2.VL Ana3 17. 10. 2019

I.2 Ringe und Algebren

Untersuche Familien von Teilmengen (einer festen Menge), die unter grundlegenden (endlichen) Mengenop abgeschlossen / stabil sind. ($\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\complement$)
Komplement

Sie werden Def bereiche der allgemeinsten von uns betrachteten Volumenfkt sein. („ Inhalte“)

I.2.1 Die Ringstruktur auf Potenzmengen

X Menge

Potenzmenge := Familie aller Teilmengen $\mathcal{P}(X)$

$$\mathcal{P}(X) \underset{\text{bij}}{\overset{\cong}{\longleftrightarrow}} \{0,1\}^X = \{ f : X \to \{0,1\}\}$$

$$A \longmapsto \underset{\text{char Fkt}}{\overset{\text{chi}}{\chi_A}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

charakteristische Fkt von A

$$f^{-1}(1) \longleftarrow\!\shortmid f$$

Fasse $\{0,1\}$ auf als den Körper mit 2 Elementen. (Restklassen modulo 2)

Rechenregel $1 + 1 = 0$

$\leadsto \{0,1\}^X$ ist kommutativer Ring mit Eins, (im Sinne der Algebra) $+$, $\cdot$
multiplikatives Einselement

sogar $\mathbb{F}_2$ - Algebra.

Bem. • Nullelement ist $f \equiv 0$, also $\chi_\emptyset \ (\equiv 0)$.
• Einselement ist $\chi_X \ (\equiv 1)$.

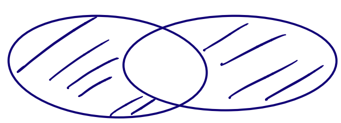
• Addition und Multiplikation von Funktionen erfolgt punktweise.

$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$

$(fg)(x) := f(x) \cdot g(x)$

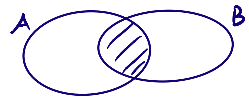
• $\{0,1\} = \mathbb{F}_2$ Körper mit 2 Element

<u>Addition</u> von (char) Fkt $\longleftrightarrow$ Symmetrische Differenz $A \triangle B$ von Mengen



$A \triangle B$

Multiplikation ... ... $\longleftrightarrow$ Durchschnitt von Mengen
$\chi_A \cdot \chi_B = \chi_{A \cap B}$



$\rightsquigarrow$ Betrachte Ring $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap) \cong (\underbrace{\mathbb{F}_2^{\,X}}_{\{0,1\}^X}, +, \cdot)$

I.2.2 Ringe und Algebren

Def Eine Familie $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt

(ρ) ein Ring auf X, falls sie ein Unterring von $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ ist.

(α) eine Algebra auf X, falls sie außerdem das Einselement enthält, $X \in \mathcal{R}$.

Bem "Algebra" wird in versch Bed verwendet
- die Algebra als mathm. Gebiet
- eine Algebra als algebr Struktur im Sinne der Algebra
- eine Algebra im Sinne der Definition

(ρ) bedeutet $\emptyset \in \mathcal{R}$, abgeschlossen unter $\underset{\Delta}{\text{Addition}}$ + $\underset{\cap}{\text{Multi}}$

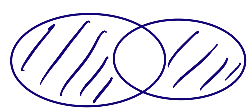
dh $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \Delta B, A \cap B \in \mathcal{R}$

(dasselbe wie Subtraktion (mod 2!))

