilmengen,

[3]In metrischen Räumen sind Kompakta abgeschlossen und beschränkt. Allgemeiner: In topologischen Räumen mit Hausdorff-Eigenschaft sind Kompakta abgeschlossen. (Ana II, S.30)

- die Familie der Kompakta,
- die Familie der offenen Bälle, bzw. offenen Bälle mit Radien $\in \mathbb{Q}^+$ und Zentren $\in \mathbb{Q}^d$, denn jede offene Teilmenge ist eine abzählbare Vereinigung von offenen Bällen,
- die Familie der abgeschlossenen Bälle,
- die Familie der offenen (achsenparallelen) Quader,
- die Familie der abgeschlossenen (achsenparallelen) Quader.

Lemma. $\mathscr{B}^d$ wird auch von $\mathcal{Q}^d$ (halboffenen, achsenparallelen Quadern) erzeugt.

Beweis. Einerseits: Jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ ist (notwendigerweise) wegen der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ eine abzählbare Vereinigung von Quandern $[a, b)$ aus $\mathcal{Q}^d$ mit rationalen Ecken, d.h. $a_i < b_i \;\forall i, a, b \in \mathbb{Q}^d$. Also $\mathscr{B}^d \subset \sigma(\mathcal{Q}^d)$.
Anderseits ist jeder Quader $[a, b)$ mit $a_i < b_i \;\forall i$ ein abzählbarer Durchschnitt offener Quader, gehört also zu $\mathscr{B}^d$, denn

$$[a, b) = \underbrace{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\left(a_1 - \frac{1}{n}, b_1\right) \times ... \times \left(a_d - \frac{1}{n}, b_d\right)}_{\in \mathcal{T}}}_{\in\ \sigma(\mathcal{T}) = \mathscr{B}^d}$$

Also die Gleichheit. ■

$\mathscr{B}^d$ ist so reichhaltig, dass sie alle “denkbaren” geometrischen Gebilde in $\mathbb{R}^d$ enthält. Genauerer Vergleich von $\mathscr{B}^d$ mit $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^d}$ folgt später.

I.4.2 Dynkin-Systeme

Wir betrachten jetzt eine Abschwächung von σ-Algebren, die natürlich auftritt.

Definition. Eine Familie $\mathscr{D} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt ein Dynkin-System auf X, falls

(i) $\varnothing \in \mathscr{D}$,

(ii) $\complement$-stabil,

(iii) Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *paarweise disjunkter Teilmengen* $A_n \in \mathscr{D}$ gilt $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{D}$.

Im Vergleich zu σ-Algebren fordern wir zusätzlich die (paarweise) Disjunktheit der Folgenglieder. σ-Algebren sind Dynkin-Systeme.

Proposition. $\cap$-stabile Dynkin-Systeme sind σ-Algebren.

Beweis. Sei $\mathscr{D}$ ein $\cap$-stabiles Dynkin-System. Aus der $\complement$-Stabilität und $\cap$-Stabilität folgt die $\cup$-Stabilität wegen $A \cup B = \complement(\complement A \cap \complement B)$. $\mathscr{D}$ ist also eine Algebra. In Algebren lassen sich abzählbare Vereinigungen als abzählbare *disjunkte* Vereinigungen ausdrücken:

$$A_1 \cup A_2 ... \cup A_n \cup ... = A_1 \sqcup \underbrace{(A_2 \setminus A_1)}_{\in \mathscr{D}} \sqcup \underbrace{(A_3 \setminus (A_1 \sqcup A_2))}_{\in \mathscr{D}} \sqcup ... \in \mathscr{D}$$

D.h. $\mathscr{D}$ enthält beliebige abzählbare Vereinigungen von Teilmengen aus $\mathscr{D}$, ist also eine σ-Algebra. ∎

Lemma. Ist $\mathscr{D} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Dynkin-System und $D_1, D_2 \in \mathscr{D}$ mit $D_1 \subset D_2$, so ist $D_2 \setminus D_1 \in \mathscr{D}$.

Beweis. Wegen $\complement(D_2 \setminus D_1) = D_1 \sqcup \complement D_2 \in \mathscr{D}$ gilt $D_2 \setminus D_1 \in \mathscr{D}$. ∎

$\rightsquigarrow$ Die Dynkin-Eigenschaft vererbt sich bei gewissen Konstruktionen:

Folgerung. Für $D \in \mathscr{D}$ ist die Spur

$$\mathscr{D}|_D := \{M \subset D \mid M \in \mathscr{D}\} \subset \mathcal{P}(D)$$

von $\mathscr{D}$ auf D ein Dynkin-System auf D. Ebenso ist

$$\mathscr{D}_D := \{M \subset X \mid M \cap D \in \mathscr{D}\} \subset \mathcal{P}(X)$$

ein Dynkin-System auf X.

