11. VL   Ana 3   18.11.2019

Fortsetzung von Prämaßen zu Maßen

$$\underset{\substack{\text{Ring} \\ \mu \text{ Prämaß} \\ \mu^*|_{\mathcal{R}} = \mu}}{\mathcal{R}} \subset \sigma(\mathcal{R}) \subset \underset{\substack{\sigma\text{-Alg} \\ \mu^*|_{\mathcal{A}^*} \text{ Maß}}}{\mathcal{A}^*} \subset \mathcal{P}(X)$$

μ^* äußeres Maß induziert von μ

$\uparrow$

eindeutige Fortsetzung von μ zu Maß auf $\mathcal{A}^*$, falls μ σ-endlich

gap ?

Wichtiges Bsp $X = \mathbb{R}^d$

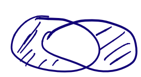
$$\underset{\substack{\lambda^d_{\mathcal{F}^d} \\ \text{Lebesgue-Prämaß}}}{\mathcal{F}^d} \subset \underset{\text{Borel-}\sigma\text{-Alg}}{\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{F}^d)} \subset \underset{\substack{(\lambda^d_{\mathcal{F}^d})^*\text{-messbare} \\ \text{Mengen}}}{\mathcal{L}^d} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$$

$\beta^d := (\lambda^d_{\mathcal{F}^d})^*|_{\mathcal{B}^d} = \lambda^d|_{\mathcal{B}^d}$ Lebesgue-Borel-Maß

$\lambda^d := (\lambda^d_{\mathcal{F}^d})^*|_{\mathcal{L}^d}$ Lebesgue-Maß

$\left((\lambda^d)^* = (\beta^d)^* = (\lambda^d_{\mathcal{F}^d})^* \right.$

<u>Lemma</u> $M, M' \subset X$ stimmen bis auf μ^*-Nullmengen überein, dh $\mu^*(M \Delta M') = 0$



Dann (i) $\mu^*(M) = \mu^*(M')$

(ii) M μ^*-messbar $\Leftrightarrow$ M' μ^*-messbar

Wollen jetzt (angelehnt an Archimedes-Kompressionsmethode) beliebige Teilmengen von innen/außen im Volumen-Sinne durch Teilmengen aus $\sigma(\mathcal{R})$ (möglich „nah verwandt" mit $\mathcal{R}$) im Sinne der Borel-Hierarchie approximieren. Für <u>messbare</u> Teilmengen werden wir Approx bis auf μ^*-Nullmengen erhalten.

<u>Satz</u> Sei $M \subset X$ mit <u>$\mu^*(M) < \infty$.</u> Dann existieren

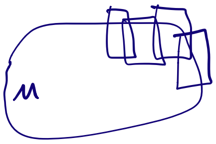
Teilmengen $\overset{\text{innen}}{I}, \overset{\text{außen}}{A} \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $I \subset M \subset A$ sodass

$\mu^*(A) = \mu^*(M)$ und $\mu^*(A \setminus I) = \mu^*(A \setminus M)$.

Diese sind eindeutig bis auf Modifikationen durch μ^*-Nullmengen.

Außerdem: $\underset{\text{dh } \mu^*\text{- messbar}}{M \in \mathcal{A}^*} \iff \mu^*(A \setminus I) = 0$.

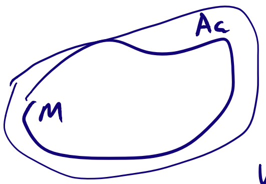
<u>Bew</u> Def von $\mu^* \rightsquigarrow \exists$ abzähl Überd von M durch Teilm aus $\mathcal{R}$, deren Gesamtvol $\mu^*(M)$ beliebig gut approximiert.



dh $\forall \varepsilon > 0 \; \exists A_\varepsilon \in \sigma(\mathcal{R})$ sodass

abzählb Vereinigung von Teilmengen aus $\mathcal{R}$

$M \subset A_\varepsilon$ und $\mu^*(A_\varepsilon) < \mu^*(M) + \varepsilon$



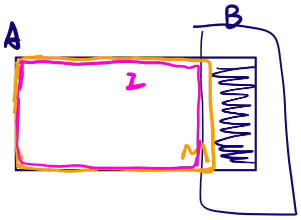
Wähle $A := \underbrace{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{\frac{1}{n}}}_{\supset M} \in \sigma(\mathcal{R})$

erfüllt $\mu^*(A) = \mu^*(M)$

Also die <u>äußere</u> Approximation.

