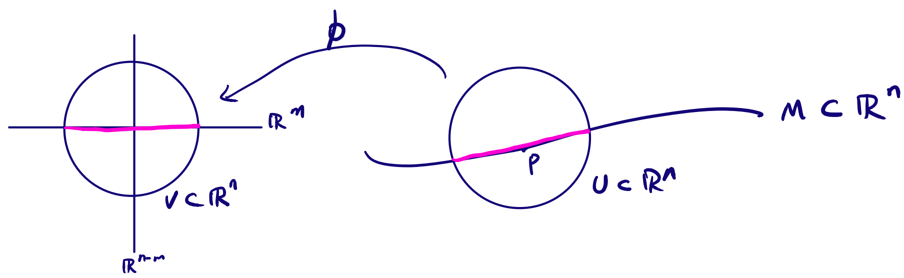
22. VL Ana 3 9. 1. 2020

# 1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Wir erinnern u an den Begriff der <u>Untermannigfaltigkeit</u> des euklidischen Raums ($\rightsquigarrow$ Ana II)

**Def 1.1** (Differenzierbare Untermgf)

Für $0 \leq m \leq n$ (Dim) und $1 \leq k \leq \infty$ (Grad der Diffbarkeit) heißt eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dim $\mathcal{C}^k$-Untermgf, falls für jeden Punkt $p \in M$ ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus $\phi: U \to V$ einer offenen Umg von $p$ auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ existiert, s. d.




$$\phi(M \cap U) = \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\}}_{\mathbb{R}^m \times \{0_{\mathbb{R}^{n-m}}\}} \cap V \qquad (1.1)$$

Wir werden im Folgenden $\mathbb{R}^m \times \{0_{\mathbb{R}^{n-m}}\}$ mit $\mathbb{R}^m$ identifizieren

Der $\mathcal{C}^k$-Diffeo $\phi$ induziert durch Einschränkung einen Homöomorphismus

$$\kappa: \phi|_{M \cap U} : M \cap U \longrightarrow \mathbb{R}^m \cap V \qquad (1.2)$$

der offenen Menge $U \cap M$ auf eine offene Teilmenge des "Modells" $\mathbb{R}^m$. Er belegt $M$ nahe $p$ mit <u>lokalen Koordinaten</u> und man spricht von einer <u>lokalen Karte</u> nahe p. Je zwei solche Karten

$\kappa_i : M \cap U_i \longrightarrow \mathbb{R}^m \cap V_i$ , $i = 1, 2$ sind miteinander

$\mathcal{C}^k$-kompatibel im Sinne, dass Koordinatentransformationen bzw Kartenwechsel

$$\varkappa_1(M \cap U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\varkappa_2 \circ \varkappa_1^{-1}} \varkappa_2(M \cap U_1 \cap U_2)$$

$\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus offener Teilmengen des $\mathbb{R}^m$ sind denn sie sind Einschränkungen der $\mathcal{C}^k$-Diffeos $\phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2)$

Die $\mathcal{C}^k$-Kompatibilität der Karten ermöglicht Differentialrechnung auf $M$ zu betreiben, ohne den umgebenden eukl Raum $\mathbb{R}^n$ zu benötigen. ZB können wir von der bis zu $k$-fachen Diffbarkeit nur auf $M$ def Funktion $f: M \to \mathbb{R}$ sprechen: $f$ heißt in $p$ <u>$\ell$-fach differenzierbar</u> für $1 \leq \ell \leq k$, wenn für eine Karte $\varkappa$ in $p$ ihre auf einer offenen Menge in $\mathbb{R}^m$ def lokale Koordinatendarstellung $f \circ \varkappa^{-1}$ im Punkt $\varkappa(p)$ $\ell$-fach diffbar ist.

Dies ist unabhängig von der Karte. Denn ist $\tilde{\varkappa}$ eine weitere Karte in $p$, so gilt:

$$f \circ \tilde{\varkappa}^{-1} = f \circ \varkappa^{-1} \circ \underbrace{(\varkappa \circ \tilde{\varkappa}^{-1})}_{\mathcal{C}^k\text{-Diffeo}}$$

nahe $\tilde{\varkappa}(p)$, und $f \circ \tilde{\varkappa}^{-1}$ ist genau dann $\ell$-fach diffbar in $\tilde{\varkappa}(p)$, wenn $f \circ \varkappa^{-1}$ $\ell$-fach diffbar ist in $\varkappa(p)$. Höhere als $k$-fache Diffbarkeit kann nicht sinnvoll def werden.

Wir definieren nun „abstrakte" dh nicht von vorneherein in einen euklidischen Raum eingebettete <u>diffbare Mgf</u> als gewisse topologische Räume mit Zusatzstruktur, die uns es erlaubt auf ihnen Differentialrechnung zu betreiben.

Def (lokal euklidischer Raum) Ein topologischer Raum $X$ heißt $m$-dim lokal euklidisch, falls jeder Punkt eine Umg besitzt die homöomorph zu einer offenen Teilmenge in $\mathbb{R}^m$ ist.

Ein Homöomorphismus $U \xrightarrow{\kappa} V$ einer offenen Teilmenge $U \subset X$ auf eine Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^m$ heißt Karte oder Koordinatensystem und $U$ heißt Kartengebiet.

Wir werden oft solche Karten mit $(U, \kappa)$ bezeichnen.

Sind $(U_i, \kappa_i)$ Karten, so ist der Kartenwechsel

$$\kappa_1(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\kappa_2 \circ \kappa_1^{-1}} \kappa_2(U_1 \cap U_2)$$

ein Homöomorphismus offener Teilmengen des Modells $\mathbb{R}^m$.