Beweis. Ist $M \in \mathscr{D}|_D$, so ist $M \in \mathscr{D}$ und wegen des Lemmas $\complement M = D \setminus M \in \mathscr{D}$, also $\complement M \in \mathscr{D}|_D$. Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen in $\mathscr{D}|_D$, so ist $A_n \in \mathscr{D}\ \forall n$, folglich $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{D}$, also $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{D}|_D$.
Ist $M \in \mathscr{D}_D$, so ist $M \cap D \in \mathscr{D}$ und wegen des Lemmas $\underbrace{D \setminus (M \cap D)}_{\complement M \cap D} \in \mathscr{D}$, also $\complement M \in \mathscr{D}_D$. Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen in $\mathscr{D}_D$, so ist $\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap D \in \mathscr{D}$, also $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap D) \in \mathscr{D}$, d.h. $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{D}_D$. ∎

Da beliebige Durchschnitte von Dynkin-Systemen wieder solche sind, gibt es für jede Familie $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ ein eindeutiges kleinstes sie enthaltendes Dynkin-System $\mathscr{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{P}(X)$, genannt **das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System**. Klar gilt $\mathscr{D}(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E})$.

Satz. Von $\cap$-stabilen Familien erzeugte Dynkin-Systeme sind $\cap$-stabil, also σ-Algebren.

Beweis. Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ $\cap$-stabil. Zu zeigen: $\mathscr{D}(\mathcal{E})$ ist $\cap$-stabil. Sei $E \in \mathcal{E}$. Fixiere noch ein $E' \in \mathcal{E}$. Dann gilt nach Voraussetzung $E' \cap E \in \mathcal{E} \subset \mathscr{D}(\mathcal{E})$, d.h. $E' \in \mathscr{D}(\mathcal{E})_E$ (vgl. oben). Daraus folgt $\mathcal{E} \subset \mathscr{D}(\mathcal{E})_E$ und somit $\mathscr{D}(\mathcal{E}) \subset \mathscr{D}(\mathcal{E})_E$, da $\mathscr{D}(E)$ das kleinste Dynkin-System ist, das $\mathcal{E}$ enthält. Wir haben also gezeigt: $\mathscr{D}(\mathcal{E}) \subset \mathscr{D}(\mathcal{E})_E \; \forall E \in \mathcal{E}$. Es folgt

$$\left.\begin{matrix} E \in \mathcal{E} \\ D \in \mathscr{D}(\mathcal{E}) \end{matrix}\right\} \implies D \in \mathscr{D}(\mathcal{E})_E \implies D \cap E \in \mathscr{D}(\mathcal{E}) \implies E \in \mathscr{D}(\mathcal{E})_D$$

Wir haben also gezeigt: $\mathcal{E} \subset \mathscr{D}(\mathcal{E})_D \; \forall D \in \mathscr{D}(\mathcal{E})$, weiter gilt $\mathscr{D}(\mathcal{E}) \subset \mathscr{D}(\mathcal{E})_D \; \forall D \in \mathscr{D}(\mathcal{E})$. Dies wiederum bedeutet:

$$D, D' \in \mathscr{D}(\mathcal{E}) \implies D \cap D' \in \mathscr{D}(\mathcal{E})$$

Also ist $\mathscr{D}(\mathcal{E})$ $\cap$-stabil, wird aufgrund der letzten Proposition eine σ-Algebra. ■

Bemerkung. Ist $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil, so gilt $\mathscr{D}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$.

I.4.3 Die messbare Kategorie

“Messbare Objekte” sind Mengen versehen mit σ-Algebren als “messbaren Zusatzstrukturen”.

Definition (Messraum, Messbarkeit von Teilmengen). Ein **Messraum** ist ein Paar $(X, \mathscr{A})$ bestehend aus einer Menge X und einer σ-Algebra $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Die Teilmengen in $\mathscr{A}$ heißen **messbar**.

$\rightsquigarrow$ werden Definitionsbereiche unserer Volumenfunktionen (Maße) sein.

Definition (Messbarkeit von Abbildungen). Eine Abbildung $f : (X, \mathscr{A}) \longrightarrow (Y, \mathscr{B})$ von Messräumen heißt **messbar**, falls $f^{-1}(B) \in \mathscr{A} \; \forall B \in \mathscr{B}$, d.h. Urbilder messbarer Teilmengen sollen messbar sein. Man sagt auch $f : X \longrightarrow Y$ ist **$\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-messbar**.

Beobachtung. Kompositionen messbarer Abbildungen sind messbar, denn: ist

$$(X, \mathscr{A}) \xrightarrow[\text{messbar}]{f} (Y, \mathscr{B}) \xrightarrow[\text{messbar}]{g} (Z, \mathscr{C}),$$

so gilt

$$C \in \mathscr{C} \implies g^{-1}(C) \in \mathscr{B} \implies \underbrace{f^{-1}(g^{-1}(C))}_{(g \circ f)^{-1}(C)} \in \mathscr{A}.$$

Also $g \circ f$ ist $\mathscr{A}$-$\mathscr{C}$-messbar.