<u>Innere</u>: durch äußere Approximation des Unterschiedes $A \setminus M$.

diese analog $\mu^*(A \setminus M) \leq \mu^*(A) < \infty$



$A \setminus M \subset B \in \sigma(\mathcal{R})$

$\mu^*(B) = \mu^*(A \setminus \overset{M}{B})$

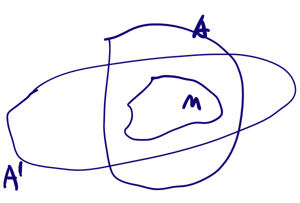
$\rightsquigarrow$ wähle $I := A \setminus B \subset M \Rightarrow A \setminus \overset{M}{B} \subset A \setminus I \subset B$

$\Downarrow$

$\mu^*(A \setminus I) = \mu^*(A \setminus M)$

$\rightsquigarrow$ Existenz der Approx.

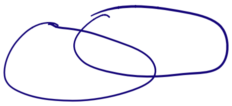
Zur Eindeutigkeit mod Nullmengen: bis auf .



$$\begin{array}{l} A' \in \sigma(R) \\ \cup \\ M \end{array} \qquad \mu^*(A') = \mu^*(M)$$

$$\Longrightarrow \quad M \subset A \subset A' \quad \text{und} \quad \mu^*(A \cap A') = \underset{\mu^*(A) = \mu^*(A')}{\underset{\|}{\mu^*(M)}}$$

$A, A', A \cap A'$ μ^*- messbar und endliche Volumina



$$\Longrightarrow \mu^*(A \triangle A') = \mu^*(A) + \mu^*(A') - 2\mu^*(A \cap A') = 0$$

$\rightsquigarrow$ Die äußere Approx ist eindeutig bis auf Nullmengen
(für innere analog)

$$M \in \mathcal{A}^* \Longrightarrow \mu^*(A \setminus I) = \mu^*(A \setminus M) \overset{M \in \mathcal{A}^* \text{ (endl. Volumina)}}{=} \mu^*(A) - \mu^*(M) = 0$$

umgekehrt

$\mu^*(A \setminus I) = 0 \Longrightarrow I, M, A$ stimmen bis auf (modulo) Nullmenge überein

$\overset{I, A \in \mathcal{A}^*}{\Longrightarrow}$ auch $M \in \mathcal{A}^*$ $\square$

<u>Bem</u> (i) Aussage des Satzes gilt allgemeiner für Teilmengen $M \subset X$, die abzäh Vereinigungen von Teilmengen endlichen μ^*-Volu sind.

$M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ $\quad \mu^*(M_n) < \infty$ $\quad \xrightarrow{\text{Satz}}$ $\quad I_n \subset M_n \subset A_n$ $\quad I_n, A_n \in \sigma(R)$

OBdA M_n paarweise disjunkt $\qquad \mu^*(A_n \setminus I_n) = 0$

$\xrightarrow{\text{vereinige}}$ Approx $\bigcup I_n \subset M \subset \bigcup_n A_n$

denn $(\bigcup_n A_n) - (\bigcup_n I_n) = \bigcup_n (\underbrace{A_n - \bigcup_m I_m}_{\subset A_n \setminus I_n}) \subset \bigcup_n (A_n \setminus I_n)$

$$\Longrightarrow \mu^*\left((\textstyle\bigcup_n A_n) - (\bigcup_n I_n)\right) = 0$$

Für <u>Struktur</u> von <u>messbaren Teilmengen</u> folgt

Kor (i) Jede μ^*- Nullmenge wird von einer μ^*-Nullm aus $\sigma(R)$ eingeschlossen.

