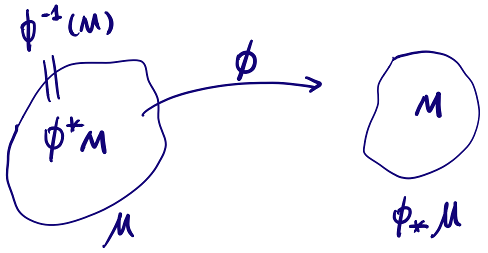
Haben gesehen: Effekt affiner Transformationen auf Lebesgue-Maß ist Skalierung.

<u>Kor</u> $\exists$ Gruppenhomom $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{c} \mathbb{R}^+$

sodass $\phi_* \beta^d = c(\phi) \cdot \beta^d$



$$(\phi_* \mu)(M) = \mu(\underbrace{\phi^* M}_{\phi^{-1}(M)})$$

also c hängt multiplikativ von ϕ ab:

$$c(\phi \circ \psi) = c(\phi) \cdot c(\psi)$$

Translationsinvarianz von β^d entspricht der Tatsache, dass $c|_{\mathrm{Trans}(\mathbb{R}^d)} \equiv 1$

$\leadsto$ c ist bereits bestimmt durch seine Werte auf linearen Transformationen, dh durch $c|_{GL(d,\mathbb{R})}$

$$c(\phi_{A,v}) = c(A)$$

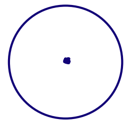
bzw.

$$(\phi_{A,v})_* \beta^d = c(A) \cdot \beta^d .$$

<u>Lemma</u> $c|_{\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^d)} = 1$

wiederum bestimmt durch $c|_{O(d)}$

<u>Bew</u> $A \in O(d)$.

$B = B_1(0)$  ist $O(d)$-inv.

$$\underbrace{(A_* \beta^d)}_{c(A)\,\beta^d}(B) = \beta^d(\underbrace{A^* B}_{A^{-1}(B)=B})$$

wegen $0 < \beta^d(B) < \infty$ folgt $c(A) = 1$ $\square$

Satz (Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes)

Die σ-Alg $\mathbb{B}^d$ und $\mathcal{L}^d$ sowie die Maße β^d und λ^d sind invariant unter Bewegungen des $\mathbb{R}^d$, ebenso $(\beta^d)^* = (\lambda^d)^*$.

Bew $\mathbb{B}^d$ invariant unter allen Homöos des $\mathbb{R}^d$, also insb. unter Bewegungen. Die Invarianz von β^d folgt aus dem Lemma. Daraus folgt weiter die Invarianz des assoz. äußeren Maßes $(\beta^d)^*$ und seiner Nullmengen, also auch die Inv von $\mathcal{L}^d$ (als Vervollst. von $\mathbb{B}^d$) und λ^d (als Einschränkung von $(\beta^d)^*$)

$\rightsquigarrow$ λ^d ist also eine befriedigende Lösung des Maßproblems auf $\mathbb{R}^d$.

Bem $\exists$ bewegungsinv Fortsetzungen von λ^d auf echt größere σ-Alg (Szpilrajn 1935), jedoch keine max. Fortsetzung (Ciesielski-Pelc 1985)

<u>Bem</u> $\mathcal{L}^d$ ist unter allen affinen Transformationen inv, denn $(\beta^d)^*$ wird skaliert, Nullmengen bleiben also Nullmengen. λ^d hat deshalb dasselbe Transfo.verhalten wie β^d. $\phi_* \lambda^d = c(\phi) \cdot \lambda^d$

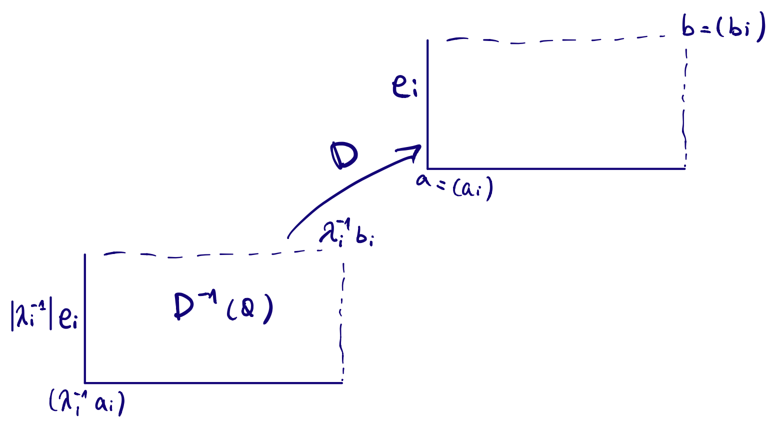
Um den gesamten Homom c zu bestimmen, machen wir eine weitere Beobachtung.

