Mitschrift zur Vorlesung

Analysis III

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen*

25. Januar 2020

Inhaltsverzeichnis

*im Wintersemester 2019/20 gelesen von Prof. Bernhard Leeb, Ph.D.

1 Maßtheorie

1.1 Maßproblem und Paradoxien

14.10.2019

Maßtheorie ist die Theorie des Volumens. Motivierende Beispiele sind:

i) Volumina von Teilmengen des euklidischen Raums

ii) Wahrscheinlichkeiten (= “Volumina von Ereignissen”).

Wir konzentrieren uns im Rest des Abschnitts auf $\mathbb{R}^d$. Wir wollen einen leistungsfähigen Volumenbegriff haben, sodass die Volumina von möglich vielen Teilmengen flexibel gemessen werden können. Unser erster “naiver” Ansatz wäre, dass wir Volumenmessung für *alle* Teilmengen verlangen, also eine Funktion

$$\mathrm{vol} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0, \infty].$$

Unsere grundlegende Forderung ist die Additivität von Volumina bei Zerlegungen, also

(i) *(endliche) Additivität*: Sind $M_1, ..., M_n \subset \mathbb{R}^d$ paarweise disjunkt, so gilt

$$\mathrm{vol}(M_1 \cup ... \cup M_n) = \mathrm{vol}(M_1) + ... + \mathrm{vol}(M_n).$$

Volumina als geometrische Größen sollten durch die metrische Struktur (Längenmessung) bestimmt sein, also invariant unter Symmetrien der metrischen Struktur:

(ii) *Bewegungsinvarianz*: Für jede Bewegung $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ und jede Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ gilt

$$\mathrm{vol}(\Phi(A)) = \mathrm{vol}(A).$$

(iii) *Normierung*: $\mathrm{vol}([0,1]^d) = 1$.

Wir verstärken noch die Forderung (i): (Borel, Lebesgue)

(i’) *σ-Additivität*[1]: Für Folgen $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Teilmengen $M_n \subset \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\mathrm{vol}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\mathrm{vol}(M_n)}_{\in[0,\infty]}.$$

Bemerkung. Wegen des Umordnungssatzes spielt die Reihenfolge der Summanden keine Rolle, da sie alle positiv sind.

$\rightsquigarrow$ flexibilisiert Volumenmessung entscheidend, wir können also komplizierte Figuren durch einfach Figuren approximieren.

Cantons Mengenlehre $\rightsquigarrow$ Existenz von “naiver” Volumenfunktion wurde hinterfragt:

[1] σ steht für abzählbar unendlich oft.

Maßproblem Existiert eine Volumenfunktion $\mathrm{vol} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0, \infty]$ mit (i') + (ii) + (iii)?

Satz (Vitali, 1905)**.** Nein, das naive Maßproblem ist unlösbar.

Beweis. Aus dem Auswahlaxiom folgt die Existenz "verrückter" (d.h. geometrisch unvorstellbarer) Teilmengen des $\mathbb{R}^d$. Hier existiert $M \subset \mathbb{R}^d$, ein *Vertretersystem* für Nebenklassen von $\mathbb{Q}^d$ (Untergruppe von $\mathbb{R}^d$) in $\mathbb{R}^d$. Der Quotient abelscher Gruppen $\mathbb{R}^d/\mathbb{Q}^d$ ist also die Menge der Nebenklassen. Die Nebenklassen $a + \mathbb{Q}^d$ für $a \in \mathbb{R}^d$ partitionieren (d.h. zerlegen disjunkt) $\mathbb{R}^d$ (überabzählbar viele). Für alle $a, b \in \mathbb{R}^d$ besteht Dichotomie:

i) entweder $a + \mathbb{Q}^d = b + \mathbb{Q}^d$ (nämlich wenn $a - b \in \mathbb{Q}^d$),

ii) oder $(a + \mathbb{Q}^d) \cap (b + \mathbb{Q}^d) = \varnothing$ (nämlich wenn $a - b \notin \mathbb{Q}^d$).

D.h. für alle $a \in \mathbb{R}^d$ besteht $M \cap (a + \mathbb{Q}^d)$ aus genau einem Element. Daraus folgt, die Translate $q + M$ (abzählbar viele) für $q \in \mathbb{Q}^d$ partitionieren $\mathbb{R}^d$. Aus der σ-Additivität von Volumen folgt

$$\underbrace{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^d)}_{>0} = \sum_{q \in \mathbb{Q}^d} \underbrace{\mathrm{vol}(q + M)}_{\overset{\text{Bew\_Inv}}{=} \mathrm{vol}(M)}$$

und somit also $\mathrm{vol}(M) > 0$.
Jetzt wähle M spezieller, nämlich beschränkt, z.B. für $O \subset \mathbb{R}^d$ offen können wir M so wählen, dass $M \subset O$, weil $a + \mathbb{Q}^d$ dicht in $\mathbb{R}^d$, also $(a + \mathbb{Q}^d) \cap O \neq \varnothing$. Z.B. wähle $M \subset (0, \frac{1}{2})^d$, so enthält $[0, 1]^d$ abzählbar unendlich viele paarweise disjunkte Translate $q + M$, nämlich für alle $q \in \mathbb{Q}^d \cap (0, \frac{1}{2})^d$ gilt

$$V := \bigcup_{q \in (0, \frac{1}{2})^d \cap \mathbb{Q}^d} (q + M) \subset [0, 1]^d$$

weil $\mathrm{vol}(V) + \underbrace{\mathrm{vol}([0, 1]^d - V)}_{\geqslant 0} = \underbrace{\mathrm{vol}([0, 1]^d)}_{=1}$. Daraus folgt $\mathrm{vol}(V) \leqslant 1 < \infty$ und

$$\mathrm{vol}(V) = \sum_{q \in (0, \frac{1}{2})^d \cap \mathbb{Q}^d} \underbrace{\mathrm{vol}(q + M)}_{= \mathrm{vol}(M)}$$

Somit muss gelten $\mathrm{vol}(M) = 0$. ⚡ ∎

Noch dramatischer: In dim $\geqslant 3$ kann man je zwei Teilmengen (unter sehr allgemeinen Annahmen) aus demselben (abzählbaren, oft sogar endlichen) "Bausatz" zusammensetzen.

Satz (Banach-Tarski, 1924)**.** Seien $A, B \subset \mathbb{R}^d$ Teilmengen mit nichtleerem Inneren.

(i) Sei $d \geqslant 3$ und seien A, B beschränkt. Dann existieren endlich viele Teilmengen $M_k \subset \mathbb{R}^d$ und Bewegungen Φ_k des $\mathbb{R}^d$, so dass *disjunkte Zerlegungen* $A = \bigsqcup_k M_k$ und $B = \bigsqcup_k \Phi(M_k)$ bestehen.

(ii) Jetzt $d \geqslant 1$ beliebig und A, B nicht notwendig beschränkt. Dann existieren abzählbar viele Teilmengen $M_k \subset \mathbb{R}^d$ und Bewegungen Φ_k, sodass *disjunkte Zerlegungen* $A = \bigsqcup_k M_k$ und $B = \bigsqcup_k \Phi(M_k)$ bestehen.

Der Beweis verwendet Gruppentheorie, Struktur von orthogonalen Gruppen $\mathrm{O}(d)$. (nicht mehr auflösbar für $d \geqslant 3$.)

Das naive *Inhaltsproblem*, also eine Volumenfunktion mit Eigenschaften (i), (ii) und (iii), ist lösbar in $d \leqslant 2$, aber nicht eindeutig, nicht lösbar in $d \geqslant 3$. (Banach 1923, Hausdorff 1914) Dies führt zu:

Maßproblem (post-paradox) : Man definiere eine Volumenfunktion vol : $\mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty]$ mit Eigenschaften (i'), (ii) und (iii) auf einer möglich großen und flexiblen Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, die die geometrisch wichtigen Teilmengen umfasst und abgeschlossen ist unter grundlegenden mengentheoretischen Operationen (Vereinigung, Schnitt, Differenz und Komplement).

1.2 Ringe und Algebren

17.10.2019

Wir untersuchen Familien von Teilmengen (einer festen Menge), die unter grundlegenden (endlichen) Mengenoperationen abgeschlossen/ stabil sind. $(\cup, \cap, \setminus, \complement)$
Sie werden Definitionsbereiche der allgemeinsten von uns betrachteten Volumenfunktion sein. ("Inhalte")

1.2.1 Die Ringstruktur auf Potenzmengen

Sei X eine Menge. Die Potenzmenge ist definiert als die Familie aller Teilmengen $\mathcal{P}(X)$. Wir können die Potenzmenge ebenfalls auffassen als

$$\mathcal{P}(X) \underset{\text{bij}}{\overset{\cong}{\longleftrightarrow}} \{0,1\}^X = \{f : X \longrightarrow \{0,1\}\}$$

da

$$A \longmapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
$$f^{-1}(1) \longleftarrow f$$

wobei χ_A de charakteristische Funktion von A ist.

Wir fassen nun $\{0, 1\}$ auf als den Körper mit 2 Elementen (Restklassen modulo 2). So ist $\{0, 1\}^X$ ein kommutativer Ring mit Eins (multiplikatives Einselement) (im Sinne der Algebra), sogar eine $\mathbb{F}_2$-Algebra.

Bemerkung. Die Addition und Multiplikation von Funktionen erfolgen punktweise:

- $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$
- $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$

und $\{0, 1\} = \mathbb{F}_2$ ist ein Körper mit zwei Elementen.
Die Nullelement ist $f \equiv 0$, also $\chi_\varnothing$ und das Einselement ist $\chi_X (\equiv 1)$. Die Addition von charakteristischen Funktionen entspricht der symmetrischen Differenz $A \triangle B$ und die Multiplikation entspricht dem Duchrschnitt von Mengen. Also

$$\chi_A + \chi_B = A \triangle B$$
$$\chi_A \cdot \chi_B = A \cap B$$

Somit ist $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap) \cong (\mathbb{F}_2^X, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit dem Nullelement $\varnothing$ bzw. $\chi_\varnothing$ und dem Einselement X bzw. χ_X.

1.2.2 Ringe und Algebren

Definition. Eine Familie $\mathscr{R} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt

(ρ) ein **Ring** auf X, falls sie ein Unterring von $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ ist.

(α) eine **Algebra** auf X, falls sie außerdem das Einselement enthält, d.h. $X \in \mathscr{R}$.

Bemerkung. "Algebra" wird in verschiedenen Bedingungen verwendet, nämlich die Algebra als ein mathematisches Gebiet, eine Algebra als algebraische Struktur im Sinne der Algebra und eine Algebra im Sinne der obigen Definition.

(ρ) bedeutet $\varnothing \in \mathscr{R}$, abgeschlossen unter Addition ($\triangle$) (dasselbe wie Subtraktion, da mod 2) und Multiplikation ($\cap$), d.h.

$$A, B \in \mathscr{R} \implies A \triangle B, A \cap B \in \mathscr{R}$$

d.h. $\triangle$- stabil und $\cap$- stabil. Wir können $\triangle, \cap$ ausdrücken durch $\backslash$ und $\cup$:

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \\ A \cap B &= A \backslash (A \backslash B) \end{aligned}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} A \backslash B &= (A \triangle B) \cap A \\ A \cup B &= (A \triangle B) \triangle (A \cap B) \end{aligned}$$

Bemerkung. Die letzte Gleichung gilt, da $(A \triangle B)$ und $(A \cap B)$ disjunkt sind.

Daraus folgt die Charakterisierung von Ringen:

Lemma. Eine Familie $\mathscr{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ist genau dann ein Ring auf X, wenn

(i) $\varnothing \in \mathscr{R}$,

(ii) $\backslash$- stabil, d.h. $A, B \in \mathscr{R} \implies A \backslash B \in \mathscr{R}$,

(iii) $\cup$- stabil, d.h. $A, B \in \mathscr{R} \implies A \cup B \in \mathscr{R}$.

entspricht für Algebren:

Lemma. Eine Familie $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ist genau dann eine Algebra auf X, wenn

(i) $\varnothing \in \mathscr{A}$,

(iii) $\cup$- stabil,

(iv) $\complement$- stabil, d.h. $A \in \mathscr{A} \implies \complement A := X \backslash A \in \mathscr{A}$.

Beweis. Sind diese Eigenschaften erfüllt, so implizieren (i + iv), dass

$$X = \complement \varnothing \in \mathscr{A}$$

"$\backslash$" kann ausgedrückt werden durch "$\cup$" und "$\complement$": Aus

$$\complement(A \backslash B) = (\complement A) \cup B$$

folgt

$$A\backslash B = \complement\big((\complement A) \cup B\big)$$

Also ist $\mathscr{A}$ ein Ring, und damit $\mathscr{A}$ eine Algebra.
Ist umgekehrt $\mathscr{A}$ eine Algebra, so gelten (i + iii). Da auch $X \in \mathscr{A}$, können wir "$\complement$" durch "$\backslash$" ausdrücken

$$\complement A = X\backslash A$$

Also gilt auch (iv). ■

Folgerung. Ist $\mathscr{R}$ ein Ring auf X und $A, B \in \mathscr{R}$, so auch $A\backslash B, A \cap B, B\backslash A$ und $A \cup B \in \mathscr{R}$. (*Bem.* Alle in $A \cup B$ enthalten.) Ist $\mathscr{A}$ eine Algebra auf X und $A, B \in \mathscr{A}$, so ist außerdem auch $\complement(A \cup B) \in \mathscr{A}$.

Beispiel.

(o) $\{\varnothing\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist ein Ring auf X,
$\{\varnothing, X\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist die kleinste Algebra auf X, $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ die größte.

(i) $\{\varnothing, A\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist ein Ring auf X für ein $A \in \mathcal{P}(X)$,
$\{\varnothing, A, \complement A, X\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist eine Algebra auf X.

(ii) Die Familie der endlichen (bzw. abzählbaren) Teilmengen von X ist ein Ring. (eine Algebra, nur falls X selbst endlich bzw. abzählbar)
Die Familie der Teilmengen, die endlich (bzw. abzählbar) sind oder endliches (bzw. abzählbares) Komplement haben, ist eine Algebra.

Weitere Beispiele folgen nach der Diskussion vom Erzeugendensystem.

Beobachtung. Der Durchschnitt beliebig vieler Ringe (bzw. Algebren) auf einer festen Menge ist wieder ein Ring (bzw. eine Algebra). Zu jeder Menge $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ gibt es eine(n) bezüglich mengentheoretischer Inklusion kleinste(n) Ring (bzw. Algebra), der (die) $\mathcal{E}$ umfasst, nämlich den Durchschnitt aller Ringe (bzw. Algebren), die $\mathcal{E}$ umfassen.

Definition (Erzeugendensystem). Der von einer Familie $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ erzeugte Ring auf X ist der kleinste Ring, der sie enthält. Man nennt $\mathcal{E}$ ein *Erzeugendensystem* dieses Rings, oder *Erzeuger*. (Analog für Algebren)

Die Algebra eines Erzeugendensystems ist oft die einfachste Art, eine(n) Ring bzw. Algebra zu beschreiben.

Ein Ring geht aus einem Erzeugendensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ *konstruktiv* durch einen *abzählbaren* (induktiv!) Prozess hervor, ebenso eine Algebra.

Ring. Definiere induktiv eine Folge von Familien $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset ... \subset \mathcal{F}_n \subset ... \subset \mathcal{P}(X)$ mit

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_0 &:= \mathcal{E} \cup \{\varnothing\}\\ \mathcal{F}_n &:= \{A\backslash B, A \cup B \mid A, B \in \mathcal{F}_{n-1}\},\ n \geqslant 1\end{aligned}$$

So ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n \subset \mathcal{P}(x)$ $\backslash$- und $\cup$-stabil, also ein Ring.

Algebra. analog.

1.2.3 Halbringe

Hat ein Erzeugendensystem strukturelle Eigenschaft, so ist die Beschreibung des erzeugenden Rings einfach. Eine natürliche auftretende Bedingung ist:

Definition (Halbringe). Eine Familie $\mathscr{H} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt ein *Halbring* auf X, falls

(i) $\varnothing \in \mathscr{H}$,

(ii) $\mathscr{H}$ ist $\cap$- stabil,

(iii) Für $A, B \in \mathscr{H}$ existieren *disjunkte* Teilmengen $C_1, ..., C_n \in \mathscr{H}$ mit $A \backslash B = C_1 \sqcup ... \sqcup C_n$.

Bemerkung. Halbring ist eine Verallgemeinerung des Begriffs Ring, Ringe sind also Halbringe.

Beispiel.

(o) $\{\varnothing\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist ein Halbring auf X.

(i) Die Familie bestehend aus $\varnothing$ und allen (einelementigen) Teilmengen $\{\varnothing\} \cup \{\{a\} \mid a \in X\}$ ist ein Halbring auf X, sie erzeugt den Ring der endlichen Teilmengen von X.

Der Grundbaustein für später:

(ii) Die Familie der *halboffenen* Intervalle $[a, b) \subset \mathbb{R}$, falls $a < b$, also ist

$$\mathcal{I} := \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

ein Halbring auf $\mathbb{R}$.

Beschreibe den von einem Halbring erzeugenden Ring, die folgende Beobachtung wird darüber hinaus nützlich sein:

Lemma (Simultane Zerlegung)**.** Zu beliebigen Teilmengen $H_1, ..., H_m \in \mathscr{H}$ existieren paarweise disjunkte Teilmengen $H_1', ..., H_n' \in \mathscr{H}$, sodass jedes H_i sich als die Vereinigung einiger H_j''s darstellen lässt.

Beweis. Betrachte die $2^m - 1$ Durchschnitte der Form $G_1 \cap ... \cap G_m$, wobei $G_i = H_i$ oder $\complement H_i$ und nicht alle gleich $\complement H_i$. Sie sind paarweise disjunkt und zerlegen $H_1 \cup ... \cup H_m$. Jedes H_i ist die Vereinigung von 2^{m-1} von ihnen. Es genügt zu zeigen, dass diese Durchschnitte disjunkte Vereinigungen von Teilmengen aus $\mathscr{H}$ sind. Da Halbringe $\cap$-stabil sind, reicht es zu zeigen, dass die Teilmengen der Form

$$H \cap \complement \widetilde{H}_l \cap ... \cap \complement \widetilde{H}_1 \quad \text{mit } H, \widetilde{H}_1, ..., \widetilde{H}_l \in \mathscr{H}$$

disjunkte Vereinigungen von Teilmengen in $\mathscr{H}$ sind.
Da für $H \cap \complement \widetilde{H}_l = H \backslash \widetilde{H}_l$ (Axiom (iii)) gilt, reduziert die Behauptung für l auf Behauptung für $l - 1$, mit Induktion liefert dann die Behauptung. ∎

21.10.2019

Proposition. Jede Teilmenge im von einem Halbring $\mathscr{H}$ erzeugten Ring $\mathscr{R}$ ist eine endliche disjunkte Vereinigung von Teilmengen in $\mathscr{H}$, d.h. (ein einfacher Erzeugungsprozess!)

$$\mathscr{R} = \left\{ \bigsqcup_{k=1}^{n} H_k \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, H_1, ..., H_n \in \mathscr{H} \right\}. \tag{1.1}$$

Beweis. Sei $\mathscr{R}$ die Familie der endlichen *disjunkten* Vereinigungen von Teilmengen in $\mathscr{H}$. Mit dem letzten Lemma "Simultane Zerlegung" ist $\mathscr{R}$ gleich der Familie aller endlichen Vereinigungen von Teilmengen in $\mathscr{H}$. Sie ist offensichtlich $\cup$-stabil. Zu verifizieren bleibt die \- Stabilität. Seien hierzu $A = A_1 \cup ... \cup A_m$ und $B = B_1 \cup ... \cup B_n$, $A_i, B_j \in \mathscr{H}$. Aus dem Lemma "Simultane Zerlegung" folgt, dass es endlich viele nichtleere, *paarweise disjunkte* $H'_k \in \mathscr{H}$ existieren, sodass jedes A_i und B_j eine Vereinigung einiger H'_k's ist. Daraus folgt, dass auch A und B Vereinigungen einiger H'_k's sind. So ist auch $A \backslash B$ die Vereinigung einiger H'_k's, nämlich derer, die in A, aber nicht in B enthalten sind. Also ist $\mathscr{R}$ ein Ring, enthalten in von $\mathscr{H}$ erzeugendem Ring(denn Ringe sind $\cup$-stabil), also gleich. ∎

Bemerkung. Man kann den von einer Familie $\mathcal{E}$ erzeugten Halbring nicht (analog zu Ringen und Algebren) definieren, denn das Halbring-Axiom (iii) vererbt nicht auf Durchschnitte von Familien. Es gibt Durchschnitte von Halbringen, die keine Halbringe sind. M.a.W. existieren Familien, die nicht in einem eindeutigen kleinsten Halbring enthalten sind.

1.2.4 Produkte von Halbringen und Ringen

Sind $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{P}(X_i), i = 1, ..., n$ Familien von Teilmengen, so entsteht das Produkt von "Quadern"

$$\mathcal{F}_1 * ... * \mathcal{F}_n := \{\underbrace{M_1 \times ... \times M_n}_{\subset X_1 \times ... \times X_n} \mid M_i \in \mathcal{F}_i \text{ für } i = 1, ..., n\}$$
$$\subset \mathcal{P}(X_1 \times ... \times X_n)$$

und die $\cup$-stabile Hülle, die Familie $\mathcal{F}_1 \boxtimes ... \boxtimes \mathcal{F}_n$ der endlichen Vereinigungen von "Quadern" in $\mathcal{F}_1 * ... * \mathcal{F}_n$, die Figuren,

$$\mathcal{F}_1 \boxtimes ... \boxtimes \mathcal{F}_n = \{\text{endlcihe Vereinigungen von Teilmengen in } \mathcal{F}_1 * ... * \mathcal{F}_n\}$$

Beide Produkte $*$ und $\boxtimes$ sind *assoziativ*, d.h.

$(\mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2) * \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2 * \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 * (\mathcal{F}_2 * \mathcal{F}_3)$ und $(\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2) \boxtimes \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 \boxtimes (\mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{F}_3)$.

Wir definieren weiter

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n) \subset \mathcal{P}(X_1 \times ... \times X_n)$$

die Familie der **Zylindermengen**

$$\pi_k^{-1}(M_k) = X_1 \times ... \times X_{k-1} \times M_k \times X_{k+1} \times ... \times X_n$$
$$\text{mit } 1 \leqslant k \leqslant n, M_k \in \mathcal{F}_k$$

wobei $\pi_k : X_1 \times ... \times X_n \to X_k, (x_1, ..., x_n) \mapsto x_k$ die natürliche Projektion ist.
Falls $X_i \in \mathcal{F}_i \; \forall i$, so ist $\mathcal{Z}(\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n) \subset \mathcal{F}_1 * ... * \mathcal{F}_n$.

Proposition.

(i) Seien $\mathscr{H}_i \subset \mathcal{P}(X_i)$ Halbringe $(i = 1, ..., n)$ und $\mathscr{R}_i \subset \mathcal{P}(X_i)$ die von ihnen erzeugten Ringe. Dann ist $\mathscr{H}_1 * ... * \mathscr{H}_n$ ein Halbring auf $X_1 \times ... \times X_n$ und $\mathscr{H}_1 \boxtimes ... \boxtimes \mathscr{H}_n = \mathscr{R}_1 \boxtimes ... \boxtimes \mathscr{R}_n$ der von ihm erzeugte Ring.

(ii) Sind $\mathscr{R}_i \subset \mathcal{P}(X_i)$ Ringe und $\mathcal{E}_i \subset \mathscr{R}_i$ Erzeugendensysteme für $i = 1, ..., n$, so wird der Produktring $\mathscr{R}_1 \boxtimes ... \boxtimes \mathscr{R}_n$ von der Familie von Quandern $\mathcal{E}_1 * ... \mathcal{E}_n$ erzeugt.

(iii) Sind die $\mathscr{R}_i$ Algebren, so wird der Produktring $\mathscr{R}_1 \boxtimes ... \boxtimes \mathscr{R}_n$ von den Zylindermengen $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n)$ erzeugt.

(iv) Sind $\mathscr{A}_i \subset \mathcal{P}(X_i)$ σ-Algebren und $\mathcal{E}_i \subset \mathscr{A}_i$ Erzeugendensysteme für $i = 1, ..., n$, so wird die Produkt-σ-Algebra von $\mathcal{Z}(\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n)$ sowie von $\mathcal{E}_1 * ... * \mathcal{E}_n$ erzeugt.

Beweis.

(i) Zunächst im Fall $n = 2$. Klar enthält $\mathscr{H}_1 * \mathscr{H}_2$ auch $\varnothing$ und ist $\cap$-stabil. Wir betrachten die disjunkte Zerlegung

$$(A_1 \times A_2) \backslash (B_1 \times B_2) =$$
$$\Big(\underbrace{(A_1 \cap B_1)}_{\in \mathscr{H}_1} \times \underbrace{(A_2 \backslash B_2)}_{\substack{\text{zerlegbar in}\\ \text{Teilmengen}\\ \text{aus } \mathscr{H}_2}}\Big) \sqcup \underbrace{\Big(\underbrace{(A_1 \backslash B_1)}_{\substack{\text{zerlegbar in}\\ \text{Teilmengen}\\ \text{aus } \mathscr{H}_1}} \times \underbrace{(A_2 \backslash B_2)}_{\substack{\text{zerlegbar in}\\ \text{Teilmengen}\\ \text{aus } \mathscr{H}_2}}\Big)}_{\text{zerlegbar in Teilmengen aus } \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2} \sqcup \underbrace{\big((A_1 \backslash B_1) \times (A_2 \cap B_2)\big)}_{\text{analog zerlegbar}}$$

Also ist $(A_1 \times A_2) \backslash (B_1 \times B_2)$ disjunkt zerlegbar in Teilmengen aus $\mathscr{H}_1 * \mathscr{H}_2$, also erfüllt Axiom (iii) für Halbringe, d.h. $\mathscr{H}_1 * \mathscr{H}_2$ ist ein Halbring.
Mit Induktion liefert dann die Behauptung auch für $\mathscr{H}_1 * ... * \mathscr{H}_n, n \geqslant 1$.
Aus (1.1) folgt, dass $\mathscr{H}_1 \boxtimes ... \boxtimes \mathscr{H}_n$ der von $\mathscr{H}_1 * ... * \mathscr{H}_n$ erzeugte Ring ist.

(ii) Für jedes i wird der Ring auf $X_1 \times ... \times X_n$ bestehend aus den Zylindermengen $\pi_i^{-1}(M_i)$ für $M_i \in \mathscr{R}_i$ von der Familie der Zylindermengen $\pi_i^{-1}(E_i)$ für $E_i \in \mathcal{E}_i$ erzeugt, denn jede Teilmenge $M_i \in \mathscr{R}_i$ kann durch endlich viele Mengenoperationen aus Teilmengen $E_{ij} \in \mathcal{E}_i$ hergestellt werden und $\pi_i^{-1}(M_i)$ entsprechend aus den $\pi_i^{-1}(E_{ij})$.
Daraus folgt, dass $\mathcal{Z}(\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n)$ erzeugt denselben Ring wie $\mathcal{Z}(\mathscr{R}_1, ..., \mathscr{R}_n)$ und denselben wie $\mathscr{R} * ... * \mathscr{R}_n$, also den Produktring $\mathscr{R}_1 \boxtimes ... \boxtimes \mathscr{R}_n$.

(iii) Übung.

■

Definition. Wir nennen den Halbring $\mathscr{H}_1 * ... * \mathscr{H}_n$ das Produkt der Halbringe $\mathscr{H}_i$, den Ring $\mathscr{R}_1 \boxtimes ... \boxtimes \mathscr{R}_n$ das Produkt der Ringe $\mathscr{R}_i$.

Hauptbeispiel (Quader und Figuren in $\mathbb{R}^d$). Ist $a, b \in \mathbb{R}^d$ mit $a_i < b_i \forall i$, so entsteht ein achsenparalleler halboffener Quader

$$[a, b) := [a_1, b_1) \times ... \times [a_d, b_d).$$

Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{Q}^d$$

die Familie solcher Quader, und

$$\mathcal{I} := \mathcal{Q}^1,$$

die Familie der halboffenen Intervalle. Also ist

$$\mathcal{Q}^d = \underbrace{\mathcal{I} * ... * \mathcal{I}}_{d\text{-Mal}}.$$

Aus der letzten Proposition folgt, dass $\mathcal{Q}^d$ ein Halbring auf $\mathbb{R}^d$ ist. Es folgt ebenfalls, dass

$$\mathcal{F}^d := \underbrace{\mathcal{I} \boxtimes ... \boxtimes \mathcal{I}}_{d\text{-Mal}}$$

der Ring erzeugt von $\mathcal{Q}^d$ ist, also der Ring der d-dimensionale "Figuren". Wir haben gesehen: Figuren sind disjunkte Vereinigungen von Quadern.

Wir arbeiten aus technischen Gründen mit halboffenen Intervallen und Quadern. Besonders übersichtliche sind Halbringe, die abgeschlossen unter Produktbildung sind, jedoch nicht die Teilmengen enthalten, die uns geometrisch primär interessieren: die offenen und abgeschlossenen Quader, die nicht achsenparallele sind, Polygone und Polytope, gekrümmte "elementare Geometrie" sowie Gebilde: Scheiben, Bälle, Zylinder und Kegel. Deshalb müssen wir unsere Ringe weiter anreichern und flexibilisieren, damit sie stabil unter abzählbaren Vereinigungen sind. $\rightsquigarrow$ σ-Algebra.

1.3 Inhalte und Prämaße

Wir beginnen mit der Untersuchung von Volumenfunktionen. Die grundlegende Forderung ist die *Additivität*. Volumina dürfen nicht negativ sein, d.h. $\in [0, \infty] := [0, \infty) \cup \{\infty\}$, also die erweiterte positive Halbgerade.

Bemerkung. Die erweiterten reellen Zahlen ist definiert als $\overline{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit natürlichen Konventionen

$$x + \infty = \infty \text{ für } x > -\infty$$
$$x \cdot \infty = \infty \text{ für } x > 0$$

Später werden wir außerdem sehen $0 \cdot \infty = 0$ (da $0 \cdot n \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$).

1.3.1 Inhalte auf Halbringen und Ringen

Die allgemeinste Sorte von uns betrachteter Volumenfunktion ist endlich additiv und definiert auf Halbringen.

Definition (Inhalt). Ein Inhalt auf einer Halbring $\mathscr{H}$ ist eine Funktion $\mu : \mathscr{H} \to [0, \infty]$ mit den Eigenschaften:

(i) $\mu(\varnothing) = 0$,

(ii) *Additivität*: Sind $A_1, ..., A_n \in \mathscr{H}$ paarweise disjunkt mit $A_1 \sqcup ... \sqcup A_n \in \mathscr{H}$ [2], so gilt $\mu(A_1 \sqcup ... \sqcup A_n) = \mu(A_1) + ... + \mu(A_n)$.

Beispiel.

(o) $\mu \equiv 0$ "der Nullinhalt" und

$\nu(A) = \begin{cases} 0, & A = \varnothing \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$ sind stets Inhalte auf beliebigen Halbringen.

(i) Sei X nichtleer. Betrachte die Algebra $\{\varnothing, X\} \subset \mathcal{P}(X)$. So wird ein Inhalt

$\begin{cases} \varnothing \mapsto 0 \\ x \mapsto v \in [0, \infty] \text{ beliebig} \end{cases}$ definiert.

Beispiel (Halboffene Intervalle in $\mathbb{R}$, der Grundbaustein für Lebesgue-Maß)**.** Auf dem Halbring $\mathcal{I} = \mathcal{Q}^1 \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ wird ein Inhalt gegeben durch die euklidische Länge

$$\lambda^1_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \to [0, \infty), \quad \lambda^1_{\mathcal{I}}\big([a, b)\big) := b - a \ (a < b).$$

Wir überprüfen die Additivität: Sei $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ eine Unterteilung von $[a, b)$. So entsteht die disjunkte Zerlegung $[a, b) = [a, x_1) \sqcup ... \sqcup [x_{n-1}, b)$. Es folgt

$$\underbrace{\lambda^1_{\mathcal{I}}\big([a, b)\big]}_{b-a} = \underbrace{\lambda^1_{\mathcal{I}}\big([a, x_1)\big)}_{x_1-a} + \underbrace{\lambda^1_{\mathcal{I}}\big([x_1, x_2)\big)}_{x_2-x_1} + ... + \underbrace{\lambda^1_{\mathcal{I}}\big([x_{n-1}, b)\big)}_{b-x_{n-1}}$$

24.10.2019

Lemma (Einfache Eigenschaften von Inhalten)**.** Seien $\mathscr{H}$ ein Halbring und $\mu : \mathscr{H} \longrightarrow [0, \infty]$ ein Inhalt. Dann gilt:

(i) *Monotonie*: Ist $A, B \in \mathscr{H}$ mit $A \subset B$, so ist $\mu(A) \leqslant \mu(B)$,

(ii) *Subadditivität:* Seien $A_1, ..., A_n \in \mathscr{H}$ *(nicht notwendigerweise disjunkt!)* mit $A_1 \cup ... \cup A_n \in \mathscr{H}$, dann gilt

$$\mu(A_1 \cup .... \cup A_n) \leqslant \mu(A_1) + ... + \mu(A_n).$$

Beweis.

