9. ZÜ Ana 3 11.12.2019

Det einer Matrix

K Körper
char $\neq 2$
zB $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$

$$\mathrm{Mat}(n \times n, K) \xrightarrow{\det} K$$

alt. multilinear in Spalten + Normierung ($\Rightarrow$ auch in Zeilen)

Det eines Endo (von endlich-dim K-Vektorraum)

$A \in \mathrm{End}\, V \qquad V \xrightarrow{A} V$

$$\mathrm{Alt}_n(V) \xleftarrow{A^*} \underset{1\text{-dim}}{\mathrm{Alt}_n(V)} \overset{\text{nicht kanonisch}}{\cong} K$$

$$A^* =: \det(A) \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{Alt}_n(V)}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{End}(V) & \xrightarrow{\det} & K \\ \cup & & \cup \\ \mathrm{Aut}(V) & \xrightarrow[\text{Homom}]{\det} & K^* \end{array}$$

mult. Gruppe von K (zB $\mathbb{R}\setminus\{0\}$).

Multiplikationssatz

$$\underbrace{A^*\alpha}_{\alpha(A\cdot, A\cdot, \dots)} = \det A \cdot \alpha \qquad \alpha \in \mathrm{Alt}_n(V)$$

$$\alpha(Av, \dots) = \det A \cdot \alpha(v, \dots)$$

$$(v_i) \text{ Basis} \Longrightarrow \frac{\alpha(Av_1, \dots)}{\alpha(v_1, \dots)} = \underset{\text{Endo}}{\det A} = \underset{\text{Matrix}}{\det} \overbrace{(a_{ij})}^{\text{Matrix } A \text{ bzgl } (v_i)}$$

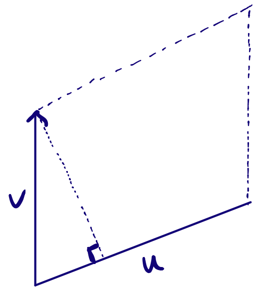
Determinanten und Volumenmessung

$K = \mathbb{R}$

V^n, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eukl. Vektorraum

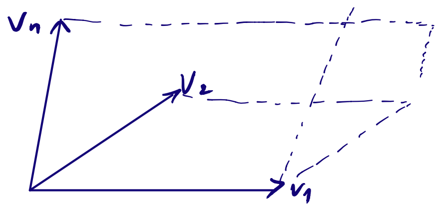
Längen $\quad \|v\| = \langle v, v\rangle^{\frac{1}{2}}$

1-dim Vol.



$$\text{Area}^2 = \|u\|^2 \cdot \left(\|v\|^2 - \left\langle v, \frac{u}{\|u\|} \right\rangle^2 \right)$$
$$= \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2$$
$$= \det \begin{pmatrix} \langle u,u\rangle & \langle u,v\rangle \\ \langle v,u\rangle & \langle v,v\rangle \end{pmatrix}$$

höher-dim Volumina



Parallelepiped

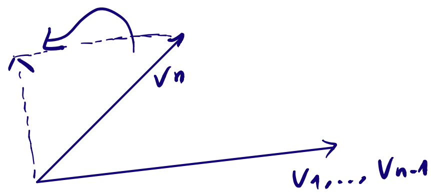
Charakteristische Eigenschaften

(als Fkt von $v_1, \dots, v_2$)

- Symmetrisch
- $\mathrm{vol}(v_1, \dots, v_k + w_k, \dots, v_n) = \mathrm{vol}(v_1, \dots, v_n)$ „scheren"

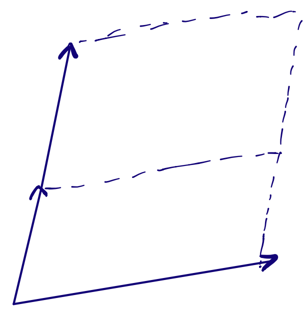
  falls $w_k \in \mathrm{span}\{v_i \mid i \neq k\}$

  kodim 1 - Unterraum



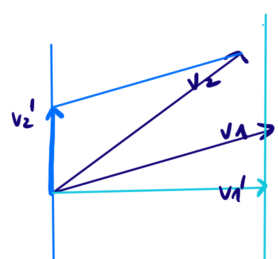
„alternierend"

- $\mathrm{vol}(v_1, \dots \lambda v_k, \dots, v_n) = |\lambda| \cdot \mathrm{vol}(v_1, \dots v_n)$
- $\mathrm{vol}(e_1, \dots, e_n) = 1$



Beh Diese Eigenschaften legen Vol fest.