Zurückziehen von σ-Algebren: Eine Abbildung von Mengen $f : X \longrightarrow Y$ induziert kontravariant eine Abbildung $F^* : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X), M \longmapsto f^{-1}(M)$.
Für $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$ nennt man

$$f^*\mathcal{F} := \{f^{-1}(M) \mid M \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{P}(X)$$

die mit f zurückgezogene Familie.
Ist $\mathscr{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ eine σ-Algebra, so ist $f^*\mathscr{B} \subset \mathcal{P}(X)$ auch eine σ-Algebra, denn

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\bigcup M_k\right) &= \bigcup f^{-1}(M_k) \\ f^{-1}\left(\complement M\right) &= \complement f^{-1}(M). \end{aligned}$$

Beobachtung. Gegeben eine σ-Algebra $\mathscr{B}$ auf Y, ist $f^*\mathscr{B}$ die kleinste σ-Algebra auf X, bezüglich derer f messbar ist. Deswegen ist die Reformulierung von der Definition der Messbarkeit der Abbildungen sinnvoll:

Definition. Eine Abbildung $f : (X, \mathscr{A}) \longrightarrow (Y, \mathscr{B})$ ist genau dann messbar, wenn $f^*\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$. Ist speziell $X \subset Y$ eine Teilmenge und $\iota : X \longrightarrow Y$ die Inklusion, so ist $\iota^{-1}(M) = X \cap M$ für $M \subset Y$. Für eine σ-Algebra $\mathscr{B}$ auf Y nennt man

$$\mathscr{B}|_X := \iota^*\mathscr{B} = \{M \cap X \mid M \in \mathscr{B}\} \subset \mathcal{P}(X)$$

die **Spur-σ-Algebra** von $\mathscr{B}$ auf X. Die Inklusion ist dann $\mathscr{B}|_X$-$\mathscr{B}$-messbar.

Man kann Erzeugendensysteme von σ-Algebren zurückziehen:

Lemma. Ist $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung und $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$, so gilt $\sigma(f^*\mathcal{F}) = f^*(\sigma(\mathcal{F}))$.

Beweis. Einerseits: $f^*(\sigma(\mathcal{F}))$ ist σ-Algebra, enthält $f^*\mathcal{F} \implies \sigma(f^*\mathcal{F}) \subset f^*(\sigma(\mathcal{F}))$.
Anderseits ist $\{A \in \sigma(\mathcal{F}) \mid f^{-1}(A) \in \sigma(f^*\mathcal{F})\}$ eine Algebra, die $\mathcal{F}$ enthält und in $\sigma(\mathcal{F})$ enthalten ist, somit Gleichheit. D.h. $A \in \sigma(\mathcal{F}) \implies f^{-1}(A) \in \sigma(f^*\mathcal{F})$, somit $f^*(\sigma(\mathcal{F})) \subset \sigma(f^*\mathcal{F})$. ∎

Das Lemma lässt sich reformulieren: Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung, $\mathscr{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ eine 7.11.2019
σ-Algebra und $\mathcal{E} \subset \mathscr{B}$ Erzeugendensystem, so wird $f^*\mathscr{B}$ von $f^*\mathcal{E}$ erzeugt. Wir können also Erzeuger zurückziehen.

topologische Kategorie	$\rightsquigarrow$	Klasse der Borelschen Messräume
$(X, \mathcal{T})$	$\rightsquigarrow$	$(X, \mathscr{B}(X))$

Definition. Sind $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, so heißt eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ **Borel-messbar**, falls sie $\mathscr{B}(X)$-$\mathscr{B}(Y)$-messbar ist.

Lemma. Stetige Abbildungen sind Borel-messbar.

Beweis. Mit Notation der Definition: Die Stetigkeit von $f : X \longrightarrow Y$ bedeutet, dass $f^*\mathcal{T}_Y \subset \mathcal{T}_X$. Es folgt

$$f^*(\underbrace{\mathscr{B}(Y)}_{\sigma(\mathcal{T}_Y)}) \overset{\text{Lemma}}{=} \sigma(\underbrace{f^*\mathcal{T}_Y}_{\subset \mathcal{T}_X}) \subset \sigma(\mathcal{T}_X) = \mathscr{B}(X).$$

∎

I.4.4 Produkte von σ-Algebren

Wir konstruieren endliche Produkte von σ-Algebren bzw. Messräumen. Seien $(X_i, \mathscr{A}_i)$ Messräume $(i = 1, ..., n)$. Die Produkt-σ-Algebra $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \otimes ... \otimes \mathscr{A}_n$ ist definiert als die σ-Algebra auf $X = X_1 \times ... \times X_n$ erzeugt von $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\mathscr{A}_1, ..., \mathscr{A}_n)$, d.h. von $\pi_i^{-1}(A_i)\ \forall A_i \in \mathscr{A}_i$[4], $i = 1, ..., n$ und ebenfalls erzeugt vom Halbring $\mathcal{Q} = \mathscr{A}_1 * ... * \mathscr{A}_n \supset \mathcal{Z}$ der Quader $A_1 \times ... \times A_n$ mit $A_i \in \mathscr{A}_i$.

