3. ZÜ Ana3 30. 10. 2019

Die <u>Produktregel</u> für die Ableitung führt zur Methode der <u>partiellen</u> Integration.

<u>Partielle Integration</u>: Für $\mathcal{C}^1$ Funktionen $f, g : I \to \mathbb{C}$ auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{\int_a^b f' \cdot g \, dx = f \cdot g \Big|_a^b - \int_a^b f \cdot g' \, dx}$$

für $a, b \in I$. Man nennt $f \cdot g \Big|_a^b$ <u>Randterm</u>.

Für unbestimmte Integrale schreibt man

$$\int f' g \, dx = f \cdot g \Big| - \int f \cdot g' \, dx$$

Man kann diese Gleichung lesen als eine Gleichheit von Funktionenmengen oder so, dass jeder Repräsentant der rechten Seite

$$fg \Big| - \int f g'$$

ein Repräsentant der linken Seite $\int f' g$ ist.

<u>Beweis</u>: Nach der Produktregel ist $f \cdot g$ Stammfunktion von $f'g + fg'$.
Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert

$$\int (f'g + fg') = fg \Big|$$

$\square$

<u>Beispiele</u>:

i) Berechnung von $\int \ln x \, dx$ auf $(0, \infty)$
Dort gilt wegen $\ln' x = \frac{1}{x}$

$$\int \ln x \, dx = \int (x')\ln(x)\, dx = x \ln x \Big| - \int \underbrace{x \cdot \tfrac{1}{x}}_{\equiv 1} dx$$

$$= x \cdot (\ln x - 1) \Big|$$

ii) Berechnung von $\int x e^x \, dx$ auf $\mathbb{R}$

$$\int x e^x \, dx = \int x (e^x)' dx = x e^x \Big| - \int e^x dx = e^x (x-1) \Big|$$

ii') $I_n(x) = \int x^n \cdot e^x \, dx$. Auf $\mathbb{R}$ gilt:

$$\int x^n e^x \, dx = \int x^n (e^x)' dx = x^n e^x \underbrace{- n \int x^{n-1} e^x \, dx}_{I_{n-1}(x)}$$

$\Longrightarrow$ Rekursionsformel $\quad I_n(x) = x^n e^x \Big| - n I_{n-1}(x)$

iii) $$\int_{\text{auf } (-1,1)} \sqrt{1-x^2}\, dx = \int (x') \sqrt{1-x^2}\, dx = x\sqrt{1-x^2} \Big| - \int x \frac{(-x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= x\sqrt{1-x^2} \Big| - \int \underbrace{\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}}_{\sqrt{1-x^2}} dx + \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx}_{\arcsin x}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(x \sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) \right) \Big|$$

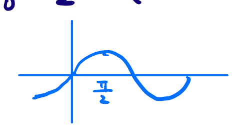
$$\boxed{\begin{aligned} \arcsin' x &= \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (f^{-1})' &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \end{aligned}}$$

Insbesondere erhalten wir durch Grenzübergang für das abgeschlossene Intervall $[-1, 1]$:

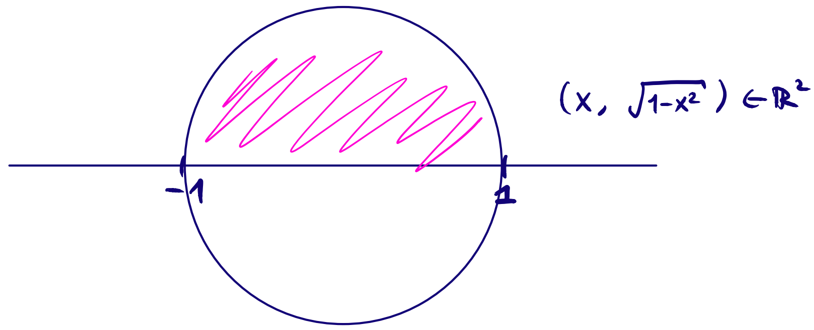
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

nicht $\underline{C^1}$ in -1 und 1 daher

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right) \Big|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}$$



$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$$



$\Longrightarrow$ Fläche der Einheitsscheibe ist π !