(ii) Lässt $M \in A^*$ abzählb. überdecken durch Teilmengen endlichen μ^*-Inhalts (oBdA messbar) zu, so ist M die Vereinigung einer Teilmenge aus $\sigma(R)$ mit einer μ^*- Nullmenge.

wähle innere Approx

Kor Für ein σ- endl Prämaß auf einem Ring $R \subset P(X)$ stimmen alle μ^*- messbaren Teilmengen bis auf Modifikationen durch μ^*- Nullmengen mit Teilmengen aus $\sigma(R)$ überein.

*) So interpretieren, dass die Kompliziertheit messb Teilm im Vergleich zu Teilm aus $\sigma(R)$ wird von Nullmengen „aufgefangen". Letztere sind oft „vernachlässigbar".

Betrachte nun speziell Lebesgue- messb Teilmenge in $\mathbb{R}^d$

dh bzgl des äußeren Maßes $(\lambda^d_{\mathcal{R}^d})^* = (\beta^d)^*$
$= (\lambda^d)^*$

letztes Korollar liefert Vergleich von Borel- und Lebesgue- messbarkeit für Teilmengen des $\mathbb{R}^d$.

Kor Jede Lebesgue- messbare Teilmenge stimmt bis auf eine Lebesgue- Nullmenge überein mit einer $\underbrace{\text{Borel-messb-Teilmenge}}_{=:\ \text{Borelmenge}}$

$(\lambda^d)^*(\ldots) = 0$

$\Rightarrow \ \in \mathcal{L}^d$

Um eine bessere geome. Vorstellung von messb Teilm des $\mathbb{R}^d$ zu bekommen, vergleichen wir jetzt die <u>messbare</u> und <u>topol</u> Struktur auf $\mathbb{R}^d$.

dh die σ-Algebra $\mathcal{B}^d$ mit einem geom natürlichen Erzeuger, nämlich der <u>Topologie.</u>

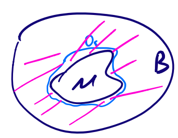
<u>Def</u> Eine Teilmenge eines topol Raums heißt

(i) <u>G_δ - Menge</u>, falls sie abzähl Durchschnitt offener Mengen ist.

(ii) <u>F_σ - Menge</u>, ... Vereinigung abgeschlossener ... .

<u>topol Approx</u> messb Teilm $M \in \mathcal{L}^d \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$

<u>1. Schritt</u> Sei M beschränkt, dh $M \subset \underset{\text{offener Ball}}{B}$



$\Longrightarrow \lambda^d(M) < \infty$

$\forall \varepsilon > 0 \;\exists$ abz Überd von M durch Teilmengen $\in \mathcal{F}^d$

mit Gesamtvolumen $< \lambda^d(M) + \varepsilon$

offene Aufdickung von Quadern bzw Figuren

ebenfalls: $\exists\, O_\varepsilon$ offen mit $M \subset O_\varepsilon \subset B$

und $\lambda^d(O_\varepsilon) < \lambda^d(M) + \varepsilon$

analog (äußere Approx von $\bar{B} - M$)

$\rightsquigarrow \exists\, O'_\varepsilon$ offen $\bar{B} \setminus M \subset O'_\varepsilon$

$\lambda^d(O'_\varepsilon) < \lambda^d(\bar{B} \setminus M) + \varepsilon$

$\overset{M \text{ messbar}}{\|}$

$\lambda^d(\bar{B}) - \lambda^d(M)$

$$\Longrightarrow \quad \bar{B} \subset O_\varepsilon \cup O'_\varepsilon$$

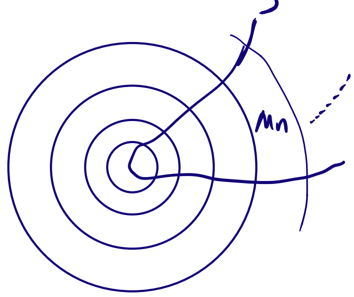
$$\lambda^d(O_\varepsilon) + \lambda^d(O'_\varepsilon) < \lambda^d(\bar{B}) + 2\varepsilon$$