(i) Setze $B \backslash A = C_1 \sqcup ... \sqcup C_n$ mit $C_i \in \mathscr{H}$ paarweise disjunkt, bzw. $B = A \sqcup C_1 \sqcup ... \sqcup C_n$. Aus der Additivität folgt dann $\mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(C_1) + ... + \mu(C_n)}_{\geqslant 0} \geqslant \mu(A)$.

(ii) Aus dem Lemma "simultane Zerlegung" folgt, dass es paarweise disjunkte $H_i \in \mathscr{H}$ existieren, sodass jedes A_j die Vereinigung einiger von H_i ist. Entsprechend summieren sich die Volumina auf. Die Ungleichung folgt, denn jedes $\mu(H_j)$ *genau einmal* auf der linken Seite und je *mindestens einmal* auf der rechten Seite.

■

[2] Die Voraussetzung ist redundant, falls $\mathscr{H}$ ein Ring ist.

1.3.2 Fortsetzung von Inhalten von Halbringen auf Ringe

Satz. Jeder Inhalt μ auf einem Halbring $\mathscr{H}$ besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einem Inhalt $\overline{\mu}$ auf dem von $\mathscr{H}$ erzeugten Ring $\mathscr{R}$.

Beweis.

- *Eindeutigkeit* folgt aus der Additivität von Inhalten und Beschreibung des erzeugten Rings $\mathscr{R}$. Jede Teilmenge in $\mathscr{R}$ ist eine disjunkte Vereinigung (wegen (1.1)) $A_1 \sqcup ... \sqcup A_n$ mit $A_i \in \mathscr{H}$. Daher notwendig

$$\overline{\mu}(A_1 \sqcup ... \sqcup A_n) = \underbrace{\mu(A_1)}_{=\overline{\mu}(A_1)} + ... + \overline{\mu}(A_n) \tag{1.2}$$

- *Existenz* bzw. *Wohldefiniertheit* von $\overline{\mu}$ durch (1.2): Wir betrachten eine weitere disjunkte Zerlegung derselben Teilmengen

$$A_1 \sqcup ... \sqcup A_n = B_1 \sqcup ... \sqcup B_m \in \mathscr{R}, A_i, B_j \in \mathscr{H}$$

  so entstehen Zerlegungen

$$A_i = \bigsqcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j)$$
$$B_j = \bigsqcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B_j)$$

  Daraus folgt *(Wir bemerken, dass $A_i \cap B_j \in \mathscr{H}$, denn $\mathscr{H}$ $\cap$-stabil ist.)*

$$\sum_i \mu(A_i) = \sum_i \underbrace{\sum_j \mu(A_i \cap B_j)}_{\mu(A_i)} = \sum_j \underbrace{\sum_i \mu(A_i \cap B_j)}_{\mu(B_j)} = \sum_j \mu(B_j)$$

  Also ist $\overline{\mu}$ wohldefiniert.

- Es bleibt zu zeigen, dass $\overline{\mu}$ tatsächlich ein Inhalt ist. $\overline{\mu}$ ist laut der Definition (1.2) offensichtlich additiv und somit ein Inhalt.

■

Bemerkung. Hat μ endliche Werte, so hat $\overline{\mu}$ auch endliche Werte.

Beispiel. Wir setzen den auf dem Halbring $\mathcal{I}$ definierten Inhalt $\lambda^1_{\mathcal{Q}^1} : \underset{\text{Halbring}}{\mathcal{I} = \mathcal{Q}^1} \to [0, \infty)$ fort zu

$$\lambda^1_{\mathcal{F}^1} : \mathcal{F}^1 \longrightarrow [0, \infty)$$

wobei $\mathcal{F}^1$ den von $\mathcal{Q}^1$ erzeugten Ring der 1-dimensionale Figuren bezeichnen, also ist $\lambda^1_{\mathcal{F}}$ definiert als die Summe der Längen der Teilintervalle.

Bemerkung. Die Fortsetzung von Inhalten von Ringen auf Algebren ist nicht eindeutig. Z.B. betrachten wir die vom Ring $\mathscr{R} = \{\varnothing\}$ erzeugte Algebra $\mathscr{A} = \{\varnothing, X\}$, so können wir den Inhalt von X beliebig $\in [0, \infty)$ wählen.

1.3.3 Prämaße

Wir betrachten Verhalten von Volumina bei gewissen Grenzprozessen. (Approximation von innen und außen) Wir arbeiten mit Teilmengen einer festen Menge X.

Falls $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von Teilmengen von X mit

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A, \quad A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ... \subset X$$

so schreiben wir $A_n \nearrow A$.

Falls $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ absteigend mit

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A'_n = A, \quad X \supset A'_1 \supset A'_2 \supset ... \supset A'_n \supset ...$$

so schreiben wir $A'_n \searrow A$.

Beobachtung. Es gelten

$$\begin{aligned} A_n \nearrow A &\iff A\backslash A_n \searrow \varnothing \\ A'_n \searrow A &\iff A'_n\backslash A \searrow \varnothing \end{aligned}$$

Sei $\mu : \mathscr{R} \longrightarrow [0,\infty]$ ein Inhalt. Dann gilt

$$A_n \nearrow A \swarrow A'_n \xRightarrow{\text{Monotonie}} \underset{\text{wächst}}{\mu(A_n)} \leqslant \mu(A) \leqslant \underset{\text{fällt}}{\mu(A'_n)}$$

Da $\mu(A_n)$ und $\mu(A'_n)$ nur *schwach* monoton sind, folgt nur die Ungleichung

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \leqslant \mu(A) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mu(A'_n) \tag{1.3}$$

Wir formulieren nun einen disjunkte Zerlegung für A_n durch einen Induktiven Prozess: (Man beachte, dass $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge ist.)

$$\begin{aligned} A_0 &:= \varnothing \\ \widetilde{A}_n &:= A_n\backslash A_{n-1} \end{aligned}$$

so entsteht die disjunkte Zerlegung

$$A = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{A}_n$$

Dann ist (1.3) äquivalent zu: Für Folgen $(\widetilde{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Teilmengen mit $A := \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{A}_n \in \mathscr{R}$ gilt

$$\mu\Bigg(\underbrace{\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{A}_n}_{=A}\Bigg) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\widetilde{A}_n) \tag{σ-Supadditivität}$$

Gilt in einer der Gleichung (1.3) die Gleichheit, so fassen wir das als **Stetigkeitseigenschaften** auf. Wir vergleichen nun die Stetigkeitseigenschaften:

Proposition. Für einen Inhalt $\mu : \mathscr{R} \longrightarrow [0,\infty]$ auf einem Ring $\mathscr{R}$ sind die beiden folgenden Eigenschaften äquivalent:

(i) *σ-Additivität:* Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen in $\mathscr{R}$ mit $\bigsqcup_n A_n \in \mathscr{R}$, so gilt

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(ii) *Stetigkeit von unten:* Ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge in $\mathscr{R}$, so gilt

$$B_n \nearrow B \in \mathscr{R} \implies \mu(B_n) \nearrow \mu(B).$$

Sie implizieren die beiden folgenden, ebenfalls zueinander äquivalenten, Eigenschaften:

(iii) *Stetigkeit von oben:* Ist $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge in $\mathscr{R}$ **mit** $\mu(C_n) < \infty$, so gilt

$$C_n \searrow C \in \mathscr{R} \implies \mu(C_n) \searrow \mu(C).$$

(iv) *Stetigkeit von $\varnothing$:* Ist $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge in $\mathscr{R}$ **mit** $\mu(D_n) < \infty$, so gilt

$$D_n \searrow \varnothing \implies \mu(D_n) \searrow 0.$$

Falls μ endliche Werte hat, gilt umgekehrt (iii), (iv) $\implies$ (i), (ii).

Beweis.

- (i) $\iff$ (ii). Übergang durch $B_n = A_1 \sqcup ... \sqcup A_n$, bzw. $A_n = B_n \backslash B_{n-1}$, $B = \bigsqcup_n A_n$. Aus der endlichen Additivität folgt $\mu(B_n) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$. Daraus folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$. Außerdem gilt $\mu(B) = \mu(\bigsqcup_n A_n)$. ✓
- (ii) $\implies$ (iii). Sei $C_n \searrow C$ mit endlichen Inhalten. Setze $B_n := C_1 \backslash C_n \in \mathscr{R}$ und $B := C_1 \backslash C$, d.h. $C_1 = B_n \sqcup C_n$ und $C_1 = B \sqcup C$. Daraus folgt wegen der Additivität des Inhalts $\mu(C_1) = \mu(B_n) + \mu(C_n) = \mu(B) + \mu(C)$. Es gilt n.V. $\mu(B_n) \nearrow \mu(B)$, da $B_n \nearrow B$. Da alle Inhalte endlich sind, gilt $\mu(B_n) = \mu(C_1) - \mu(C_n)$ und $\mu(B) = \mu(C_1) - \mu(C)$. Also gilt $\mu(C_1) - \mu(C_n) \nearrow \mu(C_1) - \mu(C)$. Daraus folgt, dass $\mu(C_n) \searrow \mu(C)$, also (iii).
- (iii) $\Longleftarrow$ (iv). (Die andere Richtung ist klar, da (iv) ist Spezialfall von (iii)!) Sei $C_n \searrow C$ mit endlichen Inhalten. Setze $D_n := \underbrace{C_n \backslash C}_{\in \mathscr{R}} \searrow \varnothing$. Dann ist $C_n = D_n \sqcup C$ und somit $\mu(C_n) = \mu(D_n) + \mu(C)$. Da alle Inhalte endlich sind, gilt $\underbrace{\mu(D_n)}_{\searrow 0 \text{ wegen (iv)}} = \mu(C_n) - \mu(C)$. Daraus folgt $\mu(C_n) \searrow \mu(C)$, also (iii).
- μ habe endliche Werte, es gelte (iv). Zeige (ii). Sei $B_n \nearrow B$. Setze $D_n := B \backslash B_n$. Da $\underbrace{\mu(D_n)}_{\searrow 0 \text{ wg (iv)}} = \mu(B) - \mu(B_n)$ und alle Inhalte endlich sind, gilt $\mu(B_n) \nearrow \mu(B)$, d.h. (ii).

■

28.10.2019

Es ist natürlich und geboten, von Inhalten σ-Additivität zu verlangen. $\rightsquigarrow$ leistungsfähige Volumentheorie. (E. Borel, Lebesgue $\sim$1900)

Definition. Ein **Prämaß** auf einem *Ring* ist ein σ-additiver Inhalt.

Beispiel. Sei X unendlich. Betrachte $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$ die Algebra erzeugt von endlichen Teilmengen, besteht aus endlichen Teilmengen und deren Komplementen. Definieren Inhalt μ auf $\mathscr{A}$ durch

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ endlich} \\ 1, & \text{falls } \complement A \text{ endlich} \end{cases}$$

Sind $A_1, ..., A_n$ paarweise disjunkt und nicht alle A_i endlich, so gibt es genau ein A_i unendlich. Daraus folgt

$$\underbrace{\mu(A_1) + ...\mu(A_n)}_{\text{genau ein Beitrag 1}} = 1 = \mu(A_1 \sqcup ... \sqcup A_n).$$

Also war die endliche Additivität. Die σ-Additivität wird genau dann verletzt, falls X abzählbare Zerlegung in endlichen Teilmengen ($\iff$ X abzählbar) zulässt.[3] Daraus folgt: μ Prämaß $\iff$ X überabzählbar (z.B. $X = \mathbb{R}$).

Satz. Der Inhalt $\lambda^1_{\mathcal{F}^1}$ ist ein Prämaß.

(Später, nach Produkten, Beweis in beliebiger Dimension.)

Beweis. Zu zeigen ist die σ-Additivität. Dies ist wegen endlicher Werte von $\lambda^1_{\mathcal{F}^1}$ äquivalent zu Stetigkeit in $\varnothing$. Diese weisen wir jetzt nach. Das Argument beruht auf *topologischen* Eigenschaften von $\mathbb{R}$, nämlich Lokalkompaktheit. Wir betrachten eine Folge absteigender Figuren (d.h. *endliche* Vereinigung halboffener Intervalle $[a, b)$), nämlich

$$F_1 \supset F_2 \supset ... \supset ... \supset F_n \supset ... \quad \text{mit } F_n \in \mathcal{F}^1.$$

Stetigkeit in $\varnothing$ bedeutet: $\underbrace{F_n \searrow \varnothing}_{\iff \bigcap_n F_n = \varnothing} \implies \lambda^1_{\mathcal{F}^1}(F_n) \searrow 0$. Wir notieren $\lambda = \lambda^1_{\mathcal{F}^1}$.

Annahme: $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(F_n) \geqslant v_0 > 0$. Zu zeigen: $\bigcap_n F_n \neq \varnothing$.

Dazu approximieren wir von innen durch eine geschachtelte Folge von Kompakta K_n. Sei $\varepsilon_n \searrow 0$. Dann existieren $F'_n \in \mathcal{F}^1$ und Kompakta $K_n \subset \mathbb{R}$ sodass $F'_n \subset K_n \subset F_n$ (*Bem.* K_n sind nicht notwendigweise geschachtelt. Wir brauchen F'_n, denn μ ist nicht auf Kompakta definiert.) und $\lambda(F'_n) > \lambda(F_n) - \varepsilon_n$. Wir vergleichen absteigende Folgen

$$\bigcap_{i\leqslant n} F'_i \subset \bigcap_{i\leqslant n} K_i \subset \underbrace{\bigcap_{i\leqslant n} F_i}_{=F_n} .$$

Es genügt zu zeigen, dass

$$\bigcap_{i\leqslant n} K_i \neq \varnothing \quad \forall n, \tag{1.4}$$

[3]Zum Beispiel betrachten wir die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Es gilt $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{n\}) = 0 \neq 1 = \mu\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{n\}\right)$.

denn (1.4) $\xRightarrow{\text{Topologie}} \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \varnothing \implies \bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \varnothing$.
Es gilt

$$\underbrace{\left(\bigcap_{i\leqslant n} F_i\right)}_{F_n} \setminus \left(\bigcap_{i\leqslant n} F_i'\right) = \bigcup_{i\leqslant n}(\underbrace{F_n}_{\subset F_i} \setminus F_i') \subset \bigcup_{i\leqslant n}(F_i \setminus F_i'),$$

also

$$F_n = \bigcap_{i\leqslant n} F_i \subset \left(\bigcap_{i\leqslant n} F_i'\right) \cup \bigcup_{i\leqslant n}(F_i \setminus F_i'),$$

d.h. Überdeckung von F_n durch $n+1$ Teilmengen aus $\mathcal{F}^1$. Aus der σ-Subaddtivität folgt dann

$$\lambda(F_n) \leqslant \lambda\left(\bigcap_{i\leqslant n} F_i'\right) + \sum_{i\leqslant n} \underbrace{\lambda(F_i \setminus F_i')}_{<\varepsilon_i}$$

Da λ endlich-wertig ist, können wir die Gleichung umstellen zu

$$\lambda\left(\bigcap_{i\leqslant n} F_i'\right) \geqslant \underbrace{\lambda(F_n)}_{\geqslant v_0} - \sum_{i\leqslant n} \varepsilon_i > v_0 - \sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n$$

Wähle (ε_n) so, dass $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n < v_0$. Dann folgt

$$\lambda\left(\bigcap_{i\leqslant n} F_i'\right) > 0 \implies \bigcap_{i\leqslant n} F_i' \neq \varnothing \implies \bigcap_{i\leqslant n} K_i \neq \varnothing$$

Also haben wir (1.4) gezeigt und somit war die Behauptung. ■

Definition. $\lambda^1_{\mathcal{F}^1}$ heißt **das eindimensionale Lebesgue-Prämaß**.

1.3.4 Produkte von Inhalten und Prämaßen

Man kann in natürlicher Weise Produkte von Inhalten auf Halbringen und Ringen bilden. Zunächst Halbringe:

Satz. Seien μ_i Inhalte auf Halbringen $\mathscr{H}_i \subset \mathcal{P}(X_i), i = 1, ..., n$. Dann wird durch

$$(\mu_1 \times ... \times \mu_n)\big(H_1 \times ... \times H_n\big) := \mu(H_1) \cdot ... \cdot \mu(H_n), H_i \in \mathscr{H}_i$$

ein Inhalt $\mu_1 \times ... \times \mu_n$ auf dem Produkthalbring $\mathscr{H}_1 * ... * \mathscr{H}_n \subset \mathcal{P}(X_1 \times ... \times X_n)$ definiert.
Zusätzliche *Konvention* für Multiplikation auf $\mathbb{R}$: $0 \cdot \infty = 0$, weil $0 \cdot n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Beweis. (Für $n = 2$, der allgemeiner Fall folgt mit Induktion.)
Wir müssen die *Additivität* nachweisen. Betrachte die endliche Zerlegung eines "Rechtecks" $H_1 \times H_2 \in \mathscr{H}_1 * \mathscr{H}_2$ in endlich viele paarweise disjunkte "Rechtecken" $H_1^{(j)} \times H_2^{(j)} \in \mathscr{H}_1 * \mathscr{H}_2$:

$$H_1 \cdot H_2 = \bigsqcup_j (H_1^{(j)} \times H_2^{(j)}).$$

Aus dem Lemma "simultane Zerlegung" folgt, dass wir H_i in $H_i'^{(k)} \in \mathscr{H}_i, k \in \underset{\text{endlich!}}{K_i}$ zerlegen können, sodass jedes $H_i^{(j)}$ die disjunkte Vereinigung einiger $H_i'^{(k)}$ ist, also

$$H_i^{(j)} = \bigsqcup_{k \in K_i^{(j)}} H_i'^{(k)}, K_i^{(j)} \subset K_i.$$

So entsteht die "karierte" Zerlegung

$$H_1 \times H_2 = \bigsqcup_{(k_1,k_2) \in K_1 \times K_2} \left(H_1'^{(k_1)} \times H_2'^{(k_2)} \right)$$

bzw.

$$H_1^{(j)} \times H_2^{(j)} = \bigsqcup_{(k_1,k_2) \in K_1^{(j)} \times K_2^{(j)}} \left(H_1'^{(k_1)} \times H_2'^{(k_2)} \right).$$

Es gilt die Zerlegung der Indexmenge

$$K_1 \times K_2 = \bigsqcup_j \left(K_1^{(j)} \times K_2^{(j)} \right).$$

Da μ_i additiv ist, folgt

$$\mu_i(H_i) = \sum_{k \in K_i} \mu_i(H_i'^{(k)})$$

bzw.

$$\mu_i(H_i^{(j)}) = \sum_{k \in K_i^{(j)}} \mu_i(H_i'^{(k)}).$$

Es folgt (Die Additivität von $\mu_1 \times \mu_2$ ist klar für "karierte" Zerlegung)

$$\begin{aligned}(\mu_1 \times \mu_2)\big(H_1 \times H_2\big) &= \sum_{(k_1,k_2) \in K_1 \times K_2} (\mu_1 \times \mu_2)\big(H_1'^{(k_1)} \times H_2'^{(k_2)}\big) \\ &= \sum_j \underbrace{\sum_{(k_1,k_2) \in K_1^{(j)} \times K_2^{(j)}} (\mu_1 \times \mu_2)\big(H_1'^{(k_1)} \times H_2'^{(k_2)}\big)}_{= \mu_1 \times \mu_2 (H_1^{(j)} \times H_2^{(j)})}.\end{aligned}$$

Also war die Additivität von $\mu_1 \times \mu_2$. ■

Definition. Wir nennen den Inhalt $\mu_1 \times ... \times \mu_n$ auf dem Halbring $\mathscr{H}_1 * ... * \mathscr{H}_n$ das Produkt der Inhalte μ_i.

Hauptbeispiel (Elementarinhalt). Der Elementarinhalt achsenparalleler Quader $[a, b) \subset \mathbb{R}^d$ für $a, b \in \mathbb{R}^d$ mit $a_i < b_i$ ist definiert als ihr d-dimensionales euklidisches Volumen

$$\lambda^d_{\mathcal{Q}^d}\big([a, b)\big) := (b_1 - a_1) \cdot ... \cdot (b_d - a_d)$$

Der Elementarinhalt $\lambda^d_{\mathcal{Q}^d}$ ist ein Inhalt, denn

$$\lambda^d_{\mathcal{Q}^d} = \underbrace{\lambda^1_{\mathcal{I}} \times ... \times \lambda^1_{\mathcal{I}}}_{d\text{-mal}}$$

bezüglich der Zerlegung $\mathcal{Q}^d = \mathcal{I} \times ... \times \mathcal{I}$.

Für Ringe folgt mit dem Fortsetzungsresultat für Inhalte von Halbringen auf (die von den erzeugte) Ringe:

Korollar. Seien μ_i Inhalte auf Ringen $\mathscr{R}_i \subset \mathcal{P}(X_i)$, $(i = 1, ..., n)$. Dann existiert einen eindeutigen Inhalt $\mu_1 \boxtimes .... \boxtimes \mu_n$ auf dem Produktring $\mathscr{R}_1 \boxtimes ... \boxtimes \mathscr{R}_n \subset \mathcal{P}(X_1 \times ... \times X_n)$ mit

$$(\mu_1 \boxtimes ... \boxtimes \mu_n)\big(R_1 \times ...R_n\big) = \mu_1(R_1) \cdot ...\mu_n(R_n), R_i \in \mathscr{R}_i$$

Hauptbeispiel. Der Elementarinhalt $\lambda^d_{\mathcal{Q}^d} : \mathcal{Q}^d \longrightarrow [0, \infty)$ setzt sich eindeutig fort zu einem Inhalt

$$\lambda^d_{\mathcal{F}^d} : \mathcal{F}^d \longrightarrow [0, \infty)$$

auf d-dimensionalen Figuren, den wir als *d-dimensionales euklidisches Volumen* auffassen.

Auch Prämaße verhalten sich gut unter Produkten:

Satz. Endliche Produkte von Prämaßen sind wieder Prämaße.

Beweis. ($n = 2$, der allgemeiner Fall folgt mit Induktion.)
Seien μ_i Prämaße auf Ringen $\mathscr{R}_i \subset \mathcal{P}(X_i)$, $i = 1, 2.$ und der Produktinhalt $\mu_1 \boxtimes \mu_2$ auf $\mathscr{R}_1 \boxtimes \mathscr{R}_2$ gegeben durch

$$(\mu_1 \boxtimes \mu_2)(R_1 \times R_2) = \mu_1(R_1) \cdot \mu_2(R_2), R_i \in \mathscr{R}_i.$$

Jetzt müssen wir die Additivität des Volumens nachweisen bei *abzählbaren* Zerlegungen von Figuren (d.h. Teilmengen aus $\mathscr{R}_1 \boxtimes \mathscr{R}_2$) in Figuren. Weil Figuren endliche disjunkte Vereinigungen von Quadern sind und der Inhalt $\mu_1 \boxtimes \mu_2$ (endlich) additiv ist, genügt es, abzählbare disjunkte Zerlegungen

$$A_1 \times A_2 = \bigsqcup_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ \text{abzählbar!}}} (A_{1,m} \times A_{2,m})$$

mit $A_i, A_{i,m} \in \mathscr{R}_i$ zu betrachten. Zu zeigen ist also

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} \underbrace{\mu_1(A_{1,m}) \cdot \mu_2(A_{2,m})}_{(\mu_1 \boxtimes \mu_2)(A_{1,m} \times A_{2,m})} = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$$

Wegen der Monotonie von Inhalten gilt die Richtung "$\leqslant$", zu zeigen ist "$\geqslant$". Hierbei 31.10.2019
wird verwendet, dass μ_i Prämaße sind. Wir brauchen eine *untere* Abschätzung von der Summe der Teilvolumina. Betrachte eine Folge approximierender Figuren

$$F_m := \bigsqcup_{i \leqslant m} (A_{1,m} \times A_{2,m}).$$

Wir schätzen $(\mu_1 \boxtimes \mu_2)(F_m)$ nach unten ab. Die X_2-Querschnitte für $x_1 \in A_1$

$$S_{2,m}(x_1) \subset A_2$$

sind definiert durch

$$\{x_1\} \times S_{2,m}(x_1) = F_m \cap (\{x_1\} \times A_2).$$

Dann folgt
$$S_{2,m}(x_1) \in \mathscr{R}_2$$
da $S_{2,m}(x_1)$ die Vereinigung einiger $A_{2,i}$ ist. $S_{2,m}(x_1)$ wachsen mit m und $S_{2,m}(x_1) \nearrow A_2$ für $m \to \infty$ und festes x_1.
Für festes m treten endlich viele Querschnitte auf. Die Punkte $x_1 \in A_1$, für die $S_{2,m}(x_1)$ ein bestimmter Querschnitt ist, bilden eine Figur $\in \mathscr{R}_1$. (Liegt im Unterring erzeugt von $A_{1,i}$.)
Für $0 < v_2 < \mu_2(A_2)$ setze
$$B_{1,m}(v_2) := \{x_1 \in A_1 \mid \mu_2(S_{2,m}(x_1)) \geqslant v_2\} \in \mathscr{R}_1.$$
Dann erhalten wir die Volumenabschätzung:
$$(\mu_1 \boxtimes \mu_2)(F_m) \geqslant \mu_1(B_{1,m}(v_2)) \cdot v_2.$$
Somit:
$$\begin{aligned}
&S_{2,m}(x_1) \nearrow A_2 \\
\xRightarrow{\mu_2 \text{ Prämaß}}\ &\mu(S_{2,m}(x_1) \nearrow \mu_2(A_2) \\
\Longrightarrow\ &B_{1,m}(v_2) \nearrow A_1 \\
\xRightarrow{\mu_1 \text{ Prämaß}}\ &\mu_1(B_{1,m}(v_2)) \nearrow \mu_1(A_1) \\
\Longrightarrow\ &\lim_{m\to\infty} (\mu_1 \boxtimes \mu_2)(F_m) \geqslant \mu_1(A_1) \cdot v_2 \quad \forall\, v_2 \in (0, \mu_2(A_2)) \\
\Longrightarrow\ &\lim_{m\to\infty} (\mu_1 \boxtimes \mu_2)(F_m) \geqslant \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)
\end{aligned}$$
Also die Gleichheit, d.h. $\mu_1 \boxtimes \mu_2$ ist ein Prämaß. ■

Bemerkung. Der letzte Satz wird häufig erst im Rahmen der Integrationstheorie bewiesen (mit Satz von der monotonen Konvergenz).

Zurück zum unsren Hauptbeispiel: Weil der Inhalt $\lambda^d_{\mathcal{F}^d}$ die d-te Potenz des Prämaßes $\lambda^1_{\mathcal{F}^1}$ ist, folgt

Korollar. Der Inhalt $\lambda^d_{\mathcal{F}^d}$ ist ein Prämaß.

Definition. Das Prämaß $\lambda^d_{\mathcal{F}^d}$ heißt **das d-dimensionale Lebesgue-Prämaß**.

1.4 σ-Algebren

1.4.1 σ-Algebren

Wir fordern von Teilmengenfamilien jetzt, dass sie *reichhaltiger* und *flexibel* sind, d.h. dass man innerhalb von ihnen zusätzlich zu den genannten endlichen Mengenoperationen auch gewisse *abzählbar unendliche* Operationen (nämlich Vereinigungen) durchführen kann. D.h. Sie sollen abgeschlossen sein unter gewissen *Grenzprozessen.*

Definition ($\boldsymbol{\sigma}$-Algebra). Eine Familie $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt σ-Algebra auf X, falls:

(i) $\varnothing \in \mathscr{A}$,

(ii) σ-$\cup$-*stabil*, d.h. Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen mit $A_n \in \mathscr{A}$ gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$,

(iii) $\complement$-*stabil*, d.h. $A \in \mathscr{A} \implies \complement A \in \mathscr{A}$.

Man kann (i) bzw. (iii) ersetzen durch die bezüglich Komplementbildung duale Forderung:

(i*) $X \in \mathscr{A}$,

(ii*) δ-$\cap$-*stabil*, d.h. Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen mit $A_n \in \mathscr{A}$ gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.

Leicht können wir einsehen, dass σ-Algebren Algebren sind.

Bemerkung. (i) Beachte formale Ähnlichkeit von (iii) bzw. (iii*) mit Definition einer Topologie: Die Topologie ist die Familie aller offenen Teilmengen, sie ist stabil unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten.

(ii) In σ-Algebren gilt: Alle von innen bzw. außen durch Teilmengen in der σ-Algebra approximierbaren Teilmengen gehören wieder zur σ-Algebra.

Wie im Fall von Ringen und Algebren: Beliebige Durchschnitte von σ-Algebren sind wieder σ-Algebren, deswegen ist die folgende Definition sinnvoll:

Definition (Erzeugendensystem von $\boldsymbol{\sigma}$-Algebren). Die von einer Familie $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ *erzeugte* σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ ist die eindeutige kleinste sie enthaltende σ-Algebra. Man nennt $\mathcal{E}$ ein(en) *Erzeugendensystem* oder *Erzeuger* von $\sigma(\mathcal{E})$.

Die Definition einer σ-Algebra durch ein Erzeugendensystem ist nicht *konstruktiv*! Im Fall von Ringen und Algebren kann man die enthaltenen Teilmengen ausgehend von einem Erzeugendensystem noch explizit angeben, nämlich *induktiv* in *abzählbaren vielen* Schritten konstruieren. Diese ist bei σ-Algebren abgesehen von Ausnahmenfällen nicht mehr möglich, sondern man benötigt zur Konstruktion aus einem Erzeugendensystem einen Prozess mit *überabzählbaren vielen* Schritten. (siehe transfinite Induktion) Dieser Umstand reflektiert, dass die in σ-Algebren enthaltenen Teilmengen i.A. so kompliziert sind, dass man sie nicht mehr explizit beschreiben kann.

Ergänzend: Ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, so kann man durch Anwenden abzählbarer Mengenoperationen immer größere Teilmengenfamilien angeben, die zu $\sigma(\mathcal{E})$ gehören müssen und deren "Verwandtschaftsgrad" zu $\mathcal{E}$ gleichzeitig sukzessive abnimmt.
Zu $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ definiere

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^\nu &:= \left\{\begin{matrix}\text{abzählbare Vereinigungen von Teilmengen in } \mathcal{F} \\ \text{sowie deren Komplementen}\end{matrix}\right\} \subset \mathcal{P}(X) \\
\mathcal{E}_0 &:= \mathcal{E} \cup \{\varnothing\} \\
\mathcal{E}_n &:= \mathcal{E}_{n-1}^\nu \text{ für } n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Anfang der "Borel-Hierarchie", fortsetzen mit transfiniter Induktion.

Einfachste Beispiele.

(o) $\{\varnothing, X\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist eine σ-Algebra auf X, erzeugt von $\varnothing$.
$\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ ist ebenfalls eine σ-Algebra.

(i) Ist $A \subset X$, so ist $\{\varnothing, A, \complement A, X\}$ eine σ-Algebra auf X, erzeugt von $\mathcal{E} = \{A\}$.

(ii) Die Teilmengen von X, die abzählbar sind oder abzählbares Komplement haben, bilden eine σ-Algebra $\mathscr{A}$ auf X, erzeugt von den *einelementigen* Teilmengen. Es gilt: $\mathscr{A} \neq \mathcal{P}(X) \iff X$ überabzählbar.

Von zentraler Wichtigkeit sind Beispiele *topologischen* Ursprungs:

Beispiel.

(i) (**Borelsche $\boldsymbol{\sigma}$-Algebra, Borel-Mengen**) Jeder topologische Raum $(X, \mathcal{T})$ trägt eine natürliche σ-Algebra, nämlich die von seiner Topologie erzeugte σ-Algebra

$$\mathscr{B}(X) := \sigma(\mathcal{T}).$$

Wir nennen $\mathscr{B}(X)$ die *Borelsche σ-Algebra* von X. In ihnen enthaltenen Teilmengen heißen *Borel-Mengen.*
Notation:

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) =: \mathscr{B}^d$$
$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) =: \mathscr{B}$$

(ii) Jeder *metrische* Raum (X, d) trägt eine natürliche Topologie, die von den offenen metrischen Bällen erzeugte Topologie $\mathcal{T}_d$ und damit eine natürliche σ-Algebra

$$\mathscr{B}(X) := \sigma(\mathcal{T}_d).$$

Bemerkung.

(i) Die Borelsche σ-Algebra eines topologischen Raumes wird ebenfalls von den abgeschlossenen Teilmengen erzeugt. (vgl. die Stabilität unter Komplementbildung)

(ii) Ist die Topologie *Hausdorffsch*, so sind kompakte Teilmengen abgeschlossen[4], und daher die von den Kompakta erzeugte σ-Algebra in der Borelschen enthalten. Besitzt der Raum eine abzählbare Überdeckung durch Kompakta, so sind beide σ-Algebren gleich.