iv) Berechnung von $\int \arctan$:

$$\boxed{\begin{aligned} \tan' x &= 1 + \tan^2 x \\ \arctan' x &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}}$$

$$\int \arctan(x)\,dx = \int (x')\arctan(x)\,dx$$

$$= x \cdot \arctan x \Big| - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

substituiere $t(x) = x^2$

$$= x \cdot \arctan x \Big| - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}\,dt \Big|_{t=x^2}$$

$$= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \Big|$$

v) Berechnung von $\int \arcsin(x)$ auf $(-1, 1)$

$$\boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\int \arcsin(x)\,dx = \int (x')\arcsin x\,dx$$

$$= x\arcsin x \Big| - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Subst. $t(x) = x^2$

$$= x\arcsin x \Big| + \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt}_{-\sqrt{1-t}} \Big|_{t=x^2}$$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-t} \Big|$$

vi) Berechnung von $\int \sin^2(x)\,dx$

$$\int \sin^2(x)\,dx = \int (-\cos(x))' \sin(x)\,dx$$

$$= -\cos(x)\sin(x)\Big| + \int \underbrace{\cos^2(x)}_{1-\sin^2(x)}\,dx$$

$$\Longrightarrow \quad \int \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\Big(-\cos x \sin x + x\Big)\Big|$$

vi)' Berechnung von $\int \sin^n(x)\,dx$ für $n \in \mathbb{N}$

$$I_n(x) = \int \sin^n(x)\,dx$$

$$\int \sin^n(x)\,dx = \int (-\cos(x))' \sin^{n-1}(x)\,dx$$

$$= -\cos(x)\cdot\sin^{n-1}(x)\Big| + \int \cos(x)(n-1)\sin^{n-2}(x)\cos(x)\,dx$$

$$= -\cos(x)\cdot\sin^{n-1}(x)\Big| + (n-1)\Big(\int \sin^{n-2}(x)\,dx - \int \sin^n(x)\,dx\Big)$$

$$\Longrightarrow \quad n\cdot I_n(x) = -\cos(x)\sin^{n-1}(x) + (n-1)\,I_{n-2}(x)$$

z.B. gilt $I_0(x) = x$, $\quad I_1(x) = -\cos(x)$,

$$I_2(x) = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x)$$

$$I_3(x) = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x$$

Rationale Funktionen

$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ mit p, q Polynome, $q \neq 0$.

Zunächst $p, q \in \mathbb{C}[x]$

Hauptsatz der Algebra: $p \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg(p) = n$.

$$p(x) = c\cdot\prod_{i=1}^{m}(x-\alpha_k)^{n_k}$$

mit $m \le n$,

$\sum_{k=1}^{m} n_k = n$,

$\alpha_k \in \mathbb{C}$.

Polynomdivision führt zu:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \qquad \text{mit } s \in \mathbb{C}[x] \text{ und } \deg r < \deg q$$

Partialbruchzerlegung:

Sei $q(x) \in \mathbb{C}[x]$ mit $q(x) = c \cdot \prod_{n=1}^{m} (x - \alpha_k)^{n_k}$

Für jedes komplexe Polynom $r(x) \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg r < \underset{n}{\overset{\shortparallel}{\deg q}}$

existiert eine eindeutige Darstellung:

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{c_{kj}}{(x - x_k)^j} \qquad c_{jk} \in \mathbb{C}$$

$$\Longleftrightarrow \quad r(x) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_k} b_{kj}(x) \cdot c_{kj}$$

$$\text{mit } b_{kj} = (x - \alpha_k)^{n_k - j} \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^{m} (x - \alpha_\ell)^{n_\ell}$$

Aussage $\Longleftrightarrow \{b_{kj}\}$ für $k = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n_k$

bilden Basis von $\mathbb{C}_{\deg < n}[x]$.

Natürlich ist $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ Basis.

Insbesondere $\dim(\mathbb{C}_{\deg < n}[x]) = n$.

Bsp. $\int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x}\, dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x}\, dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$

$(1-x^2) = (1+x)(1-x)$

$\xrightarrow{HSZ} \frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$

$a = b = \frac{1}{2}$

$p(x) \in \mathbb{R}[x] \qquad p(z) = 0 \quad z \in \mathbb{C} \Rightarrow p(\bar{z}) = 0$