Definition. Die σ-Algebra $\mathscr{A}_1 \otimes ... \otimes \mathscr{A}_n$ auf $X_1 \times ... \times X_n$ heißt das Produkt der σ-Algebren $\mathscr{A}_i$, und der Messraum $(X_1 \times ... \times X_n, \mathscr{A}_1 \otimes ... \times \mathscr{A}_n)$ das Produkt der Messräume $(X_i, \mathscr{A}_i)$.

Das Produkt ist assoziativ, z.B. gilt $(\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2) \otimes \mathscr{A}_3 = \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 \otimes \mathscr{A}_3 = \mathscr{A}_1 \otimes (\mathscr{A}_2 \otimes \mathscr{A}_3)$.(Ü)

Die natürlichen Projektionen $\pi_k : X_1 \times ... \times X_n \longrightarrow X_k$ sind messbar. Die Produkt-σ-Algebra ist charakterisiert als die kleinste σ-Algebra auf $X_1 \times ... \times X_n$, so dass die π_k bezüglich der $\mathscr{A}_k$ messbar sind.

Sind $\mathcal{E}_i \subset \mathscr{A}_i$ Erzeugendensysteme, so ist $\mathcal{Z}(\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n)$ ein Erzeugendensystem von $\mathscr{A}_1 \otimes ... \otimes \mathscr{A}_n$, ebenso wie $\mathcal{E}_1 * ... * \mathcal{E}_n$, denn

$$\begin{array}{ccc}
\pi_k^{-1}(M_k) & \xleftrightarrow{\text{bij.}} & M_k \subset X_k \\
\{\pi_k^{-1}(E_k)\} & \xleftrightarrow{\text{bij.}} & \{E_k\} \\
\text{erzeugt} & & \text{erzeugt} \\
\underset{\sigma\text{-Algebra}}{\{\pi_k^{-1}(A_k)\}} & \xleftrightarrow{\text{bij.}} & \mathscr{A}_k
\end{array}$$

I.5 Maße

I.5.1 Beispiele und Definitionen

Definition. Ein Maß ist ein auf einer σ-Algebra definiertes Prämaß.

Beispiel.

(i) (Punkteinheitsmaße, Diracmaße) Sei $x \in X$. Die *Dirac-Maße* δ_x auf $\mathcal{P}(X)$ sind definiert als

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Durch Linearkombinationen $\sum_{i=1}^{k} m_i \delta_{x_i}, m_i \in \mathbb{R}_0^+, x_i \in X$ erhält man weitere Maße, die "endlichen Maßverteilungen". Man kann ebenfalls allgemeinere Maßverteilungen ($\longleftrightarrow$ Fkt $X \to \mathbb{R}_0^+$) mit beliebigem Träger $\subset X$ bilden.

(ii) (Zählmaß) Das Zählmaß $\zeta : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \subset [0, \infty]$ ist definiert durch

$$\zeta(A) = \begin{cases} |A|, & \text{falls } A \text{ endlich}, \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

[4] Die $\pi_i^{-1}(A_i)$ sind spezielle Quader, da $X_i \in \mathscr{A}_i$.

(iii) Auf $\mathcal{P}(X)$ wird ein Maß μ definiert durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A = \varnothing, \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

(iv) Sei X überabzählbar und $\mathscr{A}$ die von den endlichen Teilmengen erzeugte σ-Algebra, d.h. abzählbare Teilmengen und deren Komplemente. Dann ist

$$\nu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ abzählbar}, \\ 1, & \text{falls } \complement A \text{ abzählbar} \end{cases}$$

ein Maß auf $\mathscr{A}$.

Teilmengen von σ-Algebren sind i.A. kompliziert und nicht explizit beschreibbar. Entsprechend sind Maße i.A. nicht beschreibbar durch explizite Angabe ihrer Werte. $\rightsquigarrow$ Konstruktion durch *Fortsetzung*.

Ansatz/ Methode:

$$\begin{matrix}\text{Inhalt auf Halbring} \\ \text{(Prämaß auf Ring)}\end{matrix} \underset{\text{Fortsetzung}}{\overset{\text{eindeutige}}{\rightsquigarrow}} \text{Maße auf } \sigma\text{-Algebren}$$

Daher brauchen wir Fortsetzungsresultate.

I.5.2 Äußere Maße und Messbarkeit

Sei $\mathscr{H} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Halbring und $\mu : \mathscr{H} \longrightarrow [0, \infty]$ ein Inhalt. Unser Ziel ist, μ auf $\sigma(\mathscr{H})$ fortzusetzen.

