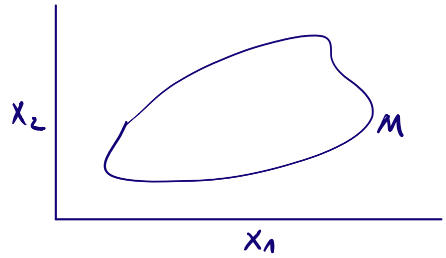
20. VL Ana 3 18. 12. 2019

$(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ σ- endlich $i = 1, 2$

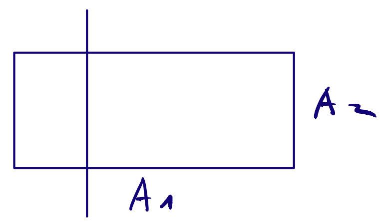


Satz Falls $M \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, so $M_{x_1} \in \mathcal{A}_2$ $\forall x_1 \in X_1$

Weiter liegt $x_1 \longmapsto \mu_2(M_{x_1})$ in $\mathcal{M}_{[0,\infty]}(X_1, \mathcal{A}_1)$ und

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(M) = \int_{X_1} \mu_2(M_{x_1})\, d\mu_1(x_1)$$

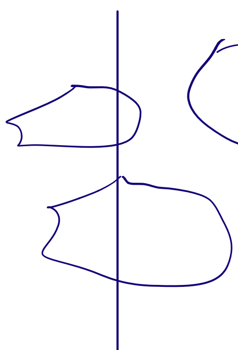
Bew sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ Familie messb Teilmengen, für die die Aussage gilt. Dazu gehören Quader $A_1 \times A_2$ mit $A_i \in \mathcal{A}_i$.



$$\mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) = \int_{X_1} \chi_{A_1} \cdot \mu_2(A_2)\, d\mu_1$$
$$\| $$
$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2)$$

$\rightsquigarrow$ Halbring $\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{F}$.

Außerdem ist $\mathcal{F}$ abgeschlossen unter disj abz Vereinig.



$M_n \in \mathcal{F}$ $(n \in \mathbb{N})$

$(\bigcup_n M_n)_{x_1} = \bigcup_n M_{n,x_1}$ messb

$$\mu_2\left(\left(\bigcup_n M_n\right)_{x_1}\right) = \sum_n \mu_2(M_{n,x_1})$$

hängt also messb von x_1 ab.

Stetigkeit von unten von μ_2

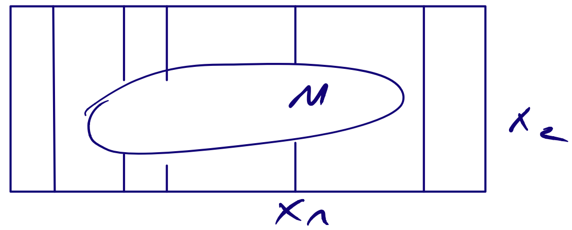
Monot Konvergenz $\Longrightarrow \int_{X_1} \mu_2\left(\left(\bigcup M_n\right)_{x_1}\right) d\mu_1(x_1)$

$$\underbrace{(\mu_1 \otimes \mu_2)\left(\bigcup_n M_n\right) = \sum_n \int_{X_1} \mu_2(M_{n,x_1})}_{\sigma\text{-Add } \mu_1\otimes\mu_2} d\mu_1(x_1) = (\mu_1 \otimes \mu_2)(M_n)$$

Wende frühere Überl zu Dynkin-Sys an!

zunächst Annahme: $\mu_i(X_i) < \infty$.

Dann $\mathcal{F}$ auch $\complement$-stabil.



$$\mu_2(\complement M_{x_1}) = \underbrace{\mu_2(X_2)}_{\text{const}} - \mu_2(M_{x_1})$$

Also $\mathcal{F}$ Dynkin-sys.

