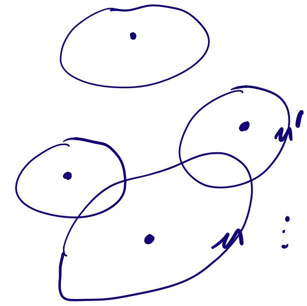
4\. ZÜ Ana 3 6.11.2019 (Mengenlehre 2)

- Auswahlaxiom
- Lemma von Zorn.
- Wohlordnungsprinzip

Auswahlaxiom (informell)

"eine Familie von Mengen"



Gegeben eine Familie (dh Menge) nichtleerer Mengen, so können wir „simultan" aus jeder von ihnen jeweils ein Element auswählen.

Menge, deren Elemente wieder Mengen sind

$\mathcal{M}$

$\rightsquigarrow$ Vereinigung $=\!=$ $\bigcup\limits_{M \in \mathcal{M}} M$ besteht aus den Elementen, die in (mindestens) einer der Mengen M enthalten sind

eine Grundkonstruktion

zB $\mathcal{M} = \{A, B\} \rightsquigarrow A \cup B$

simultane Auswahl von Elementen der M $\longleftrightarrow$ Auswahlfunktion (choice function)

$$\mathcal{M} \xrightarrow{f} \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$$

sodass $f(M) \in M \quad \forall M \in \mathcal{M}$

Auswahlaxiom Es existieren stets Auswahlfunktionen.

zB $\mathcal{M} = \{A, B\}$ Auswahlfkt $\longleftrightarrow$ geordnete Paare (a,b)

dh. die Auswahlfunktion ist Element vom kart. Produkt $A \times B$.

andere Grundkonstruktion: Kartesisches Produkt

$$\prod_{M \in \mathcal{M}} M := \{\text{Auswahlfunktionen}\}$$

<u>Auswahlaxiom reformuliert</u>: Kartesische Produkte nichtleerer Familien nichtleerer Mengen sind nichtleer.

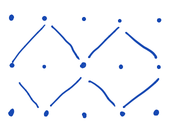
reduziert sich auf Spezialfall der Potenzmenge:

<u>Auswahlaxiom für Potenzmengen</u>: Für jede Menge X existiert eine Auswahlfunktion

$$\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \xrightarrow{f} X$$

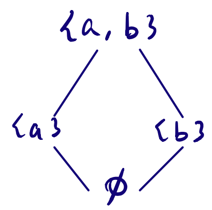
sd $f(M) \in M \quad \forall\, \emptyset \neq M \subset X$.

<u>Ordnung</u>



<u>Halbordnung</u> — $(\mathcal{P}(X), \subset)$ bzw. partielle Ordnung auf einer Menge M. $\quad x < y$

<u>transitiv</u> $\quad x < y$ und $y < z \Longrightarrow x < z$



<u>Totalordnung</u> $\quad \forall x, y \in M$ gilt genau eine der Relation $x < y$ oder $x = y$ oder $x > y$

"linear"

zB $(\mathbb{R}, <)$

<u>Wohlordnung</u> $\quad$ Jede nichtleere Teilmenge besitzt ein minimales Element $\quad$ zB $(\mathbb{N}, <)$

nicht: $(\mathbb{Z}, <)$ und $(\mathbb{Q}, <)$

$0 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \quad 2$

Sei $(M, <)$ partiell geordnet.

$\underset{\hat{=} M}{x}$ <u>Minimum</u> von $M :\Longleftrightarrow \underset{\text{Es gibt kein}}{\nexists}\; y \in M$ mit $y < x$

Minima i.A. nicht eindeutig

zB die Familie aller einelementigen Teilmengen

Teilmengen $T \subset M$:

$x \in T$ Min von $T \iff \not\exists\, y \in T$ mit $y < x$

$s \in M$ obere Schranke für $T \subset M$ $:\iff x \leq s \ \forall x \in T$

i.A. nicht eindeutig

obere Grenze oder Supremum von $T \subset M$.

$:\iff$ obere Schranke, die $\leq$ allen anderen oberen ist.
(dh die untere Schranke aller oberen Schranke ist)

ex i.A. nicht. eindeutig, fall sie existiert.

