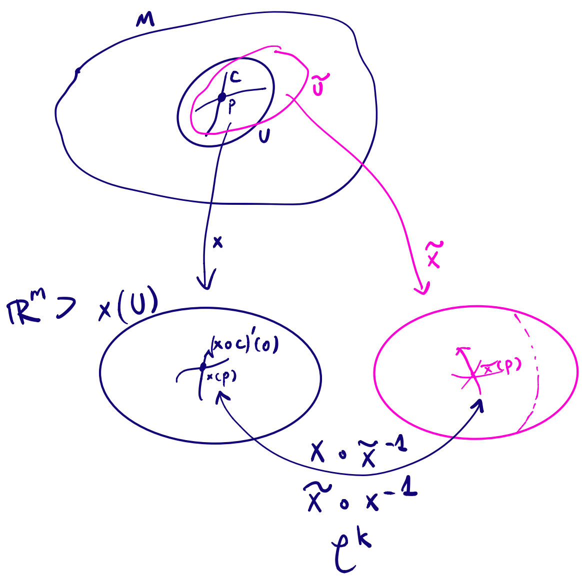
24. VL Ana 3 16.01.2020

Jänich Vektoranalysis

2 Tangentialbündel und Differential

M^m $\mathcal{C}^{k\geq 1}$-Mgf

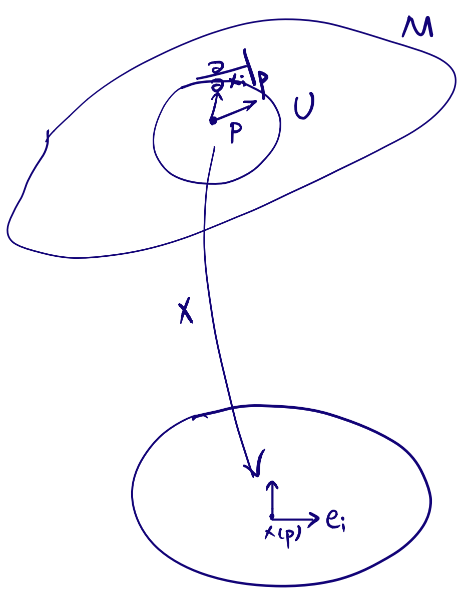


$[c] \in T_pM$

$$\begin{array}{ccc} & [c] & \\ \swarrow & & \searrow \\ (x\circ c)'(0) & & (\tilde{x}\circ c)'(0) \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

$d(\tilde{x}\circ x^{-1})_{x(p)}$

linear

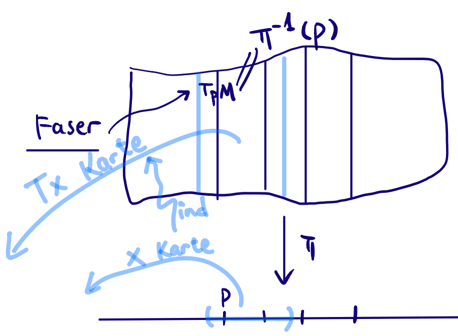


Karte x

$\downarrow$ ind

Standardbasis von T_pM bzgl x

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = [\, t \longmapsto x^{-1}(x(p)+te_i)\,]$$



$$TM = \bigsqcup_{p\in M} T_pM$$

Totalraum

(U, x) Karte für M $\xrightarrow{\text{ind}}$ (TU, Tx) Karte für TM

$$TU = \coprod_{p \in U} T_pM$$

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, bend right, "x"'] \arrow[dr, bend left, "\tilde{x}"] & \\ \cdot \arrow[rr, bend right, "\tilde{x} \circ x^{-1}"'] & & \cdot \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & TU \arrow[dl, bend right, "Tx"'] \arrow[dr, bend left, "T\tilde{x}"] & \\ \cdot \arrow[rr, bend right, "T\tilde{x} \circ (Tx)^{-1}"'] & & \cdot \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dl, bend right] \arrow[dr, bend left] & \\ X \arrow[rr, bend right, "\tilde{x}(x)"'] & & \tilde{X} \end{tikzcd}$$