Wir haben also gesehen: 4.11.2019

$$\underbrace{(X, \mathcal{T})}_{\text{topologischer Raum}} \rightsquigarrow \text{Borelsche } \sigma\text{-Algebra } \mathscr{B}(X) := \sigma(\mathcal{T}).$$

$\mathscr{B}^d = \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ hat verschiedene natürliche Erzeuger, z.B.

- die Familie der offenen Teilmengen,
- die Familie der abgeschlossenen Teilmengen,

[4] In metrischen Räumen sind Kompakta abgeschlossen und beschränkt. Allgemeiner: In topologischen Räumen mit Hausdorff-Eigenschaft sind Kompakta abgeschlossen. (Ana II, S.30)

- die Familie der Kompakta,
- die Familie der offenen Bälle, bzw. offenen Bälle mit Radien $\in \mathbb{Q}^+$ und Zentren $\in \mathbb{Q}^d$, denn jede offene Teilmenge ist eine abzählbare Vereinigung von offenen Bällen,
- die Familie der abgeschlossenen Bälle,
- die Familie der offenen (achsenparallelen) Quader,
- die Familie der abgeschlossenen (achsenparallelen) Quader.

Lemma. $\mathscr{B}^d$ wird auch von $\mathcal{Q}^d$ (halboffenen, achsenparallelen Quadern) erzeugt.

Beweis. Einerseits: Jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ ist (notwendigerweise) wegen der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ eine abzählbare Vereinigung von Quandern $[a, b)$ aus $\mathcal{Q}^d$ mit rationalen Ecken, d.h. $a_i < b_i \;\forall\, i, a, b \in \mathbb{Q}^d$. Also $\mathscr{B}^d \subset \sigma(\mathcal{Q}^d)$.
Anderseits ist jeder Quader $[a, b)$ mit $a_i < b_i \;\forall\, i$ ein abzählbarer Durchschnitt offener Quader, gehört also zu $\mathscr{B}^d$, denn

$$[a, b) = \underbrace{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\left(a_1 - \frac{1}{n}, b_1\right) \times \ldots \times \left(a_d - \frac{1}{n}, b_d\right)}_{\in \mathcal{T}}}_{\in\; \sigma(\mathcal{T}) = \mathscr{B}^d}$$

Also die Gleichheit. ∎

$\mathscr{B}^d$ ist so reichhaltig, dass sie alle “denkbaren” geometrischen Gebilde in $\mathbb{R}^d$ enthält. Genauerer Vergleich von $\mathscr{B}^d$ mit $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^d}$ folgt später.

1.4.2 Dynkin-Systeme

Wir betrachten jetzt eine Abschwächung von σ-Algebren, die natürlich auftritt.

Definition. Eine Familie $\mathscr{D} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt ein Dynkin-System auf X, falls

(i) $\varnothing \in \mathscr{D}$,

(ii) $\complement$-stabil,

(iii) Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *paarweise disjunkter Teilmengen* $A_n \in \mathscr{D}$ gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{D}$.

Im Vergleich zu σ-Algebren fordern wir zusätzlich die (paarweise) Disjunktheit der Folgenglieder. σ-Algebren sind Dynkin-Systeme.

Proposition. $\cap$-stabile Dynkin-Systeme sind σ-Algebren.

Beweis. Sei $\mathscr{D}$ ein $\cap$-stabiles Dynkin-System. Aus der $\complement$-Stabilität und $\cap$-Stabilität folgt die $\cup$-Stabilität wegen $A \cup B = \complement(\complement A \cap \complement B)$. $\mathscr{D}$ ist also eine Algebra. In Algebren lassen sich abzählbare Vereinigungen als abzählbare *disjunkte* Vereinigungen ausdrücken:

$$A_1 \cup A_2 ... \cup A_n \cup ... = A_1 \sqcup \underbrace{(A_2 \backslash A_1)}_{\in \mathscr{D}} \sqcup \underbrace{(A_3 \backslash (A_1 \sqcup A_2))}_{\in \mathscr{D}} \sqcup ... \in \mathscr{D}$$

D.h. $\mathscr{D}$ enthält beliebige abzählbare Vereinigungen von Teilmengen aus $\mathscr{D}$, ist also eine σ-Algebra. ■

Lemma. Ist $\mathscr{D} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Dynkin-System und $D_1, D_2 \in \mathscr{D}$ mit $D_1 \subset D_2$, so ist $D_2 \backslash D_1 \in \mathscr{D}$.

Beweis. Wegen $\complement(D_2 \backslash D_1) = D_1 \sqcup \complement D_2 \in \mathscr{D}$ gilt $D_2 \backslash D_1 \in \mathscr{D}$. ■

$\rightsquigarrow$ Die Dynkin-Eigenschaft vererbt sich bei gewissen Konstruktionen:

Folgerung. Für $D \in \mathscr{D}$ ist die Spur

$$\mathscr{D}|_D := \{M \subset D \mid M \in \mathscr{D}\} \subset \mathcal{P}(D)$$

von $\mathscr{D}$ auf D ein Dynkin-System auf D. Ebenso ist

$$\mathscr{D}_D := \{M \subset X \mid M \cap D \in \mathscr{D}\} \subset \mathcal{P}(X)$$

ein Dynkin-System auf X.

Beweis. Ist $M \in \mathscr{D}|_D$, so ist $M \in \mathscr{D}$ und wegen des Lemmas $\complement M = D \backslash M \in \mathscr{D}$, also $\complement M \in \mathscr{D}|_D$. Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen in $\mathscr{D}|_D$, so ist $A_n \in \mathscr{D}\ \forall n$, folglich $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathscr{D}$, also $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathscr{D}|_D$.
Ist $M \in \mathscr{D}_D$, so ist $M \cap D \in \mathscr{D}$ und wegen des Lemmas $\underbrace{D \backslash (M \cap D)}_{\complement M \cap D} \in \mathscr{D}$, also $\complement M \in \mathscr{D}_D$.

Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen in $\mathscr{D}_D$, so ist $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \cap D \in \mathscr{D}$, also $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap D) \in \mathscr{D}$, d.h. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathscr{D}_D$. ■

Da beliebige Durchschnitte von Dynkin-Systemen wieder solche sind, gibt es für jede Familie $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ ein eindeutiges kleinstes sie enthaltendes Dynkin-System $\mathscr{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{P}(X)$, genannt **das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System**. Klar gilt $\mathscr{D}(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E})$.

Satz. Von $\cap$-stabilen Familien erzeugte Dynkin-Systeme sind $\cap$-stabil, also σ-Algebren.

Beweis. Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ $\cap$-stabil. Zu zeigen: $\mathscr{D}(\mathcal{E})$ ist $\cap$-stabil. Sei $E \in \mathcal{E}$. Fixiere noch ein $E' \in \mathcal{E}$. Dann gilt nach Voraussetzung $E' \cap E \in \mathcal{E} \subset \mathscr{D}(\mathcal{E})$, d.h. $E' \in \mathscr{D}(\mathcal{E})_E$ (vgl. oben). Daraus folgt $\mathcal{E} \subset \mathscr{D}(\mathcal{E})_E$ und somit $\mathscr{D}(\mathcal{E}) \subset \mathscr{D}(\mathcal{E})_E$, da $\mathscr{D}(E)$ das kleinste Dynkin-System ist, das $\mathcal{E}$ enthält. Wir haben also gezeigt: $\mathscr{D}(\mathcal{E}) \subset \mathscr{D}(\mathcal{E})_E \; \forall E \in \mathcal{E}$. Es folgt

$$\left.\begin{array}{l} E \in \mathcal{E} \\ D \in \mathscr{D}(\mathcal{E}) \end{array}\right\} \implies D \in \mathscr{D}(\mathcal{E})_E \implies D \cap E \in \mathscr{D}(\mathcal{E}) \implies E \in \mathscr{D}(\mathcal{E})_D$$

Wir haben also gezeigt: $\mathcal{E} \subset \mathscr{D}(\mathcal{E})_D \; \forall D \in \mathscr{D}(\mathcal{E})$, weiter gilt $\mathscr{D}(\mathcal{E}) \subset \mathscr{D}(\mathcal{E})_D \; \forall D \in \mathscr{D}(\mathcal{E})$. Dies wiederum bedeutet:

$$D, D' \in \mathscr{D}(\mathcal{E}) \implies D \cap D' \in \mathscr{D}(\mathcal{E})$$

Also ist $\mathscr{D}(\mathcal{E})$ $\cap$-stabil, wird aufgrund der letzten Proposition eine σ-Algebra. ■

Bemerkung. Ist $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil, so gilt $\mathscr{D}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$.

1.4.3 Die messbare Kategorie

"Messbare Objekte" sind Mengen versehen mit σ-Algebren als "messbaren Zusatzstrukturen".

Definition (Messraum, Messbarkeit von Teilmengen). Ein **Messraum** ist ein Paar $(X, \mathscr{A})$ bestehend aus einer Menge X und einer σ-Algebra $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Die Teilmengen in $\mathscr{A}$ heißen **messbar**.

$\rightsquigarrow$ werden Definitionsbereiche unserer Volumenfunktionen (Maße) sein.

Definition (Messbarkeit von Abbildungen). Eine Abbildung $f : (X, \mathscr{A}) \longrightarrow (Y, \mathscr{B})$ von Messräumen heißt **messbar**, falls $f^{-1}(B) \in \mathscr{A} \; \forall B \in \mathscr{B}$, d.h. Urbilder messbarer Teilmengen sollen messbar sein. Man sagt auch $f : X \longrightarrow Y$ ist **$\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-messbar**.

Beobachtung. Kompositionen messbarer Abbildungen sind messbar, denn: ist

$$(X, \mathscr{A}) \xrightarrow[\text{messbar}]{f} (Y, \mathscr{B}) \xrightarrow[\text{messbar}]{g} (Z, \mathscr{C}),$$

so gilt

$$C \in \mathscr{C} \implies g^{-1}(C) \in \mathscr{B} \implies \underbrace{f^{-1}(g^{-1}(C))}_{(g \circ f)^{-1}(C)} \in \mathscr{A}.$$

Also $g \circ f$ ist $\mathscr{A}$-$\mathscr{C}$-messbar.

Zurückziehen von σ-Algebren: Eine Abbildung von Mengen $f : X \longrightarrow Y$ induziert kontravariant eine Abbildung $F^* : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X), M \longmapsto f^{-1}(M)$.
Für $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$ nennt man

$$f^*\mathcal{F} := \{f^{-1}(M) \mid M \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{P}(X)$$

die mit f zurückgezogene Familie.
Ist $\mathscr{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ eine σ-Algebra, so ist $f^*\mathscr{B} \subset \mathcal{P}(X)$ auch eine σ-Algebra, denn

$$f^{-1}\left(\bigcup M_k\right) = \bigcup f^{-1}(M_k)$$
$$f^{-1}(\complement M) = \complement f^{-1}(M).$$

Beobachtung. Gegeben eine σ-Algebra $\mathscr{B}$ auf Y, ist $f^*\mathscr{B}$ die kleinste σ-Algebra auf X, bezüglich derer f messbar ist. Deswegen ist die Reformulierung von der Definition der Messbarkeit der Abbildungen sinnvoll:

Definition. Eine Abbildung $f : (X, \mathscr{A}) \longrightarrow (Y, \mathscr{B})$ ist genau dann messbar, wenn $f^*\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$. Ist speziell $X \subset Y$ eine Teilmenge und $\iota : X \longrightarrow Y$ die Inklusion, so ist $\iota^{-1}(M) = X \cap M$ für $M \subset Y$. Für eine σ-Algebra $\mathscr{B}$ auf Y nennt man

$$\boxed{\mathscr{B}|_X := \iota^*\mathscr{B} = \{M \cap X \mid M \in \mathscr{B}\} \subset \mathcal{P}(X)}$$

die **Spur-σ-Algebra** von $\mathscr{B}$ auf X. Die Inklusion ist dann $\mathscr{B}|_X$-$\mathscr{B}$-messbar.

Man kann Erzeugendensysteme von σ-Algebren zurückziehen:

Lemma. Ist $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung und $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$, so gilt $\sigma(f^*\mathcal{F}) = f^*(\sigma(\mathcal{F}))$.

Beweis. Einerseits: $f^*(\sigma(\mathcal{F}))$ ist σ-Algebra, enthält $f^*\mathcal{F} \implies \sigma(f^*\mathcal{F}) \subset f^*(\sigma(\mathcal{F}))$.
Anderseits ist $\{A \in \sigma(\mathcal{F}) \mid f^{-1}(A) \in \sigma(f^*\mathcal{F})\}$ eine Algebra, die $\mathcal{F}$ enthält und in $\sigma(\mathcal{F})$ enthalten ist, somit Gleichheit. D.h. $A \in \sigma(\mathcal{F}) \implies f^{-1}(A) \in \sigma(f^*\mathcal{F})$, somit $f^*(\sigma(\mathcal{F})) \subset \sigma(f^*\mathcal{F})$. ■

Das Lemma lässt sich reformulieren: Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung, $\mathscr{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ eine 7.11.2019
σ-Algebra und $\mathcal{E} \subset \mathscr{B}$ Erzeugendensystem, so wird $f^*\mathscr{B}$ von $f^*\mathcal{E}$ erzeugt. Wir können also Erzeuger zurückziehen.[5]

$$\begin{array}{ccc} \text{topologische Kategorie} & \rightsquigarrow & \text{Klasse der Borelschen Messräume} \\ (X, \mathcal{T}) & \rightsquigarrow & (X, \mathscr{B}(X)) \end{array}$$

Definition. Sind $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, so heißt eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ **Borel-messbar**, falls sie $\mathscr{B}(X)$-$\mathscr{B}(Y)$-messbar ist.

Lemma. Stetige Abbildungen sind Borel-messbar.

Beweis. Mit Notation der Definition: Die Stetigkeit von $f : X \longrightarrow Y$ bedeutet, dass $f^*\mathcal{T}_Y \subset \mathcal{T}_X$. Es folgt

$$f^*(\underbrace{\mathscr{B}(Y)}_{\sigma(\mathcal{T}_Y)}) \overset{\text{Lemma}}{=} \sigma(\underbrace{f^*\mathcal{T}_Y}_{\subset \mathcal{T}_X}) \subset \sigma(\mathcal{T}_X) = \mathscr{B}(X).$$

■

[5] Folgerung: $f : (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$ ist genau dann messbar, wenn $f^*\mathcal{E} \subset \mathscr{A}$ mit $\sigma(\mathcal{E}) = \mathscr{B}$.

1.4.4 Produkte von σ-Algebren

Wir konstruieren endliche Produkte von σ-Algebren bzw. Messräumen.

Definition. Seien $(X_i, \mathscr{A}_i)$ Messräume $(i = 1, ..., n)$.

Die **Produkt-$\boldsymbol{\sigma}$-Algebra** $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \otimes ... \otimes \mathscr{A}_n$ ist definiert als die σ-Algebra auf $X = X_1 \times ... \times X_n$ erzeugt von $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\mathscr{A}_1, ..., \mathscr{A}_n)$, d.h. von $\pi_i^{-1}(A_i)\ \forall A_i \in \mathscr{A}_i$[6], $i = 1, ..., n$ und ebenfalls erzeugt vom Halbring $\mathcal{Q} = \mathscr{A}_1 * ... * \mathscr{A}_n \supset \mathcal{Z}$ der Quader $A_1 \times ... \times A_n$ mit $A_i \in \mathscr{A}_i$.

Die σ-Algebra $\mathscr{A}_1 \otimes ... \otimes \mathscr{A}_n$ auf $X_1 \times ... \times X_n$ heißt das Produkt der σ-Algebren $\mathscr{A}_i$, und der Messraum $(X_1 \times ... \times X_n, \mathscr{A}_1 \otimes ... \times \mathscr{A}_n)$ das Produkt der Messräume $(X_i, \mathscr{A}_i)$.

Das Produkt ist *assoziativ*, z.B. gilt $(\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2) \otimes \mathscr{A}_3 = \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 \otimes \mathscr{A}_3 = \mathscr{A}_1 \otimes (\mathscr{A}_2 \otimes \mathscr{A}_3)$.(Ü)

Die natürlichen Projektionen $\pi_k : X_1 \times ... \times X_n \longrightarrow X_k$ sind messbar. Die Produkt-σ-Algebra ist charakterisiert als *die kleinste σ-Algebra* auf $X_1 \times ... \times X_n$, so dass die π_k bezüglich der $\mathscr{A}_k$ *messbar* sind.

Sind $\mathcal{E}_i \subset \mathscr{A}_i$ Erzeugendensysteme, so ist $\mathcal{Z}(\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n)$ ein Erzeugendensystem von $\mathscr{A}_1 \otimes ... \otimes \mathscr{A}_n$, ebenso wie $\mathcal{E}_1 * ... * \mathcal{E}_n$, denn

$$\begin{array}{ccc}
\pi_k^{-1}(M_k) & \xleftrightarrow{\text{bij.}} & M_k \subset X_k \\
\{\pi_k^{-1}(E_k)\} & \xleftrightarrow{\text{bij.}} & \{E_k\} \\
\text{erzeugt} & & \text{erzeugt} \\
\underset{\sigma\text{-Algebra}}{\{\pi_k^{-1}(A_k)\}} & \xleftrightarrow{\text{bij.}} & \mathscr{A}_k
\end{array}$$

1.5 Maße

1.5.1 Beispiele und Definitionen

Definition. Ein Maß ist ein auf einer σ-Algebra definiertes Prämaß.

Beispiel.

(i) (Punkteinheitsmaße, Diracmaße) Sei $x \in X$. Die *Dirac-Maße* δ_x auf $\mathcal{P}(X)$ sind definiert als
$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
Durch Linearkombinationen $\sum_{i=1}^{k} m_i \delta_{x_i}, m_i \in \mathbb{R}_0^+, x_i \in X$ erhält man weitere Maße, die "endlichen Maßverteilungen". Man kann ebenfalls allgemeinere Maßverteilungen ($\longleftrightarrow$ Fkt $X \to \mathbb{R}_0^+$) mit beliebigem Träger $\subset X$ bilden.

(ii) (Zählmaß) Das Zählmaß $\zeta : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \subset [0, \infty]$ ist definiert durch
$$\zeta(A) = \begin{cases} |A|, & \text{falls } A \text{ endlich}, \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

[6] Die $\pi_i^{-1}(A_i)$ sind spezielle Quader, da $X_i \in \mathscr{A}_i$.

(iii) Auf $\mathcal{P}(X)$ wird ein Maß μ definiert durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A = \varnothing, \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

(iv) Sei X überabzählbar und $\mathscr{A}$ die von den endlichen Teilmengen erzeugte σ-Algebra, d.h. abzählbare Teilmengen und deren Komplemente. Dann ist

$$\nu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ abzählbar}, \\ 1, & \text{falls } \complement A \text{ abzählbar} \end{cases}$$

ein Maß auf $\mathscr{A}$.

Teilmengen von σ-Algebren sind i.A. kompliziert und nicht explizit beschreibbar. Entsprechend sind Maße i.A. nicht beschreibbar durch explizite Angabe ihrer Werte. $\rightsquigarrow$ Konstruktion durch *Fortsetzung.*

Ansatz/ Methode:

$$\begin{array}{c} \text{Inhalt auf Halbring} \\ \text{(Prämaß auf Ring)} \end{array} \underset{\text{Fortsetzung}}{\overset{\text{eindeutige}}{\rightsquigarrow}} \text{Maße auf } \sigma\text{-Algebren}$$

Daher brauchen wir Fortsetzungsresultate.

1.5.2 Äußere Maße und Messbarkeit

Sei $\mathscr{H} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Halbring und $\mu : \mathscr{H} \longrightarrow [0, \infty]$ ein Inhalt. Unser Ziel ist, μ auf $\sigma(\mathscr{H})$ fortzusetzen.

Wir geben für *beliebige* Teilmengen von X ein **äußeres μ-Volumen** (bzw. eine **obere μ-Volumenschranke**), indem wir *abzählbare* Überdeckungen durch Teilmengen aus $\mathscr{H}$ verwenden. Wir definieren für $M \subset X$

$$\boxed{\mu^*(M) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \;\middle|\; (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathscr{H} \text{ mit } M \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right\}}.$$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ist also eine abzählbare Überdeckung von M, beinhaltet alle endlichen. Falls keine Überdeckung existiert, so $\mu^*(M) = \inf \varnothing = \infty$.

Wir können immer zu disjunkter Überdeckung übergehen:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup (A_2 \backslash A_1) \cup \ldots \cup \underbrace{(A_n \backslash (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}))}_{\text{disjunkt zerlegbar in Teilmengen aus } \mathscr{H}} \cup \ldots$$

Daher genügt es, Infimum über disjunkte Überdeckung zu bilden.

Wir erinnern uns an unser erstes Fortsetzungsresultat: Ist μ ein Inhalt auf $\mathscr{H}$, so existiert eine eindeutige $\overline{\mu}$ auf dem von $\mathscr{H}$ erzeugten Ring $\mathscr{R}$, der aus endlichen disjunkten Vereinigungen von Teilmengen aus $\mathscr{H}$ besteht. D.h. Überdeckungen durch Teilmengen aus $\mathscr{R}$ sind nicht effektiver als Überdeckungen durch Teilmengen aus $\mathscr{H}$. Anders gesagt,

$$\boxed{\overline{\mu}^* = \mu^*}.$$

Ist $M \subset B \in \mathscr{R}$, so genügt es, Infimum über Überdeckungen durch in B enthaltene Teilmengen zu bilden. (Bild hier) Analog: Ist $M \cap B = \varnothing$, so genügt es, Infimum über Überdeckungen durch zu B disjunkte Teilmengen zu bilden.

Lemma. Die obere μ-Volumenschranke $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ hat folgende Eigenschaften:

(i) $\mu^*(\varnothing) = 0$,

(ii) *Monotonie:* $M \subset M' \implies \mu^*(M) \leqslant \mu^*(M')$,

(iii) *σ-Subadditivität:* Für Folgen $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von (nicht notwendigerweise disjunkten) Teilmengen $M_n \subset X$ gilt: $\mu^*\big(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n\big) \leqslant \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(M_n)$.

Beweis. Zu (iii): Sei $(\underbrace{A_{n,m}}_{\in\mathscr{H}})_m$ eine Überdeckung von M_n. Dann ist $(A_{n,m})_{(n,m)}$ eine Überdeckung von $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n$. Es folgt

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n\right) \leqslant \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ n\in\mathbb{N}}} \mu^*(A_{n,m}) \overset{\text{großer Umordnungssatz}}{\underset{\text{für Doppelreihen}}{=}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \mu^*(A_{n,m})$$

Die Summe $\sum\limits_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ n\in\mathbb{N}}} \mu^*(A_{n,m})$ ist wohldefiniert, da unabhängig von Summationsreihenfolge[7]. Zu $\varepsilon_n > 0$ können wir die Überdeckung $(A_{n,m})_m$ so wählen, dass $\sum\limits_{m\in\mathbb{N}} \mu^*(A_{n,m}) \leqslant \mu^*(M_n) + \varepsilon_n$. Dann folgt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \mu^*(A_{n,m}) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(M_n) + \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n}_{\substack{>0,\\ \text{wird bel. klein}}}$$

Also war die σ-Subadditivität. ∎

Definition. Eine Funktion $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ mit den oben genannten Eigenschaften (i)-(iii) heißt ein **äußeres Maß** auf X.

μ^* muss nicht von (zu) einem Inhalt μ induziert (assoziiert) sein. Falls μ^* zu Inhalt $\mu : \mathscr{H} \longrightarrow [0, \infty]$ assoziiert, so gilt

$$\boxed{\mu^*|_{\mathscr{R}} \leqslant \overline{\mu}}.$$

[7] siehe Umordnungssatz für Reihen mit nichtnegativen Summanden.

Partielle Additivität äußerer Maße: Seien $M_1, M_2 \subset X$ disjunkt und durch $\mathscr{R}$ trennbar, d.h. es existiert ein $B \in \mathscr{R}$ mit $M_1 \subset B$ und $M_2 \cap B = \varnothing$. Dann gilt$_{(\text{Ü})}$

$$\mu^*(M_1 \sqcup M_2) = \mu^*(M_1) + \mu^*(M_2).$$

Man kann auch ein **inneres μ-Volumen** (bzw. **untere μ-Volumenschranke** definieren[8]. Die Approximation geschieht durch äußere Approximation des Komplements. Sei $M \subset X$ so, dass $M \subset R \in \mathscr{R}$ mit $\overline{\mu}(R) < \infty$. Das innere μ-Volumen ist definiert als

$$\mu_*(M) := \underbrace{\mu^*(R)}_{\substack{\text{i.A. nur} \\ \leqslant \overline{\mu}(R)}} - \mu^*(R \backslash M).$$

Die Approximation von innen gelingt nicht: Ist z.B. $O \subset X$ offen und $A \subset O$ eine abzählbare dichte Teilmenge, so enthält $O \backslash A$ keine Quader, d.h. inneres Volumen = 0.

Ist $R \subset R'$ mit $\overline{\mu}(R') < \infty$, so gilt wegen der partiellen Additivität

$$\underbrace{\mu^*(R' \backslash M)}_{\mu^*(R \backslash M) + \mu^*(R' \backslash R)} - \mu^*(R \backslash M) = \mu^*(R' \backslash R) = \mu^*(R') - \mu^*(R),$$

also ist μ_* wohldefiniert.

Diskrepanz zwischen äußerem und innerem Volumen:

$$\mu^*(M) - \mu_*(M) = \underbrace{\mu^*(M) + \mu^*(R \backslash M)}_{\geqslant \mu^*(R)} - \mu^*(R) \geqslant 0$$

Der "Volumen-Exzess" wird also erzeugt durch "erzwungene Überlappung". Intuition: der Exzess ist positiv, wenn der "Rand" von M bzw. Übergangsbereich (Interface) von M in $\complement M$ "dick" bzw. "diffus" ist.

Unser Ziel ist nun, die μ^*-*messbare* Teilmengen zu definieren und danach zeigen, dass diese eine σ-*Algebra* $\mathscr{A}^* \supset \mathscr{R}$ bilden und dass $\mu^*|_{\mathscr{A}^*}$ ein Maß ist. (Es setzt $\overline{\mu}$ fort, falls $\overline{\mu}$ ein Prämaß ist.) 11.11.2019

Wir betrachten M als "messbar", falls es keinen "Volumen-Exzess" gibt, d.h. wir verlangen

$$\mu^*(M) = \mu_*(M),$$

also

$$\mu^*(R) = \mu^*(M) + \mu^*(R \backslash M) \quad \forall R \in \mathscr{R} \text{ mit } R \supset M, \overline{\mu}(R) < \infty.$$

Um auf *beliebige* Teilmengen $M \subset X$ auszudehnen, *lokalisiere* und *verlange*:

$$\mu^*(R) = \mu^*(R \cap M) + \mu^*(\underbrace{R \backslash M}_{R \cap \complement M}) \quad \forall R \in \mathscr{R} \tag{1.5}$$

[8]Dies ist nicht logisch notwendig für unsere Diskussion, motiviert aber die Diskussion von Messbarkeit, siehe unten.

(*Bemerkung:* Dies gilt wegen der Subadditivität von μ^* sowieso, falls $\mu^*(R) = \infty$.)
Es folgt, dass diese Gleichheit auch für Schnitte von M mit *beliebigen* Teilmengen $S \subset X$, d.h.

$$\boxed{\mu^*(S) = \mu^*(S \cap M) + \mu^*(S \backslash M)} \tag{1.6}$$

Begründung: Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von S durch Teilmengen $A_n \in \mathscr{R}$, so gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mu}(A_n) \geqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\mu^*(A_n)}_{\overset{(1.5)}{=}\mu^*(A_n\cap M)+\mu^*(A_n\backslash M)} = \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^* \underbrace{(A_n \cap M)}_{\text{Überdeckung } S\cap M}}_{\geqslant \mu^*(S\cap M)} + \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^* \underbrace{(A_n \backslash M)}_{\text{Überdeckung } S\backslash M}}_{\geqslant \mu^*(S\backslash M)}$$
$$\geqslant \mu^*(S \cap M) + \mu^*(S\backslash M) \overset{\text{Subadd.}}{\geqslant} \mu^*(S)$$

Nehmen wir nun Infimum über (A_n), so ist die linke Seite der Ungleichung gleich $\mu^*(S)$ und es folgt

$$\mu^*(S) \geqslant \mu^*(S \cap M) + \mu^*(S\backslash M) \geqslant \mu^*(S),$$

also Gleichheit überall, d.h. (1.6) gilt. ■

Man gelangt so auf natürlicher Weise zur Schlüssel-Definition: (Carathéodory, 1914)

Definition. $M \subset X$ heißt $\boldsymbol{\mu^*}$**-messbar**, falls

$$\mu^*(S) = \mu^*(S \cap M) + \mu^*(S\backslash M)$$

für alle $S \subset X$ gilt. S ist also eine “Testmenge”.

Vorstellungen: M und $\complement M$ “durchdringen sich nicht”. M hat “dünnen Rand”. Jede Teilmenge S wird durch “sauberen Schnitt” durch M geteilt.

Wir setzen

$$\mathscr{A}^* := \{\mu^*\text{-messbare Teilmengen}\} \subset \mathcal{P}(X).$$

Bemerkung. Ältere Ansätze (Jordan, Peano) arbeiten noch mit *endlichen* Überdeckungen durch Teilmengen aus $\mathscr{H}$, bzw. äquivalent, *Einschließungen* durch Teilmengen in $\mathscr{R}$. Das äußere Maß wird also so definiert:

$$\begin{aligned} \mu^{*,\text{fin}} &:= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \mid A_1, ..., A_n \in \mathscr{H}, \text{ mit } A_1 \cup ... \cup A_n \supset M \right\} \\ &= \inf \left\{ \overline{\mu}(\overline{A}) \mid \overline{A} \in \mathscr{R} \text{ mit } \overline{A} \supset M \right\} \end{aligned}$$

$\mu^{*,\text{fin}} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,\infty]$ ist wieder monoton, aber nur *endlich* additiv. Es ist $\mu^{*,\text{fin}}|_{\mathscr{R}} = \overline{\mu}$ und somit $\mu^{*,\text{fin}} \geqslant \mu^*$. Deswegen ist $\mu^{*,\text{fin}}$ nur nützlich auf kleineren Klassen von Teilmengen. Das innere Maß wird definiert durch

$$\mu_{*,\text{fin}} := \sup\{\overline{\mu}(I) \mid I \in \mathscr{R} \text{ mit } I \subset M\}$$

Also schöpft man M durch Teilmenge $I \in \mathscr{R}$ aus. Dies ist wiederum unflexibler, denn:

$$\mu_{*,\text{fin}} \leqslant \mu_* (\leqslant \mu^* \leqslant \mu^{*,\text{fin}}).$$

Dies führt zur einer größeren Diskrepanz $\mu^{*,\text{fin}} - \mu_{*,\text{fin}} \geqslant \mu^* - \mu_*$ und deswegen sind weniger Teilmengen $\mu^{*,\text{fin}}$-messbar (bzw. Jordan-messbar, Jordan-quadrierbar).
Die ältere Version der Theorie bleibt unbefriedigend, denn z.B. betrachten wir $\mathbb{Q} \cap [0.1]$ dicht in $[0,1]$ und $\lambda^1_{\mathcal{I}}$ (euklidische Länge $b-a$) auf $\mathcal{I}$ (Halbring halboffener Intervalle $[a,b)$). Es gilt $(\lambda^1_{\mathcal{I}})^{*,\text{fin}}(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 1$, weil jede Teilmenge aus $\mathcal{F}^1$, die $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ enthält, auch $[0,1]$ enthält. Anderseits gilt $(\lambda^1_{\mathcal{I}})^*(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$, da es abzählbare Überdeckung durch abzählbare viele Teilintervalle beliebig kleiner Gesamtlänge gibt. Es folgt $\lambda_{*,\text{fin}}(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \leqslant \lambda_*(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \leqslant \underbrace{\lambda^*(\mathbb{Q} \cap [0,1])}_{=0} \leqslant \underbrace{\lambda^{*,\text{fin}}(\mathbb{Q} \cap [0,1])}_{=1}$. Also ist $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ nicht $(\lambda^1_{\mathcal{I}})^{*,\text{fin}}$-messbar, aber $(\lambda^1_{\mathcal{I}})^*$-messbar.

1.5.3 Die σ-Algebra der messbaren Mengen und ihr Maß

Sei $\mathscr{A}^* \subset \mathcal{P}(X)$ die Familie der μ^*-messbaren Teilmengen. (μ^* nicht notwendigerweise induziert von einem Inhalt, fordere nur Axiome eines äußeren Maßes)

Definition. $N \subset X$ heißt **μ^*-Nullmenge**, falls $\mu^*(N) = 0$.

Lemma. Alle μ^*-Nullmengen gehören zu $\mathscr{A}^*$.