Wir geben für *beliebige* Teilmengen von X ein **äußeres μ-Volumen** (bzw. eine **obere μ-Volumenschranke**), indem wir *abzählbare* Überdeckungen durch Teilmengen aus $\mathscr{H}$ verwenden. Wir definieren für $M \subset X$

$$\boxed{\mu^*(M) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \;\middle|\; (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathscr{H} \text{ mit } M \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right\}}.$$

$\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ist also eine abzählbare Überdeckung von M, beinhaltet alle endlichen. Falls keine Überdeckung existiert, so $\mu^*(M) = \inf \varnothing = \infty$.

Wir können immer zu disjunkter Überdeckung übergehen:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \ldots \cup \underbrace{(A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}))}_{\text{disjunkt zerlegbar in Teilmengen aus } \mathscr{H}} \cup \ldots$$

Daher genügt es, Infimum über disjunkte Überdeckung zu bilden.

Wir erinnern uns an unser erstes Fortsetzungsresultat: Ist μ ein Inhalt auf $\mathscr{H}$, so existiert eine eindeutige $\overline{\mu}$ auf dem von $\mathscr{H}$ erzeugten Ring $\mathscr{R}$, der aus endlichen disjunkten Vereinigungen von Teilmengen aus $\mathscr{H}$ besteht. D.h. Überdeckungen durch Teilmengen aus $\mathscr{R}$ sind nicht effektiver als Überdeckungen durch Teilmengen aus $\mathscr{H}$. Anders gesagt,

$$\boxed{\overline{\mu}^* = \mu^*}.$$

Ist $M \subset B \in \mathscr{R}$, so genügt es, Infimum über Überdeckungen durch in B enthaltene Teilmengen zu bilden. (Bild hier) Analog: Ist $M \cap B = \varnothing$, so genügt es, Infimum über Überdeckungen durch zu B disjunkte Teilmengen zu bilden.

Lemma. Die obere μ-Volumenschranke $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ hat folgende Eigenschaften:

(i) $\mu^*(\varnothing) = 0$,

(ii) *Monotonie:* $M \subset M' \implies \mu^*(M) \leq \mu^*(M')$,

(iii) *σ-Subadditivität:* Für Folgen $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von (nicht notwendigerweise disjunkten) Teilmengen $M_n \subset X$ gilt: $\mu^*\Big(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n\Big) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(M_n)$.

Beweis. Zu (iii): Sei $(\underbrace{A_{n,m}}_{\in\mathscr{H}})_m$ eine Überdeckung von M_n. Dann ist $(A_{n,m})_{(n,m)}$ eine Überdeckung von $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n$. Es folgt

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n\right) \leq \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ n\in\mathbb{N}}} \mu^*(A_{n,m}) \overset{\text{großer Umordnungssatz}}{\underset{\text{für Doppelreihen}}{=}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \mu^*(A_{n,m})$$

Die Summe $\sum\limits_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ n\in\mathbb{N}}} \mu^*(A_{n,m})$ ist wohldefiniert, da unabhängig von Summationsreihenfolge[5]. Zu $\varepsilon_n > 0$ können wir die Überdeckung $(A_{n,m})_m$ so wählen, dass $\sum\limits_{m\in\mathbb{N}} \mu^*(A_{n,m}) \leq \mu^*(M_n) + \varepsilon_n$. Dann folgt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \mu^*(A_{n,m}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(M_n) + \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n}_{\substack{>0,\\ \text{wird bel. klein}}}$$

Also war die σ-Subadditivität. ■

Definition. Eine Funktion $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ mit den oben genannten Eigenschaften (i)-(iii) heißt ein **äußeres Maß** auf X.

μ^* muss nicht von (zu) einem Inhalt μ induziert (assoziiert) sein. Falls μ^* zu Inhalt $\mu : \mathscr{H} \longrightarrow [0, \infty]$ assoziiert, so gilt

$$\boxed{\mu^*|_{\mathscr{R}} \leq \overline{\mu}}.$$

[5]siehe Umordnungssatz für Reihen mit nichtnegativen Summanden.

Partielle Additivität äußerer Maße: Seien $M_1, M_2 \subset X$ disjunkt und durch $\mathscr{R}$ trennbar, d.h. es existiert ein $B \in \mathscr{R}$ mit $M_1 \subset B$ und $M_2 \cap B = \varnothing$. Dann gilt(Ü)

$$\mu^*(M_1 \sqcup M_2) = \mu^*(M_1) + \mu^*(M_2).$$

Man kann auch ein **inneres μ-Volumen** (bzw. **untere μ-Volumenschranke** definieren[6]. Die Approximation geschieht durch äußere Approximation des Komplements. Sei $M \subset X$ so, dass $M \subset R \in \mathscr{R}$ mit $\overline{\mu}(R) < \infty$. Das innere μ-Volumen ist definiert als

$$\mu_*(M) := \underbrace{\mu^*(R)}_{\substack{\text{i.A. nur} \\ \leq \overline{\mu}(R)}} - \mu^*(R \setminus M).$$

Die Approximation von innen gelingt nicht: Ist z.B. $O \subset X$ offen und $A \subset O$ eine abzählbare dichte Teilmenge, so enthält $O \setminus A$ keine Quader, d.h. inneres Volumen $= 0$.