Bez

$$\mathbb{R}^{2m} \supseteq^{\text{offen}} x(U) \times \mathbb{R}^m \qquad\qquad \tilde{x}(\tilde{U}) \times \mathbb{R}^m$$

$$(x, v) \longmapsto \Big(\overset{C^k}{\tilde{x}(x)},\ \underbrace{\overset{C^{k-1}}{d\tilde{x}_x(v)}}\Big)$$

$$d\tilde{x}_x(v) = \sum_{i=1}^m \Big(\sum_{j=1}^m v_j \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}(x)\Big) e_i \quad C^{k-1}$$

$$v = \sum_{j=1}^m x_j e_j$$

Aus der letzten Formel lesen wir die Basis in den Tangentialräumen ab.

$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p$ entspricht $v = e_j$ $\qquad \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}(x(p)) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}\Big|_p$

bzw $\qquad \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \Big(\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j} \circ x\Big) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}$

Einträge $\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}$ der Jacobi C^{k-1}

$\downarrow$

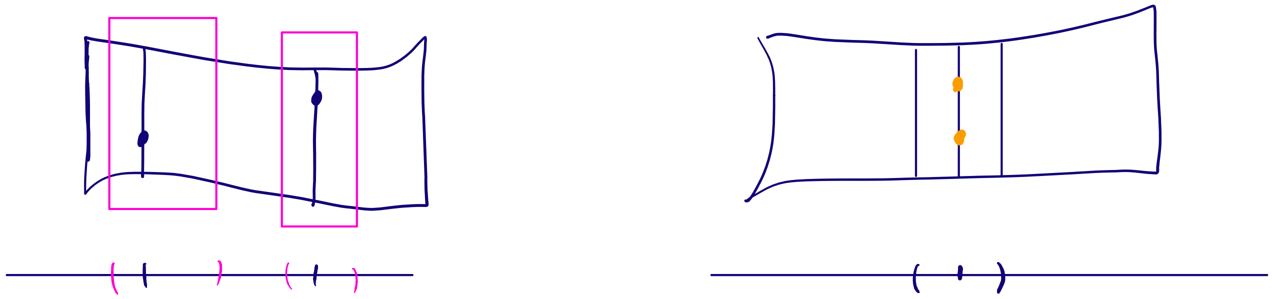
Kartenwechsel $T\tilde{x} \circ (Tx)^{-1}$ für TM sind C^{k-1}

$\downarrow$

TM erhält Struktur als $2m$-dim lokal eukl Raum zusammen mit C^{k-1} diffbar Struktur.

klar: • Topologie von TM hat eine abzähl Basis, weil dies für M erfüllt ist.

- Topologie auf TM wieder Hausdorffsch



da M Hausdorffsch

Also: TM $2m$-dim C^{k-1}-Mgf

$W \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^m$ ⟶ globale Karte id_W

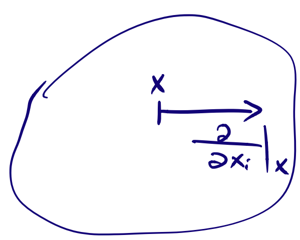
Identifikation von Tangräumen $T_{[c]}W \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m$, $[c] \mapsto c'(0)$

C^∞-Mgf

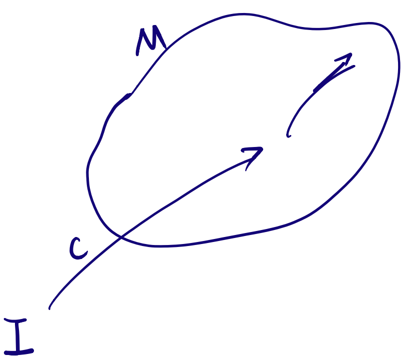
$$TW = \bigsqcup_{p \in W} T_p W \longrightarrow W \times \mathbb{R}^m$$
$$[c] \longmapsto \big(c(0), c'(0)\big)$$

Standardbasenfeld

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x = [t \mapsto x + t e_i]$$



Ableitung oder Geschwindigkeit einer diffbaren Kurve $I \xrightarrow{c} M$



ist definiert durch

$$\frac{dc}{dt}(\tau) := c'(\tau) := [\underbrace{t \mapsto c(t+\tau)}_{c(\cdot + \tau)}]$$

approximiere diffbare Abb lokal durch lin. Abb (der Tangräume). verallg Begriff des Differentials für Abb von Untermgf.

$$M^m \xrightarrow{F} N^n$$ diffbare Abb von C^k-Mgf.