Beweis. Für $S \subset X$ gilt:

$$\mu^*(S) \overset{\text{Subadd.}}{\leqslant} \underbrace{\mu^*(\underbrace{S \cap N}_{\subset N})}_{\overset{\text{Monot.}}{\leqslant} \mu^*(N)=0} + \underbrace{\mu^*(\underbrace{S \backslash N}_{\subset S})}_{\leqslant \mu^*(S)} \leqslant \mu^*(S)$$

Also Gleichheit in allen Ungleichungen. Also N μ^*-messbar. ∎

Beobachtung. $\mathscr{A}^*$ ist $\complement$-stabil, d.h. $M \in \mathscr{A}^* \implies \complement M \in \mathscr{A}^*$, denn "Rand von M = Rand von $\complement M$".

Äußere Maße sind i.A. nicht additiv, d.h. sie sind keine Inhalte auf $\mathcal{P}(X)$, sondern nur partiell additiv (vgl. oben). Es ist aber plausibel zu erwarten, dass sie σ-additiv auf Teilmengen mit "dünnem Rand" sind, da keine "Volumendurchdringung".

Satz (Carathéodory). $\mathscr{A}^*$ ist eine σ-Algebra und $\mu^*|_{\mathscr{A}^*}$ ist ein Maß.

Lemma.

(i) Sind $M_1, ..., M_n \subset X$ Teilmengen (nicht notwendigerweise disjunkt) mit $\mu^*(M_1 \cup ... \cup M_n) = \mu^*(M_1) + ... + \mu^*(M_n)$, so auch $\mu^*(M_1 \cup ... \cup M_k) = \mu^*(M_1) + ... + \mu^*(M_k)$ für $1 \leqslant k < n$.

(ii) Sind $M_1, ..., M_n \in \mathscr{A}^*$ paarweise disjunkt und $S \subset X$, so gilt $\mu^*(S \cap (M_1 \cup ... \cup M_n)) = \mu^*(S \cap M_1) + ... + \mu^*(S \cap M_n)$.

Beweis. (i) Subadditivität von μ^* liefert

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^n M_i\right) \overset{\text{nV}}{=} \sum_{i=1}^n \mu^*(M_i) = \underbrace{\sum_{i\leqslant k}\mu^*(M_i)}_{\geqslant \mu^*\left(\bigcup\limits_{i\leqslant k} M_i\right)} + \underbrace{\sum_{i>k}\mu^*(M_i)}_{\geqslant \mu^*\left(\bigcup\limits_{i>k} M_i\right)} \geqslant \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^n M_i\right)$$

Also Gleichheit überall und insbesondere gilt $\sum\limits_{i\leqslant k}\mu^*(M_i) = \mu^*\left(\bigcup\limits_{i\leqslant k} M_i\right)$

(ii) Für $1 \leqslant k \leqslant n$ gilt, da M_i disjunkt:

$$(S \cap (M_k \cup ... \cup M_n)) \cap M_k = S \cap M_k$$
$$(S \cap (M_k \cup ... \cup M_n)) \cap \complement M_k = S \cap (M_{k+1} \cup ... \cup M_n)$$

Setze nun die Testmenge $S \cup (M_k \cup ... \cup M_n)$, und weil $M_k \in \mathscr{A}^*$ ist, folgt nach der Definition der μ^*-Messbarkeit:

$$\mu^*(S \cup (M_k \cup ... \cup M_n)) = \mu^*(S \cap M_k) + \mu^*(S \cap (M_{k+1} \cup ... \cup M_n))$$

Induktion liefert die Behauptung.

■

Beweis des Satzes von Carathéodory. Zuerst zeigen wir, dass $\mathscr{A}^*$ $\cup$-stabil ist: Hierzu seinen $M_1, M_2 \in \mathscr{A}^*$. Sei $S \subset X$ beliebig. Dann folgt

$$\mu^*(S) \underset{\text{messbar}}{\overset{M_1}{=}} \underbrace{\mu^*(S \cap M_1)}_{\substack{=\mu^*(S\cap M_1\cap M_2)+\mu^*(S\cap M_1\cap \complement M_2) \\ \text{da } M_2 \text{ messbar}}} + \underbrace{\mu^*(S \cap \complement M_1)}_{=\mu^*(S\cap \complement M_1\cap M_2)+\mu^*(S\cap \complement M_1\cap \complement M_2)}$$

$$= \mu^*(S \cap M_1 \cap M_2) + \mu^*(S \cap M_1 \cap \complement M_2) + \mu^*(S \cap \complement M_1 \cap M_2) + \mu^*(S \cap \complement M_1 \cap \complement M_2)$$

Das Lemma (i) liefert, dass (Bild hier)

$$\mu^*(S \cap (M_1 \cup M_2)) = \mu^*(S \cap M_1 \cap M_2) + \mu^*(S \cap \complement M_1 \cap M_2) + \mu^*(S \cap M_1 \cap \complement M_2).$$

Daraus folgt

$$\mu^*(S) = \mu^*(S \cap (M_1 \cup M_2)) + \mu^*(S \cap \complement(M_1 \cup M_2))$$

Also $M_1 \cup M_2 \in \mathscr{A}^*$, also ist $\mathscr{A}^*$ eine Algebra. Zu zeigen bleibt: $\mathscr{A}^*$ ist σ-$\cup$-stabil. Es genügt, für abzählbare disjunkte Vereinigungen zu zeigen (da $\mathscr{A}^*$ eine Algebra). Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{A}^*$ mit paarweise disjunkten Folgengliedern. Sei $S \subset X$. Setze $\overline{M}_n = M_1 \cup ... \cup M_n$ und $\overline{M}_\infty = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} M_i$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mu^*(S) = \overbrace{\mu^*(\underbrace{S \cap \overline{M}_n}_{\nearrow S\cap\overline{M}_\infty})}^{\underset{\text{(ii)}}{\overset{\text{Lemma}}{=}} \sum\limits_{i=1}^n \mu^*(S\cap M_i)} + \underbrace{\mu^*(\underbrace{S \cap \complement\overline{M}_n}_{\searrow S\cap\complement\overline{M}_\infty})}_{\geqslant \mu^*(S\cap\complement\overline{M}_\infty)}$$

Es folgt für $n \longrightarrow \infty$:

$$\mu^*(S) \geqslant \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(S \cap M_i)}_{\geqslant \mu^*(S \cap \overline{M}_\infty)} + \mu^*(S \cap \complement \overline{M}_\infty) \geqslant \mu^*(S)$$

Also überall Gleichheit, d.h. 14.11.2019

$$\mu^*(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(S \cap M_n) + \mu^*(S \cap \complement \overline{M}_\infty) = \mu^*(S \cap \overline{M}_\infty) + \mu^*(S \cap \complement \overline{M}_\infty) \tag{1.7}$$

dies zeigt, dass $\overline{M}_\infty \in \mathscr{A}^*$, d.h. $\mathscr{A}^*$ eine σ-Algebra. Setze nun $S = \overline{M}_\infty$ in (1.7), dann folgt

$$\mu^*(M_\infty) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(\underbrace{\overline{M}_\infty \cap M_i}_{M_i}),$$

also μ^* σ-additiv, also $\mu^*|_{\mathscr{A}^*}$ Maß. ■

1.5.4 Beziehung eines Inhalts zu seinem assoziierten äußerem Maß

Wir betrachten folgende Situation:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\underset{\text{Halbring}}{\mathscr{H}} & \subset & \underset{\text{von } \mathscr{H} \text{ erz. Ring}}{\mathscr{R}} & \subset & \sigma(\mathscr{R}) & \subset & \underset{\substack{\sigma \text{ Algebra der} \\ \mu^*\text{-messb. Mengen}}}{\mathscr{A}^*} & \subset & \mathcal{P}(X) \\
\mu \text{ Inhalt} & & \underset{\text{eind. Forts. von } \mu}{\overline{\mu} \text{ Inhalt}} & & & & \underset{\mu^* \text{ induziert von } \mu}{\mu^*|_{\mathscr{A}^*} \text{ Maß}} & & \\
 & & \mu^*|_{\mathscr{R}} \leqslant \overline{\mu} & & & & & &
\end{array}$$

Beobachtung. Es gilt $\mathscr{R} \subset \mathscr{A}^*$, d.h. für $R \in \mathscr{R}$ und $S \subset X$ gilt

$$\mu^*(S) = \mu^*(\underbrace{R \cap S}_{\subset R \in \mathscr{R}}) + \mu^* \underbrace{(R \cap \complement S)}_{\text{disjunkt zu } R}$$

Dies folgt unmittelbar aus partieller Additivität von μ^*.

Aus dem Satz von Carathéodory folgt unmittelbar folgendes Korollar:

Korollar. $\sigma(\mathscr{R}) \subset \mathscr{A}^*$ und $\mu^*|_{\sigma(\mathscr{R})}$ ist Maß (Insbesondere ist $\mu^*|_{\mathscr{R}}$ ein Prämaß). Dies ist notwendig dafür, dass μ^* eine Fortsetzung von $\overline{\mu}$ ist, dass $\overline{\mu}$ Prämaß.

1.5.5 Fortsetzung von Prämaßen zu Maßen

Lemma. Sei μ ein Inhalt auf einem Ring $\mathscr{R}$. Ist μ ein Prämaß, so gilt $\mu^*|_{\mathscr{R}} = \mu$.

Beweis. Sei $A \in \mathscr{R}$ und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Überdeckung von A durch Teilmengen in $\mathscr{R}$. Setze $\overline{A}_n := A_1 \cup ... \cup A_n \in \mathscr{R}$. Da μ Inhalt ist, folgt

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \geqslant \mu(\overline{A}_n) \overset{\text{Monot.}}{\geqslant} \overbrace{\mu(\underbrace{\overline{A}_n \cap A}_{\nearrow A})}^{\leqslant \mu(A)}$$

Für $n \longrightarrow \infty$ gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \geqslant \lim_{n\to\infty} \mu(\overline{A}_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(\overline{A}_n \cap A) \overset{\mu \text{ Prämaß}}{=} \mu(A)$$

Jetzt nehmen wir Infimum über (A_n), so folgt

$$\mu^*(A) \geqslant \mu(A),$$

also $\mu^*|_{\mathscr{R}} \geqslant \mu$, somit Gleichheit. ■

Satz. Ist μ ein Prämaß auf dem Ring $\mathscr{R}$, so wird μ durch das assoziierte äußere Maß μ^* zu einem Maß $\mu^*|_{\sigma(\mathscr{R})}$ auf dem von $\mathscr{R}$ erzeugten σ-Algebra $\sigma(\mathscr{R})$ fortgesetzt.

Beweis. Aus $\mathscr{R} \subset \mathscr{A}^*$ folgt $\sigma(\mathscr{R}) \subset \mathscr{A}^*$, da $\mathscr{A}^*$ eine σ-Algebra ist. Da $\mu^*|_{\mathscr{A}^*}$ ein Maß ist, ist $\mu^*|_{\sigma(\mathscr{R})} = (\mu^*|_{\mathscr{A}^*})|_{\sigma(\mathscr{R})}$ auch ein Maß. Das obige Lemma liefert dann, dass $\mu^*|_{\sigma(\mathscr{R})}$ den Inhalt μ fortsetzt. ■

Dies zeigt, dass Prämaße auf Ringen *auf mindestens eine Weise fortsetzbar zu Maßen* auf den von den Ringen erzeugten σ-Algebren.

1.5.6 Eindeutigkeit fortgesetzter Maße

Im folgenden betrachten wir

$$\underset{\text{Ring}}{\mathscr{R}} \subset \underset{\text{eine } \sigma\text{-Alg}}{\mathscr{B}} \subset \underset{\substack{\sigma\text{-Alg der} \\ \mu^*\text{-messb. Mengen}}}{\mathscr{A}^*} \subset \mathcal{P}(X)$$

Weiter sei ν ein Maß, der das Prämaß μ fortsetzt. Es ist dann natürlich, $\mu^*|_{\mathscr{B}}$ mit ν zu vergleichen.

Lemma. Es gilt $\boxed{\nu \leqslant \mu^*|_{\mathscr{B}}}$.

Beweis. Sei $M \in \mathscr{B}$ und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Überdeckung von M, $A_n \in \mathscr{R}$, $M \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Dann gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \overset{\nu \text{ Forts.}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n) \overset{\nu \text{ Maß}}{\geqslant} \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \overset{\text{monot.}}{\geqslant} \nu(M)$$

Bilde nun Infimum über (A_n), es folgt dann

$$\mu^*(M) \geqslant \nu(M)$$

■

Satz. Auf der Familie der Teilmengen aus $\mathscr{B}$, die eine abzählbare Überdeckung durch Teilmengen aus $\mathscr{R}$ mit endlichem μ-Inhalt zulassen, stimmt ν mit μ^* überein.

Beweis. Sei $M \in \mathscr{B}$. Zunächst zeigen wir unter der Annahme: $\exists R \in \mathscr{R}$ mit $M \subset R$ und $\mu(R) < \infty$. Unter dieser Annahme gilt

$$\mu^*(M) + \mu^*(R\backslash M) \overset{\mu^* \text{ Maß}}{=} \mu^*(R) \overset{\mu \text{ Prämaß}}{=} \mu(R) \overset{\nu|_{\mathscr{R}}=\mu}{=} \nu(R) \overset{\nu \text{ Maß}}{=} \underbrace{\nu(M)}_{\leqslant \mu^*(M)} + \underbrace{\nu(R\backslash M)}_{\leqslant \mu^*(R\backslash M)}$$

Also muss es gelten $\nu(M) = \mu^*(M)$.
Jetzt unter der allgemeinen Annahme: M hat eine abzählbare Überdeckung durch $R_n \in \mathscr{R}$ mit $\mu(R_n) < \infty$. OBdA dürfen wir annehmen, dass alle R_i paarweise disjunkt sind, da $\mathscr{R}$ ein Ring ist. Wir haben schon gezeigt: $\nu(\underbrace{M \cap R_n}_{\in \mathscr{B}}) = \mu^*(M \cap R_n)$. Da ν und μ^* Maße sind, folgt

$$\nu\Bigg(\underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(M \cap R_n)}_{=M}\Bigg) = \mu^*\Bigg(\underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(M \cap R_n)}_{=M}\Bigg)$$

■

Dieser Satz zeigt, dass wir Eindeutigkeit unter geeigneten Endlichkeitsvoraussetzungen haben.[9]

Definition. Ein Inhalt μ auf einem Ring $\mathscr{R} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt
- (i) **endlich**, falls $X \in \mathscr{R}$ mit $\mu(X) < \infty$.
- (ii) $\boldsymbol{\sigma}$**-endlich**, falls X eine abzählbare Überdeckung durch Teilmengen aus $\mathscr{R}$ mit endlichem μ-Inhalt zulässt.

Korollar. Ein σ-endliches Prämaß auf einem Ring $\mathscr{R} \subset \mathcal{P}(X)$ besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einem Maß auf $\sigma(\mathscr{R})$.

Definition. Da das Lebesgue-Prämaß $\lambda^d_{\mathcal{F}^d}$ auf $\mathcal{F}^d \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ σ-endlich ist, können wir es eindeutig fortsetzen zu einem Maß β^d auf der Borelschen σ-Algebra $\mathscr{B}^d = \sigma(\mathcal{F}^d)$. Wir nennen β^d **das Lebesgue-Borel-Maß**. Wir dehnen dieses Maß weiter aus auf alle (bzgl. des äußeren Maßes) messbaren Teilmengen $(\beta^d)^* \overset{(\text{Ü})}{=} (\lambda^d_{\mathcal{F}^d})^*$. Wir definieren $\mathscr{B}^d \subset \boldsymbol{\mathscr{L}^d} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ als **die $\boldsymbol{\sigma}$-Algebra der $(\boldsymbol{\beta^d})^*$-messbaren Teilmengen.** Das Maß $(\beta^d)^*|_{\mathscr{L}^d} =: \boldsymbol{\lambda^d}$ heißt ***d*-dimensionale Lebesgue-Maß**.

Zusammengefasst:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{F}^d & \subset & \underset{\text{Borel-}\sigma\text{-Algebra}}{\mathscr{B}^d = \sigma(\mathcal{F}^d)} & \subset & \underset{(\lambda^d_{\mathcal{F}^d})^*\text{-messb. Teilmengen}}{\mathscr{L}^d} & \subset & \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \\
\underset{\text{Lebesgue-Prämaß}}{\lambda^d_{\mathcal{F}^d}} & & \beta^d := \underbrace{(\lambda^d_{\mathcal{F}^d})^*}_{\substack{\lambda^d \\ \text{Lebesgue-Borel-Maß}}}|_{\mathscr{B}^d} & & \underset{\text{Lebesgue-Maß}}{\lambda^d := (\lambda^d_{\mathcal{F}^d})^*|_{\mathscr{L}^d}} & &
\end{array}$$

[9]Nichteindeutigkeit schon in einfachen Situationen: Sei $\mathscr{R} = \{\varnothing\}$. Dann ist $\sigma(\mathscr{R}) = \{\varnothing, X\}$. Ist μ ein endlicher Inhalt auf $\mathscr{R}$, so können wir den Inhalt von X beliebig wählen. Das Problem besteht darin, dass μ nicht σ-endlich ist.

1.5.7 Approximation messbarer Teilmengen

Sei μ ein Prämaß auf dem Ring $\mathscr{R} \subset \mathcal{P}(X)$, $\sigma(\mathscr{R})$ die von $\mathscr{R}$ erzeugte σ-Algebra und $\mathscr{A}^*$ die Familie der μ^*-messbaren Teilmengen. Wir wollen nun $\sigma(\mathscr{R})$ mit $\mathscr{A}^*$ vergleichen. Erste Erinnerung: Alle μ^*-Nullmengen sind μ^*-messbar, liegen also in $\mathscr{A}^*$.

Sprechweise: Es seien $M, M' \subset X$ mit $\mu^*(M \triangle M') = 0$. Wir nennen dann M, M' **Modifikationen** voneinander durch μ^*-Nullmengen. Wir sagen, dass sie "bis auf μ^*-Nullmengen übereinstimmen".

Lemma. Für $M, M' \subset X$ mit $\mu^*(M \triangle M') = 0$ gilt:
(i) $\mu^*(M) = \mu^*(M')$,
(ii) $M \in \mathscr{A}^* \iff M' \in \mathscr{A}^*$.

Beweis. Zu (i): Aus $M \cup M' = (M \cap M') \cup (M \triangle M')$ folgt

$$\mu^*(M \cup M') \leqslant \mu^*(M \cap M') + \underbrace{\mu^*(M \triangle M')}_{=0} = \mu^*(M \cap M')$$

Also $\mu^*(M \cup M') = \mu^*(M \cap M')$. Wegen $\mu^*(M \cap M') \leqslant \mu^*(M) \leqslant \mu^*(M \cup M')$ folgt Gleichheit überall. Insbesondere gilt $\mu^*(M) = \mu^*(M')$.
Zu (ii): Wir erkennen zunächst $M \triangle M' = \complement M \triangle \complement M'$. Sei $S \subset X$. Dann gilt

$$(S \cap M) \triangle (S \cap M') = S \cap (M \triangle M') \subset M \triangle M'$$

Es folgt

$$\mu^*((S \cap M) \triangle (S \cap M')) = 0$$

und analog für die Komplemente: $\mu^*((S \cap \complement M) \triangle (S \cap \complement M')) = 0$. Es folgt (wegen (i))

$$\mu^*(S \cap M) + \mu^*(S \cap \complement M) = \mu^*(S \cap M') + \mu^*(S \cap \complement M')$$

Dies zeigt, dass $\mu^*(S \cap M) + \mu^*(S \cap \complement M) = \mu^*(S)$ genau dann gilt, wenn $\mu^*(S \cap M') + \mu^*(S \cap \complement M') = \mu^*(S)$. Also $M \in \mathscr{A}^*$ genau dann wenn $M' \in \mathscr{A}^*$. ∎

18.11.2019

Wir wollen jetzt (angelehnt an Archimedes-Kompressionsmethode) beliebige Teilmengen von innen/außen im Volumen-Sinne durch Teilmengen aus $\sigma(\mathscr{R})$ (möglich "nah verwandt[10]" mit $\mathscr{R}$) approximieren. Für *messbare* Teilmengen werden wir Approximationen bis auf μ^*-Nullmengen erhalten.

Satz. Sei $M \subset X$ mit $\mu^*(M) < \infty$. Dann existieren Teilmengen $I, A \in \sigma(\mathscr{R})$ mit $I \subset M \subset A$ sodass $\mu^*(A) = \mu^*(M)$ und $\mu^*(A \backslash I) = \mu^*(A \backslash M)$.[11] Diese sind eindeutig bis auf Modifikationen durch μ^*-Nullmengen. Es gilt außerdem: $M \in \mathscr{A}^* \iff \mu^*(A \backslash I) = 0$.[12]

[10] im Sinne der Borel-Hierarchie

[11] I steht für innen, A steht für außen.

[12] M ist genau dann μ^*-messbar, wenn M bis auf μ^*-Nullmengen mit der inneren bzw. äußeren Approximation aus $\sigma(\mathscr{R})$ übereinstimmt.

Beweis.

- Die *äußere* Approximation: Aus der Definition von μ^* folgt, dass es abzählbare Überdeckungen von M durch Teilmengen aus $\mathscr{R}$ existieren, deren Gesamtvolumen $\mu^*(M)$ beliebig gut approximiert. D.h. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $A_\varepsilon \in \sigma(\mathscr{R})$ sodass $M \subset A_\varepsilon$ und $\mu^*(A_\varepsilon) < \mu^*(M) + \varepsilon$. Wir wählen
$$A := \underbrace{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{\frac{1}{n}}}_{\supset M} \in \sigma(\mathscr{R}).$$
Es erfüllt $\mu^*(A) = \mu^*(M)$.

- Die *innere* Approximation geschieht durch die äußere Approximation von $A\backslash M$. Weil $\mu^*(A\backslash M) \leqslant \mu^*(M) < \infty$, können wir $A\backslash M$ von außen approximieren. Nämlich gibt es ein $B \in \sigma(\mathscr{R})$ so, dass $A\backslash M \subset B$ und $\mu^*(B) = \mu^*(A\backslash M)$. Wir wählen $I := A\backslash B \subset M$. Weil $A\backslash I = B$, folgt $\mu^*(A\backslash I) = \mu^*(A\backslash M)$.
Das obige Argument zeigt die Existenz der Approximationen.

- Zur *Eindeutigkeit* bis auf Nullmengen: Sei $A' \in \sigma(\mathscr{R})$ mit $M \subset A'$ und $\mu^*(A') = \mu^*(M)$ eine weitere äußere Approximation. Dann gilt $\mu^*(A \cap A') = \mu^*(M) = \mu^*(A) = \mu^*(A')$. Weil $A, A', A \cap A'$ μ^*-messbar sind und endliche Volumina haben, folgt $\mu^*(A \triangle A') = \mu^*(A) + \mu^*(A') - 2\mu^*(A \cap A') = 0$. Dies zeigt, dass die äußere Approximation eindeutig bis auf Nullmengen ist. (Analog für die innere Approximation.)

- Ist $M \in \mathscr{A}^*$, so gilt $\mu^*(A\backslash I) = \mu^*(A\backslash M) \underset{\text{endl. Vol.}}{\overset{M\in\mathscr{A}^*}{=}} \mu^*(A) - \mu^*(M) = 0$.
Ist umgekehrt $\mu^*(A\backslash I) = 0$, so gilt $\mu^*(A \triangle I) = 0$ (weil $I \subset A$) und somit stimmen I, M, A bis auf Nullmengen überein. Weil $I, A \in \mathscr{A}^*$, folgt wegen des obigen Lemmas auch $M \in \mathscr{A}^*$.

■

Bemerkung. Die Aussage des Satzes gilt allgemeiner für Teilmengen $M \subset X$, die abzählbare Vereinigungen von Teilmengen endlichen μ^*-Volumens sind. Begründung: Sei $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ mit $\mu^*(M_n) < \infty$. oBdA sei M_n paarweise disjunkt. Der obige Satz liefert, dass es $I_n, A_n \in \sigma(\mathscr{R})$ existieren mit $I_n \subset M_n \subset A_n$ und $\mu^*(A_n\backslash I_n) = 0$. Die gewünschten Approximationen folgen durch Bildung der Vereinigungen $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset M \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, denn aus
$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\backslash\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Big(\underbrace{A_n\backslash \bigcup_{m\in\mathbb{N}} I_m}_{\subset A_n\backslash I_n}\Big) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n\backslash I_n)$$
folgt $\mu^*\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\backslash\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right)\right) = 0$.

Für *Struktur* von *messbaren Teilmengen* folgt:

Korollar.

(i) Jede μ^*-Nullmenge wird von einer μ^*-Nullmenge aus $\sigma(\mathscr{R})$ eingeschlossen.

(ii) Lässt $M \in \mathscr{A}^*$ eine abzählbare Überdeckung durch (oBdA messbare) Teilmengen endlichen μ^*-Inhalts zu, so ist M die Vereinigung einer Teilmenge[a] aus $\sigma(\mathscr{R})$ mit einer μ^*-Nullmenge.

[a] wähle z.B. die innere Approximation

Korollar. Für ein σ-endliches Prämaß μ auf einem Ring $\mathscr{R} \subset \mathcal{P}(X)$ stimmen alle μ^*-messbaren Teilmengen bis auf Modifikationen durch μ^*-Nullmengen mit Teilmengen aus $\sigma(\mathscr{R})$ überein.[a]

[a] Wir können es so interpretieren, dass die Kompliziertheit messbarer Teilmengen im Vergleich zu Teilmengen aus $\sigma(\mathscr{R})$ von Nullmengen "aufgefangen" wird. Letztere sind oft vernachlässigbar.

Wir betrachten nun speziell *Lebesgue-messbare* (d.h. bezüglich des äußeren Maßes $(\lambda^d_{\mathcal{F}^d})^* = (\beta^d)^* = (\lambda^d)^*$) Teilmengen in $\mathbb{R}^d$. Das letzte Korollar liefert einen Vergleich von Borel- und Lebesgue-Messbarkeit für Teilmengen des $\mathbb{R}^d$.

Korollar. Jede Lebesgue-messbare Teilmenge stimmt bis auf eine Lebesgue-Nullmenge (d.h. $(\lambda^d)^*(N) = 0$) überein mit einer Borel-messbaren Teilmenge. (Wir nennen eine Borel-messbare Teilmenge kurz eine **Borel-Menge**.)

Um eine bessere geometrische Vorstellung von messbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ zu bekommen, vergleichen wir jetzt die *messbare* und *topologische* Struktur auf $\mathbb{R}^d$, d.h. die σ-Algebra $\mathscr{B}^d$ mit einem geometrisch natürlichen Erzeuger, nämlich der *Topologie*.

Definition. Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt

(i) G_δ-Menge, falls sie ein abzählbarer Durchschnitt offener Mengen ist.

(ii) F_σ-Menge, falls sie eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen ist.

Topologische Approximation einer messbaren Teilmenge $M \in \mathscr{L}^d \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$

- **1. Schritt:** Sei M beschränkt, d.h. $M \subset B$, wobei B ein offener Ball ist. Es gilt $\lambda^d(M) < \infty$. Weil $M \in \mathscr{L}^d$, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine abzählbare Überdeckung von M durch Teilmengen aus $\mathcal{F}^d$ mit Gesamtvolumen $< \lambda^d(M)+\varepsilon$. Durch offene Aufdickung von Quadern bzw. Figuren existiert ebenfalls ein O_ε offen mit
$$M \subset O_\varepsilon \subset B \quad \text{und} \quad \lambda^d(O_\varepsilon) < \lambda^d(M) + \varepsilon.$$
Analog (durch äußere Approximation von $\overline{B}\backslash M$) existiert ein O'_ε offen sodass
$$\overline{B}\backslash M \subset O'_\varepsilon \quad \text{mit} \quad \lambda^d(O'_\varepsilon) < \lambda^d(\overline{B}\backslash M) + \varepsilon \overset{M \text{ messbar}}{=} \lambda^d(\overline{B}) - \lambda^d(M) + \varepsilon.$$
Es ist
$$\overline{B} \subset O_\varepsilon \cup O'_\varepsilon \quad \text{mit} \quad \lambda^d(O_\varepsilon) + \lambda^d(O'_\varepsilon) < \lambda^d(\overline{B}) + 2\varepsilon.$$
Wir wählen
$$K_\varepsilon := \overline{B}\backslash O'_\varepsilon \subset M.$$

Dann ist K_ε eine kompakte *innere* Approximation, denn

$$\lambda^d(K_\varepsilon) = \lambda^d(\overline{B}) - \lambda^d(O'_\varepsilon) > \lambda^d(O'_\varepsilon) - 2\varepsilon.$$

Also $K_\varepsilon \subset M \subset O_\varepsilon$ mit $\lambda^d(O_\varepsilon \backslash K_\varepsilon) < 2\varepsilon$.

- **2. Schritt:** Jetzt sei $M \in \mathscr{L}^d$ beliebig. Dann gibt es eine Darstellung $M = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n$ mit $M_n \in \mathscr{L}^d$ beschränkt, sodass (M_n) eine *lokal endliche* Familie bildet, d.h. jeder Ball in $\mathbb{R}^d$ schneidet nur endlich viele M_n. Der erste Schritt liefert, dass es Approximationen $\underset{\text{kompakt}}{K_n} \subset M_n \subset \underset{\text{offen}}{O_n}$ für jedes M_n gibt sodass $\lambda^d(O_n \backslash K_n) < \varepsilon_n$. Die ε_n sind positiv beliebig vorgebbar. Durch die Vereinigung erhalten wir $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n \subset M \subset \underset{\text{offen}}{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n}$. Weil (K_n) lokal endlich sind und der Schnitt einer abgeschlossenen Menge mit jedem Kompaktum wieder kompakt ist, ist $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$ abgeschlossen. Es gilt

$$\lambda^d\Bigg(\underbrace{\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n\Big)\backslash\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n\Big)}_{\subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (O_n\backslash K_n)}\Bigg) < \underset{\substack{\text{positiv beliebig}\\ \text{klein wählbar}}}{\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n}$$

Dies zeigt:

Satz. Sei $M \in \mathscr{L}^d$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ $A_\varepsilon, O_\varepsilon \subset \mathbb{R}^d$ mit A_ε abgeschlossen und O_ε offen, sodass $A_\varepsilon \subset M \subset O_\varepsilon$ und $\lambda^d(O_\varepsilon \backslash A_\varepsilon) < \varepsilon$. Falls $\lambda^d(M) < \infty$, kann A_ε kompakt gewählt werden.

Es folgt:

Satz. Sei $M \in \mathscr{L}^d$. Dann existieren eine F_σ-Menge $F \subset \mathbb{R}^d$ und eine G_δ-Menge[a] $G \subset \mathbb{R}^d$ sodass $F \subset M \subset G$ und $\lambda^d(G \backslash F) = 0$.

[a] Sie sind Borel-messbar, "nah verwandt" (1.Grades) mit der Topologie.

Folgerung für das Lebesgue-Maß: für $M \in \mathscr{L}^d$ gilt

$$\boxed{\sup\{\lambda^d(K) \mid K \subset M, K \text{ kompakt}\} = \lambda^d(M) = \inf\{\lambda^d(O) \mid O \supset M, O \text{ offen}\}}.$$

1.5.8 Vervollständigung von Maßen

21.11.2019

Im folgenden sei ν ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$.

Definition. Eine Menge $N \in \mathscr{A}$ mit $\nu(N) = 0$ heißt ***ν*-Nullmenge**.

Es ist klar, dass abzählbare Vereinigungen von ν-Nullmengen wegen der σ-(Sub)Additivität von Maßen wieder ν-Nullmengen sind. Zu $\mathscr{A}$ gehörige Teilmengen von ν-Nullmengen sind ν-Nullmengen.

Definition (Vollständigkeit von Maßen)**.** Das Maß ν heißt **vollständig**, wenn alle Teilmengen von ν-Nullmengen zu $\mathscr{A}$ gehören, also ν-Nullmengen sind.

Beispiel. Die Einschränkung $\mu^*|_{\mathscr{A}^*}$ eines äußeren Maßes auf die σ-Algebra der μ^*-messbaren Teilmengen ist vollständig.

Proposition. Ist $\mathscr{N} \subset \mathcal{P}(X)$ die Familie aller Teilmengen von ν-Nullmengen, so ist

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathscr{A}} &:= \{A \cup N \mid A \in \mathscr{A}, N \in \mathscr{N}\}\\ &= \{\widetilde{A} \subset X \mid \exists A \in \mathscr{A} \text{ mit } \widetilde{A} \triangle A \in \mathscr{N}\}\end{aligned}$$

eine σ-Algebra und ν lässt sich in eindeutiger Weise zu einem Maß $\widetilde{\nu}$ auf $\widetilde{\mathscr{A}}$ fortsetzen. Für $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathscr{A}}$ und $A \in \mathscr{A}$ mit $\widetilde{A} \triangle A \in \mathscr{N}$ gilt $\widetilde{\nu}(\widetilde{A}) = \nu(A)$.

Beweis.

