I Maßtheorie

I.1 Maßproblem und Paradoxien

14.10.2019

Maßtheorie ist die Theorie des Volumens. Motivierende Beispiele sind:

i) Volumina von Teilmengen des euklidischen Raums

ii) Wahrscheinlichkeiten (= “Volumina von Ereignissen”)

Wir konzentrieren uns im Rest des Abschnitts auf $\mathbb{R}^d$. Wir wollen leistungsfähigen Volumenbegriff haben, sodass die Volumina von möglich vielen Teilmengen flexibel gemessen werden können. Unser erster “naiver” Ansatz wäre, dass wir Volumenmessung für *alle* Teilmengen verlangen, also eine Funktion

$$\mathrm{vol} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0.\infty] \tag{I.1}$$

Unsere grundlegende Forderung ist die Additivität von Volumina bei Zerlegungen, also

(i) **(endliche) Additivität**: Sind $M_1, ..., M_n \subset \mathbb{R}^d$ paarweise disjunkt, so gilt

$$\mathrm{vol}(M_1 \cup ... \cup M_n) = \mathrm{vol}(M_1) + ... + \mathrm{vol}(M_n) \tag{I.2a}$$

Volumina als geometrische Größen sollten durch die metrische Struktur (Längenmessung) bestimmt sein, also invariant unter Symmetrien der metrischen Struktur:

(ii) **Bewegungsinvarianz**: Für jede Bewegung $\phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ und jede Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ gilt

$$\mathrm{vol}(\phi(A)) = \mathrm{vol}(A) \tag{I.2b}$$

(iii) **Normierung**: $\mathrm{vol}([0,1]^d) = 1$.

Verstärke Forderung (i): (Borel, Lebesgue)

(i') **σ-Additivität**[1]: Für Folgen $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Teilmengen $M_n \subset \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\mathrm{vol}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\mathrm{vol}(M_n)}_{\in[0,\infty]} \tag{I.2c}$$

Bemerkung. Wegen des Umordnungssatzes spielt die Reihenfolge der Summanden keine Rolle, da sie alle positiv sind.

$\rightsquigarrow$ flexibilisiert Volumenmessung entscheidend, wir können also komplizierte Figuren durch einfach Figuren approximieren.

Cantons Mengenlehre $\rightsquigarrow$ Existenz von “naiver” Volumenfunktion wurde hinterfragt:

[1] σ: abzählbar, unendlich oft.

Maßproblem Existiert eine Volumenfunktion $\mathrm{vol} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0,\infty]$ mit (i') + (ii) + (iii)?

Satz (Vitali, 1905)**.** Nein, das naive Maßproblem ist unlösbar.

Beweis. Aus dem Auswahlaxiom folgt die Existenz "verrückter" (d.h. geometrisch unvorstellbarer) Teilmengen des $\mathbb{R}^d$. Hier existiert $M \subset \mathbb{R}^d$, ein *Vertretersystem* für Nebenklassen von $\mathbb{Q}^d$ (Untergruppe von $\mathbb{R}^d$) in $\mathbb{R}^d$. Der Quotient abelscher Gruppen $\mathbb{R}^d/\mathbb{Q}^d$ ist also die Menge der Nebenklassen. Die Nebenklassen $a + \mathbb{Q}^d$ für $a \in \mathbb{R}^d$ partitionieren (d.h. zerlegen disjunkt) $\mathbb{R}^d$ (überabzählbar viele). Für alle $a, b \in \mathbb{R}^d$ besteht Dichotomie:

i) entweder $a + \mathbb{Q}^d = b + \mathbb{Q}^d$ (nämlich wenn $a - b \in \mathbb{Q}^d$),

ii) oder $(a + \mathbb{Q}^d) \cap (b + \mathbb{Q}^d) = \varnothing$ (nämlich wenn $a - b \notin \mathbb{Q}^d$).

D.h. für alle $a \in \mathbb{R}^d$ besteht $M \cap (a + \mathbb{Q}^d)$ aus genau einem Element. Daraus folgt, die Translate $q + M$ (abzählbar viele) für $q \in \mathbb{Q}^d$ partitionieren $\mathbb{R}^d$. Aus der σ-Additivität von Volumen folgt

$$\underbrace{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^d)}_{>0} = \sum_{q \in \mathbb{Q}^d} \underbrace{\mathrm{vol}(q + M)}_{\overset{\text{Bew\_Inv}}{=} \mathrm{vol}(M)} \tag{I.3}$$