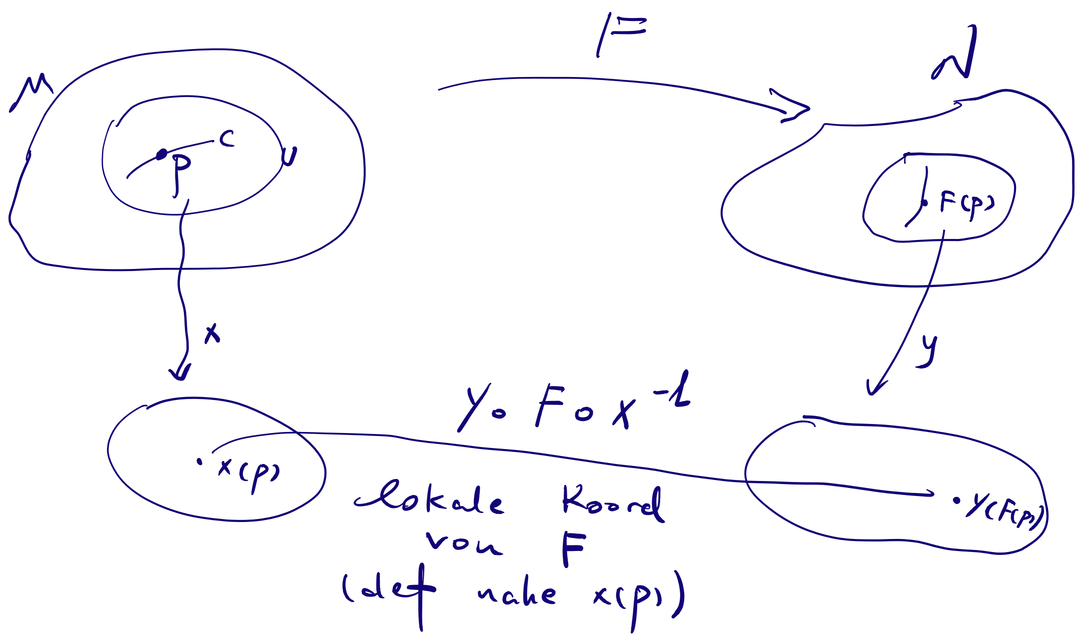
Dann induziert F eine Abb von Tangbündel

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{dF} & TN \\ [c] & \longmapsto & [F \circ c] \end{array}$$

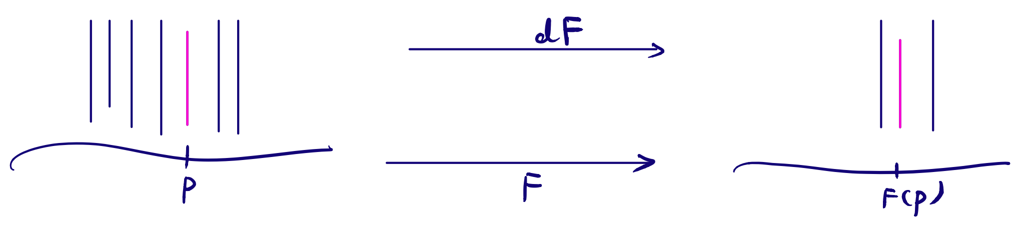
wohldef, denn

$$\underbrace{(y \circ (F \circ c))}_{y \circ F \circ x^{-1} \circ x \circ c}'(0) = d(y \circ F \circ x^{-1})_{(x \circ c)(0)}\left((x \circ c)'(0)\right)$$

Also hängt $[F \circ c]$ nur von $[c]$ ab.



Def dF heißt das Differential von F.