- Ist $A \in \mathscr{A}, N \in \mathscr{N}$, so ist $(A \cup N) \triangle A = N \in \mathscr{N}$, d.h. $\subseteq$.
- Sei $\widetilde{A} \subset X$ so, dass es ein $A \in \mathscr{A}$ existiert mit $A \triangle \widetilde{A} \in \mathscr{N}$. Dann ist $\widetilde{A} = A \cup (\widetilde{A} \triangle A)$, also $\supseteq$.

Also stimmen beide Familien überein. Die erste Beschreibung der Familie zeigt, dass sie σ-$\cup$-stabil ist. Die zweite Beschreibung zeigt, dass sie $\complement$-stabil ist. (da $\complement\widetilde{A} \triangle \complement A = \widetilde{A} \triangle A$.) Also ist sie eine σ-Algebra. Ein ν auf $\widetilde{A}$ fortsetzendes Maß $\widetilde{\nu}$ erfüllt

$$\widetilde{\nu}(\widetilde{A}) = \nu(A) \text{ für } \widetilde{A} \in \widetilde{\mathscr{A}} \text{ mit } \widetilde{A} \triangle A \in \mathscr{N} \text{ und } A \in \mathscr{A}. \tag{1.8}$$

Wir definieren nun die Fortsetzung $\widetilde{\nu}$ von ν durch (1.8).

- *Wohldefiniertheit:* Wir wollen zeigen, dass $\widetilde{\nu}(\widetilde{A})$ nicht von der Auswahl von $A \in \mathscr{A}$ abhängt. Seien hierzu $A, A' \in \mathscr{A}$ und N, N' zwei ν-Nullmengen sodass $\widetilde{A} \triangle A \subset N$ und $\widetilde{A} \triangle A' \subset N'$. Weil $A \triangle A' \subset (A \triangle \widetilde{A}) \cup (A' \triangle \widetilde{A})$, ist $A \triangle A' \in \mathscr{A}$ eine ν-Nullmenge. Es folgt $\nu(A) = \nu(A')$. Also gibt (1.8) wohldefiniertes $\widetilde{\nu}$.
- Es bleibt zu überprüfen, dass $\widetilde{\nu}$ tatsächlich ein Maß ist, d.h. *σ-additiv* ist. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{A}$ und $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{N}$ sodass die $\underbrace{A_n \cup N_n}_{\in \widetilde{\mathscr{A}}}$ paarweise disjunkt sind. Es gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\nu}(A_n \cup N_n) \overset{\text{Def}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\nu}(A_n) \underset{\nu \text{ Maß}}{\overset{A_n \text{ disj}}{=}} \nu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \overset{\text{Def}}{=} \widetilde{\nu}\Bigg(\underbrace{\overbrace{\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)}^{\in\mathscr{A}} \cup \overbrace{\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n\Big)}^{\in\mathscr{N}}}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cup M_n)}\Bigg)$$

Also ist $\widetilde{\nu}$ auch σ-additiv.

∎

Definition. Das Maß $\widetilde{\nu}$ heißt die **Vervollständigung** des Maßes ν.

Wir erinnern uns an ein früheres Korollar: Ist μ ein σ-endliches Prämaß auf einem Ring $\mathscr{R} \subset \mathcal{P}(X)$, so stimmen alle μ^*-messbaren Teilmengen bis auf Nullmengen mit Teilmengen aus $\sigma(\mathscr{R})$ überein. Daraus folgt folgendes Korollar:

Korollar. Ist μ ein σ-endliches Prämaß auf einem Ring $\mathscr{R} \subset \mathcal{P}(X)$, so ist $\mu^*|_{\mathscr{A}^*}$ die Vervollständigung von $\mu^*|_{\sigma(\mathscr{R})}$.

Hauptbeispiel. λ^d ist die Vervollständigung von β^d.

1.5.9 Bildmaße

Wir kommen kurz zurück auf die messbare Kategorie.

Definition. Ein **Maßraum** ist ein Tripel $(X, \mathscr{A}, \mu)$, besteht aus einer Menge X, einer σ-Algebra $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$ und einem Maß μ auf $\mathscr{A}$.

Maße können mittels Abbildungen "nach vorne" (kovariant im Sinne der Kategorientheorie) transportiert werden:

Definition. Sei $f : (X, \mathscr{A}) \longrightarrow (Y, \mathscr{B})$ eine *messbare* Abbildung zwischen Messräumen. Ist μ ein Maß auf $\mathscr{A}$, so ist das **Bildmaß** $f_*\mu$ auf $\mathscr{B}$ gegeben durch für $B \in \mathscr{B}$

$$(f_*\mu)(B) := \mu(\underbrace{f^{-1}(B)}_{\in \mathscr{A}})$$

Klar ist, dass $f_*\mu$ wieder σ-additiv ist, also tatsächlich ein Maß. Wir betrachten

$$(X, \mathscr{A}) \xrightarrow[\text{messbar}]{f} (Y, \mathscr{B}) \xrightarrow[\text{messbar}]{g} (Z, \mathscr{C}).$$

Es gilt die *Transitivität* $(g \circ f)_*\mu = g_*(f_*\mu)$, denn für $C \in \mathscr{C}$ gilt:

$$((g \circ f)_*\mu)(C) = \mu((g \circ f)^{-1}(C)) = \mu(f^{-1}(g^{-1}(C)) = (f_*\mu)(g^{-1}(C)) = (g_*(f_*\mu))(C).$$

Eine messbare Abbildung $f : (X, \mathscr{A}, \mu) \longrightarrow (Y, \mathscr{B}, \nu)$ heißt **maßerhaltend**, falls $\boxed{f_*\mu = \nu}$. Ist f bijektiv, maßerhaltend und $f^*\mathscr{B} = \mathscr{A}$, so ist f ein **Isomorphismus von Maßräumen**. Ist eine Selbstabbildung $f : (X, \mathscr{A}, \mu) \longrightarrow (X, \mathscr{A}, \mu)$ maßerhaltend, so sagt man, dass das Maß μ unter der messbaren Abbildung f **invariant** ist. Die maßerhaltenden bijektiven Selbstabbildungen eines Maßraums nennt man seine **Automorphismen**. Sie bilden eine Gruppe.

Bemerkung.

- Eine bijektive Abbildung von Mengen $f : X \longrightarrow Y$ induziert eine ebenfalls bijektive Abbildung $f_* : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X), M \longmapsto f^{-1}(M)$ mit den Umkehrabbildungen $M \mapsto f(M)$.

- Ist $f : (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ eine Bijektion topologischer Räume, so ist f genau dann Homöomorphismus, wenn $f^*\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_X$. In diesem Fall gilt auch $f^*(\underbrace{\mathscr{B}(Y)}_{\sigma(\mathcal{T}_Y)}) = \sigma(\underbrace{f^*\mathcal{T}_Y}_{\mathcal{T}_X}) = \mathscr{B}(X)$. D.h. f und f^{-1} messbar, also ist $f : (X, \mathscr{B}(X)) \longrightarrow (Y, \mathscr{B}(Y))$ ein Isomorphismus von Messräumen.

1.5.10 Produktmaße

Wir konstruieren nun endliche Produkte von Maßen bzw. Maßräumen.

Seien $(X_i, \mathscr{A}_i, \mu_i)$ Maßräume. Dann wird die Produkt-σ-Algebra $\mathscr{A}_1 \otimes ... \otimes \mathscr{A}_n \subset \mathcal{P}(X_1 \times ... \times X_n)$ erzeugt von dem Halbring $\mathcal{Q} = \mathscr{A}_1 * ... * \mathscr{A}_n$ der Quander sowie dem Ring $\mathcal{F} = \mathscr{A}_1 \boxtimes ... \boxtimes \mathscr{A}_n$ der Figuren. Der Produktinhalt $\mu_1 \times ... \times \mu_n$ auf $\mathcal{Q}$ wird eindeutig fortgesetzt zu dem Produktinhalt $\mu_1 \boxtimes ... \boxtimes \mu_n$ auf $\mathcal{F}$.

Weil μ_i Maße (insb. Prämaße) sind, ist $\mu_1 \boxtimes ... \boxtimes \mu_n$ auch ein Prämaß und wird fortgesetzt zu einem Maß auf der Produkt-σ-Algebra

$$\mu_1 \otimes ... \otimes \mu_n = (\mu_1 \boxtimes ... \boxtimes \mu_n)^*|_{\mathscr{A}_1 \otimes ... \otimes \mathscr{A}_n}$$

Sind alle μ_i σ-endlich, so ist $\mu_1 \boxtimes ... \boxtimes \mu_n$ auch σ-endlich. Somit ist $\mu_1 \otimes ... \otimes \mu_n$ die *eindeutige* Fortsetzung des Prämaßes $\mu_1 \boxtimes ... \boxtimes \mu_n$ zu einem Maß auf $\mathscr{A}_1 \otimes ... \otimes \mathscr{A}_n$. In diesem Fall heißt $\mu_1 \otimes ... \otimes \mu_n$ das **Produktmaß** (der μ_i) und

$$(X_1 \times ... \times X_n, \mathscr{A}_1 \otimes ... \otimes \mathscr{A}_n, \mu_1 \otimes ... \otimes \mu_n)$$

das Produkt der Maßräume $(X_i, \mathscr{A}_i, \mu_i)$.

1.5.11 Charakterisierung des Lebesgue-Maßes

Wir wollen zeigen, dass das Lebesgue-Maß *eine natürliche Lösung* des eingangs diskutierten "(post-paradoxalen) Maßproblems[13] ist und dadurch *charakterisiert* wird.

Geometrische Transformationen des $\mathbb{R}^d$

- **Affine Transformationen** des $\mathbb{R}^d$ sind Abbildungen $\Phi_{A,v}$ der Form

$$\Phi_{A,v}(x) = Ax + v \quad \text{mit } \underbrace{A}_{\text{linearer Anteil}} \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^d.$$

  Sie sind geometrisch charakterisierbar als injektive Selbstabbildungen, welche

  - Geraden erhalten[14],
  - Teilverhältnisse kollinearer[15] Triple werden erhalten.

[13] Man definiere eine Volumenfunktion $\mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty]$ mit geforderten Eigenschaften (σ-additiv, Bewegungsinvarianz und Normierung) auf einer möglich flexiblen und reichhaltigen Familie (jetzt σ-Algebra) $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.

[14] D.h. Geraden werden auf Geraden abgebildet.

[15] Punkte, die auf einer Geraden liegen, sind kollinear.

Affine Transformationen sind *Homöomorphismen*, also auch Automorphismen[16] von $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}^d, \beta^d)$. Die affinen Transformationen des $\mathbb{R}^d$ bilden die *affine Gruppe* (Lie-Gruppe) $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^d) \subset \mathrm{Homöos}(\mathbb{R}^d) \subset$ messb. Autom.

- **Bewegungen** bzw. **Isometrien** des $\mathbb{R}^d$ sind die Selbstabbildungen $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, die die metrische Struktur, d.h. den *euklidischen Abstand* erhalten. Sie sind genau die affinen Transformationen $\Phi_{A,v}$, für die gilt $A \in \mathrm{O}(n)$[17]. Sie bilden ebenfalls eine Bewegungsgruppe und es gilt $\mathrm{Trans}(\mathbb{R}^d) \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^d) \subset \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^d)$.

25.11.2019

Zusammengefasst:

$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^d)$	$\supset$	$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^d)$	$\supset$	$\mathrm{Trans}(\mathbb{R}^d)$
affine Transformationen		Bewegungen (Isometrien)		Translationen
$\Phi_{A,v} = Ax + v$ $A \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$		A orthogonal (Rotationsanteil)		trivialer lin. Anteil $A = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}$

Bemerkung. Die lineare Abbildung $\mathrm{lin} : \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathrm{GL}(d, \mathbb{R}), \Phi_{A,v} \longmapsto A$ ist ein Epimorphismus. Ihr Kern sind die Translationen, also ein Normalteiler[18] in $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^d)$, also $\mathrm{Trans}(\mathbb{R}^d) \lhd \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^d)$. Im Sinne der Algebra ist

$$\mathrm{Trans}(\mathbb{R}^d) \xrightarrow[\text{inj.}]{\text{Inklusion}} \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^d) \xrightarrow[\text{surj.}]{\text{linear}} \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$$

eine exakte Sequenz.[19] Bezüglich der Einschränkung auf den Isometrien

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^d) \xrightarrow[\text{Epimorphismus}]{\mathrm{lin}|_{\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^d)} =: \mathrm{rot}} \mathrm{O}(d)$$

ist

$$\mathrm{Trans}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathrm{O}(d)$$

eine exakte Sequenz.

Wir untersuchen nun den Effekt affiner Transformationen $\Phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ auf Lebesgue-Maß λ^d.

Weil Φ ein Homöomorphismus ist, erhält Φ die Borelsche-σ-Algebra $\mathscr{B}^d$. Es gilt nämlich $\Phi^* \mathscr{B}^d = \Phi^*(\sigma(\mathcal{T}_{\mathbb{R}^d})) = \sigma(\Phi^*(\mathcal{T}_{\mathbb{R}^d})) = \sigma(\mathcal{T}_{\mathbb{R}^d}) = \mathscr{B}^d$, d.h. Φ ist Borel-messbar.[20]

---

[16] Ein Automorphismus ist ein *Isomorphismus* auf sich selbst.

[17] $\mathrm{O}(d) := \{A \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R}) \mid AA^t = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}\} \subset \mathrm{End}(\mathbb{R}^d)$, ist (überall) eine $\mathcal{C}^\infty$-Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{End}(\mathbb{R}^d) \cong \mathbb{R}^{d^2}$.

[18] Eine Untergruppe H einer Gruppe G heißt Normalteiler, falls für jedes $g \in G$ gilt $gH = Hg$. D.h. für jedes $g \in G$ stimmt die Linksnebenklasse mit der Rechtsnebenklasse überein. Man kann zeigen, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) H ist ein Normalteiler von G.

(ii) Es existiert ein Gruppenhomomorphismus aus G, dessen Kern H ist.

(iii) Für jedes $h \in H$ und $g \in G$ gilt $g \circ h \circ g^{-1} \in H$.

[19] Eine Sequenz $A' \to A \to A''$ von Objekten und Morphismen in einer geeigneten Kategorie heißt *exakt* an der Stelle A, wenn $\mathrm{im}(A' \to A) = \ker(A \to A'')$.

[20] Vorsicht: Nicht alle Homöomorphismen erhalten $\mathscr{L}^d$! Dies ist äquivalent dazu, dass Nullmengen erhalten werden (von Φ und Φ^{-1}).

Affine Transformationen sind auch Lebesgue-messbar, d.h. $\Phi^*\mathscr{L}^d = \mathscr{L}^d$. Dies folgt sowohl aus der Lipschitz-Stetigkeit (und damit werden Nullmengen erhalten(Ü)), als auch aus dem Skalierungsverhalten von λ^d unter $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^d)$ (siehe spätere Diskussion).

Wir untersuchen zunächst den Effekt von Translationen auf λ^d. Weil die Translationen Volumina von Quadern erhalten, also $\lambda^d_{\mathcal{Q}^d}$ (der Elementarinhalt) invariant unter Translationen, folgt, dass β^d translationsinvariant ist. Außerdem ist $\mathscr{B}^d = \sigma(\mathcal{Q}^d)$ translationsinvariant, weil $\mathcal{Q}^d$ translationsinvariant ist.

Lemma. Die σ-Algebren $\mathscr{B}^d$ und $\mathscr{L}^d$ sowie die Maße β^d und λ^d sind invariant unter Translationen, ebenso das äußere Maß $(\beta^d)^* = (\lambda^d)^*$.

Beweis. Seien $Q = [a,b) \in \mathcal{Q}^d$, $a < b$ (d.h. $a_i < b_i \ \forall i$) und $v \in \mathbb{R}^d$. Es ist

$$\underbrace{T_v^{-1}}_{T_{-v}}(Q) = [a-v, b-v) \subset \mathcal{Q}^d$$

und

$$((T_v)_*\lambda^d_{\mathcal{Q}^d})(Q) = \lambda^d_{\mathcal{Q}^d}(T_v^{-1}(Q)) = \prod_{i=1}^d((b_i - v_i) - (a_i - v_i)) = \prod_{i=1}^d(b_i - a_i) = \lambda^d_{\mathcal{Q}^d}(Q).$$

Also ist $T_v^*\mathcal{Q}^d = \mathcal{Q}^d$ und $(T_v)_*\lambda^d_{\mathcal{Q}^d} = \lambda^d_{\mathcal{Q}^d}$. Da Figuren endliche Vereinigungen von Quadern sind, folgt die Translationsinvarianz des von $\mathcal{Q}^d$ erzeugten Rings $\mathcal{F}^d$ sowie die Translationsinvarianz des den Inhalt $\lambda^d_{\mathcal{Q}^d}$ eindeutig fortsetzenden Inhalts $\lambda^d_{\mathcal{F}^d}$ (Lebesgue-Prämaß) $T_v^*\mathcal{F}^d = \mathcal{F}^d$ und $(T_v)_*\lambda^d_{\mathcal{F}^d}$[21] $= \lambda^d_{\mathcal{F}^d}$.

Weiter folgt: die von $\mathcal{Q}^d$ erzeugte σ-Algebra $\mathscr{B}^d$ ist invariant unter Translationen, da $T_v^*\mathscr{B}^d = T_v^*(\sigma(\mathcal{F}^d)) = \sigma(T_v^*(\mathcal{F}^d)) = \sigma(\mathcal{F}^d) = \mathscr{B}^d$. Ebenfalls ist das äußere Maß $(\lambda^d)^* = (\beta^d)^* = (\lambda^d_{\mathcal{F}^d})^* = (\lambda^d_{\mathcal{Q}^d})^*$ translationsinvariant:

$$(T_v)_*(\lambda^d_{\mathcal{F}^d})^* = ((T_v)_*\lambda^d_{\mathcal{F}^d})^* = (\lambda^d_{\mathcal{F}^d})^*$$

Es folgt, dass die σ-Algebra der $(\lambda^d_{\mathcal{F}^d})^*$-messbaren Teilmengen invariant (unter Translationen) ist, damit auch $\lambda^d = (\lambda^d_{\mathcal{F}^d})^*|_{\mathscr{L}^d}$. Also $T_v^*\mathscr{L}^d = \mathscr{L}^d$ und $(T_v)_*\lambda^d = \lambda^d$. Es folgt, dass $\beta^d = \lambda^d|_{\mathscr{B}^d}$ ebenfalls translationsinvariant ist, denn

$$(T_v)_*\beta^d = (T_v)_*(\lambda^d|_{\mathscr{B}^d}) = (T_v)_*\lambda^d|_{T_{-v}^*\mathscr{B}^d} = \lambda^d|_{\mathscr{B}^d} = \beta^d$$

■

Es war ein großer Schritt zur Lösung des Maßproblems, denn β^d ist translationsinvariant und normiert durch $\beta^d([0,1)^d) = \lambda^d_{\mathcal{F}^d}([0,1)^d) = 1$. Diese Eigenschaften charakterisieren das Lebesgue-Borel-Maß bereits:

[21] Inhalt, der $(T_v)_*\lambda^d_{\mathcal{Q}^d}$ auf $\mathcal{Q}^d$ eindeutig fortsetzt.

Satz. Ist μ ein translationsinvariant Maß auf $\mathscr{B}^d$ mit $\mu([0,1)^d) = c < \infty$, so ist μ ein Vielfaches des Lebesgue-Borel-Maßes, d.h. $\mu = c \cdot \beta^d$.

Beweis. Weil μ translationsinvariant ist, hängt das μ-Volumen von Quadern in $\mathcal{Q}^d$ nur von deren euklidischen Kantenlängen ab. Wir betrachten einen kleineren Erzeuger von $\mathscr{B}^d$, nämlich

$$\mathcal{Q}^d_{\mathbb{Q}} := \{\text{Quader aus } \mathcal{Q}^d \text{ mit Ecken in } \mathbb{Q}^d\} \subset \mathcal{Q}^d.$$

Es folgt unmittelbar, dass die Kantenlängen der Quader aus $\mathcal{Q}^d_{\mathbb{Q}}$ rational sind.
Zu $Q, Q' \in \mathcal{Q}^d_{\mathbb{Q}}$ existieren $n, n' \in \mathbb{N}$ und ein weiterer größerer Quader $\in \mathcal{Q}^d_{\mathbb{Q}}$, der disjunkt sowohl in n Translate von Q zerlegt werden kann als auch disjunkt in n' Translate von Q'. Es folgt

$$\begin{cases} n \cdot \mu(Q) = n' \cdot \mu(Q') \\ n \cdot \underbrace{\beta^d(Q)}_{>0} = n' \cdot \underbrace{\beta^d(Q')}_{>0} \end{cases}$$

Also ist $\dfrac{\mu(Q)}{\beta^d(Q)}$ unabhängig von Auswahl $Q \in \mathcal{Q}^d_{\mathbb{Q}}$. Es ist $\dfrac{\mu(Q)}{\beta^d(Q)} = \dfrac{\mu([0,1)^d)}{\beta^d([0,1)^d} = c \in [0, \infty)$. Es folgt $\mu|_{\mathcal{Q}^d_{\mathbb{Q}}} = c \cdot \beta^d|_{\mathcal{Q}^d_{\mathbb{Q}}}$. Weil die Fortsetzung von Inhalten von Halbringen auf Ringen eindeutig ist, folgt $\mu|_{\mathcal{F}^d_{\mathbb{Q}}} = c \cdot \beta^d|_{\mathcal{F}^d_{\mathbb{Q}}}$. $\mu|_{\mathcal{F}^d_{\mathbb{Q}}}$ ist ein Prämaß (da Einschränkung von Maß β^d) und σ-endlich. Wegen der Eindeutigkeit der Fortsetzung von σ-endlichen Prämaßen auf Ringen $\mathscr{R}$ zu Maßen auf $\sigma(\mathscr{R})$ folgt $\mu = c \cdot \beta^d$, denn $\mathscr{B}^d = \sigma(\mathcal{F}^d_{\mathbb{Q}})$. ■

Korollar (Charakterisierung des Lebesgue-Borel-Maßes)**.** β^d ist das eindeutig bestimmte translationsinvariante Maß auf $\mathscr{B}^d$ mit $\beta([0,1)^d) = 1$.

Wir nutzen diese Charakterisierung jetzt, um die *Bewegungsinvarianz* von β^d einzusehen. Dies basiert auf der Struktur der affinen Gruppen, nämlich dass $\mathrm{Trans}(\mathbb{R}^d) \lhd \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^d)$. Die natürliche Operation $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^d) \rightharpoonup \{\text{Maße auf } \mathscr{B}^d\}$ erhält die Fixpunktemenge des Normalteilers $\mathrm{Trans}(\mathbb{R}^d)$, d.h. die translationsinvarianten Maße $\{c \cdot \beta^d \mid c \geqslant 0\}$

Lemma. Ist μ ein translationsinvariantes Maß auf $\mathscr{B}^d$ und $\Phi \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^d)$, so ist das Bildmaß $\Phi_*\mu$ auch translationsinvariant.

Beweis. Weil $\mathrm{Trans}(\mathbb{R}^d) \lhd \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^d)$, gilt

$$\Phi^{-1} T_v \Phi \in \mathrm{Trans}(\mathbb{R}^d)$$

Die Invarianz unter Translationen von μ liefert

$$(T_v)_* \Phi_* \mu = \Phi_* \underbrace{(\Phi^{-1})_* (T_v)_* \Phi_*}_{\substack{(\Phi^{-1} T_v \Phi)_* \\ \text{Translation}}} \mu = \Phi_* \mu$$

Also ist $\Phi_*\mu$ translationsinvariant. ■

Weil laut der Charakterisierung alle translationsinvarianten Maße zueinander proportional sind, folgt

Korollar. Es existiert ein Gruppenhomomorphismus $c : \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ sodass $\Phi_*\beta^d = c(\Phi)\beta^d$ für $\Phi \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^d)$.

Beweis. Das letzte Lemma zusammen mit dem Charakterisierungssatz liefert eine Funktion $c : \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Seien $\Phi, \Psi \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^d)$. Ihre Multiplikativität folgt aus

$$c(\Psi \circ \Phi) \cdot \beta^d = \underbrace{(\Psi \circ \Phi)_*}_{\Psi_* \circ \Phi_*} \beta^d = \Psi_*(\underbrace{\Phi_*\beta^d}_{c(\Phi)\beta^d}) = c(\Psi) \cdot c(\Phi) \cdot \beta^d$$

Weil $\beta^d \neq 0$ folgt $c(\Psi \circ \Phi) = c(\Psi) \cdot c(\Phi)$. ∎

Wir haben also gesehen: der Effekt affiner Transformationen auf Lebesgue-Maß ist die Skalierung. Die Translationsinvarianz entspricht der Tatsache, dass 28.11.2019

$$c|_{\mathrm{Trans}(\mathbb{R}^d)} \equiv 1.$$

Weil das Lebesgue-Maß invariant unter Translationen ist, ist c bereits bestimmt durch seine Werte auf linearen Transformationen, d.h. durch $c|_{\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})}$:

$$c(\Phi_{A,v}) = c(A)$$

bzw.

$$(\Phi_{A,v})_*\beta^d = c(A) \cdot \beta^d.$$

Lemma. $c|_{\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^d)} = 1.$[22]

Beweis. Sei $A \in \mathrm{O}(d)$ und $B = B_1(0)$. Insbesondere ist $B_1(0)$ $\mathrm{O}(d)$-invariant. Es ist

$$(\underbrace{A_*\beta^d}_{c(A)\beta^d})(B) = \beta^d(A^{-1}(B)) = \beta^d(B).$$

Wegen $0 < \beta^d(B) < \infty$ folgt $c(A) = 1$. ∎

Satz (Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes). Die σ-Algebren $\mathscr{B}^d$ und $\mathscr{L}^d$ sowie die Maße β^d und λ^d sind invariant unter Bewegungen des $\mathbb{R}^d$, ebenso $(\beta^d)^* = (\lambda^d)^*$.

Beweis. $\mathscr{B}^d$ ist invariant unter allen Homöomorphismen des $\mathbb{R}^d$, also insbesondere unter Bewegungen. Die Bewegungsinvarianz von β^d folgt aus dem Lemma. Daraus folgt weiter die Invarianz des assoziierten äußeren Maßes $(\beta^d)^*$ und seiner Nullmengen, also auch die Invarianz von $\mathscr{L}^d$ als Vervollständigung von $\mathscr{B}^d$ und λ^d als Einschränkung von $(\beta^d)^*$. ∎

[22] $c|_{\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^d)}$ ist wiederum bestimmt durch $c|_{\mathrm{O}(d)}$.

Wir haben also gesehen, dass λ^d eine befriedigende Lösung des Maßproblems auf $\mathbb{R}^d$ ist.[23]

Bemerkung. $\mathscr{L}^d$ ist unter allen affinen Transformationen invariant, denn $(\beta^d)^*$ wird skaliert, Nullmengen bleiben also Nullmengen. λ^d hat deshalb dasselbe Transformationsverhalten wie β^d. Es ist nämlich $\Phi_*\lambda^d = c(\Phi)\cdot\lambda^d$.

Um den gesamten Homomorphismen c zu bestimmen, machen wir eine weitere Beobachtung.

Lemma. Für Diagonalmatrizen $D \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$, $De_i = \lambda_i e_i$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ für $i = 1,\dots,d$ gilt[24]

$$c(D) = |\det(D)^{-1}|.$$

Beweis. Sei $Q = [a,b) \in \mathcal{Q}^d, a_i < b_i\ \forall i$. Es ist $D^*(Q) = D^{-1}(Q) = [D^{-1}a, D^{-1}b)$ und

$$(\underbrace{D_*\beta^d}_{c(D)\beta^d})(Q) = \beta^d(D^{-1}(Q)) = \prod_{i=1}^d |\lambda_i^{-1}(b_i - a_i)| = \underbrace{\left|\prod_{i=1}^d \lambda_i^{-1}\right|}_{|\det D^{-1}|}\cdot\beta^d(Q).$$

Es folgt $c(D) = |\det D^{-1}|$. ∎

Satz. Jede Matrix $A \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ lässt sich in der Form $A = RDR'$ darstellen mit $R, R' \in \mathrm{O}(d)$ und einer Diagonalmatrix $D \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$.[25]

Beweis. Dies ist eine Konsequenz aus der Tatsache, dass zu je zwei Skalarprodukten auf $\mathbb{R}^d$ eine gemeinsame Orthogonalbasis existiert. Betrachte das Standardskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sowie sein Bild $\underbrace{(A_*\langle\cdot,\cdot\rangle)}_{:=\langle A^{-1}\cdot, A^{-1}\cdot\rangle}(u,v) := \langle A^{-1}u, A^{-1}v\rangle$. Es existiert also eine Basis (v_i) von $\mathbb{R}^d$, die bzgl. beider Skalarprodukte orthogonal ist, und o.B.d.A. sei (v_i) eine Orthonormalbasis bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dann existiert ein $R \in \mathrm{O}(d)$ sodass $v_i = Re_i\ \forall i$. Somit ist also (e_i) orthogonal bzgl. $R_*^{-1}A_*\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle A^{-1}R\cdot, A^{-1}R\cdot\rangle$. Gehe zu ONB über durch geeinigte Skalierung der Vektoren. Es existiert eine Diagonalmatrix $D \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ sodass (De_i) sogar orthogonal ist bzgl. dieses Skalarprodukts. Es folgt, dass (e_i) orthonormal ist bezüglich $D_*^{-1}R_*^{-1}A_*\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle A^{-1}RD\cdot, \cdot A^{-1}RD\rangle$. Dies bedeutet $(D^{-1}R^{-1}A)_*\langle\cdot,\cdot\rangle = D_*^{-1}R_*^{-1}A_*\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle$. Es folgt $D^{-1}R^{-1}A =: R' \in \mathrm{O}(d)$ und $A = RDR'$. ∎

Korollar. $c = |\det^{-1}|$ auf $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$.

Beweis. Dies gilt auf $\mathrm{O}(d)$, somit auf Diagonalmatrizen. Wegen des beiden Satzes und der Multiplikativität von c gilt dies auf ganz $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$. ∎

Also $c(\Phi_{A,v}) = |\det A^{-1}|$.

---

[23] *Bemerkung.* Es existieren bewegungsinvariante Fortsetzungen von λ^d auf echt größere σ-Algebren (Szpilrajn, 1935), jedoch keine maximale Fortsetzung (Ciesielski-Pele, 1985).

[24] D hat die Gestalt $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d\end{pmatrix}$.

[25] Dies entspricht der "KAK-Zerlegung" (K steht für kompakt, hier: orthogonal, A steht für abelsch, hier: diagonal) in der Lie-Gruppe $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$.

Satz (Skalierungsverhalten des Lebesgue-Maßes unter affinen Transformationen)**.** $\mathscr{B}^d$ und $\mathscr{L}^d$ sind invariant unter affinen Transformationen des $\mathbb{R}^d$. Für $\Phi_{A,v} \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$(\Phi_{A,v})_*(\lambda^d) = |\det A^{-1}| \cdot \lambda^d$$

bzw

$$(\Phi_{A,v})_*((\lambda^d)^*) = |\det A^{-1}| \cdot ((\lambda^d)^*).$$

Dieser Satz besagt also, dass die Volumenverzerrung von Φ durch den Faktor $|\det A|$ bestimmt ist, wobei A der lineare Anteil von Φ ist.

1.5.12 Existenz nicht Lebesgue-messbarer Teilmengen

Wir weisen die Existenz nicht Lebesgue-messbaren Teilmengen nach mit Hilfe des Auswahlaxioms. (Dieses ist zum Nachweis nötig (Solovay, 1970)).

Wir gehen zurück zu Vitali-Argument (vgl. Beginn der Vorlesung). Der Ausgangspunkt war eine (überabzählbare) Partition $\mathcal{P}$ von $\mathbb{R}^{d\geqslant 1}$ durch die (abzählbaren) Nebenklassen $a + \mathbb{Q}^d$ der Untergruppe $\mathbb{Q}^d \subset \mathbb{R}^d$. Um die Nebenklassen "ohne Wiederholung" aufzulisten, braucht man ein Repräsentantensystem[26] $M \subset \mathbb{R}^d$, sodass M genau ein Element aus jeder Nebenklasse $a + \mathbb{Q}^d$ enthält. Äquivalent dazu: jedes $x \in \mathbb{R}^d$ besitzt eine eindeutige Zerlegung

$$x = m + q, m \in M, q \in \mathbb{Q}^d.$$

Es folgt, dass auch $M + q$ ein Repräsentantensystem ist, d.h.

$$\mathbb{R}^d = \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}^d} (M + q). \tag{1.9}$$

Es folgt, die abzählbare Partition $\mathcal{P}^*$ transversal bzw. komplementär durch überabzählbare viele Translate $M + q, q \in \mathbb{Q}^d$. Wir wollen zeigen, dass $M \notin \mathscr{L}^d$. Weil λ^d und $(\lambda^d)^*$ translationsinvariant sind, ist $(\lambda^d)(M + q)$ unabhängig von $q \in \mathbb{Q}^d$. Die σ-Subadditivität äußerer Maße zusammen mit $\lambda^d(\mathbb{R}^d) > 0$ und (1.9) impliziert, dass

$$0 < \lambda^d(\mathbb{R}^d) \leqslant \sum_{q \in \mathbb{Q}^d} \underbrace{(\lambda^d)^*(M + q)}_{\text{unabhängig von } q}.$$

Es folgt, dass $(\lambda^d)^*(M) > 0$.

