4. VL Ana 3 24. 10. 2019

Ergänzungen zu I.2.3 Halbring

Bem Kann man den von einer Familie $\mathcal{E}$ erzeugten Halbring definieren? (analog zu Ringen und Algebren)

Ringen: \-stabil, ∪-stabil; Algebren: ∪-stabil, C-stabil

$\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \ni A, B$

Geht nicht analog!

Halbring-Axiom (iii) nicht auf Durchschnitte von Familien vererbt.

$A \setminus B$ zerlegbar $= C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_n \qquad C_i \in \mathcal{H}$

$\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_1 \ni A, B$

könnten unterschiedliche Zerlegungen haben

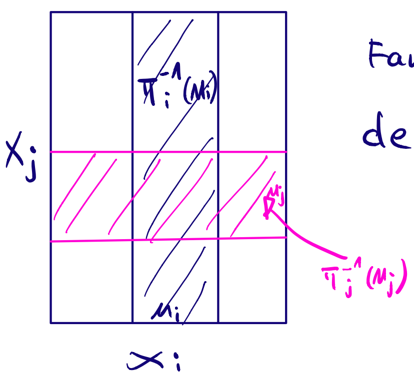
Es gibt Durchschnitte von Halbringen, die keine Halbringe sind.

M.a.W. $\exists$ Familien, die nicht in einem eindeutigen kleinsten Halbring enthalten sind.

Erg. zu I.2.4 Produkten

zu Erzeugern von Produktringen.

Prop Sind $\mathcal{R}_i \subset \mathcal{P}(X_i)$ Ringe und $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{R}_i$ Erzeugendensys für $i = 1, \ldots, n$, so erzeugt die Familie von Zylindermengen $\mathcal{Z}(\mathcal{E}_1, \ldots \mathcal{E}_n)$ den Produktring.



__Bew.__ Für jedes i wird der Ring auf $X_i \times \dots \times X_n$ bestehend aus den Zylindermengen $\pi_i^{-1}(M_i)$ für $M_i \in \mathcal{R}_i$. ~~wird~~ von der Familie der Zylindermengen $\pi_i^{-1}(E_i)$ für $E_i \in \mathcal{E}_i$ erzeugt, denn jede Teilmenge $M_i \in \mathcal{R}_i$ kann durch endlich viele Mengenoper. aus Teilm. $E_{ij} \in \mathcal{E}_i$ hergestellt werden und $\pi_i^{-1}(M_i)$ entsprechend aus den $\pi_i^{-1}(E_{ij})$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{R}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$ erz denselben Ring wie $\mathcal{R}(\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n)$ und denselben wie $\mathcal{R}_1 * \dots * \mathcal{R}_n$, also den Produktring $\mathcal{R}_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{R}_n$.

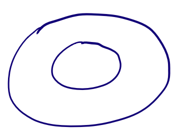
Halbring!

Kap I.3.1 (Inhalte)

__Def__ (Inhalte) ...

__Lemma__ (Einfache Eigenschaften von Inhalten): Betrachte $\mathcal{H} \xrightarrow{\mu} [0, \infty]$

(i) __Monotonie__



$$A, B \in \mathcal{H} \text{ mit } A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

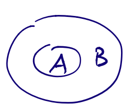
(ii) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{H}$ (nicht notwendig disjunkt!) mit $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{H}$

$\Longrightarrow$ __Subadditivität__

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)$$

__Bew.__

(i)

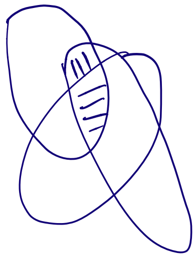


$B \setminus A = C_1 \cup \dots \cup C_n$ mit $C_i \in \mathcal{H}$

bzw $B = A \sqcup C_1 \sqcup \dots \sqcup C_n$

Add $\Longrightarrow \mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(C_1) + \dots + \mu(C_n)}_{\geq 0} \geq \mu(A)$

(ii) Lemma A $\Longrightarrow$ $\exists$ paarweise disj $H_i \in \mathcal{H}$ so dass jedes A_j die Vereinigung einiger von $\underset{H_i}{\text{ihnen}}$ ist.



Entsprechend summieren sich die Volumina auf

$\Longrightarrow$ Ungl folgt, denn jedes $\mu(H_j)$ genau einmal auf der linken Seite und je mindestens einmal auf der rechten Seite. $\square$

I.3.2 Fortsetzung von Inhalten von Halbringen auf Ringe

Satz Jeder Inhalt μ auf einem Halbring $\mathcal{H}$ besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einem Inhalt $\bar{\mu}$ auf dem von $\mathcal{H}$ erz. Ring $\mathcal{R}$.

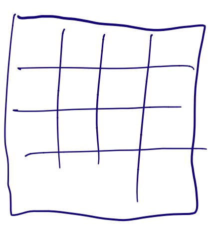
Bew. Eindeutigkeit folgt aus Additivität von Inhalten und Beschreibung des erz Rings $\mathcal{R}$. Jede Teilmenge in $\mathcal{R}$ ist disj Vereinigung $A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n$ mit $A_i \in \mathcal{H}$.