und somit also $\mathrm{vol}(M) > 0$.
Jetzt wähle M spezieller, nämlich beschränkt, z.B. für $O \subset \mathbb{R}^d$ offen können wir M so wählen, dass $M \subset O$, weil $a + \mathbb{Q}^d$ dicht in $\mathbb{R}^d$, also $(a + \mathbb{Q}^d) \cap O \neq \varnothing$. Z.B. wähle $M \subset (0, \frac{1}{2})^d$, so enthält $[0,1]^d$ abzählbar unendlich viele paarweise disjunkte Translate $q + M$, nämlich für alle $q \in \mathbb{Q}^d \cap (0, \frac{1}{2})^d$ gilt

$$V := \bigcup_{q \in (0,\frac{1}{2})^d \cap \mathbb{Q}^d} (q + M) \subset [0,1]^d \tag{I.4}$$

weil $\mathrm{vol}(V) + \underbrace{\mathrm{vol}([0,1]^d - V)}_{\geq 0} = \underbrace{\mathrm{vol}([0,1]^d)}_{=1}$. Daraus folgt $\mathrm{vol}(V) \leq 1 < \infty$ und

$$\mathrm{vol}(V) = \sum_{q \in (0,\frac{1}{2})^d \cap \mathbb{Q}^d} \underbrace{\mathrm{vol}(q + M)}_{= \mathrm{vol}(M)} \tag{I.5}$$

Somit muss gelten $\mathrm{vol}(M) = 0$. $\lightning$ ∎

Noch dramatischer: In $\dim \geq 3$ kann man je zwei Teilmengen (unter sehr allgemeinen Annahmen) aus demselben (abzählbaren, oft sogar endlichen) "Bausatz" zusammensetzen.

Satz (Banach-Tarski, 1924)**.** Seien $A, B \subset \mathbb{R}^d$ Teilmengen mit nichtleerem Inneren.

(i) Sei $d \geq 3$ und seien A, B beschränkt. Dann existieren endlich viele Teilmengen $M_k \subset \mathbb{R}^d$ und Bewegungen ϕ_k des $\mathbb{R}^d$, so dass *disjunkte Zerlegungen* $A = \bigsqcup_k M_k$ und $B = \bigsqcup_k \phi(M_k)$ bestehen.

(ii) Jetzt $d \geq 1$ beliebig und A, B nicht notwendig beschränkt. Dann existieren abzählbar viele Teilmengen $M_k \subset \mathbb{R}^d$ und Bewegungen ϕ_k, sodass *disjunkte Zerlegungen* $A = \bigsqcup_k M_k$ und $B = \bigsqcup_k \phi(M_k)$ bestehen.

Der Beweis verwendet Gruppentheorie, Struktur von orthogonalen Gruppen $\mathrm{O}(d)$. (nicht mehr auflösbar für $d \geq 3$.)

Das naive *Inhaltsproblem*, also eine Volumenfunktion mit Eigenschaften (i), (ii) und (iii), ist lösbar in $d \leq 2$, aber nicht eindeutig, nicht lösbar in $d \geq 3$. (Banach 1923, Hausdorff 1914) Dies führt zu:

Maßproblem (post-paradox) : Man definiere eine Volumenfunktion $\mathrm{vol} : \mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty]$ mit Eigenschaften (i'), (ii) und (iii) auf einer möglich großen und flexiblen Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, die die geometrisch wichtigen Teilmengen umfasst und abgeschlossen ist unter grundlegenden mengentheoretischen Operationen (Vereinigung, Schnitt, Differenz und Komplement).

I.2 Ringe und Algebren

17.10.2019

Wir untersuchen Familien von Teilmengen (einer festen Menge), die unter grundlegenden (endlichen) Mengenoperationen abgeschlossen/ stabil sind. $(\cup, \cap, \setminus, \complement)$
Sie werden Definitionsbereiche der allgemeinsten von uns betrachteten Volumenfunktion sein. ("Inhalte")

I.2.1 Die Ringstruktur auf Potenzmengen

Sei X eine Menge. Die Potenzmenge ist definiert als die Familie aller Teilmengen $\mathcal{P}(X)$. Wir können die Potenzmenge ebenfalls auffassen als

$$\mathcal{P}(X) \underset{\text{bij}}{\overset{\cong}{\longleftrightarrow}} \{0,1\}^X = \{f : X \longrightarrow \{0,1\}\} \tag{I.6}$$

da

$$A \longmapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{I.7a}$$

$$f^{-1}(1) \longleftarrow f \tag{I.7b}$$

wobei χ_A de charakteristische Funktion von A ist.

Wir fassen nun $\{0,1\}$ auf als den Körper mit 2 Elementen (Restklassen modulo 2). So ist $\{0,1\}^X$ ein kommutativer Ring mit Eins (multiplikatives Einselement) (im Sinne der Algebra), sogar eine $\mathbb{F}_2$-Algebra.