<u>Erinnerung</u> Dynkin-sys mit $\cap$-stab Erzeuger sind σ-Alg (*)

$$\underset{\cap\text{-stabil}}{\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2} \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2) \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$$

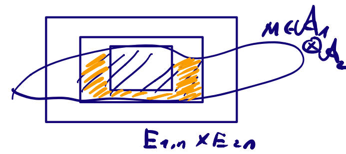
$\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ σ-Alg $\qquad$ σ-Alg erz von $\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2$

$$\Longrightarrow \mathcal{F} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$$

dh die Beh des Satzes gilt in diesem Fall

Jetzt allg σ-end Fall $\quad \exists \underset{\in \mathcal{A}_i}{E_{i,n}} \nearrow X_i$

$\mu(E_{i,n}) < \infty$

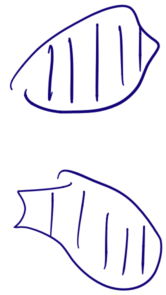


$$\underbrace{M \cap (E_{1,n} \times E_{2,n})}_{\in \mathcal{F}} \nearrow M$$

$\Rightarrow \in \mathcal{F}$

$\square$

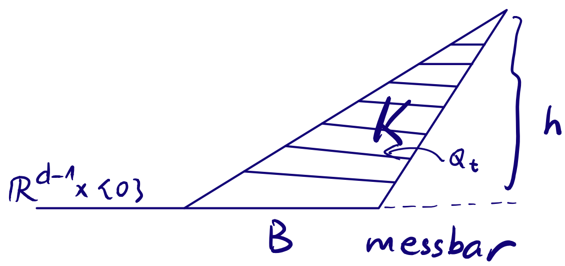
Kor (Cavalieri-Prinzip)



$$\left.\begin{array}{l} M, M' \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \\ \mu_2(M_{x_1}) = \mu_2(M'_{x_1}) \quad \mu_1\text{-}\forall x_1 \in X_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow (\mu_1 \otimes \mu_2)(M) = (\mu_1 \otimes \mu_2)(M')$$

Dan Flavian Monuments

Bsp Kegelvolumen zerlege $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$



Querschnitte $Q_t = K \cap (\mathbb{R}^{d-1} \times \{t\})$

$0 \leq t \leq h$

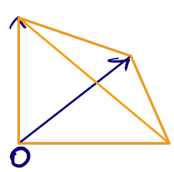
isometrisch zu $\left(1 - \frac{t}{h}\right) \cdot B$

$$\lambda^d(K) \overset{\text{Satz}}{=} \int_0^h \lambda^{d-1}(Q_t)\, dt$$

$$= \lambda^{d-1}(B) \cdot \int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right)^{d-1} dt$$

$$= \frac{1}{d} \cdot h \cdot \lambda^{d-1}(B)$$

zB Volumen des d-dim Standard-Simplex $\Delta_d \subset \mathbb{R}^d$

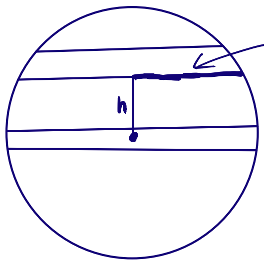


$$\lambda^d(\Delta_d) = \frac{1}{d}\cdot \lambda^d(\Delta_{d-1}) \xRightarrow{\text{Ind}} \lambda^d(\Delta_d) = \frac{1}{d!}$$

<u>Bsp</u> Kugelvolumen (und Γ-Fkt)

$$V_d := \lambda^d\Big(\underbrace{\overline{B}_1^{\mathbb{R}^d}(0)}_{\text{d-dim eukl Einheitsball}}\Big)$$

zerlege $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}$



$\sqrt{1-h^2}$ Radius des Querschnitts auf Höhe $h\in[-1,1]$

$$\text{Satz} \Longrightarrow V_d = \underbrace{(\lambda^{d-1}\otimes\lambda^d)}_{\lambda^d}\left(\overline{B}_1^{\mathbb{R}^d}(0)\right)$$

$$= \int_{-1}^{1} \underbrace{\lambda^{d-1}\left(\overline{B}_{\sqrt{1-h^2}}^{\mathbb{R}^{d-1}}(0)\right)}_{(1-h^2)^{\frac{d-1}{2}}\cdot V_{d-1}} dh$$

$$= V_{d-1}\cdot \underbrace{\int_{-1}^{1} (1-h^2)^{\frac{d-1}{2}}\, dh}_{I_d}$$

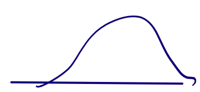
$$\Longrightarrow \boxed{V_d = V_{d-1}\cdot I_d}$$