Idee:



$(v_1, \dots, v_n)$

$\Big\downarrow$ Scherungen

v_i Vielfache von Standardbasisvektoren

$\Big\downarrow$ symm

v_i vielfache von e_i

$\Big\downarrow$ streckrung

$v_i = \pm e_i$ (hier $\mathrm{Vol} = 1$)

$\rightsquigarrow$ können $\mathrm{vol}(v_1, \dots)$ berechnen $\square$

Vol: Gleiches Verhalten wie $|\det|$. e_i ONB bzgl $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$0 \neq \alpha \in \mathrm{Alt}_n(V) \underset{\text{da Eigenschaften charakterisierend}}{\Longrightarrow} \left| \frac{\alpha(v_1, \dots, v_n)}{\alpha(e_1, \dots, e_n)} \right| = \mathrm{Vol}(v_1, \dots, v_n)$$

$$A \in \mathrm{End}\, V \Longrightarrow \mathrm{vol}(Ae_1, \dots) = |\det A|$$

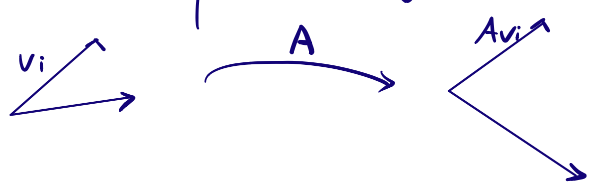
allgemeiner: (v_i) Basis

$$\mathrm{vol}(Av_1, \dots) = \left| \frac{\alpha(Av_1, \dots)}{\alpha(v_1, \dots\ )} \cdot \frac{\alpha(v_1, \dots)}{\alpha(e_1, \dots)} \right|$$

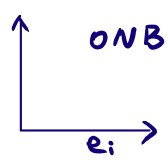
$$\Longrightarrow \boxed{\mathrm{Vol}(Av_1, \dots) = |\det A| \cdot \mathrm{vol}(v_1, \dots)}$$

Beziehung $\mathrm{vol} \longleftrightarrow \det$

$\rightsquigarrow$ geom. Interpretation für det:



<u>Volumenverzerrung eines Endo</u> $= |\det|$



$(u_i), (v_j)$
n-Tupel von Vektoren

$\det(\langle u_i, v_j \rangle)$ alternierend multilinear in u_i
... ... v_j

$||$ alt multilin in u's

$$0 \neq \alpha \in \mathrm{Alt}_n(V) \qquad \frac{\alpha(u_1, \dots)}{\alpha(e_1, \dots)} \cdot \underbrace{\det\left(\langle e_i, v_j\rangle\right)}$$

$$\overset{\text{alt}}{\underset{\text{multilin inv's}}{=}} \frac{\alpha(v_1, \dots)}{\alpha(e_1, \dots)} \cdot \underbrace{\det\overbrace{\left(\langle e_i, e_j\rangle\right)}^{\text{Einheitsmat}}}_{1}$$

Also für $u_i = v_i$

$$\boxed{\det\left(\langle v_i, u_i\rangle\right) = \mathrm{vol}(v_1, \dots)^2}$$

Orientierung $\quad (K = \mathbb{R})$

Relative Orientierung von Basen (u_i) und (v_i).

$$:= \operatorname{sgn} \frac{\alpha(u_1, \dots,)}{\alpha(v_1, \dots)} \underset{u_i = Av_i}{=} \operatorname{sgn} \det A = \frac{\det A}{|\det A|}$$

V n-dim K-VR $\qquad \underline{\mathrm{Bas}(V)} \underset{\substack{\text{offen}\\ \text{dicht}}}{\subset} V^n$

nicht (weg) zsmh

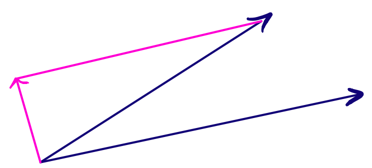
stetig $\Big\downarrow$ or. rel zu $(e_1, \dots)$ $\leftarrow$ Referenzbasis

dh lokal konst

$\{\pm 1\}$

<u>Beh</u> $\mathrm{Bas}(V)$ hat genau zwei Zusammenhangskomponente.