<u>Lemma</u> Für Diagonalmatrizen $D \in GL(d, \mathbb{R})$,

$De_i = \lambda_i e_i$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix} \qquad c(D) = \left|\det(D)^{-1}\right|$$

<u>Bew</u> $Q = [a, b) \in \mathcal{Q}^d$ $\quad a_i < b_i \ \forall i$



$$D^*(Q) = D^{-1}(Q) = [D^{-1}a, D^{-1}b)$$

$$\underbrace{(D_* \beta^d)}_{c(D)\beta^d}(Q) = \beta^d(D^*(Q)) = \prod_i \left|\lambda_i^{-1}(b_i - a_i)\right|$$

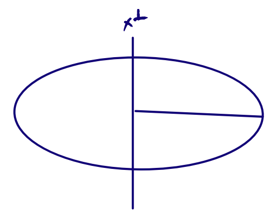
$$= \underbrace{\left|\prod_i \lambda_i^{-1}\right|}_{|\det D^{-1}|} \cdot \beta^d(Q)$$

$$\Longrightarrow \quad c(D) = \left|\det D^{-1}\right| \qquad \square$$

Satz Jede Matrix $A \in GL(d, \mathbb{R})$ lässt sich in der Form $A = R D R'$ darstellen mit $R, R' \in O(d)$ und einer Diagonalmatrix $D \in GL(d, \mathbb{R})$.

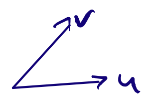
„$\underset{\text{abelsch (hier: diagonal)}}{\overset{\text{kompakt (hier: orthogonal)}}{K A K}}$ - Zerlegung" in der Lie-Gruppe $GL(d, \mathbb{R})$

Bew Dies ist eine Konsequenz aus der Tatsache, dass zu je zwei Skalarprodukten auf $\mathbb{R}^d$ eine gemeinsame Orthogonalbasis existiert.



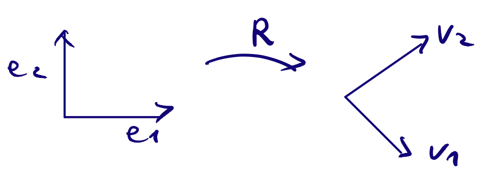
Betrachte Standard-SkP $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sowie sein Bild

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^d \\ \langle \cdot, \cdot \rangle & & \langle A^{-1} \cdot, A^{-1} \cdot \rangle \end{array}$$



$$\underbrace{\left(A_* \langle \cdot, \cdot \rangle \right)}_{:= \langle A^{-1} \cdot, A^{-1} \cdot \rangle} (u, v) := \langle A^{-1} u, A^{-1} v \rangle$$

Es existiert also eine Basis (v_i) von $\mathbb{R}^d$, die bzgl beider Skalarprodukte orthogonal ist, und oBdA ONB bzgl $\langle \cdot, \cdot \rangle$



Dann $\exists\, R \in O(d)$ s.d. $v_i = R a_i \;\forall i$

$\Longrightarrow$ (e_i) orthogonal bzgl $\underbrace{R_*^{-1} A_* \langle \cdot, \cdot \rangle}$

$= \langle A^{-1} R \cdot, A^{-1} R \cdot \rangle$

Gehe zu ONB über durch geeignete Skalierung der Vektoren. $\exists$ Diagonalmatrix $D \in GL(d, \mathbb{R})$ sd $(D e_i)$ sogar orthonormal ist bzgl dieses sKPs.

$\Longleftrightarrow$ (e_i) orthonormal bzgl $\underbrace{D_*^{-1} R_*^{-1} A_* \langle \cdot, \cdot \rangle}_{\langle A^{-1} R D \cdot,\, A^{-1} R D \cdot \rangle}$

Dies bedeutet $\underbrace{D_*^{-1} R_*^{-1} A_*}_{(D^{-1} R^{-1} A)_*} \langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle$

$\Longrightarrow$ $D^{-1} R^{-1} A =: R' \in O(d)$

und $A = R D R'$. $\square$

$$\boxed{\underline{\text{Kor}} \quad c = |\det^{-1}| \text{ auf } GL(\mathbb{R}^d).}$$

<u>Bew</u> Dies gilt auf $O(d)$, somit auf Diagonalmatrizen. Wegen des beiden Satzes und der Multiplikativität von c und $\det$ gilt dies auf ganz $GL(d, \mathbb{R})$. $\square$

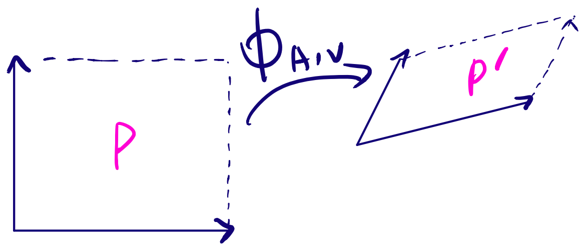
Also $c(\phi_{A,v}) = |\det A^{-1}|$.