Satz. Alle Lebesgue-messbaren Teilmengen eines Repräsentantensystems sind Nullmengen.

Beweis. Sei M ein Repräsentantensystem, $N \subset M$, $N \in \mathscr{L}^d$. Wir nehmen zunächst an, dass N beschränkt ist. Wir argumentieren mit einem Packungsargument: abzählbar unendlich viele Translate $N + q$ für $q \in \mathbb{Q}^d \cap B_1(0)$ haben beschränkte Vereinigung, diese haben also endliches λ^d-Volumen. Weil N messbar ist, folgt, dass $\lambda^d(N) = 0$. Falls N nicht beschränkt ist, dann ist N eine abzählbare Vereinigung von beschränkten messbaren Teilmengen von M. Die Vereinigung hat also Maß 0. ∎ 2.12.2019

[26] Die Existenz folgt aus dem Auswahlaxiom.

Korollar. Repräsentantensysteme sind nicht Lebesgue-messbar.

Erweiterung bzw. Lokalisierung dieser Existenzaussage über messbare Teilmengen:

Satz. Jede messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ mit *strikt* positivem Maß enthält nicht Lebesgue-messbare Teilmengen.

Beweis. Sei $A \in \mathscr{L}^d$ mit $\lambda^d(A) > 0$. Dadurch, dass wir A mit $\mathcal{P}^*$ schneiden, induziert eine Partition von A durch Teilmengen $A \cap (M + q), q \in \mathbb{Q}^d$. Wir vorher liefert die σ-Subaddtivität äußerer Maße, dass es ein $q_0 \in \mathbb{Q}^d$ existiert, sodass $\lambda^*(A \cap (M + q_0)) > 0$. Setze $A \cap (M + q_0) =: W \subset M + q_0$. Mit dem letzten Satz folgt dann $W \notin \mathscr{L}^d$. ∎

Bemerkung. Dieselbe Argumente sind durchführbar für Fortsetzung von λ^d auf translationsinvarianten σ-Algebren, die $\mathscr{L}^d$ enthalten.

Anwendung auf Fragen der Lebesgue-Messbarkeit von Homöomorphismen des $\mathbb{R}^d$: Wir wissen: stetige Abbildung euklidischer Räume sind Borel-messbar, jedoch i.A. nicht Lebesgue-messbar. Gegenbeispiele sind *injektive* stetige Abbildungen $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d' > d}$, deren Bilder Nullmengen sind. Das lässt offen, ob Homöomorphismen von $\mathbb{R}^{d \geqslant 1}$ Lebesgue-messbar sind. Dies gilt i.A. nicht. Es gibt ein genaues Kriterium:

Satz. Für Homöomorphismen $\mathbb{R}^d \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^d$ gilt: Φ ist genau dann Lebesgue-messbar, wenn Φ^{-1} die Borel-Nullmengen auf Borel-Nullmengen abbildet.

Beweis. Jede Teilmenge in $\mathscr{L}^d$ ist darstellbar als die Vereinigung einer Borel-Menge und einer λ^d-Nullmenge. Weil das Urbild der Borel-Menge eine Borel-Menge bleibt, ist Φ genau dann Lebesgue-messbar, wenn die Φ-Urbilder, also genau die Φ^{-1} Bilder, von λ^d-Nullmengen Lebesgue-messbar sind. Wegen der Injektivität von Φ und wegen des letzten Satzes folgt, dass diese Φ-Urbilder ebenfalls λ^d-Nullmengen sein müssen, denn sonst enthalten sie nicht Lebesgue-messbare Teilmengen, und diese sind ebenfalls (wegen der Injektivität von Φ) Urbilder von λ^d-Nullmengen. Es folgt: Φ ist genau dann Lebesgue-messbar, wenn Φ-Urbilder von λ^d-Nullmengen wieder λ^d-Nullmengen sind. Weil jede λ^d Nullmenge Teilmenge einer β^d-Nullmenge (folgt aus der Approximation von Lebesgue-messbaren Teilmengen) ist, ist dies äquivalent dazu, dass Φ-Urbilder von β^d-Nullmengen wieder β^d-Nullmengen sind. ∎

Beispiel ($d = 1$, die Cantor-Funktion)**.** Die Cantor-Funktion $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig und $c|_{[0,1]} : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ ist surjektiv. $c|_{[0,1]}$ bildet die Nullmenge C, die Cantor-Menge, auf $[0,1]$ ab. Durch Modifikationen, nämlich Hinzufügen von kleinen Steigerungen erhalten wir einen Homöomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Weil $\lambda^1(\varphi([0,1] \backslash C)) \ll 1$, folgt $\lambda^1(\varphi(C)) > 0$.

2 Integrationstheorie

2.1 Messbare numerische Funktionen

Eine **numerische Funktion** ist eine $\overline{\mathbb{R}}$-wertige Funktion. $\overline{\mathbb{R}}$ trägt die natürliche messbare Struktur, also die σ-Algebra $\overline{\mathscr{B}}$, die Erweiterung von $\mathscr{B}$, die von jeder der Familien: $[-\infty, a]$ bzw. $[-\infty, a)$ bzw. $(a, \infty]$ bzw. $[a, \infty]$ jeweils für $a \in \mathbb{R}$ erzeugt wird.

Definition. Sei $(X, \mathscr{A})$ ein Messraum. Eine Funktion $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt (Borel-) **messbar**, falls sie $\mathscr{A}$-$\overline{\mathscr{B}}$-messbar ist.

Die Messbarkeit von f ist äquivalent dazu, dass die Sub bzw. Supniveaumengen $\{f \leqslant a\} = \{x \in X \mid f(x) \leqslant a\}$ bzw. $\{f < a\}$ bzw. $\{f > a\}$ bzw. $\{f \geqslant a\}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ zu $\mathscr{A}$ gehören.

Beispiel. Sei X ein topologischer Raum versehen mit der Topologie $\mathcal{T}$. Dann induziert $\mathcal{T}$ die Borelsche σ-Algebra $\mathscr{B}(X) = \sigma(\mathcal{T})$ und $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann messbar, wenn f als eine Abbildung Borel-messbar ist. Insbesondere sind stetige numerische Funktionen messbar.

$\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}} := \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X, \mathscr{A})$ ist definiert als **der Raum aller messbaren Funktionen** $X \to \overline{\mathbb{R}}$ und $\mathcal{M}_{\geqslant 0} \subset \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$ der Unterraum der nichtnegativwertigen Funktionen und $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ der Unterraum der endlichwertigen Funktionen. Operationen (Rechenoperationen, Bildung of Maximum, Supremum, etc.) auf Funktionen führen wir punktweise aus.[27]

Lemma. Für eine Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$ sind auch die Funktionen $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n, \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n, \limsup\limits_{n\to\infty} f_n, \liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ messbar[a], d.h. liegen in $\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$.

[a] Insbesondere ist $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$, falls dieser Limes (in $\overline{\mathbb{R}}$) existiert.

Beweis. Die Funktion $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ist messbar wegen

$$\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \leqslant a\right\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\{f_n \leqslant a\}}_{\in\mathscr{A}} \in \mathscr{A},$$

und die Messbarkeit von $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ folgt aus $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n = -\Big(\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(-f_n)\Big)$. Weil

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sup_{k\geqslant n} f_k\Big),$$

folgt, dass $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ messbar ist, analog auch $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$. ∎

[27] Für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ sind der *Limes superior* und der *Limes inferior* gegeben durch

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(\sup\{a_k \mid k \geqslant n\}) = \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geqslant n} a_k,$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(\inf\{a_k \mid k \geqslant n\}) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\inf_{k\geqslant n} a_k$$

und dieses sind der größte bzw. kleinste Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$. Diese Ausführungen über Zahlenfolgen gelten auch für die punktweise Konvergenz von Folgen von Funktionen $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Insbesondere folgt:

Korollar. Ist $f_1, ..., f_n \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$, so ist $\max(f_1, ..., f_n), \min(f_1, ..., f_n) \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$.

Korollar. Falls $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$, so liegen auch der Positivanteil $f^+ = \max(f, 0)$, der Negativanteil $f^- = \max(-f, 0)$ und der Absolutbetrag $|f| = f^+ + f^- = \max(f, -f)$ wieder in $\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$.

Sei $M \subset X$. Eine Funktion $f_M : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ wird *durch Null fortgesetzt* zu $\overline{f}_M : X \to \overline{\mathbb{R}}$ durch

$$\overline{f}_M(x) = \begin{cases} f_M(x), & x \in M \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Und eine Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ wird außerhalb der Teilmenge M *abgeschnitten*, indem wir übergehen zu $\chi_M f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$$(\chi_M f)(x) = \begin{cases} f(x), & x \in M \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

d.h. $\chi_M f$ setzt $f|_M$ durch Null fort.
Sei $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $X \supset A \in \mathscr{A}$. Dann gilt:

$$\chi_A f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X, \mathscr{A}) \iff f|_A \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(A, \mathscr{A}|_A)$$

Dies tritt ein, wenn $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X, \mathscr{A})$.

Bei *Rechenoperationen* auf numerischen Funktionen sind die resultierenden Funktionen i.A. nicht überall auf dem gemeinsamen Definitionsbereich definiert. Betrachte $X \supset A_i \xrightarrow{f_i} \overline{\mathbb{R}}$, $i = 1, ..., n$. Die *Summe* $f_1 + ... + f_n$ ist in allen Punkten definiert, in denen alle f_i definiert sind und nicht gleichzeitig ∞ und $-\infty$ als Werte auftreten, also auf

$$\begin{aligned} A :&= \left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \setminus \left(\left(\bigcup_{i=1}^n f_i^{-1}(\infty)\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^n f_i^{-1}(-\infty)\right)\right) \\ &= \underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(\mathbb{R})\right)}_{\text{Summe endlich}} \sqcup \left(\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \cap \underbrace{\left(\left(\bigcup_{i=1}^n f_i^{-1}(-\infty)\right) \triangle \left(\bigcup_{i=1}^n f_i^{-1}(\infty)\right)\right)}_{\text{Summe } \pm\infty}\right) \end{aligned}$$

Falls die Funktionen f_i messbar sind, d.h. $A_i \in \mathscr{A}$ und $f_i \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(A_i, \mathscr{A}|_{A_i})$, so auch ihre Summe, d.h. $A \in \mathscr{A}$ und $f_1 + ... + f_n \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(A, \mathscr{A}|_A)$ auf dem Bereich endlicher Werte: $f_1 + ... + f_n$ ist die Komposition von messbaren Funktionen $(f_1, ..., f_n)$ mit der Addition (stetig, also messbar) $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, ..., x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i$.

2.2 Konstruktion des Lebesgue-Integrals

5.12.2019

Wir können die Integration als Volumenberechnung interpretieren und auch umgekehrt. Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine numerische Funktion. Wir interpretieren das Integral $\int_X f \, \mathrm{d}\mu$ als das *orientierte Volumen* des Bereiches “zwischen dem Graph von f und X-Achse”. Ansatzweise definieren das Integral $\int_X f \, \mathrm{d}\mu$ als

$$\mathrm{vol}\{(x,y) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f(x)\} - \mathrm{vol}\{(x,y) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) < y < 0\}$$

wobei wir das Volumen mit dem Produktmaß $\mu \otimes \beta^1$ auf $X \times \mathbb{R}$ messen.

$$\begin{array}{ccc} \text{Konstruktion des Lebesgue-Integrals} & \longleftrightarrow & \text{Konstruktion des Produktmaßes} \\ f \longmapsto \int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f(x) \, \mathrm{d}\mu(x) & & \mu \otimes \beta^1 \text{ auf } (X \times \mathbb{R}, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}^1) \end{array}$$

Das Produktmaß $\mu \otimes \beta^1$ ist die Einschränkung des äußeren Maßes $(\mu \otimes \beta^1)^*$ auf $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}^1$. Ist μ σ-endlich, so ist $\mu \otimes \beta^1$ die eindeutige Fortsetzung von dem Prämaß $\mu \boxtimes \beta^1$ auf dem Ring $\mathscr{A} \boxtimes \mathscr{B}^1$.

2.2.1 Das Integral nichtnegativer Funktionen

Es sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ messbar. Dann ist die Menge $\{(x,y) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f(x)\}$ ebenfalls messbar, d.h. $\in \mathscr{A} \times \mathscr{B}^1$. Wir definieren dann das **μ-Integral** von f als

$$\boxed{\int_X f \, \mathrm{d}\mu := (\mu \otimes \beta^1)(\{(x,y) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f(x)\})}. \tag{2.1}$$

Wir können das μ-Integral als das Funktional auffassen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\geqslant 0}(X, \mathscr{A}) & \longrightarrow & [0, \infty] \\ f & \longmapsto & \int_X f \, \mathrm{d}\mu \end{array}.$$

Für besonders einfache Funktionen ist der Bereich zwischen dem Graph und X-Achse eine Figur (d.h. endliche Vereinigung von Quadern bzw. hier Rechtecke) und in diesem Fall können wir das Integral direkt angeben:

- Für die *charakteristische Funktion* χ_A mit $A \in \mathscr{A}$ gilt

$$\int_X \chi_A \, \mathrm{d}\mu = (\mu \otimes \beta^1)(A \times (0,1)) = \mu(A) \times \underbrace{\beta^1((0,1))}_{=1} = \mu(A) \tag{2.2}$$

- Seien $A_i \in \mathscr{A}, i = 1, ..., n$ paarweise disjunkt. Für die *Treppenfunktion* $\tau = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ mit $a_i \in [0, \infty]$ gilt

$$\int_X \tau \, \mathrm{d}\mu = (\mu \otimes \beta^1)\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times (0, a_i)) \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mu(A_i) \tag{2.3}$$

Bemerkung. Dies gilt auch, auch wenn A_i nicht paarweise disjunkt sind.

Im Hinblick auf die Linearität des Integrals schreiben wir (2.3) um als

$$\int_X \tau \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \int_X \chi_{A_i} \, \mathrm{d}\mu.$$

Daraus folgt direkt die *Additivität* und die *positive Homogenität* des Integrals auf nichtnegativen messbaren Treppenfunktionen, d.h. sind τ_1 und $\tau_2 \in \mathcal{M}_{\geqslant 0}$ zwei Treppenfunktionen und $c_1, c_2 \in [0, \infty]$, so gilt

$$\int_X (c_1\tau_1 + c_2\tau_2)\,\mathrm{d}\mu = c_1 \int_X \tau_1\,\mathrm{d}\mu + c_2 \int_X \tau_2\,\mathrm{d}\mu.$$

Die **Monotonie** des Integrals auf nichtnegativen messbaren Funktionen folgt ebenfalls direkt aus der Definition, also aus der Monotonie von Maßen hier für $\mu \otimes \beta^1$:

$$\left.\begin{array}{c} f, g \in \mathcal{M}_{\geqslant 0} \\ f \leqslant g \end{array}\right\} \implies \int_X f\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_X g\,\mathrm{d}\mu. \tag{2.4}$$

Auch die grundlegenden **Konvergenzeigenschaften** des Integrals auf nichtnegativen messbaren Funktionen lassen sich unmittelbar aus Eigenschaften des Produktmaßes ableiten, nämlich aus seinen Stetigkeitseigenschaften als Maß.
Betrachte hier eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : X \longrightarrow [0, \infty]$. Ist f_n (punktweise) schwach monoton steigend, so ist $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n : X \longrightarrow [0, \infty]$ überall definiert und es gilt

$$\{(x, y) \mid 0 < y < f_n(x)\} \nearrow \{(x, y) \mid 0 < y < f(x)\}.$$

Falls f_n messbar sind, d.h. $f_n \in \mathcal{M}_{\geqslant 0}$, so folgt mit der Stetigkeit von unten von $\mu \otimes \beta^1$, dass

$$\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu \nearrow \int_X f\,\mathrm{d}\mu.$$

Bemerkung. Wegen der Monotonie von Maßen ist es klar, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu$.
Es folgt:

Satz (**Satz von der monotonen Konvergenz** (B. Levi))**.** Für eine schwach monoton wachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n \in \mathcal{M}_{\geqslant 0}(X, \mathscr{A})$ gilt

$$\int_X (\lim_{n\to\infty} f_n)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,\mathrm{d}\mu$$

Wir können also das Integral und den Grenzwert vertauschen.

Bemerkung. Eine solche Konvergenzaussage gilt ohne Monotonie-Voraussetzung nicht. Z.B. betrachten wir $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A_n \in \mathscr{A}$ paarweise disjunkt. Dann ist $\chi_{A_n} \longrightarrow 0$, aber $\int_X \chi_{A_n}\,\mathrm{d}\mu$ kann eine beliebige Folge sein.

Wenn wir auf die Monotonie-Verhalten verzichten, gilt jedoch eine Ungleichung. Diese gilt allgemein auch ohne Konvergenzannahmen.

Satz (**Lemma von Fatou**)**.** Für jede Folge (f_n) von Funktionen $f_n \in \mathcal{M}_{\geqslant 0}(X, \mathscr{A})$ gilt

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n)\,\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,\mathrm{d}\mu$$

Beweis. Zunächst gilt für jedes $l \geqslant n$: $\inf_{k\geqslant n} f_k \leqslant f_l$. Die Monotonie des Integrals für nichtnegative Funktionen (2.4) liefert

$$\int_X \left(\inf_{k\geqslant n} f_k\right) \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X f_l \,\mathrm{d}\mu \quad \text{für jedes } l \geqslant n.$$

Insbesondere gilt

$$\int_X \underbrace{\left(\inf_{k\geqslant n} f_k\right)}_{\nearrow \liminf_{n\to\infty} f_n} \mathrm{d}\mu \leqslant \underbrace{\inf_{k\geqslant n} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu}_{\nearrow \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu} .$$

Ziehe Limes $n \to \infty$ und der Satz von der monotonen Konvergenz liefert

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \left(\inf_{k\geqslant n} f_k\right) \mathrm{d}\mu = \int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n) \,\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu. \quad \blacksquare$$

Mithilfe der Konvergenzresultate können wir die Additivität und positive Homogenität des Integrals auf nichtnegativen messbaren Treppenfunktionen verallgemeinern auf beliebigen nichtnegativen messbaren Funktionen:

Lemma. (Additivität und positive Homogenität des Integrals auf nichtnegativen messbaren Funktionen). Sind $f_1, f_2 \in \mathcal{M}_{\geqslant 0}$ und $c_1, c_2 \in [0, \infty]$, so gilt

$$\int_X (c_1 f_1 + c_2 f_2) \,\mathrm{d}\mu = c_1 \int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu + c_2 \int_X f_2 \,\mathrm{d}\mu. \tag{2.5}$$

Beweis. Wir können f_i durch Treppenfunktionen $\tau_{in} \in \mathcal{M}_{\geqslant 0}$ approximieren, d.h. $\tau_{in} \nearrow f_i (i = 1, 2)$. Wir wissen schon, dass

$$\int_X (c_1\tau_{1n} + c_2\tau_{2n}) \,\mathrm{d}\mu = c_1 \int_X \tau_{1n} \,\mathrm{d}\mu + c_2 \int_X \tau_{2n} \,\mathrm{d}\mu$$

Weil $c_1\tau_{1n} + c_2\tau_{2n} \nearrow c_1 f_1 + c_2 f_2$, $\tau_{1n} \nearrow f_1$ und $\tau_{2n} \nearrow f_2$, liefert der Satz von der monotonen Konvergenz die Behauptung, wenn wir den Limes $n \to \infty$ ziehen. $\blacksquare$

2.2.2 Das Integral allgemeiner numerischer Funktionen

Jetzt wollen wir das Integral für allgemeine Funktionen definieren. Wir müssen diese aber geeignet beschränken.

Definition (Integrierbarkeit). Eine Funktion $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$ heißt ***μ*-integrierbar**, falls

$$\|f\|_1 := \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty.^{a}$$

[a] Wir bemerken, dass das Integral $\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu$ schon definiert ist.

Ist f integrierbar, so ist $f^{\pm}$ auch integrierbar wegen $0 \leqslant f^{\pm} \leqslant |f|$ (*Erinnerung:* $|f| = f^+ + f^-$). Wir definieren das **μ-Integral** von f als

$$\boxed{\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu = \|f^+\|_1 - \|f^-\|_1.} \tag{2.6}$$

Die Definition ist konsistent mit bisheriger Definition des Integrals auf $\mathcal{M}_{\geqslant 0}$.

Bemerkung. (2.6) bleibt sinnvoll, solange f^+ oder f^- integrierbar ist. Solche Funktionen nennt man *quasi-integrierbar*, z.B. sind alle Funktionen in $\mathcal{M}_{\geqslant 0}$ quasi-integrierbar.

Beispiel. Ist $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ beschränkt, d.h. es existiert ein $C > 0$, sodass $|f| < C$, und hat $\{f \neq 0\}$[28] endliches Maß, so ist f integrierbar, denn

$$\|f\|_1 \leqslant \underbrace{(\sup |f|)}_{\leqslant C < \infty} \cdot \underbrace{\mu(\{f \neq 0\})}_{< \infty} < \infty.$$

Insbesondere auf $\mathbb{R}^d$ sind stetige Funktionen $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ mit *kompaktem Träger* $\overline{\{f \neq 0\}}$ integrierbar. Denn die Kompaktheit des Trägers (zusammen mit der *Stetigkeit* von f) impliziert die Beschränktheit von f. Zusammen mit $\lambda^d(\overline{\{f \neq 0\}}) < \infty$ liefert die Integrierbarkeit.[29]

9.12.2019

Beobachtung. Es ist $|\int_X f \,\mathrm{d}\mu| = |\|f^+\|_1 - \|f^-\|_1| \leqslant \|f^+\|_1 + \|f^-\|_1 = \|f\|_1$. [30]

Ist $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$ integrierbar und $c > 0$, so gilt

$$\begin{aligned} \mu(\{|f| \geqslant c\}) &= \int_X \chi_{\{|f| \geqslant c\}} \,\mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \int_X \chi_{\{|f| \geqslant c\}} \underbrace{\frac{|f|}{c}}_{\geqslant 1} \,\mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \frac{1}{c} \cdot \underbrace{\|f\|_1}_{< \infty} \longrightarrow 0 \text{ für } c \to \infty \end{aligned}$$

Dies zeigt insbesondere, dass

$$\underbrace{\mu(\{|f| = \infty\})}_{\leqslant \mu(\{|f| \geqslant c\}) \ \forall c \geqslant 0} = \mu(\{f = \pm\infty\}) = 0. \tag{2.7}$$

D.h. μ-integrierbare Funktionen nehmen **μ-fast überall** (d.h. außerhalb μ-Nullmengen) endliche Werte an (d.h. $\in \mathbb{R}$). Deshalb verlieren wir keine Information bei Betrachtung des Integrals auf endlichwertigen Funktionen. Wir bezeichnen mit

$$\mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu) \subset \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X, \mathscr{A})$$

den Raum der **μ-integrierbaren $\mathbb{R}$-wertigen** Funktionen auf X. Dies ist die Vorform der L^1.

[28] "der messbare Träger"

[29] Dies gilt allgemeiner für Borel-Maße μ (d.h. $\forall x \in X \ \exists$ offene Umgebung U von x mit $\mu(U) < \infty$) auf topologischen Räumen X.

[30] d.h. das μ-Integral erfüllt die Dreiecksungleichung $|\int_X f \,\mathrm{d}\mu| \leqslant \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu$.

Integration über messbare Teilmengen. Betrachte nun das durch μ-Integral gegebene Funktional

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_X f \, \mathrm{d}\mu \end{array}.$$

Für $A \in \mathscr{A}$ wird das eingeschränkte Maß $\mu|_A := \mu|_{\mathscr{A}|_A}$ auf der Spur-σ-Algebra $\mathscr{A}|_A$ induziert, ebenso der Unterraum $(A, \mathscr{A}|_A, \mu|_A)$, also

$$(X, \mathscr{A}, \mu) \rightsquigarrow \mu|_A := \mu_{\mathscr{A}|_A} \rightsquigarrow (A, \mathscr{A}|_A, \mu_A).$$

Das Integral kann auf Teilmengen *lokalisiert* werden: Ist $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X, \mathscr{A})$ und $A \in \mathscr{A}$, so ist $\chi_A f$ genau dann μ-integrierbar, wenn $f|A$ $\mu|_A$-integrierbar ist. In diesem Fall definiere das μ-Integral von f *über* A als

$$\boxed{\int_A f \, \mathrm{d}\mu := \int_X \chi_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_A f|_A \, \mathrm{d}(\mu|_A)}.$$

Lemma. Sind $A_1, ..., A_n$ paarweise disjunkt, so ist $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$ genau dann über $A_1 \cup ... \cup A_n$ μ-integrierbar, wenn sie es über jedes A_i ist, und es gilt dann

$$\int_{A_1 \cup ... \cup A_n} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{A_1} f \, \mathrm{d}\mu + ... + \int_{A_n} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wegen der paarweisen Disjunktheit ist $\chi_{A_1 \cup ... \cup A_n} = \chi_{A_1} + ... + \chi_{A_n}$, somit auch $\chi_{A_1 \cup ... \cup A_n} f^{\pm} = \chi_{A_1} f^{\pm} + ... + \chi_{A_n} f^{\pm}$. Die Additivität des Integrals auf $\mathcal{M}_{\geqslant 0}$ liefert

$$\int_{A_1 \cup ... \cup A_n} f^{\pm} \, \mathrm{d}\mu = \int_{A_1} f^{\pm} \, \mathrm{d}\mu + ... + \int_{A_n} f^{\pm} \, \mathrm{d}\mu.$$

■

Wir beschreiben nun grundlegende Eigenschaften des Funktionals $\| \cdot \|_1$ und des Integrals.

Lemma. Für das Funktional $\| \cdot \|_1$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X, \mathscr{A}) & \xrightarrow{\| \cdot \|_1} & [0, \infty] \\ f & \longmapsto & \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu \end{array}$$

gilt ($f, g \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$ und $c \in \mathbb{R}$):

(i) *Positive Homogenität:* $\|cf\|_1 = c \cdot \|f\|_1$. (Verwende Konvention $0 \cdot \infty = 0$).

(ii) *Dreiecksungleichung:* $\|f + g\|_1 \leqslant \|f\|_1 + \|g\|_1$, falls $f + g$ überall definiert ist.

Beweis. (i) folgt direkt aus der positiven Homogenität nichtnegativer Funktionen.

(ii) ergibt sich durch Integrieren der punktweisen Dreiecksungleichung $|f + g| \leqslant |f| + |g|$. Die Behauptung folgt unter Verwendung der Additivität (2.5) und Monotonie (2.4) des μ-Integrals auf nichtnegativen Funktionen.

■

Korollar. (i) $\mathscr{L}^1 \subset \mathcal{M}_\mathbb{R}$ ist ein *Untervektorraum* (versehen mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation) also selbst ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(ii) Das Funktional $\|\cdot\|_1 : \mathscr{L}^1 \longrightarrow [0,\infty)$ ist eine Halbnorm.[31]

Bemerkung.

$$\underset{\text{erlaubt Länge 0 für } v\neq 0, v\in V}{\text{Halbnorm } \|\cdot\| \text{ auf } \mathbb{R}\text{-VR } V} \rightsquigarrow \underset{\substack{d(v,v')=\|v-v'\| \\ \text{erlaubt Abstand 0 für versch. Punkte}}}{\text{Pseudometrik}} \rightsquigarrow \underset{\text{offene Mengen sind "Schläuche"}}{\text{Topologie}}$$

Wir dehnen jetzt die Eigenschaften des Integrals von nichtnegativen auf allgemeinen Funktionen aus:

Satz. Das μ-Integral

$$\mathscr{L}^1(X,\mathscr{A},\mu) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$

ist

(i) $\mathbb{R}$-*linear*, d.h. für $f_1, f_2 \in \mathscr{L}^1$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_X (c_1 f_1 + c_2 f_2)\,\mathrm{d}\mu = c_1 \cdot \int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu + c_2 \cdot \int_X f_2 \,\mathrm{d}\mu,$$

(ii) *monoton*, d.h. für $f, g \in \mathscr{L}^1$ gilt

$$f \leqslant g \implies \int_X f\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_X g\,\mathrm{d}\mu,$$

(iii) *1-Lipschitz* bzgl. der Halbnorm $\|\cdot\|_1$, d.h. für $f, g \in \mathscr{L}^1$ gilt:

$$\left|\int_X f\,\mathrm{d}\mu - \int_X g\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \|f-g\|_1.$$

Beweis. (i) Für $f \in \mathscr{L}^1$ und $c > 0$ gilt $(cf)^\pm = c \cdot f^\pm$. Es folgt $\|(cf)^\pm\|_1 = c \cdot \|f^\pm\|_1$ und somit

$$\int_X cf\,\mathrm{d}\mu = \|cf^+\|_1 - \|cf^-\|_1 = c\int_X f\,\mathrm{d}\mu.$$

Dies zeigt, dass das μ-Integral homogen ist. Wir verifizieren nun die Additivität ($c_1 = c_2 = 1$). Dazu nutzen wir das letzte Lemma aus: Ist $X = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ eine endliche messbare Zerlegung, so gilt

$$\int_X (f_1 + f_2)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f_1\,\mathrm{d}\mu + \int_X f_2\,\mathrm{d}\mu \tag{2.8}$$

[31]Eine Halbnorm erfüllt die Nichtnegativität, positive Homogenität und Dreiecksungleichung. Ein typisches Beispiel ist $\mathbb{R}^2 \mapsto [0,\infty), (x_1, x_2) \mapsto |x_1|$.

genau dann, wenn $\int_{A_i}(f_1+f_2)\,\mathrm{d}\mu = \int_{A_i} f_1\,\mathrm{d}\mu + \int_{A_i} f_2\,\mathrm{d}\mu$ für alle $i = 1, ..., n$ gilt. Da X sich zerlegen lässt als $X = \{f_1 \geqslant 0 \text{ und } f_2 \geqslant 0\} \sqcup \{f_1 \geqslant 0 \text{ und } f_2 < 0\} \sqcup \{f_1 < 0 \text{ und } f_2 \geqslant 0\} \sqcup \{f_1 < 0 \text{ und } f_2 < 0\}$, dürfen wir annehmen, dass f_1 und f_2 Vorzeichen haben. Die Additivität (2.8) ist klar, falls die Vorzeichen gleich sind (d.h. $f_1, f_2 \geqslant 0$ oder $f_1, f_2 < 0$). Es bleibt der Fall verschiedenen Vorzeichens zu zeigen. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass $f_1 \geqslant 0 \geqslant f_2$. Durch weiteres Aufspalten von Integralen dürfen wir weiter annehmen, dass auch $f_1 + f_2$ Vorzeichen hat. O.B.d.A sei $f_1 + f_2 \geqslant 0$. Jetzt folgt die Behauptung ebenfalls aus der Additivität des Integrals auf $\mathcal{M}_{\geqslant 0}$. Weil $f_1 + f_2 \leqslant f_1$, ist $f_1 + f_2$ integrierbar und es folgt

$$\int_X f_1\,\mathrm{d}\mu = \int_X ((f_1+f_2)+(-f_2))\,\mathrm{d}\mu = \int_X (f_1+f_2)\,\mathrm{d}\mu + \underbrace{\int_X (-f_2)\,\mathrm{d}\mu}_{-\int_X f_2\,\mathrm{d}\mu}.$$

Also (2.8) und somit (i).

(ii) folgt aus der Additivität ($g = \underbrace{f}_{\geqslant 0} + \underbrace{(g-f)}_{\geqslant 0}$).

(iii) 1-Lipschitz Eigenschaft folgt aus der Linearität und Monotonie, also

$$\pm\left(\int_X f\,\mathrm{d}\mu - \int_X g\,\mathrm{d}\mu\right) \overset{\text{Linearität}}{=} \int_X \underbrace{(\pm(f-g))}_{\leqslant |f-g|}\,\mathrm{d}\mu \overset{\text{Monotonie}}{\leqslant} \|f-g\|_1.$$

■

Fast überall bestehende Eigenschaften. Oft in der Maßtheorie ist es so, dass Aussagen gültig bleibt bei Änderungen von Funktionen auf Nullmengen. Deswegen ist folgende Sprechweise natürlich und sinnvoll: Eine Eigenschaft gilt für μ-fast alle Punkte von X bzw. **μ-fast überall** auf X, falls es eine μ-Nullmenge $N \subset X$ existiert, sodass die Eigenschaft für alle $x \in X \backslash N$ gilt. Die Relation "stimmen μ-fast überall überein" $=_\mu$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f =_\mu g :&\iff f(x) = g(x) \text{ für } \mu\text{-fast alle } x \in X \\ &\iff \{f \neq g\} \text{ enthalten in einer } \mu\text{-Nullmenge} \end{aligned}$$

Die Menge $\{f \neq g\}$ ist messbar, falls $f, g \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$. Die Relation $=_\mu$ ist eine Äquivalenzrelation. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}/_{=_\mu}$$

den Raum der Äquivalenzklassen μ-fast überall übereinstimmender messbarer numerischer Funktionen.