$V_{d-1} = V_{d-2}\quad I_{d-1}$

Vgl Diskussion Wallis-Produkt

$$\xrightarrow[h=\sin u]{\text{substituiere}} \quad I_d = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^d u \, du$$

zB Scheibe $d=2$ $\quad I_2 = 2\int_0^{\pi/2} \cos^2 u \, du$



$$= \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^2 u + \sin^2 u}_{1}\, du = \frac{\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow V_2 = \underbrace{V_1}_{2} \cdot I_2 = \pi$$

Kugel $\quad \ldots \; V_3 = \frac{4}{3}\pi \quad (\ddot{\smile})$

Partielle Integration $\rightsquigarrow$ Rekursion $\quad d \cdot I_d = (d-1)\, I_{d-2}$

$$\Longrightarrow I_d\, I_{d-1} = \frac{d-1}{d} I_{d-1}\, I_{d-2} \overset{\text{Induktiv}}{=} \ldots$$

$$= \frac{1}{d} \underbrace{\pi_1\, \pi_0}_{2\pi}$$

$$\Longrightarrow d \geq 2 : \boxed{\frac{V_d}{V_{d-2}} = I_d\, I_{d-1} = \frac{2\pi}{d}} \quad (**)$$

zB $\quad V_4 = V_2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}$

$z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$ $\quad \Gamma(z) := \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\, dx$

interpoliert Fakultäten $\quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad n \in \mathbb{N}$

erfüllt Fkt gl $\quad \Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$.

$\mathbb{N} \ni d \geq 2 \quad \Longrightarrow \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}{\Gamma(\frac{d}{2})} = \frac{d}{2} \overset{(**)}{\Longrightarrow} \frac{1}{\pi^{d/2}} \cdot V_d \cdot \Gamma(\frac{d}{2}+1)$

unabh. von d

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{d} \cdot \frac{d}{2} = \frac{\frac{1}{\pi^{d/2}} \cdot V_d \cdot \Gamma(\frac{d}{2}+1)}{\frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}-1}}\, V_{d-2}\, \Gamma(\frac{d}{2})} = 1$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\pi^{d/2}} V_d\, \Gamma(\frac{d}{2}+1) = \left\{ \begin{array}{l} V_2 \cdot \Gamma(2) \\ V_1 \cdot \Gamma(\frac{3}{2}) \end{array} \right\} = 1$$

später

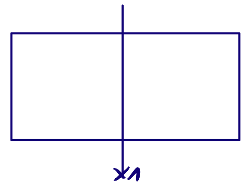
$$\xrightarrow[\text{Zusatzargument}]{\text{braucht}} V_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$$

II.5.2 Mehrfachintegrale: Satz von Fubini

$\underbrace{(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)}$ σ-endl $\qquad i=1,2$

$$f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$$

$$\rightsquigarrow \quad f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X_2, \mathcal{A}_2)$$

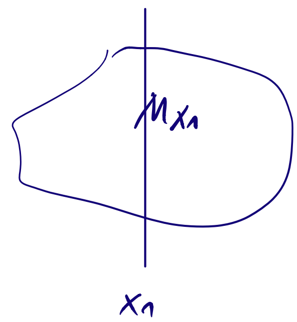


Satz (Fubini, nicht neg Fkt) Für $f \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ ist $x_1 \longmapsto \int_X f(x_1, \cdot)\, d\mu_2$ messbar, dh $\in \mathcal{M}_{[0,\infty]}(X_1, \mathcal{A}_1)$, und es gilt

$$(*) \qquad \int_{X_1 \times X_2} f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1)$$

Bew Für char Fkt χ_M, $M \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

$$\left(\int_{X_2} \dots \right) = \mu_2(M_{x_1})$$



folgt die Beh aus dem vorigen Satz.