Ist $R \subset R'$ mit $\overline{\mu}(R') < \infty$, so gilt wegen der partiellen Additivität

$$\underbrace{\mu^*(R' \setminus M)}_{\mu^*(R \setminus M) + \mu^*(R' \setminus R)} - \mu^*(R \setminus M) = \mu^*(R' \setminus R) = \mu^*(R') - \mu^*(R),$$

also ist μ_* wohldefiniert.

Diskrepanz zwischen äußerem und innerem Volumen:

$$\mu^*(M) - \mu_*(M) = \underbrace{\mu^*(M) + \mu^*(R \setminus M)}_{\geq \mu^*(R)} - \mu^*(R) \geq 0$$

Der "Volumen-Exzess" wird also erzeugt durch "erzwungene Überlappung". Intuition: der Exzess ist positiv, wenn der "Rand" von M bzw. Übergangsbereich (Interface) von M in $\complement M$ "dick" bzw. "diffus" ist.

Unser Ziel ist nun, die μ^*-*messbare* Teilmengen zu definieren und danach zeigen, dass diese eine σ-*Algebra* $\mathscr{A}^* \supset \mathscr{R}$ bilden und dass $\mu^*|_{\mathscr{A}^*}$ ein Maß ist. (Es setzt $\overline{\mu}$ fort, falls $\overline{\mu}$ ein Prämaß ist.) 11.11.2019

Wir betrachten M als "messbar", falls es keinen "Volumen-Exzess" gibt, d.h. wir verlangen

$$\mu^*(M) = \mu_*(M),$$

also

$$\mu^*(R) = \mu^*(M) + \mu^*(R \setminus M) \quad \forall R \in \mathscr{R} \text{ mit } R \supset M, \overline{\mu}(R) < \infty.$$

Um auf *beliebige* Teilmengen $M \subset X$ auszudehnen, *lokalisiere* und *verlange*:

$$\mu^*(R) = \mu^*(R \cap M) + \mu^*(\underbrace{R \setminus M}_{R \cap \complement M}) \quad \forall R \in \mathscr{R} \tag{I.6}$$

[6]Dies ist nicht logisch notwendig für unsere Diskussion, motiviert aber die Diskussion von Messbarkeit, siehe unten.

(*Bemerkung:* Dies gilt wegen der Subadditivität von μ^* sowieso, falls $\mu^*(R) = \infty$.)
Es folgt, dass diese Gleichheit auch für Schnitte von M mit *beliebigen* Teilmengen $S \subset X$, d.h.

$$\boxed{\mu^*(S) = \mu^*(S \cap M) + \mu^*(S \setminus M)} \tag{I.7}$$

Denn: Falls $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von S durch Teilmengen $A_n \in \mathscr{R}$, so gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mu}(A_n) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\mu^*(A_n)}_{\overset{(\mathrm{I.6})}{=} \mu^*(A_n\cap M)+\mu^*(A_n\setminus M)} &= \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^* \underbrace{(A_n \cap M)}_{\text{Überdeckung } S\cap M}}_{\geq \mu^*(S\cap M)} + \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^* \underbrace{(A_n \setminus M)}_{\text{Überdeckung } S\setminus M}}_{\geq \mu^*(S\setminus M)} \\ &\geq \mu^*(S \cap M) + \mu^*(S \setminus M) \overset{\text{Subadd.}}{\geq} \mu^*(S)\end{aligned}$$

Nehmen wir nun Infimum über (A_n), so ist die linke Seite der Ungleichung gleich $\mu^*(S)$ und es folgt

$$\mu^*(S) \geq \mu^*(S \cap M) + \mu^*(S \setminus M) \geq \mu^*(S),$$

also Gleichheit überall, d.h. (I.7) gilt. ■

Man gelangt so auf natürlicher Weise zur Schlüssel-Definition: (Carathéodory, 1914)

Definition. $M \subset X$ heißt μ^***-messbar**, falls

$$\mu^*(S) = \mu^*(S \cap M) + \mu^*(S \setminus M)$$

für alle $S \subset X$ gilt. S ist also eine "Testmenge".

Vorstellungen: M und $\complement M$ "durchdringen sich nicht". M hat "dünnen Rand". Jede Teilmenge S wird durch "sauberen Schnitt" durch M geteilt.