Das Differential bildet Tangräume auf Tangräume ab:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
T_pM \arrow[r, "dF_p := dF|_{T_pM}", "\text{linear}"'] \arrow[d, "Tx|_{T_pM}"', "\cong\ \text{lin}"] & T_{F(p)}N \arrow[d, "\cong"', "Ty|_{T_{F(p)}N}\ \text{lin}"] \\
\mathbb{R}^m \arrow[r, bend right, "d(y\circ F^{-1}\circ x)_{x(p)}", "\text{lin}"'] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

als Komp lin Abb

„altes Differential"

Im Fall von Abb offner Teilm enkl Räume ist das Differential konsistent mit dem früher eingeführten, denn letztes bildet

$$c'(0) \longmapsto (F\circ c)'(0)$$

ab.

- <u>Kettenregel</u>

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right, "G\circ F"'] & \cdot \arrow[r, "G"] & \cdot \end{tikzcd}$$

$$\boxed{d(G\circ F) = dG\circ dF}$$

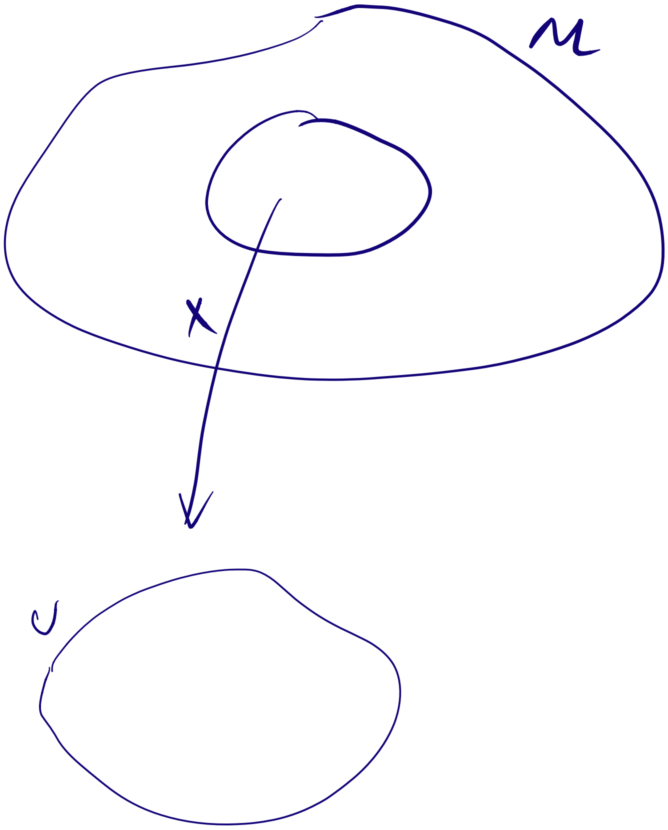
denn $d(G\circ F)([c]) = [G\circ(F\circ c)] = dG\big(\underbrace{[F\circ c]}_{dF([c])}\big)$ $\square$

- $d\,id_M = id_{TM}$.

- Für Umkehrabb F^{-1} eines Diffeo $M \underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}} N$ gilt