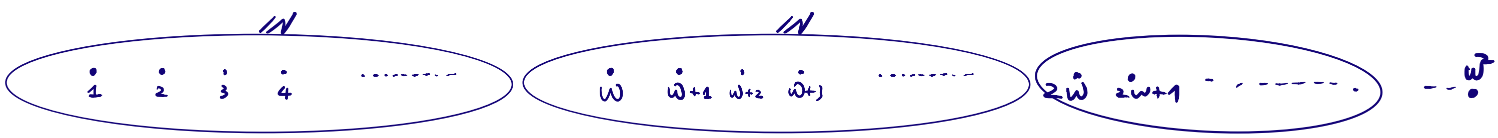
Sei $(W, \prec)$ wohlgeordnet. Jedes nichtmaximale Element

Element $x \in W$ hat einen Nachfolger $:= \underbrace{\min\{y \mid y > x\}}_{=: x+1}$

min W

„1" „2" „3"

W wohlgeordnet $\Longrightarrow \exists$ nat Injektion $\mathbb{N} \to W$ als Anfangsstück



Prinzip der mathematischen Induktion

$M \subset \mathbb{N}$ sd $\left\{ \begin{array}{l} 1 \in M \\ \text{mit Element } n \text{ enthält } M \text{ dessen} \\ \text{Nachfolger } n+1 \end{array} \right\} \Rightarrow M = \mathbb{N}$

verallg. ersetze $(\mathbb{N}, <)$ durch allgemeine wohlgeordnete Menge $(W, \prec)$

Prinzip der transfiniten Induktion $(W, \prec)$ wohlgeordnet

$M \subset W$ sodass für alle $x \in W$ gilt $W_x \subset M \Rightarrow x \in M$.

Dann folgt $M = W$.

Bem. $\underbrace{W_{\min W}}_{\emptyset} \subset M \Longrightarrow \min W \in M$

$\rightsquigarrow$ Methode des Beweises durch transfinite Induktion:

Will man eine Familie von Aussagen $A(x)$ für $x \in W$ beweisen, so genügt es, für alle $x \in W$ zu zeigen:

$$A(y) \text{ gilt für alle } y < x \Longrightarrow A(x) \text{ gilt}$$

„Induktionsschritt"

Lemma von Zorn: Sei $(\underset{\neq \emptyset}{M}, <)$ nichtleer partiell geordnet Menge
poset

Suche Kriterium für die Existenz maximaler Elemente.

Lemma von Zorn I: Jede total geordnete Teilmenge $T \subset M$ besitze eine obere Grenze. Dann enthält M ein maximales Element.
i.A. nicht eindeutig

Lemma von Zorn II (Kneser). Jede wohlgeordnete Teilmenge $T \subset M$ besitze eine obere Schranke. Dann enthält M ein maximales Element.

$\mathfrak{W} :=$ Familie aller wohlgeordneten Teilmenge von M.

$\ni$ $\emptyset$, alle einelementigen Teilmengen, alle totalgeo endlichen Teilmengen

Hypothese von Zorn II $\xrightarrow{\text{Auswahlaxiom}}$ Abb $\mathfrak{W} \xrightarrow{s} M$, $W \longmapsto s(W)$ obere Schranke von W

I $\xrightarrow{\text{ohne AC}}$ Abb $\mathfrak{W} \xrightarrow{g} M$, $W \longmapsto g(W)$ obere Grenze von W

Betrachte Selbstabbildungen $M \xrightarrow{f} M$ s.d. $x \leq f(x)\ \forall x \in M$

Zorn II falsch $\xRightarrow{\text{Auswahlaxiom}}$ $\exists f$ sodass $x < f(x)\ \forall x \in M$

Zorn II folgt daher aus: Beweis geht ohne AC

<u>Fixpunktsatz (Bourbaki-Witt)</u>: Jede wohlgeordnete Teilmenge $W \subset M$ besitze eine obere Schranke. Weiter sei s und f wie oben. Dann hat f einen Fixpunkt. (dh $\exists x$ mit $x = f(x)$)