Ein Atlas ist eine Familie $\mathcal{A}$ von Karten $(U_i, \kappa_i)_{i \in I}$ die $X$ überdecken, $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.

Um Differentialrechnung betreiben zu können, verlangen wir dieselbe Verträglichkeit der Karten im Atlas wie sie im Fall der Karten (1.2) diffbarer Untermgf vorliegt. Zwei Karten heißen $\mathcal{C}^k$-kompatibel, falls der Kartenwechsel $\mathcal{C}^k$-Diffeo ist. Ein Atlas $\mathcal{A}$ heißt $\mathcal{C}^k$-diffbar, falls seine Karten paarweise $\mathcal{C}^k$-kompatibel sind. Jeder Atlas ist in einem eindeutigen maximalen $\mathcal{C}^k$-Atlas enthalten, der durch Hinzunahme aller $\mathcal{C}^k$-kompatibelen Karten entsteht.

Def (Differenzierbare Struktur) Eine $\mathcal{C}^k$-differenzierbare

Struktur auf einem lokal euklidischen Raum ist ein maximaler $\mathcal{C}^k$-Atlas.

Eine diffbare Struktur erlaubt, differenzierbare Konzepte vom euklidschen Raum zu übertragen. So z.B. die Differenzierbarkeit von Abb:

Seien $X^m$ und $Y^n$ lokal euklidische Räume versehen mit $\mathcal{C}^k$-diffbaren Strukturen und sei $F: X \to Y$ eine stetige Abbildung. Ist $p \in X$ ein Punkt und sind $(U, \kappa)$ und $(U', \kappa')$ Karten in $X$ bzw $Y$ um $p$ bzw $F(p)$, so nennen wir die auf einer offenen Menge in $\mathbb{R}^m$ definierte $\mathbb{R}^n$-wertige Abb

$$\kappa' \circ F \circ \kappa^{-1}$$

eine <u>lokale Koordinatendarstellung</u> von $F$ nahe $p$.

Für den Übergang zwischen lok. Koordinatendarstellungen bei Kartenwechsel gilt:

$$\tilde{\kappa}' \circ F \circ \tilde{\kappa}^{-1} = \underbrace{\left(\tilde{\kappa}' \circ (\kappa')^{-1}\right)}_{\mathcal{C}^k\text{-Diffeo}} \circ \left(\kappa' \circ F \circ \kappa^{-1}\right) \circ \underbrace{\left(\kappa \circ \tilde{\kappa}^{-1}\right)}_{\mathcal{C}^k\text{-Diffeo}}.$$

<u>Def (Differenzierbare Abbildung)</u> Eine stetige Abb $F: X \longrightarrow Y$ heißt im Punkt $p \in X$ <u>$l$-fach diffbar</u>, $1 \leq l \leq k$, falls eine und damit alle ihre lokalen Koordinatendarstellungen in $p$ im Punkt $\kappa(p)$ $l$-fach diffbar sind.

Analog definiert man $\mathcal{C}^l$-Diffbarkeit. Den Raum der $\mathcal{C}^l$-Abb bezeichnen wir mit $\mathcal{C}^l(X, Y)$ und spezieller den Raum der $\mathcal{C}^l$-Fkten mit $\mathcal{C}^l(X)$.

Ein <u>Diffeomorphismus</u> ist wieder eine bijektive diffbare Abb. deren Umkehrabb auch diffbar ist. Karten einer $\mathcal{C}^k$-diffbaren Struktur sind Diffeomorphismen.

<u>Def (Mannigfaltigkeit)</u>

i) Eine m-dim topologische Mannigfaltigkeit ist ein m-dim lokal euklidischer Hausdorffraum mit abzählbarer Basis.

ii) Eine m-dim $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit ist eine topol Mannigfaltigkeit mit $\mathcal{C}^k$-diffbarer Struktur.

Die Hausdorff Eigenschaft stellt sicher, dass wir Punkte durch stetige Fkten trennen können. Die abzählbare Basis der Topologie sichert die Existenz einer Partition der Eins.

<u>Bsp</u> 0) Die natürliche $\mathcal{C}^\infty$-diffbare Struktur auf $\mathbb{R}^n$ besteht aus $id_{\mathbb{R}^n}$ zusammen mit allen $\mathcal{C}^\infty$-kompatiblen Karten. So wird $\mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Mgf.

i) Eine m-dim $\mathcal{C}^k$-Umgf $M \subset \mathbb{R}^n$ ist, versehen mit der relativ Topologie, ein lokal eukl Raum. Sie trägt eine $\mathcal{C}^k$-diffbar Struktur induziert durch die Karten $\phi|_{M \cap U}$.

i') Sei $N^n$ eine n-dim $\mathcal{C}^k$-Mgf. Dann heißt für $0 \leq m \leq n$ eine Teilmenge $M \subset N$ eine m-dim (bzw $(n-m)$-kodim) $\mathcal{C}^k$-Umgf von $N$, falls in jedem Pkt $p \in M$ eine

Karte $\phi: U \to \mathbb{R}^n$ im Atlas von $N$ existiert, sd $U$ Umg von $p$ ist und $\phi(U \cap M) \subset \mathbb{R}^m$ gilt. Dh $\phi(U \cap M)$ ist $m$-dim Umgf von $\mathbb{R}^n$. In diesem Fall ~~gilt~~ ist

? $M$ die Struktur als $C^k$-Mgf von $N$.

ii) Euklidische Produkte von $C^k$-Mgf sind auf natürliche Art $C^k$-Mgf.

iii) Jede $C^k$-diffb Struktur kann zu einer $C^l$-diff Struktur für $l \leq k$ abgeschwächt werden. Dh jede $C^k$-Mgf ist auch $C^l$-Mgf, $l \leq k$.