Bemerkung. Die Addition und Multiplikation von Funktionen erfolgt punktweise:

- $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$
- $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$

und $\{0,1\} = \mathbb{F}_2$ ist ein Körper mit zwei Elementen.
Die Nullelement ist $f \equiv 0$, also $\chi_\varnothing$ und das Einselement ist $\chi_X (\equiv 1)$. Die Addition von charakteristischen Funktionen entspricht der symmetrischen Differenz $A \triangle B$ und die Multiplikation entspricht dem Duchrschnitt von Mengen. Also

$$\chi_A + \chi_B = A \triangle B \tag{I.8a}$$

$$\chi_A \cdot \chi_B = A \cap B \tag{I.8b}$$

Somit ist $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap) \cong (\mathbb{F}_2^X, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit dem Nullelement $\varnothing$ bzw. $\chi_\varnothing$ und dem Einselement X bzw. χ_X.

I.2.2 Ringe und Algebren

Definition. Eine Familie $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt

(ρ) ein **Ring** auf X, falls sie ein Unterring von $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ ist.

(α) eine **Algebra** auf X, falls sie außerdem das Einselement enthält, also $X \in \mathcal{R}$.

Bemerkung. "Algebra" wird in verschiedenen Bedingungen verwendet, nämlich die Algebra als ein mathematisches Gebiet, eine Algebra als algebraische Struktur im Sinne der Algebra und eine Algebra im Sinne der obigen Definition.

(ρ) bedeutet $\varnothing \in \mathcal{R}$, abgeschlossen unter Addition ($\triangle$) (dasselbe wie Subtraktion, da mod 2) und Multiplikation ($\cap$), d.h.

$$A, B \in \mathcal{R} \implies A \triangle B, A \cap B \in \mathcal{R} \tag{I.9}$$

d.h. $\triangle$- stabil und $\cap$- stabil. Wir können $\triangle, \cap$ ausdrücken durch $\setminus$ und $\cup$:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \tag{I.10a}$$
$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \tag{I.10b}$$

und umgekehrt

$$A \setminus B = (A \triangle B) \cap A \tag{I.10c}$$
$$A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B) \tag{I.10d}$$

Bemerkung. Die letzte Gleichung gilt, da $(A \triangle B)$ und $(A \cap B)$ disjunkt sind.

Daraus folgt die Charakterisierung von Ringen:

Lemma. Eine Familie $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ist genau dann ein Ring auf X, wenn

(i) $\varnothing \in \mathcal{R}$,

(ii) $\setminus$- stabil, d.h. $A, B \in \mathcal{R} \implies A \setminus B \in \mathcal{R}$,

(iii) $\cup$- stabil, d.h. $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R}$.

entspricht für Algebren:

Lemma. Eine Familie $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ist genau dann eine Algebra auf X, wenn

(i) $\varnothing \in \mathcal{A}$,

(iii) $\cup$- stabil,

(iv) $\complement$- stabil, d.h. $A \in \mathcal{A} \implies \complement A := X \setminus A \in \mathcal{A}$

Beweis. Sind diese Eigenschaften erfüllt, so implizieren (i + iv), dass

$$X = \complement \varnothing \in \mathcal{A} \tag{I.11a}$$

"$\setminus$" kann ausgedrückt werden durch "$\cup$" und "$\complement$": Aus

$$\complement(A \setminus B) = (\complement A) \cup B \tag{I.11b}$$

folgt

$$A \setminus B = \complement\big((\complement A) \cup B\big) \tag{I.11c}$$

Also ist $\mathcal{A}$ ein Ring, und damit $\mathcal{A}$ eine Algebra.
Ist umgekehrt $\mathcal{A}$ eine Algebra, so gelten (i + iii). Da auch $X \in \mathcal{A}$, können wir "$\complement$" durch "\" ausdrücken

$$\complement A = X \setminus A \tag{I.11d}$$

Also gilt auch (iv). ■

Folgerung. Ist $\mathcal{R}$ ein Ring auf X und $A, B \in \mathcal{R}$, so auch $A \setminus B, A \cap B, B \setminus A$ und $A \cup B \in \mathcal{R}$. (*Bem.* Alle in $A \cup B$ enthalten.) Ist $\mathcal{A}$ eine Algebra auf X und $A, B \in \mathcal{A}$, so ist außerdem auch $\complement(A \cup B) \in \mathcal{A}$.

Beispiel.

(o) $\{\varnothing\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist ein Ring auf X,
$\{\varnothing, X\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist die kleinste Algebra auf X, $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ die größte.

(i) $\{\varnothing, A\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist ein Ring auf X für ein $A \in \mathcal{P}(X)$,
$\{\varnothing, A, \complement A, X\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist eine Algebra auf X.