$\Longrightarrow$ notwendig $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{additiv}}}{\bar{\mu}}(A_1 \sqcup .. \sqcup A_n) = \underbrace{\bar{\mu}(A_1)}_{=\mu(A_1)} + \ldots + \mu(A_n)$ $(*)$

Existenz bzw Wohldefiniertheit von $\bar{\mu}$ durch $(*)$:

betrachte weitere disj Zerlegung derselben Teilmengen

$$A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n = B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_m \in \mathcal{R}, \quad A_i, B_j \in \mathcal{H}.$$



$\rightsquigarrow$ Zerlegungen $A_i = \bigsqcup_j (A_i \cap B_j)$

$B_j = \bigsqcup_i (A_i \cap B_j)$ $\qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \cap\text{-stabil}}}{A_i \cap B_j \in \mathcal{H}}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \mu(A_i) = \sum_j \mu(A_i \cap B_j) \\ \mu(B_j) = \sum_i \mu(A_i \cap B_j) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \sum_i \mu(A_i) = \sum_i \overbrace{\sum_j \mu(A_i \cap B_j)}^{\mu(A_i)}$$

$$\|$$

$$\sum_j \mu(B_j) = \sum_j \underbrace{\sum_i \mu(A_i \cap B_j)}_{\mu(B_j)}$$

$\rightsquigarrow$ wohldefiniert!

$\bar{\mu}$ Inhalt:

$\bar{\mu}$ additiv, also Inhalt. $\square$

<u>Bem.</u> μ endliche Werte $\Longrightarrow$ $\bar{\mu}$ endliche Werte

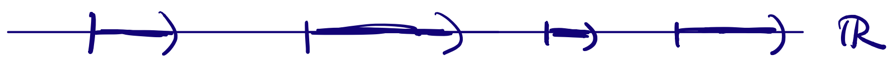
<u>Bsp.</u> Inhalt $\mathcal{I} = \mathcal{Q}^1 \xrightarrow{\lambda^1_{\mathcal{Q}^1}} [0,\infty)$

Halbring

Satz

Inhalt $\mathcal{F}^1 \xrightarrow{\lambda^1_{\mathcal{F}^1}} [0,\infty)$

von $\mathcal{Q}^1$ erz Ring der 1-dim Figuren



Summe der Längen der Teilintervalle.

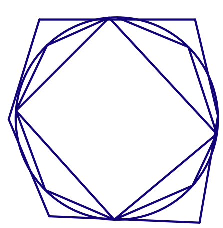
<u>Bem.</u> Die Fortsetzung von Inhalten von Ringen auf Algebren ist nicht eindeutig.

z.B. Ring $\mathcal{R} = \{\emptyset\}$ erz. Alg. $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$

den Inhalt von X kann man bel. wählen.

I.3.3. Prämaße

Betrachte Verhalten von Volumina bei gewissen Grenzprozessen (Approx. von innen und außen)



Arbeite mit Teilmengen einer festen Menge X.

Falls $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>aufsteigende</u> Folge von Teilm von X mit $\bigcup_n A_n =: A$ so schreibe $A_n \nearrow A$.

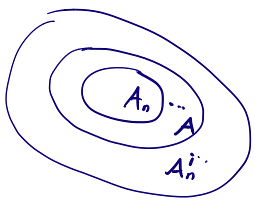
$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots \subset X$

Falls $(A_n')_{n\in\mathbb{N}}$ absteigend mit $\bigcap_n A_n' = A$,

$$X \supset A_1' \supset A_2' \supset \ldots \supset A_n' \supset \ldots$$

so schreibe $A_n' \searrow A$.

<u>Beob.</u>



$$A_n \nearrow A \iff A \setminus A_n \searrow \emptyset$$

$$A_n' \searrow A \iff A_n' \setminus A \searrow \emptyset$$

sei $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ Inhalt.

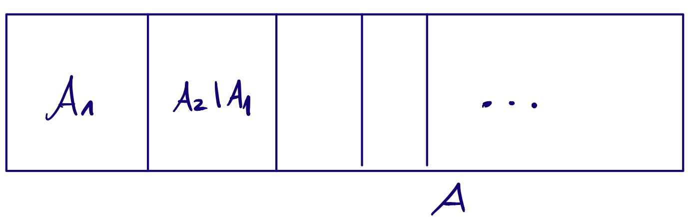
$$A_n \nearrow A \swarrow A_n' \xrightarrow{\text{Monotonie}} \underset{\text{wächst}}{\mu(A_n)} \leq \mu(A) \leq \underset{\text{fällt}}{\mu(A_n')}$$

(jeweils <u>schwach</u> monoton)

$\Longrightarrow$ nur die Ungleichungen

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu(A) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(A_n') \quad (*)$$

Umformulierung für Zerlegungen



$$\tilde{A}_n := A_n \setminus A_{n-1} \quad (A_0 := \emptyset)$$

$\rightsquigarrow$ disjunkte Zerlegung

$$A = \bigcup_n \tilde{A}_n$$

Dann $(*)$ äquivalent zu:

Für Folgen $(\tilde{A}_n)$ paarw disj Teilmengen mit $A := \bigcup_n \tilde{A}_n \in \mathcal{R}$

gilt $\mu\left(\bigcup_n \tilde{A}_n\right) \geq \sum_n \mu(\tilde{A}_n)$ (σ- Subadditivität)

Gilt in einer der Ungleichung (*) die Gleichheit, so fassen wir das als Stetigkeitseig auf.
Wir vergleichen nun Stetigkeitseigenschaften.