Lemma. Seien $f, g \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$ mit $f =_\mu g$. Dann gilt

(i) $\|f\|_1 = \|g\|_1$. Insbesondere ist f genau dann μ-integrierbar, wenn g es ist.

(ii) In diesem Fall ist $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X g \, \mathrm{d}\mu$.

Beweis. (i) Das Integral messbarer Funktionen über μ-Nullmengen $N \subset X$ verschwindet, denn $\mu(N) = 0$ impliziert $(\mu \otimes \lambda^1)(N \times \mathbb{R}) = 0$. Somit ist $\int_N f^\pm \, \mathrm{d}\mu \leqslant (\mu \otimes \lambda^1)(N \times \mathbb{R}) = 0$ und folglich $\int_N f \, \mathrm{d}\mu = 0$. Aufspalten von Integralen liefert

$$\|f\|_1 = \|f\chi_{\{f=g\}}\|_1 + \underbrace{\|f\chi_{\{f\neq g\}}\|_1}_{=0} = \|g\chi_{\{f=g\}}\|_1 + \underbrace{\|g\chi_{\{f\neq g\}}\|_1}_{=0} = \|g\|_1.$$

(ii) Da $f^\pm =_\mu g^\pm$, gilt im integrierbaren Fall

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \|f^+\|_1 - \|f^-\|_1 = \|g^+\|_1 - \|g^-\|_1 = \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

■

$\rightsquigarrow$ Es ist deshalb natürlich, das μ-Integral als Funktional auf Äquivalenzklassen messbarer Funktionen zu betrachten, die sich nur auf μ-Nullmengen unterscheiden. Dort ist es allerdings nur partiell definiert.

Das Funktional $\|\cdot\| : \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}} \to [0, \infty]$ steigt also ab zu einem wohldefinierten Funktional 12.12.2019

$$\|\cdot\| : \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}/_{=_\mu} \longrightarrow [0.\infty],$$

mit $[0]$ die Äquivalenzklasse der μ-f.ü verschwindenden Funktionen.

Lemma. Für $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$ gilt:

$$f =_\mu 0 \iff \|f\|_1 = 0.$$

Beweis. $\Longleftarrow$: Sei $\|f\|_1 = 0$. Wir können f durch $|f|$ ersetzen. Also sei O.B.d.A. $f \geqslant 0$. Weil $\chi_{\{f \geqslant \frac{1}{n}\}} \leqslant nf$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, liefert das Integrieren

$$\mu\Big(\underbrace{\Big\{f \geqslant \frac{1}{n}\Big\}}_{\nearrow\{f>0\}}\Big) \leqslant n \underbrace{\|f\|_1}_{=0} = 0.$$

Die Stetigkeit (von unten) von μ liefert $\mu(\{f > 0\}) = 0$, d.h. $f =_\mu 0$. ■

Weil μ-integrierbare Funktionen μ-fast überall endliche Werte annehmen (vgl (2.7)), haben ihre Äquivalenzklassen $\mathbb{R}$-wertige Repräsentanten. Wir gelangen zur natürlichen Identifikation

$$\begin{aligned} L^1(X, \mathscr{A}, \mu) &:= \mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu)/_{=_\mu} \\ &\cong \{[f] \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X, \mathscr{A})/_{=_\mu} \mid \|f\|_1 < \infty\} \subset \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X, \mathscr{A})/_{=_\mu}. \end{aligned}$$

Da die μ-fast überall verschwindenden Funktionen, also $[0]$, einen Untervektorraum von $\mathscr{L}^1$ bilden, ist L^1 ein Quotientenraum von $\mathscr{L}^1$ nach $[0]$, also

$$L^1 \cong \mathscr{L}^1/\{f \mid f =_\mu 0\}.$$

Wir fassen die Resultate in einem Satz zusammen:

Satz. (i) Der Raum $L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ von Äquivalenzklassen fast überall übereinstimmender integrierbarer $\mathbb{R}$-wertiger Funktionen ist in natürlicher Weise ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(ii) Die Einschränkung des Funktionals $\|\cdot\|_1$ von $\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X, \mathscr{A}, \mu)/_{=_\mu}$ auf $L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ ist eine *Norm*, die sogenannte *1-Norm*.

(iii) Das μ-Integral steigt ab zu einem wohldefinierten linearen Funktional

$$L^1(X, \mathscr{A}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad [f] \longmapsto \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Es ist *1-Lipschitz* bzgl. der 1-Norm $\| \cdot \|$.

Bemerkung. (i) Der normierte Vektorraum $(L^1, \|\cdot\|_1)$ ist vollständig (Riesz-Fischer), also ein Banach-Raum.

(ii) Die Monotonie des Integrals drückt sich darin aus, dass es auf dem konvexen Kegel $\{[f] \mid f \geqslant 0\} \subset L^1$ der Äquivalenzklassen nichtnegativer Funktionen nichtnegative Werte annimmt.

Das Integral kann allgemeiner definiert werden für Funktionen, die "fast überall messbar" sind. Ist $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ so, dass es ein $g \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$ existiert mit $f =_\mu g$ und g μ-integrierbar, so definieren wir $\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \int_X g \, \mathrm{d}\mu$. Dieses ist wohldefiniert, denn $[g]$ ist festgelegt und somit unabhängig von der Repräsentantenauswahl.

Das Integral $\mathbb{C}$- und allgemeiner vektorwertiger Funktionen lässt sich zurückführen auf das Integral $\mathbb{R}$-wertiger Funktionen durch komponentenweise Integration bzw. Komposition mit Linearformen:

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, (e_i) eine Basis von V und (e_i^*) die duale Basis von V^*. [32] Ist $f : X \to V, \lambda \in V^*$ eine Linearform, so setze $\lambda(f) := \lambda \circ f : X \to \mathbb{R}$. Insbesondere sind $f_i := e_i^*(f)$ die Komponenten von f bzgl. (e_i), d.h. $f = \sum\limits_i e_i^*(f) e_i$. Für eine allgemeine Linearform $\lambda = \sum\limits_i \lambda_i e_i^*$ ist $\lambda(f) = \sum\limits_i \lambda_i f_i$.

Definition (Messbarkeit, vektorwertig). $f : X \to V$ heißt *messbar*, falls $\lambda(f)$ für alle Linearformen $\lambda \in V^*$ messbar sind. Dies ist äquivalent dazu, dass alle f_i messbar sind. Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}_V(X, \mathscr{A})$ den Raum der messbaren V-wertigen Funktionen

Wir fixieren nun eine Norm $\| \cdot \|_V$ auf V.

Definition (Integrierbarkeit, vektorwertig). $f \in \mathcal{M}_V$ heißt *μ-integrierbar*, falls

$$\|f\|_1 := \int_X \|f\|_V \, \mathrm{d}\mu < \infty.$$

[32] Jeder Vektor $v \in V$ hat eine eindeutiger Darstellung als $v = \sum\limits_i \underbrace{e_i^*(v)}_{\in \mathbb{R}} e_i$.

Weil je zwei Normen auf dem endlich-dimensionalen Raum V zueinander äquivalent sind, ist dies unabhängig von der gewählten Norm. Wir bezeichnen mit

$$\mathscr{L}^1_V := \mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu; V) \subset M_V(X, \mathscr{A})$$

den Raum der μ-integrierbaren V-wertigen Funktionen.

Lemma. Für $f \in \mathcal{M}_V$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $f \in \mathscr{L}^1_V$,

(ii) $\lambda(f) \in \mathscr{L}^1 \ \forall \lambda \in V^*$,

(ii') $f_i \in \mathscr{L}^1 \ \forall i$.

Beweis. O.B.d.A. wähle die 1-Norm bzgl (e_i) als $\|\cdot\|_V$, d.h. $\left\|\sum_i v_i e_i\right\|_V = \sum_i |v_i|$. Dann folgt $\|f\|_1 = \int_X \|f\|_V \,\mathrm{d}\mu = \int_X \sum_i |f_i| \,\mathrm{d}\mu = \sum_i \|f_i\|_1$. Also ist die linke Seite genau dann endlich, wenn die rechte Seite es ist, also (i) $\iff$ (ii'). Weil $\mathscr{L}^1$ ein Vektorraum ist, gilt außerdem (ii) $\iff$ (ii'). ■

Korollar. $\mathscr{L}^1_V$ ist ein Vektorraum.

Für $f \in \mathscr{L}^1_V$ wollen wir jetzt das μ-Integral

$$\mathscr{L}^1 \longrightarrow V, \quad f \longmapsto \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$

definieren. Weil

$$V^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda \longmapsto \int_X \lambda(f) \,\mathrm{d}\mu$$

ein lineares Funktional auf V^* ist,[33] existiert ein eindeutiger Vektor $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \in V$ sodass

$$\int_X \lambda(f) \,\mathrm{d}\mu = \lambda\left(\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right).$$

Wir definieren $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \in V$ als das μ-Integral von f. Insbesondere ist

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \sum_i \underbrace{e_i^*\left(\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right)}_{\int_X f_i \,\mathrm{d}\mu} e_i$$

für eine *beliebige* Basis (e_i). Also

$$\boxed{\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \sum_i \left(\int_X f_i \,\mathrm{d}\mu\right) e_i}.$$

Z.B. für $V = \mathbb{C}$ gilt

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X (\operatorname{Re} f) \,\mathrm{d}\mu + i \cdot \int_X (\operatorname{Im} f) \,\mathrm{d}\mu.$$

[33] Es liegt in $(V^*)^* \cong V$ mit dem natürlichen Isomorphismus $V \to (V^*)^*,\ v \mapsto (\lambda \mapsto \lambda(v))$.

2.2.3 Vergleich mit dem Integral für Regelfunktionen auf $\mathbb{R}$

In der Analysis I haben wir das Integral $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ für Regelfunktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert. Eine Funktion ist genau dann Regelfunktion, wenn sie gleichmäßig durch eine Folge von Treppenfunktionen approximiert werden kann, wenn die einseitigen Limiten $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$ für alle $x_0 \in [a,b]$ existieren. Diese Eigenschaften implizieren die Beschränktheit und die Messbarkeit der Funktion, somit auch die Lebesgue-Integrierbarkeit (d.h. β^1-integrierbar).

Proposition. Regelfunktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\beta^1|_{[a,b]} = \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda^1.$$

Beweis. Beide Integrale stimmen überein für charakteristische Funktionen von Intervallen. Die Linearität liefert ferner die Übereinstimmung für Treppenfunktionen, die Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen sind. Sei (τ_n) eine Folge solcher spezieller Treppenfunktionen, die f gleichmäßige approximiert, also $\tau_n \to f$. Per Definition des Integrals von Regelfunktionen gilt

$$\int_a^b \tau_n(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Anderseits gilt für Lebesgue-Integrale

$$\underbrace{\left| \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda^1 - \int_{[a,b]} \tau_n\,\mathrm{d}\lambda^1 \right|}_{\overset{\text{Linearität}}{=} \int_{[a,b]} (f-\tau_n)\,\mathrm{d}\lambda^1} \leqslant \int_{[a,b]} |f-\tau_n|\,\mathrm{d}\lambda^1 \leqslant |b-a| \cdot \underbrace{\sup_{[a,b]} |f-\tau_n|}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow 0.$$

Es folgt

$$\underbrace{\int_{[a,b]} \tau_n\,\mathrm{d}\lambda^1}_{=\int_a^b \tau_n(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} \longrightarrow \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda^1.$$

Die Behauptung folgt mit der Eindeutigkeit des Grenzwertes. ∎

Wir wenden nun die Schreibweise $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ auch für Lebesgue-Integrale messbarer Funktionen an.

Uneigentliche Integrale (über *nichtkompakte* Intervalle[34]) sind auch vom Lebesgue-Integralen erfasst, z.B. für $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{[a',b'] \nearrow (a,b)} \int_{a'}^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{(a,b)} f\,\mathrm{d}\lambda^1,$$

falls beide Integrale existieren. f ist genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn das uneigentliche Integral absolut konvergiert.

[34]Verallgemeinerte Regelfunktion, Approximation durch abzählbare viele Treppen.

2.3 Konvergenzsätze

Wir verallgemeinern nun unser Konvergenzresultat für Integrale nichtnegativer Funktionen, nämlich den Satz von der monotonen Konvergenz. Wir betrachten Integrale allgemeiner numerischer Funktionen und wollen Situationen definieren, in denen wir die Integration und Limesbildung vertauschen können.

Um von punktweiser Konvergenz auf Konvergenz der Integrale zu schließen, müssen wir die Funktionen "gemeinsam lokalisieren".

Satz (Satz von der Majorisierten Konvergenz (Lebesgue)**).** Sind $f_n,\ f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$ für $n \in \mathbb{N}$ sodass

$$f_n \longrightarrow f \quad \mu\text{-fast überall}$$

und existiert eine μ-integrierbare $g \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}$ mit

$$|f_n| \leqslant g \quad \mu\text{-fast überall } \forall\, n,$$

so ist f μ-integrierbar mit

$$\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \longrightarrow \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Durch Abändern von f_n, f, g auf einer μ-Nullmengen dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass die Bedingungen $f_n \to f$ und $|f_n| \leqslant g$ überall gelten und die Funktionswerte endlich sind. Also $f_n, f \in \mathscr{L}^1$, da $|f_n|, |f| \leqslant g$.

Indem wir f_n durch $f_n - f$ mit der gemeinsamen integrierbaren Majorante $|g| + |f|$ ersetzen, dürfen wir weiter annehmen, dass $f = 0$, also $f_n \to 0$. Zu zeigen ist dann $\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \to 0$. Nach ersetzen von f_n durch $|f_n|$ dürfen wir $f_n \geqslant 0$ annehmen.

Betrachte die Folge $(g - f_n)$. Es ist $0 \leqslant g - f_n \leqslant g$ für $n \in \mathbb{N}$ und $g - f_n \to g$. Das Lemma von Fatou liefert

$$\int_X \Big(\underbrace{\liminf_{n\to\infty} (g - f_n)}_{= \lim\limits_{n\to\infty} (g - f_n) = g} \Big) \,\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X \underbrace{(g - f_n)}_{\leqslant g} \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

Also muss die Gleichheit gelten und

$$\int_X (g - f_n) \,\mathrm{d}\mu \longrightarrow \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

Es folgt $\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \to 0$. ∎

Durch Anwenden des Satzes auf die Funktionenfolge $|f_n - f|$ mit der gemeinsamen integrierbaren Majorante 16.12.2019

$$|f_n - f| \leqslant |f_n| + |f| = 2g$$

erhalten wir außerdem

Korollar. Unter den Voraussetzungen des Satzes und falls $f_n, f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ (und damit $\in \mathscr{L}^1$), gilt

$$\|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0.$$

Hier tritt als ein weiterer natürlicher Konvergenzbegriff für Funktionen auf, nämlich die Konvergenz im Vektorraum mit Halbnorm $(\mathscr{L}^1, \|\cdot\|_1)$.

Definition (Konvergenz im Mittel). Man sagt, dass eine Folge von Funktionen $f_n \in \mathscr{L}^1$ *im mittel* gegen eine Funktion $f \in \mathscr{L}^1$ konvergiert, falls

$$\|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0.$$

Der Limesfunktion f ist natürlich nur eindeutig bis auf Modifikationen auf einer Nullmenge.

Der Satz von der Majorisierten Konvergenz besagt also, dass eine punktweise konvergierende Folge messbarer Funktionen mit gemeinsamer integrierbarer Majorante im Mittel gegen ihren punktweisen Limes konvergiert.

Umgekehrt impliziert die Konvergenz im Mittel zwar *nicht* die punktweise Konvergenz, auch nicht fast überall[35], jedoch die punktweise Konvergenz einer *Teilfolge.* Diese erhält man bereits für Funktionenfolgen, die im Mittel nur *Cauchy-Folgen* sind, ohne a priori *Konvergenz* im Mittel zu verlangen, zeigt also gleich auch die Vollständigkeit von $\mathscr{L}^1$. Im Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\text{Konvergenz im Mittel} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & \begin{array}{c}\text{punktweise Konvergenz}\\ \text{einer geeigneten } \textit{Teilfolge}\end{array} \\
\text{im Mittel Cauchy} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Satz. Jede $\|\cdot\|_1$ Cauchy-Folge in $\mathscr{L}^1$ konvergiert im Mittel gegen eine Funktion $f \in \mathscr{L}^1$, und eine geeignete Teilfolge konvergiert μ-fast überall punktweise gegen f.

Beweis. Es genügt, die Aussage für eine Teilfolge (f_n) mit der Cauchy-Eigenschaft

$$\|f_n - f_m\|_1 \leqslant \underbrace{\varepsilon(n)}_{\longrightarrow 0} \quad \forall m \geqslant n$$

zu zeigen. (Denn hat eine Cauchy-Folge eine konvergente Teilfolge, so konvergiert sie.) Durch Übergang zu einer geeigneten Teilfolge lässt sich die Cauchy-Konvergenz beliebig "beschleunigen". Wir können z.B. annehmen, dass

$$\|f_n - f_m\| \leqslant \frac{1}{2^n} \quad \forall m \geqslant n.$$

[35]Betrachte Folgen charakteristischer Funktionen $A_n \in \mathscr{A}$, so dass $\|\chi_{A_n}\|_1 = \mu(A_n) \to 0$, jedoch so langsam, dass $\sum \mu(A_n) = \infty$. Dann $\chi_{A_n} \to 0$ im Mittel, aber es lässt sich einrichten, dass A_n immer wieder dieselbe Teilmenge positiven Maßes überstreicht, also $\chi_{A_n} \to 0$ nicht μ-fast überall punktweise.

Unter dieser Annahme sehen wir zunächst die punktweise Konvergenz ein. Weil jetzt

$$\sum_n \|f_n - f_{n+1}\|_1 < \infty$$

liefert der Satz von der Monotonen Konvergenz durch Anwendung auf die Partialsummen

$$h := \sum_n |f_n - f_{n+1}| \in \mathscr{L}^1.$$

Insbesondere ist $h < \infty$ μ-fast überall. Also konvergiert die Reihe

$$\sum_n (f_n - f_{n+1})$$

μ-fast überall absolut. Es folgt, dass die Folge ihrer Partiellsummen $f_1 - f_n$ konvergiert μ-fast überall, also die (f_n) selbst. Es existiert eine Funktion $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$, sodass $f_n \to f$ μ-fast überall.

Zum Konvergenz *im Mittel*: Es gilt $|f_1 - f_n| \leqslant h$, also $|f_n| \leqslant |f_1| + h \in \mathscr{L}^1$, d.h. die Funktionen $|f_n|$ haben eine gemeinsame integrierbare Majorante. Der Satz von der Majorisierten Konvergenz bzw. sein Korollar ergibt nun, dass auch $f_n \to f$ im Mittel, d.h. $\|f_n - f\|_1 \to 0$. ■

Korollar (Riesz-Fischer). Der normierte Vektorraum $(L^1, \|\cdot\|_1)$ ist vollständig.

2.4 Maße mit Dichten

Wir betrachten nun Maße auf einem festen Messraum $(X, \mathscr{A})$. Sei $\rho \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}(X, \mathscr{A})$ eine nichtnegative messbare Funktion. Ist μ ein Maß auf $\mathscr{A}$, so heißt das Maß $\rho\mu$ auf $\mathscr{A}$ **mit Dichte** ρ **relativ zu** μ. Es ist gegeben durch

$$\boxed{(\rho\mu)(A) := \int_A \rho \,\mathrm{d}\mu = \int_X \chi_A \rho \,\mathrm{d}\mu}. \tag{2.9}$$

Die σ-Additivität von $\rho\mu$ ist leicht einzusehen: Ist $(A_n)_n$ eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen in X, $A_n \in \mathscr{A}$, so ist

$$\chi_{A_1 \cup \ldots \cup A_n} \rho \nearrow \chi_{\bigcup_{i=1}^\infty A_i} \rho.$$

Der Satz von der Monotonen Konvergenz liefert dann

$$\underbrace{\int_X \chi_{A_1 \cup \ldots \cup A_n} \rho \,\mathrm{d}\mu}_{= \sum_{i=1}^n (\rho\mu)(A_i)} \nearrow \underbrace{\int_X \chi_{\bigcup\limits_{i=1}^\infty A_i} \rho \,\mathrm{d}\mu}_{=(\rho\mu)\left(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)}.$$

Die σ-Additivität von $(\rho\mu)$ folgt also aus dem Satz der Monotonen Konvergenz.

Beobachtung. Alle μ-Nullmengen sind auch $\rho\mu$-Nullmengen.

Lemma. (i) Falls $f \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}$ so gilt

$$\int_X f \,\mathrm{d}(\rho\mu) = \int_X f\rho \,\mathrm{d}\mu, \tag{2.10}$$

(ii) Eine Funktion $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$ ist genau dann $\rho\mu$-integrierbar, wenn $f\rho$ μ-integrierbar ist. In diesem Fall gilt auch (2.10).

Beweis. (2.10) gilt zunächst für charakteristische Funktionen χ_A, $A \in \mathscr{A}$:

$$\int_X \chi_A \,\mathrm{d}(\rho\mu) \overset{(2.2)}{=} (\rho\mu)(A) \overset{(2.9)}{=} \int_X \chi_A\rho \,\mathrm{d}\mu.$$

Aufgrund der Linearität des Integrals gilt (2.10) auch für nichtnegative Linearkombinationen charakteristischer Funktionen, also nichtnegative Treppenfunktionen. Wegen des Satzes von der Monotonen Konvergenz sowie der Approximierbarkeit durch Treppenfunktionen folgt die Behauptung auf ganz $\mathcal{M}_{[0,\infty]}$.
(ii) folgt durch Anwendung von (i) auf $f^{\pm}$. ■

Aus (2.10) folgt die Assoziativität für Dichten $\rho, \rho' \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}$:

$$\rho'(\rho\mu) = (\rho'\rho)\mu,$$

denn für $A \in \mathscr{A}$ gilt:

$$(\rho'(\rho\mu))(A) = \int_A \rho' \,\mathrm{d}(\rho\mu) \overset{(2.10)}{=} \int_A \rho'\rho \,\mathrm{d}\mu = ((\rho'\rho)\mu)(A).$$

Aus der Definition (2.9) folgt: ρ ist genau dann μ-integrierbar, wenn $\rho\mu$ ein endliches Maß ist.

Zur *Eindeutigkeit* von Dichten im Fall *endlicher* Maße:

Lemma. Sind $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}$ und ist $\rho_1\mu = \rho_2\mu$ ein endliches Maß, so $\rho_1 =_\mu \rho_2$.

Beweis. Für $\varepsilon > 0$ und $A_\varepsilon := \{\rho_1 \geqslant \rho_2 + \varepsilon\} \in \mathscr{A}$ gilt:

$$0 = \underbrace{(\rho_1\mu)(A_\varepsilon)}_{<\infty} - \underbrace{(\rho_2\mu)(A_\varepsilon)}_{<\infty} = \int_{A_\varepsilon} \underbrace{(\rho_1 - \rho_2)}_{\geqslant\varepsilon} \,\mathrm{d}\mu \geqslant \varepsilon \cdot \mu(A_\varepsilon).$$

Also sind die A_ε μ-Nullmengen und somit auch

$$\{\rho_1 > \rho_2\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\frac{1}{n}},$$

ebenso $\{\rho_1 \leqslant \rho_2\}$. ■

Es gibt eine elegante Charakterisierung dafür, wann ein Maß relativ zu einem anderen Maß eine Dichte besitzt. Die folgende Eigenschaft ist notwendig:

Definition (Absolut stetige Maße). Sind μ, ν Maße auf $\mathscr{A}$, so heißt ν *absolut stetig* bzgl. μ oder *μ-stetig*, notiert $\nu \ll \mu$, falls μ-Nullmengen auch ν-Nullmengen sind.

Diese Bedingung ist auch hinreichend im σ-endlichen Fall. Wir erwähnen dazu ohne Beweis.

Satz (Radon-Nikodým). Ist μ σ-endlich und ν absolut stetig bzgl. μ, so besitzt ν eine Dichte zu μ, d.h. $\nu = \rho\mu$ mit $\rho \in \mu_{[0,\infty]}$.

Beispiel. Ist $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine (schwach) monoton wachsende Funktion, so ist der Stieltjes-Inhalt $\mu_F|_{\mathcal{F}^1} : \mathcal{F}^1 \to [0, \infty)$ auf dem Ring der Figuren gegeben durch

$$\mu_F|_{\mathcal{F}^1}([a, b)) = F(b) - F(a).$$

Aus der Übung wissen wir, dass μ_F genau dann ein σ-endliches Prämaß ist, wenn F rechtsseitig stetig ist. In diesem Fall setzt sich $\mu_F|_{\mathcal{F}^1}$ daher eindeutig fort zu einem Maß μ_F auf $\mathscr{B}^1 = \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Ist F von der Klasse $\mathcal{C}^1$, so impliziert der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass

$$\mu_F([a, b)) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} F'\,\mathrm{d}\lambda^1 = \underset{\text{Maß mit Dichte}}{\int_{[a,b)} F'\,\mathrm{d}\lambda^1}.$$

Folglich gilt

$$\mu_F = F'\beta^1$$

zunächst auf $\mathcal{I} = \mathcal{Q}^1$ und weiter auf $\mathcal{F}^1$ und wegen der Eindeutigkeit der Fortsetzung eines σ-endlichen Prämaßes auf ganz $\mathscr{B}^1$.

Ist F sogar ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, so gilt $\mu_F = \beta^1 \circ F = F^{-1}_*\beta^1$, ebenfalls zunächst auf $\mathcal{I}$, dann auf $\mathcal{F}^1$ und schließlich auf $\mathscr{B}^1$. Daher gilt

$$F^{-1}_*\beta^1 = F'\beta^1.$$

Dies ist der eindimensionale Spezialfall der später zu beweisenden Transformationsformel für das d-dimensionale Lebesgue-Maß unter $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismen.

Beispiel. Für $d \geqslant 1$ betrachten wir die Radius bzw. die Abstandsfunktion $r^d : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ und das Bildmaß $r_*\lambda^d$ auf $[0, \infty)$. Für $R \geqslant 0$ gilt

$$(r_*\lambda^d)([0, R]) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\overline{B}_R(0)}\,\mathrm{d}\lambda^d = \mathrm{vol}(\overline{B}_R(0)) \underset{\text{unter Streckungen}}{\overset{\text{Verhalten des } \lambda^d}{=}} R^d \cdot \underbrace{\mathrm{vol}(\overline{B}_1(0))}_{=:v_d},$$

gemäß dem Verhalten des Lebesgue-Maßes unter Streckungen. Für $R_2 > R_1 \geqslant 0$ folgt

$$\begin{aligned}(r_*\lambda^d)([R_1, R_2)) &= v_d \cdot (R_2^d - R_1^d)\\ &= \underbrace{d \cdot v_d}_{=:s_{d-1}} \cdot \int_{R^1}^{R^2} r^{d-1}\,\mathrm{d}r\\ &= s_{d-1} \cdot (r^{d-1}\lambda^1|_{[0,\infty)})([R_1, R_2))\end{aligned}$$

Folglich besitzt das Bildmaß $r_*\lambda^d$ eine Dichte relativ zu λ^1, nämlich

$$r_*\lambda^d = s_{d-1} \cdot r^{d-1} \cdot \lambda^1|_{[0,\infty)}, \tag{2.11}$$

zunächst auf $\mathcal{F}^1$, dann auch auf $\mathscr{B}^1$ und $\mathscr{L}^1$, weil beide Maße auf Borel-Nullmengen verschwinden.

Wir interpretieren s_{d-1} als das $(d-1)$-dimensionale Volumen der Einheitssphäre $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$, das mit unserem bisher entwickelten Begriffsapparat allerdings noch nicht definiert werden kann.

2.5 Produktmaße und Mehrfachintegrale

2.5.1 Integraldarstellung von Produktmaßen und Cavalieri-Prinzip

Seien $(X_i, \mathscr{A}_i, \mu_i)$ Maßräume und μ_i σ-endlich für $i = 1, 2$. Wir wissen aus den früheren Diskussionen, dass es ein eindeutiges Produktmaß $\mu_1 \otimes \mu_2$ auf $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ gibt sodass

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) = \mu_2(A_2), \quad A_i \in \mathscr{A}_i.$$

Wir geben jetzt eine *Integraldarstellung* von $\mu_1 \otimes \mu_2$ im Sinne von Cavalieri: Für $M \subset X_1 \times X_2$ ist der Querschnitt $M_{x_1} \subset X_2$ für $x_1 \in X_1$ definiert durch

$$M \cap (\{x_1\} \times X_2) =: \{x_1\} \times M_{x_1}.$$

Satz (Integraldarstellung des Produktmaßes)**.** Ist $M \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$, so ist $M_{x_1} \in \mathscr{A}_2$ für jedes $x_1 \in X_1$. Weiter ist die Funktion $x_1 \mapsto \mu_2(M_{x_1}) \in [0, \infty]$ messbar, d.h. $\in \mathcal{M}_{[0,\infty]}(X_1, \mathscr{A}_1)$ und es gilt

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(M) = \int_{X_1} \mu_2(M_{x_1}) \,\mathrm{d}\mu_1(x_1). \tag{2.12}$$

18.12.2019

Beweis. Sei $\mathcal{F} \subset \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ die Familie messbarer Teilmengen, für die die Aussage gilt. Weil für $A_1 \times A_2 \in \mathscr{A}_1 * \mathscr{A}_2$, also Quader,

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) = \int_{X_1} \chi_{A_1} \mu_2(A_2) \,\mathrm{d}\mu_1$$

offensichtlich gilt, gehört $\mathscr{A}_1 * \mathscr{A}_2$ zu $\mathcal{F}$, d.h. $\mathscr{A}_1 * \mathscr{A}_2 \subset \mathcal{F}$.

Außerdem ist $\mathcal{F}$ abgeschlossen unter *disjunkten* abzählbaren Vereinigungen. Sind nämlich $M_n \in \mathcal{F}$ für $n \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt, so ist der X_2-Querschnitt ihrer Vereinigung für jedes $x_1 \in X_1$ messbar, also

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \right)_{x_1} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{M_{n,x_1}}_{\in \mathscr{A}_2 \text{ n.V.}} \in \mathscr{A}_2.$$

Die (σ-)Additivität von μ_2 liefert ferner

$$\mu_2\left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \right)_{x_1} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_2(M_{n,x_1}), \quad \text{insb. } \mu_2\left(\left(\bigcup_{i \leqslant n} M_i \right)_{x_1} \right) = \sum_{i \leqslant n} \mu_2(M_{i,x_1}).$$

Die Stetigkeit von unten von μ_2 und die Anwendung des Satzes von der Monotonen Konvergenz auf die Funktionenfolge $\mu_2\left(\left(\bigcup_{i\leqslant n} M_i\right)_{x_1}\right)$ implizieren weiter:

$$\begin{aligned}\int_{X_1} \mu_2\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n\right)_{x_1}\right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) &\overset{\text{Stetigkeit}}{\underset{\text{von unten}}{=}} \int_{X_1} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu_2\left(\left(\bigcup_{i\leqslant n} M_i\right)_{x_1}\right)}_{\sum_{i\leqslant n}\mu_2(M_{i,x_1})} \mathrm{d}\mu_1(x_1)\\ &\overset{\text{MCT}}{=} \lim_{n\to\infty}\int_{X_1}\sum_{i\leqslant n}\mu_2(M_{i,x_1})\,\mathrm{d}\mu_1(x_1)\\ &\overset{\text{Linearität}}{\underset{\text{des Integrals}}{=}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\int_{X_1} \mu_2(M_{n,x_1})\,\mathrm{d}\mu_1(x_1)}_{=(\mu_1\otimes\mu_2)(M_n)\text{ n.V.}}\\ &\overset{\sigma\text{-Addtivität}}{\underset{\text{von }\mu_1\otimes\mu_2}{=}} (\mu_1\otimes\mu_2)\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n\right).\end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{F}$ abgeschlossen unter disjunkten abzählbaren Vereinigungen.

Wir wenden nun frühere Überlegungen zu Dynkin-System an.