$\rightsquigarrow$ Wähle $\underset{\text{kpt}}{K_\varepsilon} := \bar{B} \setminus O'_\varepsilon \subset M$

innere Approx $\quad \lambda^d(K_\varepsilon) = \lambda^d(\bar{B}) - \lambda^d(O'_\varepsilon) > \lambda^d(O'_\varepsilon) - 2\varepsilon$

also $\quad \underbrace{\underset{\text{kpt}}{K_\varepsilon} \subset M \subset \underset{\text{offen}}{O_\varepsilon}}_{\lambda^d(O_\varepsilon \setminus K_\varepsilon) < 2\varepsilon}$

2. Schritt $\quad$ jetzt $M \in \mathcal{L}^d$ beliebig



$$M = \bigcup_n \underset{\text{beschränkt}}{M_n^{\in \mathcal{L}^d}}$$

und bilden lokal endliche Fam
dh jeder Ball in $\mathbb{R}^d$ schneidet nur endlich viele M_n

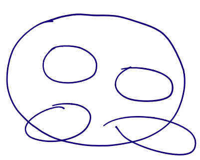
$\xRightarrow{\text{Schritt 1}}$ Approx $\quad \underbrace{\underset{\text{kpt}}{K_n} \subset M_n \subset \underset{\text{offen}}{O_n}}_{\lambda^d(O_n \setminus K_n) < \varepsilon_n}$

ε_n positiv beliebig vorgebbar

$\xRightarrow{\text{vereinige}} \quad \underbrace{\bigcup_n K_n}_{\text{abgeschlossen}} \subset M \subset \underset{\text{offen}}{\bigcup_n O_n}$

(K_n) lokal endlich $\Longrightarrow$ abgeschlossen

$\Uparrow$



Schnitt mit jedem Kompaktum ist kompakt

$$\lambda^d\Big(\underbrace{\big(\bigcup_n O_n\big) \setminus \big(\bigcup_n K_n\big)}_{\subset \bigcup_n (O_n \setminus K_n)}\Big) < \sum_n \varepsilon_n$$

positiv beliebig klein wählbar

Dies zeigt:

Satz Sei $M \in \mathcal{L}^d$. Dann ex zu jedem $\varepsilon > 0$ $A_\varepsilon, O_\varepsilon \subset \mathbb{R}^d$ sodass

abgeschlossen

$$\underset{\text{abg}}{A_\varepsilon} \subset M \subset \underset{\text{offen}}{O_\varepsilon}$$

und $\lambda^d(O_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$

Falls $\lambda^d(M) < \infty$, kann A_ε kompakt gewählt werden.

bilde partiell Summe
endlich viele A_n genügen
kompakt
$\rightsquigarrow$ $\bigcup$ kompakt

Es folgt:

Borel-messbar, „nah verwandt" mit Topologie (1. Grades)

Satz Sei $M \in \mathcal{L}^d$. Dann ex F_σ-Menge $F \subset \mathbb{R}^d$ und eine G_δ-Menge $G \subset \mathbb{R}^d$ sd $F \subset M \subset G$ und $\lambda^d(G \setminus F) = 0$.

Folgerung für Lebesgue-Maß:

für $M \in \mathcal{L}^d$ gilt $\sup\{\lambda^d(K) \mid \underset{\text{kpt}}{K} \subset M\}$

$$\overset{\shortparallel}{\lambda^d(M)} = \inf\{\lambda^d(O) \mid \underset{\text{offen}}{O} \supset M\}$$