Prop Für einen Inhalt $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ sind die beiden folgenden Eigenschaften äquivalent:

(i) σ- Additivität $(A_n)_n$ Folge paarweise disjunkte Teilmengen $A_n \in \mathcal{R}$ mit $\bigcup A_n \in \mathcal{R}$.

abzählbar ∞

So gilt $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

(ii) Stetigkeit von unten

(B_n) aufsteigend, $B_n \in \mathcal{R}$ mit $B_n \nearrow B \in \mathcal{R}$,

so gilt

$$\mu(B_n) \nearrow \mu(B)$$

Sie implizieren die beiden folgenden, ebenfalls zueinander äquivalenten, Eig:

(iii) Stetigkeit von oben

(C_n) absteigend, $C_n \in \mathcal{R}$ mit $\mu(C_n) < \infty$

und $C_n \searrow C \in \mathcal{R}$, so gilt

$$\mu(C_n) \searrow \mu(C)$$

(iv) Stetigkeit in $\emptyset$:

(D_n) absteigend, $D_n \in \mathcal{R}$ mit $\mu(D_n) < \infty$

und $D_n \searrow \emptyset$, so gilt

$$\mu(D_n) \searrow 0$$

Falls μ endliche Werte hat, gilt umgekehrt

$$(iii), (iv) \Rightarrow (i), (ii)$$

Bew (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Übergang durch $B_n = A_1 \cup \dots \cup A_n$
bzw $A_n = B_n \setminus B_{n-1}$
$B = \bigcup_n A_n$

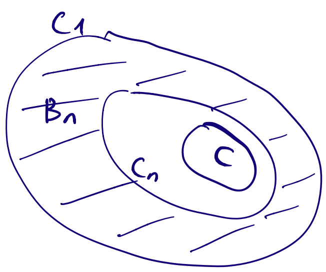
endliche Additivität $\Longrightarrow \mu(B_n) = \sum_{i \leq n} \mu(A_i)$

$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \sum_n \mu(A_n)$

außerdem $\mu(B) = \mu(\bigcup_n A_n)$ ok

(ii) $\Rightarrow$ (iii) :

Setze $\left.\begin{array}{l} B_n = C_1 \setminus C_n \in \mathcal{R} \\ B = C_1 \setminus C \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 = B_n \sqcup C_n \\ C_1 = B \sqcup C \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \mu(C_1) = \mu(B_n) + \mu(C_n) \\ \quad \| \quad = \mu(B) + \mu(C) \end{array}$



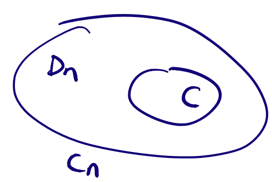
(ii) $\Rightarrow \mu(B_n) \nearrow \mu(B)$

$\xrightarrow[\text{endlich}]{\text{alle Inhalte}} \begin{array}{l} \mu(B_n) = \mu(C_1) - \mu(C_n) \\ \mu(B) = \mu(C_1) - \mu(C) \end{array}$ (**)

$\xrightarrow{(**)} \mu(C_n) \searrow \mu(C) \Rightarrow$ (iii)

(iii) $\Leftarrow$ (iv) ist Spezialfall von (iii) !

Setze $D_n = \underbrace{C_n \setminus C}_{\in \mathcal{R}} \searrow \emptyset$



$C_n = D_n \sqcup C \leadsto \mu(C_n) = \mu(D_n) + \mu(C)$

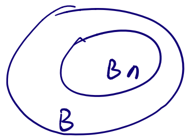
alle Vol endlich

$\Rightarrow \underbrace{\mu(D_n)}_{\searrow 0 \text{ wegen (iv)}} = \mu(C_n) - \mu(C)$

$\Longrightarrow \mu(C_n) \searrow \mu(C)$ also (iii).

μ habe endliche Werte, es gelte (iv). Zeige (ii)

Setze $D_n = B \setminus B_n$.



$$\underbrace{\mu(D_n)}_{\substack{\to 0 \\ \text{wegen (iv)}}} \underset{\text{Werte}}{\overset{\text{endliche}}{=}} \mu(B) - \mu(B_n)$$

$$\Rightarrow \mu(B_n) \nearrow \mu(B)$$

d.h. (ii) $\square$