$$d(F^{-1}) = (dF)^{-1}.$$

Bündelkarten

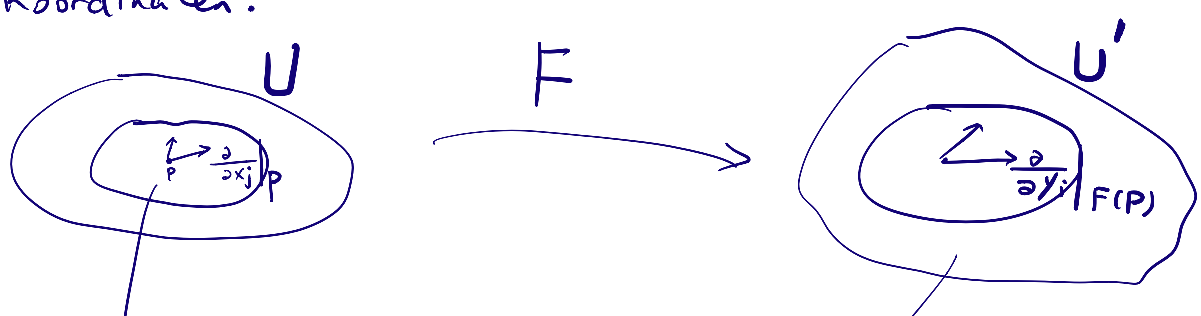


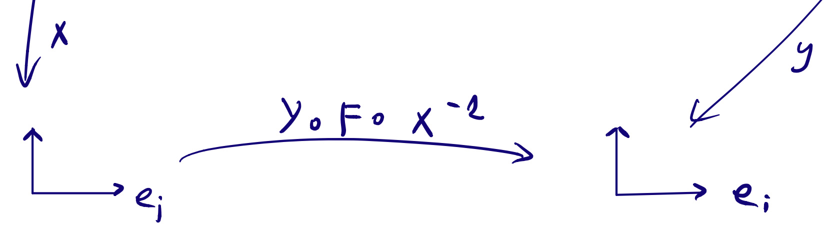
$$\begin{tikzcd}
TU \arrow[r, "Tx"] \arrow[dr, "dx"'] & x(U) \times \mathbb{R}^m \arrow[d, leftrightarrow, "\cong" ', "\text{nat Identifi (s. oben)}"] \\
& T(\underbrace{x(U)}_{\subset \mathbb{R}^m})
\end{tikzcd}$$

Karte

induz Bündelkarten sind Differentiale der Karten auf Mgf und die Bündelkartenwechsel $T\tilde{x} \circ (Tx)^{-1}$ stimmen bis auf derselben Identifikationen überein mit den Differentialen der Kartenwechsel $\tilde{x} \circ x^{-1}$ auf M.

in lok Koordinaten:





Das Differential dF_p ist relativ zu den Koobasen $\frac{\partial}{\partial x_j}$ bzw $\frac{\partial}{\partial y_i}$ gegeben durch die Jacobische der lok

Koodarst
$$dF_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(y_i\circ F\circ x^{-1})}{\partial x_j}(x(p))\,\frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{F(p)}$$

verallg frühere Formel für Wechsel zwischen von Karten induz Basen der Tangräume.

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "F"] \arrow[d] & {} \arrow[d] \\ X \arrow[r, "y(x)"] & Y \end{tikzcd}$$

⇝ lok Koodarst $Ty \circ dF \circ (Tx)^{-1}$ des Differentials bzgl induzierter Bündelkarten stimmt mod der Identifikationen

$$T(x(U)) \cong x(U)\times\mathbb{R}^m$$

und
$$T(y(U')) \cong y(U')\times\mathbb{R}^m$$

mit Differential dy von $y(x)$ überein.

⇝ hat Form

$$(x,v) \mapsto (y(x), dy_x(v))$$
$$dy_x(v) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x)\right)e_i$$

Wir sehen $f \in \mathcal{C}^k \Rightarrow df \in \mathcal{C}^{k-1}$

3 Totales Differential, 1-Formen und Kotangentialbdl

M $\mathcal{C}^k$-Mgf $\quad M \underset{\text{diffbar}}{\xrightarrow{f}} \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow \quad TM \xrightarrow{df} T\mathbb{R}$

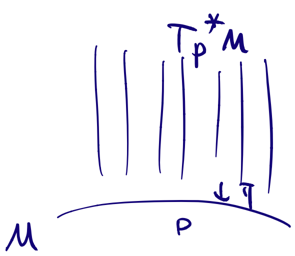
totales Differential von f

Fam von lin Abb

$T_pM \xrightarrow{df_p} T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$

also Linearformen auf Tangräumen $df_p \in (T_pM)^*$

Def (i) $(T_pM)^* =: T_p^*M$ heißt Kotangentialraum ~~an~~ für M in p



(ii) Das Kotangentialbündel an M ist die disj. Vereinigung von Kotangenträumen zsm mit der Fußpunktprojek $\pi: T^*M \to M$.

$$T^*M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M \xrightarrow{\pi_{T^*M}} M$$

$\rightsquigarrow$ df aufgefasst als Abb $\quad M \to T^*M$

$p \mapsto df_p \in T_p^*M$

mit $\pi_{T^*M} \circ df = \mathrm{id}_M \qquad$ Schnitt von T^*M.