(ii) Die Familie der endlichen (bzw. abzählbaren) Teilmengen von X ist ein Ring. (eine Algebra, nur falls X selbst endlich bzw. abzählbar)
Die Familie der Teilmengen, die endlich (bzw. abzählbar) sind oder endliches (bzw. abzählbares) Komplement haben, ist eine Algebra.

Weitere Beispiele folgen nach der Diskussion vom Erzeugendensystem.

Beobachtung. Der Durchschnitt beliebig vieler Ringe (bzw. Algebren) auf einer festen Menge ist wieder ein Ring (bzw. eine Algebra). Zu jeder Menge $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ gibt es eine(n) bezüglich mengentheoretischer Inklusion kleinste(n) Ring (bzw. Algebra), der (die) $\mathcal{E}$ umfasst, nämlich den Durchschnitt aller Ringe (bzw. Algebren), die $\mathcal{E}$ umfassen.

Definition (Erzeugendensystem). Der von einer Familie $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ erzeugte Ring auf X ist der kleinste Ring, der sie enthält. Man nennt $\mathcal{E}$ ein *Erzeugendensystem* dieses Rings, oder *Erzeuger.* (Analog für Algebren)

Die Algebra eines Erzeugendensystems ist oft die einfachste Art, eine(n) Ring bzw. Algebra zu beschreiben.

Ein Ring geht aus einem Erzeugendensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ *konstruktiv* durch einen *abzählbaren* (induktiv!) Prozess hervor, ebenso eine Algebra.

Ring. Definiere induktiv eine Folge von Familien $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset ... \subset \mathcal{F}_n \subset ... \subset \mathcal{P}(X)$ mit

$$\mathcal{F}_0 := \mathcal{E} \cup \{\varnothing\} \tag{I.12a}$$

$$\mathcal{F}_n := \{A \setminus B, A \cup B \mid A, B \in \mathcal{F}_{n-1}\}, \ n \geq 1 \tag{I.12b}$$

So ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n \subset \mathcal{P}(x)$ \- und $\cup$-stabil, also ein Ring.

Algebra. analog.

I.2.3 Halbringe

Hat ein Erzeugendensystem strukturelle Eigenschaft, so ist die Beschreibung des erzeugenden Rings einfach. Eine natürliche auftretende Bedingung ist:

Definition (Halbringe). Eine Familie $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt ein *Halbring* auf X, falls

(i) $\varnothing \in \mathcal{H}$,

(ii) $\mathcal{H}$ ist $\cap$- stabil,

(iii) Für $A, B \in \mathcal{H}$ existieren *disjunkte* Teilmengen $C_1, ..., C_n \in \mathcal{H}$ mit $A \setminus B = C_1 \cup ... \cup C_n$.

Bemerkung. Halbring ist eine Verallgemeinerung des Begriffs Ring, Ringe sind also Halbringe.

Beispiel.

(o) $\{\varnothing\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist ein Halbring auf X.

(i) Die Familie bestehend aus $\varnothing$ und allen (einelementigen) Teilmengen $\{\varnothing\} \cup \{\{a\} \mid a \in X\}$ ist ein Halbring auf X, sie erzeugt den Ring der endlichen Teilmengen von X.

Der Grundbaustein für später:

(ii) Die Familie der *halboffenen* Intervalle $[a, b) \subset \mathbb{R}$, falls $a < b$, also $\{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$, ist ein Halbring auf $\mathbb{R}$.

Beschreibe den von einem Halbring erzeugenden Ring: (Die folgende Beobachtung wird darüber hinaus nützlich sein.)

Lemma. Zu beliebigen Teilmengen $H_1, ..., H_m \in \mathcal{H}$ existieren paarweise disjunkte Teilmengen $H'_1, ..., H'_n \in \mathcal{H}$, sodass jedes H_i sich als die Vereinigung einiger H'_j's darstellen lässt.

Beweis. Betrachte die $2^m - 1$ Durchschnitte der Form $G_1 \cap ... \cap G_m$, wobei $G_i = H_i$ oder $\complement H_i$ und nicht alle gleich $\complement H_i$. Sie sind paarweise disjunkt und zerlegen $H_1 \cup ... \cup H_m$. Jedes H_i ist die Vereinigung von 2^{m-1} von ihnen. Es genügt zu zeigen, dass diese Durchschnitte disjunkte Vereinigungen von Teilmengen aus $\mathcal{H}$ sind. Da Halbringe $\cap$-stabil sind, reicht es zu zeigen, dass die Teilmengen der Form

$$H \cap \complement \widetilde{H}_l \cap ... \cap \complement \widetilde{H}_1 \quad \text{mit } H, \widetilde{H}_1, ..., \widetilde{H}_l \in \mathcal{H} \tag{I.13}$$

disjunkte Vereinigungen von Teilmengen in $\mathcal{H}$ sind.
Da ∎

21.10.2019