Durch stetige Defos kann jede Basis überführt in



Permutation der Ref-Basis

$$(v_i) \rightsquigarrow \left(e_{\sigma(v_i)}\right)_{\sigma \in S_n}$$

außerdem $\sigma = \mathrm{id}$ oder $\sigma = (1\ \ 2)$ $\qquad \square$

$$(v_1, v_2, v_3, \dots) \xrightarrow[\text{Kodim-2-Achse}]{\text{Rot}} (v_2, -v_1, v_3, \dots)$$

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \xrightarrow{\det} \mathbb{R}\setminus\{0\} \xrightarrow[x \mapsto \frac{x}{|x|}]{\operatorname{sgn}} \{\pm 1\}$$

Homom

$\cup$

kern $=: GL_+(n,\mathbb{R})$ positive ~~Det~~
wegzsmh.

$\Lambda_n V$
$\ni$
$v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$
n-dim Vol-element

$V \xrightarrow{A} W \longrightarrow \Lambda_n V \xrightarrow[\text{kovariant}]{A_*} \Lambda_n W$

insbeson. $V = W$

$\Lambda_n V \xrightarrow{A_*} \Lambda_n V$
$A_* = \det A \cdot id_{\Lambda_n V}$

Gram-Det

$$\det\left(\langle u_i, v_j \rangle\right)_{i,j=1,\ldots,k} =: \langle u_1 \wedge \ldots \wedge u_k, v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \rangle$$

assoz Norm ist k-dim Vol.

SKP auf $\Lambda_k V$
induziert von SKP auf V
enkl VR

Tensor-Produkt U, V K-VR

Vektoren multiplizieren ??

$U \times V \xrightarrow[\text{dh bil.}]{\text{Produkt}}$ zu konstr. Vektorraum

$(u, v) \longmapsto u \cdot v$

(e_i) Basis von U, (f_j) von V

$e_i \cdot f_j$ ~ ziel: lin. unab.

spannen Bild auf

$$u \cdot v = \sum_{i,j} a_i b_j e_i f_j$$

$u = \sum a_i e_i$, $v = \sum b_j f_j$

Def Das Tensorprodukt zweier Vektorräume U, V ist ein VR $U \otimes V$ zusammen mit einer bilinearen Abb $U \times V \xrightarrow[\text{bil}]{\otimes} U \otimes V$ s.d. gilt:

Für jede bil Abbildung $U \times V \xrightarrow{\beta} W$ existiert eine eindeutige lin. Abb $U \otimes V \xrightarrow{\lambda} W$ sd $\beta = \lambda \circ \otimes$.

$$\begin{tikzcd}
U \times V \arrow[r, "\otimes", "\text{bil}"'] \arrow[dr, "\text{bil}", "\beta"'] & U \otimes V \arrow[d, dashed, "\lambda"', "\text{lin } \exists!"] \\
& W
\end{tikzcd}$$

m. a. W. $\quad \operatorname{Hom}(U \otimes V,\ W) \xrightarrow{\text{Homom}} \operatorname{Bil}(U, V; W)$

$$\lambda \longmapsto \lambda \circ \otimes$$

ist <u>Isomorphismus.</u>

<u>Satz</u> Ein Tensorprodukt existiert und ist eindeutig bis auf Isomorphismen.

<u>Bew</u> (Eindeutigkeit)

$$\begin{tikzcd}
& U \otimes V \arrow[d, shift right, "\lambda"'] \\
U \times V \arrow[ur, "\otimes"] \arrow[dr, "\tilde{\otimes}"'] & U \tilde{\otimes} V \arrow[u, shift right, "\tilde{\lambda}"'] \\
&
\end{tikzcd}$$

" abstract nonsense "

z.z. $\lambda, \tilde{\lambda}$ Isom. zueinander inverse

$$\begin{tikzcd}
& U \otimes V \arrow[d, "\tilde{\lambda} \circ \lambda"', "\mathrm{id}_{U \otimes V}"] \\
U \times V \arrow[ur, "\otimes"] \arrow[r, "\otimes"'] & U \otimes V
\end{tikzcd}$$

$$\Longrightarrow \quad \tilde{\lambda} \circ \lambda = \mathrm{id}_{U \otimes V}$$

analog $\lambda \circ \tilde{\lambda} = \mathrm{id}_{U \otimes V}$