Wir setzen

$$\mathscr{A}^* := \{\mu^*\text{-messbare Teilmengen}\} \subset \mathcal{P}(X).$$

Bemerkung. Ältere Ansätze (Jordan, Peano) arbeiten noch mit *endlichen* Überdeckungen durch Teilmengen aus $\mathscr{H}$, bzw. äquivalent, *Einschließungen* durch Teilmengen in $\mathscr{R}$. Das äußere Maß wird also so definiert:

$$\begin{aligned}\mu^{*,\mathrm{fin}} &:= \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \mid A_1, ..., A_n \in \mathscr{H},\ \text{mit } A_1 \cup ... \cup A_n \supset M\right\} \\ &= \inf\left\{\overline{\mu}(\overline{A}) \mid \overline{A} \in \mathscr{R} \text{ mit } \overline{A} \supset M\right\}\end{aligned}$$

$\mu^{*,\mathrm{fin}} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,\infty]$ ist wieder monoton, aber nur *endlich* additiv. Es ist $\mu^{*,\mathrm{fin}}|_{\mathscr{R}} = \overline{\mu}$ und somit $\mu^{*,\mathrm{fin}} \geq \mu^*$. Deswegen ist $\mu^{*,\mathrm{fin}}$ nur nützlich auf kleineren Klassen von Teilmengen. Das innere Maß wird definiert durch

$$\mu_{*,\mathrm{fin}} := \sup\{\overline{\mu}(I) \mid I \in \mathscr{R} \text{ mit } I \subset M\}$$

Also schöpft man M durch Teilmenge $I \in \mathscr{R}$ aus. Dies ist wiederum unflexibler, denn:

$$\mu_{*,\mathrm{fin}} \leq \mu_*(\leq \mu^* \leq \mu^{*,\mathrm{fin}}).$$

Dies führt zur einer größeren Diskrepanz $\mu^{*,\text{fin}} - \mu_{*,\text{fin}} \geq \mu^* - \mu_*$ und deswegen sind weniger Teilmengen $\mu^{*,\text{fin}}$-messbar (bzw. Jordan-messbar, Jordan-quadrierbar).
Die ältere Version der Theorie bleibt unbefriedigend, denn z.B. betrachten wir $\mathbb{Q} \cap [0.1]$ dicht in $[0,1]$ und $\lambda^1_{\mathcal{I}}$ (euklidische Länge $b-a$) auf $\mathcal{I}$ (Halbring halboffener Intervalle $[a,b)$). Es gilt $(\lambda^1_{\mathcal{I}})^{*,\text{fin}}(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 1$, weil jede Teilmenge aus $\mathcal{F}^1$, die $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ enthält, auch $[0,1]$ enthält. Anderseits gilt $(\lambda^1_{\mathcal{I}})^*(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$, da es abzählbare Überdeckung durch abzählbare viele Teilintervalle beliebig kleiner Gesamtlänge gibt. Es folgt $\lambda_{*,\text{fin}}(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \leq \lambda_*(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \leq \underbrace{\lambda^*(\mathbb{Q} \cap [0,1])}_{=0} \leq \underbrace{\lambda^{*,\text{fin}}(\mathbb{Q} \cap [0,1])}_{=1}$. Also ist $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ nicht $(\lambda^1_{\mathcal{I}})^{*,\text{fin}}$-messbar, aber $(\lambda^1_{\mathcal{I}})^*$-messbar.

I.5.3 Die σ-Algebra der messbaren Mengen und ihr Maß

Sei $\mathscr{A}^* \subset \mathcal{P}(X)$ die Familie der μ^*-messbaren Teilmengen. (μ^* nicht notwendigerweise induziert von einem Inhalt, fordere nur Axiome eines äußeren Maßes)

Definition. $N \subset X$ heißt **μ^*-Nullmenge**, falls $\mu^*(N) = 0$.

Lemma. Alle μ^*-Nullmengen gehören zu $\mathscr{A}^*$.

Beweis. Für $S \subset X$ gilt:

$$\mu^*(S) \overset{\text{Subadd.}}{\leq} \underbrace{\mu^*(\underbrace{S \cap N}_{\subset N})}_{\overset{\text{Monot.}}{\leq} \mu^*(N)=0} + \underbrace{\mu^*(\underbrace{S \setminus N}_{\subset S})}_{\leq \mu^*(S)} \leq \mu^*(S)$$

Also Gleichheit in allen Ungleichungen. Also N μ^*-messbar. ∎

Beobachtung. $\mathscr{A}^*$ ist $\complement$-stabil, d.h. $M \in \mathscr{A}^* \implies \complement M \in \mathscr{A}^*$, denn "Rand von M = Rand von $\complement M$".

Äußere Maße sind i.A. nicht additiv, d.h. sie sind keine Inhalte auf $\mathcal{P}(X)$, sondern nur partiell additiv (vgl. oben). Es ist aber plausibel zu erwarten, dass sie σ-additiv auf Teilmengen mit "dünnem Rand" sind, da keine "Volumendurchdringung".

Satz (Carathéodory). $\mathscr{A}^*$ ist eine σ-Algebra und $\mu^*|_{\mathscr{A}^*}$ ist ein Maß.

Lemma.

(i) Sind $M_1, ..., M_n \subset X$ Teilmengen (nicht notwendigerweise disjunkt) mit $\mu^*(M_1 \cup ... \cup M_n) = \mu^*(M_1) + ... + \mu^*(M_n)$, so auch $\mu^*(M_1 \cup ... \cup M_k) = \mu^*(M_1) + ... + \mu^*(M_k)$ für $1 \leq k < n$.