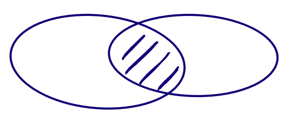
dh Δ- stabil und $\cap$- stabil

Δ, $\cap$ können ausgedrückt durch $\setminus$, $\cup$:

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



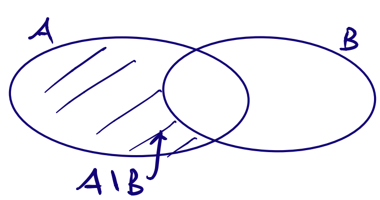
$A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$



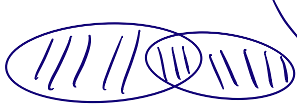
und umgekehrt

$A \setminus B = (A \Delta B) \cap A$

$A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$



da sie disjunkt sind gilt "$\cup = \Delta$"



$\rightsquigarrow$ Charakterisierung von Ringen

<u>Lemma</u> Eine Familie $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ist genau dann ein Ring auf X, wenn:

(i) $\emptyset \in \mathcal{R}$

(ii) $\setminus$ - stabil, dh $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$

(iii) $\cup$ - stabil, dh $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$

entspricht für Algebren:

<u>Lemma</u> Eine Familie $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ist genau dann eine Algebra auf X, wenn

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(iii) $\cup$ - stabil

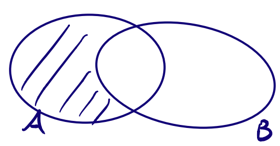
(iv) C - stabil, dh $A \in \mathcal{A} \Rightarrow CA := X \setminus A \in \mathcal{A}$

<u>Bew.</u> Sind diese Eigenschaften erfüllt, so implizieren (i + iv) dass

$$X = C\emptyset \in \mathcal{A}$$

„$\setminus$" kann ausgedrückt werden durch „$\cup$" und „C"

$$C(A \setminus B) = (CA) \cup B$$



$$\Longrightarrow \quad A \setminus B = C((CA) \cup B)$$

Also $\mathcal{A}$ Ring, und damit $\mathcal{A}$ Algebra.

Ist umgekehrt $\mathcal{A}$ Algebra, so gelten (i + iii).

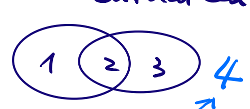
Da auch $X \in \mathcal{A}$, können wir „C" durch „$\setminus$" ausdrücken

$$CA = X \setminus A.$$

Also gilt auch (iv). $\square$

<u>Folgerung</u> Bei Ringen: mit A, B auch $A \setminus B$, $A \cap B$, $B \setminus A$

$\rightsquigarrow$ auch $A \cup B$ (alle in $A \cup B$ enthalten)



Bei Algebren: auch $C(A \cup B)$ "fehlende Baustein"

Beispiel (o) $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist Ring auf X.

$\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist die kleinste Algebra auf X,

$\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ die größte.

(i) $\{\emptyset, A\} \subset \mathcal{P}(X)$ Ring

$\{\emptyset, A, CA, X\} \subset \mathcal{P}(X)$ Algebra

Beispiel (ii) Familie der ~~endlichen~~ abzählbaren Teilmengen von X ist Ring. (Algebra, nur falls X ~~endlich~~ abzählbar)

Familie der Teilmengen, die ~~endlich~~ abzählbar sind oder ~~endliches~~ abzählbares Komplement haben, ist Algebra.

Weitere Beispiele folgen nach Diskussion vom Erzsys.

Beobachtung Der Durchschnitt beliebig vieler Ringe (bzw Algebren) auf einer festen Menge ist wieder ein Ring (bzw eine Algebra)

$\rightsquigarrow$

Def Der von einer Familie $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ Ring erzeugte Ring auf X ist der kleinste Ring, der sie enthält.

Man nennt $\mathcal{E}$ ein Erzeugendensystem dieses Rings. oder Erzeuger

(analog für Algebren)

Die Algebra eines Erzsys ist oft die einfachste Art, eine(n) Ring / Algebra zu beschreiben.

Ein Ring geht aus einem Erzsys $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ konstruktiv durch einen ~~abzählbaren~~ induktiv Prozess hervor, ebenso eine Algebra.

Ring Definiere induktiv eine Folge von Familien

$$\underset{\mathcal{E} \cup \{\emptyset\}}{\underset{\parallel}{\mathcal{F}_0}} \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n \subset \ldots \subset \mathcal{P}(X)$$

$$\mathcal{F}_n := \{A \setminus B, A \cup B \mid A, B \in \mathcal{F}_{n-1}\} \quad \text{für } n \geq 1$$

$$\Longrightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n \subset \mathcal{P}(X) \text{ ist } \setminus\text{- und } \cup\text{-stabil, also Ring.}$$

Algebra analog.