$\xRightarrow[\text{des Integrals}]{\text{Linearität}}$ Beh gilt für Treppenfkt aus $\mathcal{M}_{[0,\infty]}(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$

$\xRightarrow[\text{Konvergenz}]{\text{Satz v.d. Monotonen}}$ Beh gilt für alle Fkt aus . . .

(da monoton approximierbar durch Treppenfkt)

□

Satz (Fubini, integrierbare Fkt)

Ist $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ $\mu_1 \otimes \mu_2$-int, so sind die Fkt $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X_2, \mathcal{A}_2)$ für μ_1-f.a. $x_1 \in X_1$ μ_2-integrierbar. Die μ_1-f.ü. def Fkt $x_1 \longmapsto \int_{X_2} f(x_1, \cdot)\, d\mu_2$ ist μ_1-integrierbar und es gilt $(*)$.

$$\int_{X_1 \times X_2} f\, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, \cdot)\, d\mu_2 \right) d\mu_1(x_1)$$

<u>Bew</u> Wende Fubini für nicht neg Fkt auf $f^{\pm}$ an

$$\int_{X_1 \times X_2} f\, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{X_1 \times X_2} f^+ d(\mu_1 \otimes \mu_2) - \int_{X_1 \times X_2} f^- d(\mu_1 \otimes \mu_2)$$

$$= \int_{X_1} \underbrace{\boxed{\left(\int_{X_2} f^+(x_1, \cdot)\, d\mu_2 \right)}}_{\text{Als Fkt von } x_1 \ \mu_1\text{-int}} d\mu_1(x_1) - \int_{X_1} \underbrace{\left(\int_{X_2} f^- \dots \right.}_{\substack{\text{Als Fkt von } x_1 \\ \mu_1\text{-int}}}$$

μ_1-f.ü. endlicher Wert $\Leftarrow$ μ_1-f.ü. definiert $\Rightarrow$ $f(x_1, \cdot)$ μ_2-intbar μ_1-$\forall x_1 \in X_1$

$$\underset{\text{des Integrals}}{\overset{\text{Linearität}}{=}} \int_{X_1} \underbrace{\left(\int_{X_2} \left(f^+(x_1, \cdot) - f^-(x_1, \cdot) \right) d\mu_2 \right)}_{= \int_{X_2} f(x_1, \cdot)\, d\mu_2 \text{ für } \mu_1\text{-fast alle } x_1 \in X_1} d\mu_1(x_1)$$

$\square$

<u>Kor</u> Für $(\mu_1 \otimes \mu_2)$-intbar Fkt $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ gilt

$$\int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, \cdot)\, d\mu_2 \right) d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \int_{X_1} f(\cdot, x_2)\, d\mu_1\, d\mu_2(x_2)$$

$$f^{\pm} \text{ integrierbar} \Longrightarrow \int_{X_1} \underbrace{\left(\int_{X_2} f^+(x_1, \cdot)\, d\mu_2 \right)}_{\Rightarrow\, < \infty \quad \mu_1\text{-}\forall x_1 \in X_1} d\mu_1(x_1) < \infty$$

und $\quad x_1 \longmapsto \int f^+(x_1, \cdot)\, d\mu_2$

μ_1- integrierbar

(μ_1 - f.ü definiert und endlich)

$$x_1 \longmapsto \int f^+(x_1, \cdot)\, d\mu_2 - \int f^-(x_1, \cdot)\, d\mu_2$$

(μ_1 - f.ü <u>definiert</u> und <u>endlich</u>)

ist μ_1- integrierbar

$$\underset{\text{sinnvol}}{\mu_1\text{-f.ü}} \int f(x_1, \cdot)\, d\mu_2$$

(also Differenz reeller Zahlen)