Satz (Skalierungsverhalten des Lebesgue-Maßes unter affinen Transform)

$\mathcal{B}^d$ und $\mathcal{L}^d$ sind invariant unter affinen Transform. des $\mathbb{R}^d$. Für $\phi_{A,v} \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$(\phi_{A,v})_*(\lambda^d) = |\det A^{-1}| \cdot \lambda^d$$

bzw. $\ldots \quad ((\lambda^d)^*) = \ldots \cdot ((\lambda^d)^*)$



Volumenverzerrung von ϕ durch Faktor $|\det A|$

lin. Anteil von ϕ.

$$\underbrace{(\phi_*\lambda)}_{|\det A^{-1}|\cdot\lambda}\underbrace{(P')}_{\phi(P)} = \lambda(\underbrace{\phi^* P'}_{\phi^{-1}(P')=P})$$

$$|\det A^{-1}|\,\lambda(P') = \lambda(P)$$

bzw $\lambda(P') = |\det A| \cdot \lambda(P)$

I.5.13 Existenz nicht Lebesgue-messbarer Teilmengen

weisen sie nach mit Hilfe des AC. (Dieses ist zum Nachweis nötig (Solovay 1970))

zurück zu Vitali-Argument (Beginn der VL)

Ausgangspkt: überabz. Partition $\mathcal{P}$ von $\mathbb{R}^{|d| \geq 1}$ durch die abz. Nebenklassen $a + \mathbb{Q}^d$ der Untergruppe $\mathbb{Q}^d \subset \mathbb{R}^d$.

um die Nebenklassen „ohne Wiederholung" aufzulösten, braucht man Repräsentantensystem $M \subset \mathbb{R}^d$, dh ⟷ Es folgt aus AC

M enthält genau ein Element aus jeder Nebenklasse $a + \mathbb{Q}^d$.

äquiv: jedes $x \in \mathbb{R}^d$ besitzt eine eindeutige Zerlegung $\boxed{x = \underset{\substack{\uparrow \\ M}}{m} + \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{Q}^d}}{q}}$

⤳ auch $M + q$ Repräsentantensystem

⤳ abz. Partition $\mathcal{P}^*$ von $\mathbb{R}^d$ transversal/komplementär zu $\mathcal{P}$ durch überabz Translate $M + q$, $q \in \mathbb{Q}^d$.

Wollen zeigen: $M \notin \mathcal{L}^d$.

Beob. λ^d, $(\lambda^d)^*$ translationsinvariant.

$\Longrightarrow$ $(\lambda^d)^*(M+q)$ unabhängig von $q \in \mathbb{Q}^d$.

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^d} (M + q) \qquad (*)$$

σ-Subadd. äußerer Maße zusammen mit $\lambda^d(\mathbb{R}^d) > 0$ impliziert, dass $0 < \lambda^d(\mathbb{R}^d) \le \sum_{q \in \mathbb{Q}^d} \underbrace{(\lambda^d)^*(M+q)}_{\text{unabh. von } q}$

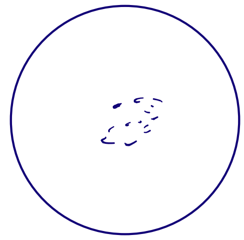
$\Longrightarrow (\lambda^d)^*(M) > 0$

<u>Satz</u> Alle Lebesgue-messbaren Teilmengen eines Repräsentantensystems sind Nullmengen.

<u>Kor</u> Repräsentantensysteme sind nicht Lebesgue-messbar

Bew Sei $N \subset M$, $N \in \mathcal{L}^d$.

1. Fall N beschränkt.



Packungsargument: abzähl unendlich viele Translate $N + q$ für $q \in \mathbb{Q}^d \cap B_1(0)$ haben beschr. Vereinigung, diese also endl. λ^d-Volumen.

$$\xRightarrow{N \text{ messb}} \lambda^d(N) = 0$$

N allgemein $\Longrightarrow$ N abz. Vereinigung beschr. messb. Teilm von M. $\Rightarrow$ hat die Vereinigung Maß 0. $\square$