(ii) Sind $M_1, ..., M_n \in \mathscr{A}^*$ paarweise disjunkt und $S \subset X$, so gilt $\mu^*(S \cap (M_1 \cup ... \cup M_n)) = \mu^*(S \cap M_1) + ... + \mu^*(S \cap M_n)$

Beweis. (i) Subadditivität von μ^* liefert

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^n M_i\right) \overset{\text{nV}}{=} \sum_{i=1}^n \mu^*(M_i) = \underbrace{\sum_{i\le k} \mu^*(M_i)}_{\ge \mu^*\left(\bigcup_{i\le k} M_i\right)} + \underbrace{\sum_{i>k} \mu^*(M_i)}_{\ge \mu^*\left(\bigcup_{i>k} M_i\right)} \ge \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^n M_i\right)$$

Also Gleichheit überall und insbesondere gilt $\sum\limits_{i\le k} \mu^*(M_i) = \mu^*\left(\bigcup\limits_{i\le k} M_i\right)$

(ii) Für $1 \le k \le n$ gilt, da M_i disjunkt:

$$(S \cap (M_k \cup ... \cup M_n)) \cap M_k = S \cap M_k$$
$$(S \cap (M_k \cup ... \cup M_n)) \cap \complement M_k = S \cap (M_{k+1} \cup ... \cup M_n)$$

Setze nun die Testmenge $S \cup (M_k \cup ... \cup M_n)$, und weil $M_k \in \mathscr{A}^*$ ist, folgt nach der Definition der μ^*-Messbarkeit:

$$\mu^*(S \cup (M_k \cup ... \cup M_n)) = \mu^*(S \cap M_k) + \mu^*(S \cap (M_{k+1} \cup ... \cup M_n))$$

Induktion liefert die Behauptung.

■

Beweis des Satzes von Carathéodory. Zuerst zeigen wir, dass $\mathscr{A}^*$ $\cup$-stabil ist: Hierzu seinen $M_1, M_2 \in \mathscr{A}^*$. Sei $S \subset X$ beliebig. Dann folgt

$$\mu^*(S) \underset{\text{messbar}}{\overset{M_1}{=}} \underbrace{\mu^*(S \cap M_1)}_{\substack{=\mu^*(S\cap M_1\cap M_2)+\mu^*(S\cap M_1\cap \complement M_2)\\ \text{da } M_2 \text{ messbar}}} + \underbrace{\mu^*(S \cap \complement M_1)}_{=\mu^*(S\cap \complement M_1\cap M_2)+\mu^*(S\cap \complement M_1\cap \complement M_2)}$$
$$= \mu^*(S \cap M_1 \cap M_2) + \mu^*(S \cap M_1 \cap \complement M_2) + \mu^*(S \cap \complement M_1 \cap M_2) + \mu^*(S \cap \complement M_1 \cap \complement M_2)$$

Das Lemma (i) liefert, dass (Bild hier)

$$\mu^*(S \cap (M_1 \cup M_2)) = \mu^*(S \cap M_1 \cap M_2) + \mu^*(S \cap \complement M_1 \cap M_2) + \mu^*(S \cap M_1 \cap \complement M_2).$$

Daraus folgt

$$\mu^*(S) = \mu^*(S \cap (M_1 \cup M_2)) + \mu^*(S \cap \complement(M_1 \cup M_2))$$

Also $M_1 \cup M_2 \in \mathscr{A}^*$, also ist $\mathscr{A}^*$ eine Algebra. Zu zeigen bleibt: $\mathscr{A}^*$ ist σ-$\cup$-stabil. Es genügt, für abzählbare disjunkte Vereinigungen zu zeigen (da $\mathscr{A}^*$ eine Algebra). Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{A}^*$ mit paarweise disjunkten Folgengliedern. Sei $S \subset X$. Setze $\overline{M}_n = M_1 \cup ... \cup M_n$ und $\overline{M}_\infty = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} M_i$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mu^*(S) = \overbrace{\mu^*(\underbrace{S \cap \overline{M}_n}_{\nearrow S\cap \overline{M}_\infty})}^{\underset{\text{(ii)}}{\overset{\text{Lemma}}{=}} \sum_{i=1}^n \mu^*(S\cap M_i)} + \underbrace{\mu^*(\underbrace{S \cap \complement \overline{M}_n}_{\searrow S\cap \complement\overline{M}_\infty})}_{\ge \mu^*(S\cap \complement \overline{M}_\infty)}$$

Es folgt für $n \longrightarrow \infty$:

$$\mu^*(S) \geq \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(S \cap M_i)}_{\geq \mu^*(S \cap \overline{M}_\infty)} + \mu^*(S \cap \complement \overline{M}_\infty) \geq \mu^*(S)$$

Also überall Gleichheit, dies zeigt, dass $\overline{M}_\infty \in \mathscr{A}^*$, d.h. $\mathscr{A}^*$ eine σ-Algebra. 14.11.2019