I.2.3 Halbringe

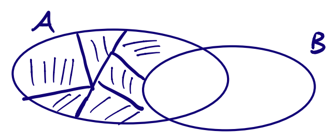
Hat ein EZS struktuelle Eigenschaft, so ist die Beschreibung des erzeu. Rings einfacher.

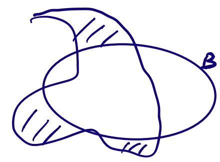
Eine natürliche auftretende Bed ist:

Def (Halbringe) Eine Familie $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt ein Halbring auf X, falls

(i) $\emptyset \in \mathcal{H}$
(ii) $\mathcal{H}$ ist $\cap$-stabil
(iii) Für $A, B \in \mathcal{H}$ existieren disjunkte Teilmengen $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{H}$ mit

$$A \setminus B = C_1 \cup \dots \cup C_n$$



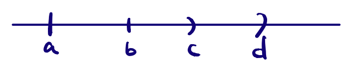


Halbring ist eine Verallg. Ringe sind Halbringe!

Bsp. (0) $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist Halbring.
(i) Die Familie bestehend aus $\emptyset$ und allen (einigen) Teilmengen ist ein Halbring.
$\rightsquigarrow$ erz. Ring der endl. Teilmengen

Grundbaustein für später:

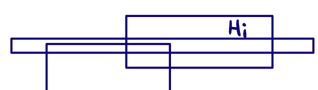
Bsp. Die Familie der halboffenen Intervalle $[a, b) \subset \mathbb{R}$, falls $a<b$ ist ein Halbring auf $\mathbb{R}$.



$[a, d) - [b, c) = [a, b) \cup [c, d)$

Beschreibe den von einem Halbring erzeugenden Ring. (die folgende Beob wird darüber hinaus nützlich sein)

Lemma Zu beliebigen Teilmengen $H_1, \dots, H_m \in \mathcal{H}$ existieren paarweise disjunkte Teilmengen $H_1', \dots, H_n' \in \mathcal{H}$, so dass jedes H_i sich als Vereinigung einiger H_j''s darstellen lässt.



<u>Bew</u> Betrachte die $2^m - 1$ Durchschnitte der Form $\underbrace{G_1 \cap \ldots \cap G_m}_{\text{Paarweise disjunkt}}$, wobei $G_i = H_i$ oder CH_i, und nicht alle $= CH_i$.

Paarweise disjunkt, zerlegen $H_1 \cup \ldots \cup H_m$.

Jedes H_i ist die Vereinigung von 2^{m-1} von ihnen

Genügt zu zeigen, dass diese Durchschnitte disjunkte Vereinigungen von Teilmengen aus $\mathcal{H}$ sind.

Da Halbringe $\cap$-stabil sind, reicht zu zeigen,

dass die Teilm der Form

$$H \cap C\tilde{H}_\ell \cap \ldots \cap C\tilde{H}_1 \quad \text{mit } H, \tilde{H}_1, \ldots, \tilde{H}_\ell \in \mathcal{H}$$

disjunkte Vereinigungen von Teilmengen in $\mathcal{H}$ sind.

gilt für $H \cap C\hat{\tilde{H}}_\ell = H \setminus \hat{\tilde{H}}_\ell$ (Axiom (iii))

$$(\hat{H}_1 \sqcup \ldots \sqcup \hat{H}_x) \cap \tilde{H}_{\ell-1} \cap \ldots \cap \hat{H}_1 = (\hat{H}_1 \cap \tilde{H}_{\ell-1} \cap \ldots \cap \hat{\tilde{H}}_1) \sqcup \ldots$$

$\rightsquigarrow$ reduz. Beh für ℓ auf Beh für $\ell - 1$

Induktion $\Rightarrow$ Beh. $\square$