Zunächst zeigen wir unter der Annahme, dass $\mu(X_i) < \infty$ für $i = 1,2$. Für $M \in \mathcal{F}$ gilt dann $(\complement M)_{x_1} = \complement M_{x_1}$ und

$$\mu_2((\complement M)_{x_1}) = \underbrace{\mu_2(X_2)}_{<\infty,\text{ const}} - \mu_2(M_{x_1}).$$

Integrieren liefert

$$\int_{X_1} \mu_2((\complement M)_{x_1})\,\mathrm{d}\mu_1(x_1) = \underbrace{\mu_1(X_1)\cdot\mu_2(X_2)}_{(\mu_1\otimes\mu_2)(X_1\times X_2)} - \underbrace{\int_{X_1}\mu_2(M_{x_1})\,\mathrm{d}\mu_1(x_1)}_{(\mu_1\otimes\mu_2)(M)} = (\mu_1\otimes\mu_2)(M).$$

ebenfalls $\complement$-stabil. Außerdem ist klar, dass $\varnothing \in \mathcal{F}$. Wir haben also gezeigt, dass $\mathcal{F}$ ein Dynkin-System ist. Weil der Halbring $\mathscr{A}_1 * \mathscr{A}_2$ durchschnittsstabil ist, folgt mit der früheren Proposition, dass das von ihm erzeugte Dynkin-System $\mathscr{D}(\mathscr{A}_1 * \mathscr{A}_2)$ eine σ-Algebra ist. Weil

$$\underbrace{\mathscr{A}_1 * \mathscr{A}_2}_{\cap\text{-stabil}} \subset \underbrace{\mathscr{D}(A_1 * \mathscr{A}_2)}_{\text{eine }\sigma\text{-Algebra}} \subset \mathcal{F} \subset \underbrace{\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2}_{\sigma(\mathscr{A}_1 * \mathscr{A}_2)}$$

muss $\mathcal{F} = \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ gelten. D.h. Die Behauptung des Satzes gilt in diesem Fall, nämlich für $\mu(X_i) < \infty$ für $i = 1,2$.

Für den allgemeinen σ-endlichen Fall existieren Folgen $(E_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ ($i = 1,2$, $E_{i,n} \in \mathscr{A}_i$) mit endlichen Volumina, die X_i approximieren, d.h. $\mu_i(E_{i,n}) < \infty$ und $E_{i,n} \nearrow X_i$. Dann gilt für $M \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$

$$\underbrace{M \cap (E_{1,n} \times E_{2,n})}_{\in\mathcal{F}} \nearrow M$$

und somit $M \in \mathcal{F}$. Also $\mathcal{F} = \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ und de Behauptung. ∎

Korollar (Cavalieri-Prinzip). Sind $M, M' \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ mit $\mu_2(M_{x_1}) = \mu_2(M'_{x_1})$ für μ_1-fast alle $x_1 \in X_1$, so ist $(\mu_1 \otimes \mu_2)(M) = (\mu_1 \otimes \mu_2)(M')$.

Beispiel (Volumen von Kegeln). Wir zerlegen $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ und betrachten für eine Lebesgue-messbare Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^{d-1} \cong \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ den Kegel $K \subset \mathbb{R}^d$ mit Basis B, Höhe h und Spitze $p \in \mathbb{R}^{d-1} \times \{h\}$. Die Querschnitte

$$Q_t = K \cap (\mathbb{R}^{d-1} \times \{t\})$$

für $0 \leqslant t \leqslant h$ sind isometrisch zu $\left(1 - \frac{t}{h}\right) \cdot B$. Für das Kegelvolumen gilt

$$\lambda^d(K) \overset{\text{Satz}}{=} \int_0^h \lambda^{d-1}(Q_t)\,\mathrm{d}t = \lambda^{d-1}(B) \cdot \int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right)^{d-1} \mathrm{d}t = \frac{1}{d} \cdot h \cdot \lambda^{d-1}(B).$$

Z.B. gilt für das Volumen des d-dimensionalen Standard-Simplexes $\Delta_d \subset \mathbb{R}^d$

$$\lambda^d(\Delta_d) = \frac{1}{d} \cdot \lambda^d(\Delta_{d-1}).$$

Induktion liefert

$$\lambda^d(\Delta_d) = \frac{1}{d!}.$$

Beispiel (Volumen euklidischer Bälle). Wir wollen das Volumen des d-dim euklidischen Einheitsballes

$$v_d := \lambda^d\left(\overline{B}_1^{\mathbb{R}^d}(0)\right)$$

bestimmen. Dazu zerlegen wir ebenfalls $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$. Der Raidus des Querschnitts auf der Höhe $h \in [-1, 1]$ ist gegeben durch $\sqrt{1 - h^2}$. Es gilt nach dem letzten Satz

$$v_d = \underbrace{(\lambda^1 \otimes \lambda^{d-1})}_{\lambda^d}\left(\overline{B}_1^{\mathbb{R}^d}(0)\right) = \int_{-1}^1 \underbrace{\lambda^{d-1}\left(\overline{B}_{\sqrt{1-h^2}}^{\mathbb{R}^{d-1}}(0)\right)}_{(1-h^2)^{\frac{d-1}{2}} \cdot v_{d-1}} \mathrm{d}h = v_{d-1} \cdot \underbrace{\int_{-1}^1 (1 - h^2)^{\frac{d-1}{2}}\,\mathrm{d}h}_{=:I_d}.$$

Also erhalten wir die Rekursionsformel

$$v_d = v_{d-1} \cdot I_d. \tag{2.13}$$

Das Integral I_d überführen wir durch die Substitution $h = \sin u$ in ein trigonometrisches Integral

$$I_d = \int_{-1}^1 (1 - h^2)^{\frac{d-1}{2}}\,\mathrm{d}h = \int_{\pi/2}^{\pi/2} \cos^{d-1} \sin' u\,\mathrm{d}u = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^d u\,\mathrm{d}u.$$

Z.B. für $d = 2$, also Kreisscheiben, gilt

$$I_2 = 2\int_0^{\pi/2} \cos^2\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^2 u + \sin^2 u}_{1\,\mathrm{d}u} = \frac{\pi}{2}$$

und somit $v_2 = \underbrace{v_1}_{2} \cdot I_2 = \pi$. Für $d = 3$, also Kugeln, gilt $v_3 = \frac{4}{3}\pi$.

Durch partielle Integration von I_d erhalten wir außerdem die Rekursionsformel

$$d \cdot I_d = (d-1) \cdot I_{d-2}.$$

Es folgt

$$I_d I_{d-1} = \frac{d-1}{d} I_{d-1} I_{d-2} = \ldots = \frac{1}{d} \underbrace{I_1 I_0}_{2\pi}. \tag{2.14}$$

Daher gilt für $d \geqslant 2$:

$$\frac{v_d}{v_{d-2}} \overset{(2.13)}{=} I_d I_{d-1} \overset{(2.14)}{=} \frac{2\pi}{d}. \tag{2.15}$$

Z.B. in Dimension 4 gilt

$$v_4 = v_2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

2.5.2 Mehrfachintegrale: Der Satz von Fubini

In diesem Abschnitt betrachten wir σ-endliche Maßräume $(X_i, \mathscr{A}_i, \mu_i)$ für $i = 1, 2$. Wir wollen Integralen auf Produkträumen berechnen.

Beobachtung. Ist $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X_1 \times X_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$, so ist $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X_2, \mathscr{A}_2)$ für jedes $x_1 \in X_1$.

Satz (**Fubini, nichtnegative Funktionen**). Für $f \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}(X_1 \times X_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$ ist

$$x_1 \mapsto \int_{X_2} f(x_1, \cdot)\, \mathrm{d}\mu_2$$

messbar, d.h. $\in \mathcal{M}_{[0,\infty]}(X_1, \mathscr{A}_1)$, und es gilt

$$\int_{X_1 \times X_2} f \,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, \cdot)\, \mathrm{d}\mu_2 \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1)$$

Beweis. Für charakteristische Funktionen $\chi_{A_1 \times A_2}$ mit $A_1 \times A_2 \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ folgt die Behauptung aus dem vorherigen Satz:

$$\int_{X_1 \times X_2} \chi_{A_1 \times A_2} \,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) \overset{(2.2)}{=} (\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) \overset{\text{Satz}}{=} \int_{X_1} \chi_{A_1} \underbrace{\mu_2(A_2)}_{\int_{X_2} \chi_{A_2} \mathrm{d}\mu_2} \mathrm{d}\mu_1.$$

Wegen der Linearität des Integrals gilt die Behauptung für Treppenfunktionen aus $\mathcal{M}_{[0,\infty]}(X_1 \times X_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$. Da sich jede nichtnegative numerische Funktion monoton durch eine Folge von Treppenfunktionen approximieren lässt, folgt mit dem Satz von der Monotonen Konvergenz, dass die Behauptung für alle Funktionen aus $\mathcal{M}_{[0,\infty]}(X_1 \times X_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_1)$ gilt. ■

In allgemeinen Fall $\overline{\mathbb{R}}$-wertiger Funktionen müssen wir die Integrierbarkeit voraussetzen:

Satz (Fubini, integrierbare Funktionen). Seien $(X_i, \mathscr{A}_i, \mu_i)$ σ-endliche Maßräume für $i = 1, 2$. Ist $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X_1 \times X_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$ eine $\mu_1 \otimes \mu_2$-integrierbare Funktion, so sind die Funktionen

$$f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X_2, \mathscr{A}_2)$$

für μ_1-fast alle $x_1 \in X_1$ μ_2-integrierbar. Die μ_1-fast überall definierte Funktion

$$x_1 \mapsto \int_{X_2} f(x_1, \cdot)\,\mathrm{d}\mu_2$$

ist μ_1-integrierbar und es gilt

$$\int_{X_1 \times X_2} f\,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, \cdot)\,\mathrm{d}\mu_2 \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \tag{2.16}$$

Beweis. Wir wenden die obige Version von Fubini für nichtnegative Funktionen auf $f^{\pm}$ an und erhalten

$$\int_{X_1 \times X_2} f^{\pm}\,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f^{\pm}(x_1, \cdot)\,\mathrm{d}\mu_2 \right) \mathrm{d}\mu_1. \tag{2.17}$$

Die $(\mu_1 \otimes \mu_2)$-Integrierbarkeit ist äquivalent dazu, dass die Integrale (2.17) endlich sind. Dies wiederum dazu, dass

$$\int_{X_2} f^{\pm}(x_1, \cdot)\,\mathrm{d}\mu_2 < \infty \quad \text{für } \mu_1\text{-fast alle } x_1 \in X_1,$$

also die Funktionen $f^{\pm}(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}(X_2, \mathscr{A}_2)$ für μ_1-fast alle $x_1 \in X_1$ μ_2-integrierbar sind, und dass die überall definierten $[0, \infty]$-wertigen Funktionen

$$x_1 \mapsto \int_{X_2} f^{\pm}(x_1, \cdot)\,\mathrm{d}\mu_2$$

μ_1-integrierbar sind. Daraus folgt, dass die überall definierte Funktion

$$f(x_1, \cdot) = f^{+}(x_1, \cdot) - f^{-}(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X_2, \mathscr{A}_2)$$

für μ_1-fast alle $x_1 \in X_1$ μ_2-integrierbar ist, und dass die μ_1-fast überall definierte und $\mathbb{R}$-wertige Funktion

$$x_1 \mapsto \int_{X_2} f(x_1, \cdot)\,\mathrm{d}\mu_2 = \int_{X_2} f^{+}(x_1, \cdot)\,\mathrm{d}\mu_2 - \int_{X_2} f^{-}(x_1, \cdot)\,\mathrm{d}\mu_2$$

μ_1-integrierbar ist. Für ihr Integral gilt dann mit Fubini für nichtnegative Funktionen

$$\begin{aligned}
\int_{X_1 \times X_2} f\,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{X_1 \times X_2} f^{+}\,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) - \int_{X_1 \times X_2} f^{-}\,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) \\
&= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f^{+}(x_1, \cdot)\,\mathrm{d}\mu_2 \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) - \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f^{-}(x_1, \cdot)\,\mathrm{d}\mu_2 \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \\
&= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, \cdot)\,\mathrm{d}\mu_2 \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1)
\end{aligned}$$

■

Korollar. Für eine $(\mu_1 \otimes \mu_2)$-integrierbare Funktion $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X_1 \times X_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$ gilt

$$\int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, \cdot) \,\mathrm{d}\mu_2 \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \int_{X_1} f(\cdot, x_2) \,\mathrm{d}\mu_1 \,\mathrm{d}\mu_2(x_2). \tag{2.18}$$

2.6 Transformationen von Maßen und Integralen unter Abbildungen

19.12.2019

2.6.1 Allgemeine Transformationsformel

Wir diskutieren über Transformationen unter messbaren Abbildungen.

Satz (Transformationssatz). Sei $\Phi : (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$ eine messbare Abbildung zwischen Messräumen und μ ein Maß auf $\mathscr{A}$. Dann gilt:

(i) Falls $f \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}(Y, \mathscr{B})$, so gilt

$$\int_Y f \,\mathrm{d}(\Phi_* \mu) = \int_X (f \circ \Phi) \,\mathrm{d}\mu \tag{2.19}$$

(ii) $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(Y, \mathscr{B})$ ist genau dann $\Phi_*\mu$-integrierbar, wenn $f \circ \Phi$ μ-integrierbar ist. In diesem Fall gilt auch (2.19).

Beweis. (i) Für χ_B mit $B \in \mathscr{B}$ folgt die Behauptung direkt aus der Definition des Bildmaßes:

$$\int_Y \chi_B (\Phi_* \mu) = (\Phi_* \mu)(B) = \mu(\Phi^{-1}(B)) = \int_X \underbrace{\chi_{\Phi^{-1}(B)}}_{\chi_B \circ \Phi} \,\mathrm{d}\mu.$$

Wegen der Linearität des Integrals gilt (2.19) für Treppenfunktionen aus $\mathcal{M}_{[0,\infty]}(Y, \mathscr{B})$. Der Satz von der Monotonen Konvergenz liefert die Behauptung auf ganz $\mathcal{M}_{[0,\infty]}(Y, \mathscr{B})$, da sich jede Funktion aus $\mathcal{M}_{[0,\infty]}(Y, \mathscr{B})$ monoton durch eine Folge von Treppenfunktionen approximieren lässt.

(ii) Folgt direkt durch Anwendung von (i) auf $f^{\pm}$.

■

Beispiel (Integration rotationssymmetrischer Funktionen)**.** Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ heißt *rotationssymmetrisch*, falls es eine Radiusfunktion $r : \mathbb{R}^d \to [0.\infty)$ und eine $\overline{f} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ existieren, sodass $f = \overline{f} \circ r$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^d \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "f", "\overline{f} \circ r"'] & {[0, \infty)} \arrow[d, "\overline{f}"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Sind f und $\overline{f}$ messbar, so liefert der Transformationssatz, dass

$$\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{f}_{\overline{f}\circ r} \,\mathrm{d}\lambda^d \overset{(2.19)}{=} \int_{[0,\infty)} \overline{f}\,\mathrm{d}(r_*\lambda^d) \overset{(2.11)}{=} d \cdot v_d \cdot \int_0^\infty \overline{f}(r) \cdot r^{d-1}\,\mathrm{d}r \tag{2.20}$$

wobei die Existenz der beiden Integrale äquivalent sind. Z.B. für Ebene ($d = 2$) gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\,\mathrm{d}\lambda^2 = 2\pi \cdot \int_0^\infty \overline{f}(r) r\,\mathrm{d}r.$$

Für $\overline{f}(x) = e^{-x^2}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\|x\|^2}\,\mathrm{d}\lambda^2(x) = 2\pi \int_0^\infty \underbrace{e^{-r^2} r}_{(-\frac{1}{2}e^{-r^2})'}\,\mathrm{d}r = \pi. \tag{2.21}$$

Wir nutzen dies, um mit Fubini das unbestimmte Integral $\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ zu bestimmen. Weil

$$\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right)^2 \overset{\text{Fubini}}{=} \iint_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-x_1^2}e^{-x_2^2}}_{e^{-\|x\|^2}} \underbrace{\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2}_{=:\,\mathrm{d}\lambda^2(x_1,x_2)} \overset{(2.21)}{=} \pi$$

gilt

$$\boxed{\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}}.$$

Dies erlaubt uns die Berechnung des Wertes $\Gamma(\frac{1}{2})$ der Γ-Funktion[36]

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x, \quad z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0,$$

nämlich

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{v}} e^{-v}\,\mathrm{d}v \underset{v=u^2}{\overset{\text{subst}}{=}} \int_0^\infty \frac{1}{u} e^{-u^2} 2u\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}.$$

Wir gehen zurück zur Diskussion von v_d, nämlich dem Volumen des d-dim Einheitsballes. Wir wollen eine Darstellung von v_d mit Γ-Funktion erhalten. Wir integrieren $e^{-\|x\|^2} = e^{-x_1^2} \cdot \ldots \cdot e^{-x_d^2}$ und verwenden Fubini für die d-fache Zerlegung $\mathbb{R}^d = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|x\|^2}\,\mathrm{d}\lambda^d(x) = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right)^d = \pi^{\frac{d}{2}} \tag{2.22}$$

Anderseits liefert die obige Formel (2.20)

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|x\|^2}\,\mathrm{d}\lambda^d(x) = d \cdot v_d \cdot \int_0^\infty e^{-r^2} \underbrace{r^{d-1}\,\mathrm{d}r}_{\frac{1}{2}r^{d-2}2r\,\mathrm{d}r} \underset{r^2=s}{\overset{\text{subst}}{=}} d \cdot v_d \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\int_0^\infty e^{-s} s^{\frac{d}{2}-1}\,\mathrm{d}s}_{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$$

Zusammen mit (2.22) folgt

$$\boxed{v_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{d \cdot \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}} \xrightarrow{d\to\infty} 0.$$

[36] Sie interpoliert die Fakultäten, $\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N}$ und erfüllt die Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

2.6.2 Transformationen des Lebesgue-Maßes unter Diffeomorphismen

Aus dem Abschnitt (1.5.11) kennen wir schon das Transformationsverhalten von λ^d unter affinen Transformationen. Ist nämlich $\Phi_{A,v}(x) = Ax + v$ für $A \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ und $v \in \mathbb{R}^d$ eine affine Transformation, so gilt

$$(\Phi_{A,v})_* \lambda^d = |\det A^{-1}| \cdot \lambda^d.$$

(Vgl Satz über Skalierungsverhalten des Lebesgue-Maßes unter affinen Transformationen. Der Satz besagt, dass die Volumenverzerrung einer affin-linearen Abbildung durch den Faktor $|\det A|$ bestimmt ist.)

Wir dehnen dies jetzt aus zu beliebigen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismen:

Satz. Für einen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $\Phi : U \to V$ offener Teilmengen $U, V \subset \mathbb{R}^d$ gilt

$$\Phi_*(\beta^d|_U) = |\det \mathrm{d}\Phi^{-1}| \cdot \beta^d|_V \tag{2.23}$$

wobei $\beta^d|_U$ eine Abkürzung für $\beta^d|_{\mathscr{B}(U)}$ ist sowie $\beta^d|_V$ für $\beta^d|_{\mathscr{B}(V)}$. Insbesondere ist $|\det \mathrm{d}\Phi^{-1}|$ stetig auf V und eine Dichte. [37]

Beweis. Der Satz ist bereits bekannt im affinen Fall, d.h. für konstantes Differential. Da die Behauptung *lokaler* Natur ist, ist der wesentliche Fall der *fast konstanten* Diffenrentials, d.h. $\mathrm{d}\Phi \approx A$. Es existiert also ein $A \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ sodass für jedes $x \in U$ und $\varepsilon > 0$

$$\|A^{-1}\, \mathrm{d}\Phi_x - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}\| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |\det(A^{-1}\, \mathrm{d}\Phi_x) - 1| < \varepsilon.$$

Es gilt außerdem

$$\mathrm{d}(\underbrace{A^{-1}\Phi}_{\approx \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}} - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d})_x = A^{-1}\, \mathrm{d}\Phi_x - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}.$$

Wir betrachten Würfel $W = [a, a + le)$ für $e = e_1 + \ldots + e_d$ mit Kantenlänge $l > 0$. Weil W konvex und das Differential durch ε beschränkt ist, d.h. $\|\mathrm{d}(A^{-1}\Phi - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d})_x\| < \varepsilon$ für $x \in W$, liefert der Schrankensatz liefert für $x_1, x_2 \in W$ dass

$$\|\underbrace{A^{-1}\Phi(x_2) - A^{-1}\Phi(x_1) - (x_2 - x_1)}_{A^{-1}\Phi - \mathrm{id}|_{x_1}^{x_2}}\| < \varepsilon l \sqrt{d}.$$

---

[37] Der $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus Φ ist sowohl $\beta^d|_U$-$\beta^d|_V$-messbar als auch $\lambda^d|_U$-$\lambda^d|_V$-messbar und es gilt

$$\lambda^d(\Phi^{-1}(B)) = \int_B |\det \mathrm{d}\Phi^{-1}|\, \mathrm{d}\lambda^d \quad \text{für } B \in \mathscr{L}^d|_V. \tag{2.24}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\lambda^d(\Phi(A)) = \int_A |\det \mathrm{d}\Phi|\, \mathrm{d}\lambda^d \quad \text{für } A \in \mathscr{L}^d|_U, \tag{2.25}$$

wenn wir Φ^{-1} durch Φ ersetzen. Insbesondere folgt die Transformationsformel

$$\boxed{\int_V f\, \mathrm{d}\beta^d = \int_U |\det \mathrm{d}\Phi| (f \circ \Phi)\, \mathrm{d}\beta^d}. \tag{2.26}$$

f ist genau dann β^d-integrierbar über V, wenn $|\det \mathrm{d}\Phi|(f \circ \Phi)$ über U ist. In diesem Fall gilt (2.26).

Daraus folgt, dass $(A^{-1}\Phi)(W)$ in der offenen Tubenumgebung vom Radius $\varepsilon l\sqrt{d}$ eines Würfels der Kantenlänge l enthalten ist, also in einem Würfel der Kantenlänge $l(1+2\varepsilon\sqrt{d})$. Daraus folgt gemäß des Skalierungsverhaltens von β^d unter affinen Transformationen

$$\beta^d(\underbrace{\Phi}_{AA^{-1}\Phi}(W)) = |\det A| \cdot \beta^d(A^{-1}\Phi(W)) \leqslant (1+2\varepsilon\sqrt{d})^d \cdot |\det A| \cdot \beta^d(W).$$

Weil sich jeder achsenparallele Quader $[a,b)$ als *abzählbare* disjunkte Vereinigung achsenparalleler Würfel zerlegen lässt, ebenso jede Figur in $\mathcal{F}^d$, folgt

$$\underbrace{\beta^d(\Phi(F))}_{(\Phi_*^{-1}(\beta^d|_V))(F)} \leqslant (1+2\varepsilon\sqrt{d})^d \cdot |\det A| \cdot \beta^d(F) \quad \forall F \in \underbrace{\mathcal{F}^d(U)}_{\text{Figuren in } U},$$

also

$$\underbrace{\Phi_*^{-1}(\beta^d|_V)}_{\text{Maß auf } \mathscr{B}(U)} |_{\mathcal{F}^d(U)} \leqslant (1+2\varepsilon\sqrt{d})^d \cdot |\det A| \cdot \beta^d|_{\mathcal{F}^d(U)}.$$

Dieselbe Ungleichung folgt für die assoziierten äußeren Maße auf $\mathcal{P}(U)$, also für ihre Einschränkungen auf die von $\mathcal{F}^d(U)$ erzeugte Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(U)$, d.h. die eindeutigen, die beiden Prämäßen fortsetzenden Maße $\Phi_*^{-1}(\beta^d|_V)$ und $\beta^d|_U$. Es folgt

$$\Phi_*^{-1}(\beta^d|_V) \leqslant (1+2\varepsilon\sqrt{d})^d \cdot |\det A| \cdot \beta^d|_U.$$

Weil $|\det(A^{-1}\,\mathrm{d}\Phi_x) - 1| < \varepsilon$, gilt $1-\varepsilon < \frac{\det \mathrm{d}\Phi_x}{\det A} < 1+\varepsilon$ und somit

$$\Phi_*^{-1}(\beta^d|_V) \leqslant \underbrace{\frac{(1+2\varepsilon\sqrt{d})^d}{1-\varepsilon}}_{\to 1 \text{ für } \varepsilon\searrow 0} \cdot |\det \mathrm{d}\Phi| \cdot \beta^d|_U. \tag{2.27}$$

In dieser Form überträgt sich die Abschätzung auf beliebige $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismen, d.h. (2.27) gilt in hinreichend kleiner Umgebung jedes Punktes $x_0 \in U$. Weil die Abschätzung lokaler Natur ist, trägt sich auf Vereinigungen von Umgebungen, d.h. (2.27) gilt auf U global. Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$\Phi_*^{-1}(\beta^d|_V) \leqslant |\det \mathrm{d}\Phi| \cdot \beta^d|_U.$$

Analog für Φ^{-1} gilt

$$\Phi_*(\beta^d|_U) \leqslant |\det \mathrm{d}\Phi^{-1}| \cdot \beta^d|_V.$$

Zusammen folgt

$$\begin{aligned}\Phi_*(\beta^d|_U) \leqslant |\det \mathrm{d}\Phi^{-1}| \cdot \underbrace{\beta^d|_V}_{\Phi_*\Phi_*^{-1}\beta|_V} &\leqslant |\det \Phi^{-1}| \cdot \Phi_*(|\det \mathrm{d}\Phi| \cdot \beta^d|_U) \\ &= \underbrace{|\det \mathrm{d}\Phi^{-1}| \cdot (|\det \mathrm{d}\Phi|}_{=1} \cdot \Phi_*(\beta^d|_U)).\end{aligned}$$

Also muss überall Gleichheit gelten und insbesondere die behauptete Gleichung. ■

Korollar. $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismen offener Teilmengen der $\mathbb{R}^d$ erhalten Borel-Nullmengen und sind daher Lebesgue-messbar. Es gilt allgemeiner

$$\Phi_*(\lambda^d|_U) = |\det \mathrm{d}\Phi^{-1}| \cdot \lambda^d|_V. \tag{2.28}$$

3 Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten

3.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

9.1.2020

Wir erinnern uns an den Begriff der Untermannigfaltigkeit des euklidischen Raums ($\rightsquigarrow$ Ana II):

Definition (Differenzierbare Untermannigfaltigkeit). Für $0 \leqslant m \leqslant n$ und $1 \leqslant k \leqslant \infty$ heißt eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimemsionale $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeit, falls für jeden Punkt $p \in M$ ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus $\Phi : U \to V$ einer offenen Umgebung von p auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ existiert, sodass

$$\Phi(M \cap U) = \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\}}_{\mathbb{R}^m \times \{0_{\mathbb{R}^{n-m}}\}} \cap V. \tag{3.1.1}$$

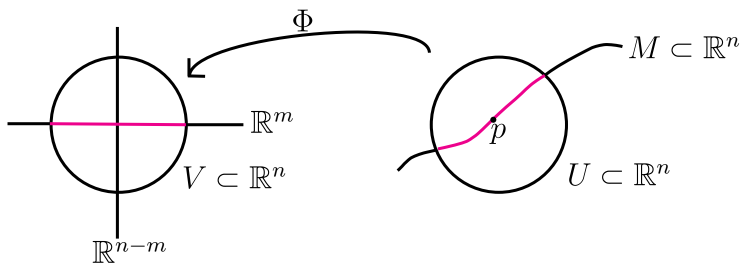


Abbildung: Untermannigfaltigkeit

Wir werden im Folgenden $\mathbb{R}^m \times \{0_{\mathbb{R}^{n-m}}\}$ mit $\mathbb{R}^m$ identifizieren.

Der $\mathcal{C}^k$ Diffeomorphimus induziert durch Einschränkung einen Homöomorphismus

$$\kappa := \Phi|_{M \cap U} : M \cap U \longrightarrow \mathbb{R}^m \cap V \tag{3.1.2}$$

der offenen Menge $U \cap M$ auf eine offene Teilmenge des "Modells" $\mathbb{R}^m$. Er belegt M nahe p mit *lokalen Koordinaten* und man spricht von einer *lokalen Karte* nahe p. Je zwei solche Karten $\kappa_i : M \cap U_i \longrightarrow \mathbb{R}^m \cap V_i$, $i = 1, 2$, sind miteinander $\mathcal{C}^k$-kompatibel in dem Sinne, dass Koordinatentransformationen bzw. Kartenwechsel

$$\kappa_2 \circ \kappa_1^{-1} : \kappa_1(M \cap U_1 \cap U_2) \longrightarrow \kappa_2(M \cap U_1 \cap U_2)$$

$\mathcal{C}^k$ Diffeomorphismus offener Teilmengen des $\mathbb{R}^m$ sind, denn sie sind Einschränkungen des $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus

$$\Phi_1(U_1 \cap U_2) \to \Phi_2(U_1 \cap U_2).$$

Die $\mathcal{C}^k$-Kompatibilität der Karten ermöglicht Differentialrechnung auf M zu betreiben, ohne den umgebenden euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ zu benötigen. Z.B. können wir von der bis zu k-fachen Differenzierbarkeit der nur auf M definierten Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ sprechen: f heißt in p *l-fach differenzierbar* für $1 \leqslant l \leqslant k$, wenn für eine Karte κ in p ihre auf einer offenen Menge in $\mathbb{R}^m$ definierte lokale Koordinatendarstellung $f \circ \kappa^{-1}$ im Punkt $\kappa(p)$ l-fach differenzierbar ist. Dies ist unabhängig von der Karte. Denn ist $\widetilde{\kappa}$ eine weitere Karte in p, so gilt

$$f \circ \widetilde{\kappa}^{-1} = f \circ \kappa^{-1} \circ \underbrace{(\kappa \circ \widetilde{\kappa}^{-1})}_{\mathcal{C}^k\text{-Diffeo}}$$

nahe $\widetilde{\kappa}(p)$, und $f \circ \widetilde{\kappa}^{-1}$ ist genau dann l-fach differenzierbar in $\widetilde{\kappa}(p)$, wenn $f \circ \kappa^{-1}$ l-fach differenzierbar ist in $\kappa(p)$. Höhere als k-fache Differenzierbarkeit kann nicht sinnvoll definiert werden.

Wir definieren nun "abstrakte", d.h. nicht von vornherein in einen euklidischen Raum eingebettete, *differenzierbare Mannigfaltigkeit* als gewisse topologische Räume mit Zusatzstruktur, die uns es erlaubt, auf ihnen Differentialrechnung zu betreiben.

Definition (Lokal euklidischer Raum). Ein topologischer Raum X heißt m-dim lokal euklidisch, falls jeder Punkt eine Umgebung besitzt, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge in $\mathbb{R}^m$ ist.

Ein Homöomorphismus $\kappa : U \to V$ einer offenen Teilmenge $U \subset X$ auf eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^m$ heißt *Karte* oder *Koordinatensystem* und U heißt *Kartengebiet*. Wir werden oft solche Karten mit (U, κ) bezeichnen. Sind (U_i, κ_i) Karten, so ist der *Kartenwechsel*

$$\kappa_2 \circ \kappa_1^{-1} : \kappa_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \kappa_2(U_1 \cap U_2)$$

ein Homöomorphismus offener Teilmengen des Modells $\mathbb{R}^m$.

Ein **Atlas** ist eine Familie $\mathscr{A}$ von Karten $(U_i, \kappa_i)_{i \in I}$ die X überdecken, $X = \bigcup_{i \in I} U_i$. Um Differentialrechnung betreiben zu können, verlangen wir dieselbe Verträglichkeit der Karten im Atlas wie sie im Fall der Karten (3.1.2) differenzierbarer Untermannigfaltigkeiten vorliegt. Zwei Karten heißen *$\mathcal{C}^k$-kompatibel*, falls der Kartenwechsel ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus ist. Ein Atlas $\mathscr{A}$ heißt *$\mathcal{C}^k$-differenzierbar*, falls seine Karten paarweise $\mathcal{C}^k$-kompatibel sind. Jeder Atlas ist in einem eindeutigen *maximalen* $\mathcal{C}^k$-Atlas enthalten, der durch Hinzunahme aller $\mathcal{C}^k$-kompatiblen Karten entsteht.

Definition (Differenzierbare Struktur). Eine $\mathcal{C}^k$-differenzierbare Struktur auf einem lokal euklidischen Raum ist ein maximaler $\mathcal{C}^k$-Atlas.

Eine differenzierbare Struktur erlaubt, differenzierbare Konzepte vom euklidischen Raum zu übertragen. So zB die *Differenzierbarkeit* von Abbildungen: Seien X^m und Y^n lokal euklidische Räume versehen mit $\mathcal{C}^k$-differenzierbaren Strukturen und sei $F : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Ist $p \in X$ ein Punkt und sind (U, κ) und (U', κ') Karten in X bzw Y um p bzw $F(p)$, so nennen wir die auf einer offenen Menge in $\mathbb{R}^m$ definierte $\mathbb{R}^n$-wertige Abbildung

$$\kappa' \circ F \circ \kappa^{-1}$$

eine *lokale Koordinatendarstellung* von F nahe p. Für den Übergang zwischen lokalen Koordinatendarstellungen gilt:

$$\widetilde{\kappa}' \circ F \circ \widetilde{\kappa}^{-1} = \underbrace{\left(\widetilde{\kappa}' \circ (\kappa')^{-1}\right)}_{\mathcal{C}^k\text{-Diffeo}} \circ \left(\kappa' \circ F \circ \kappa^{-1}\right) \circ \underbrace{\left(\kappa \circ \widetilde{\kappa}^{-1}\right)}_{\mathcal{C}^k\text{-Diffeo}}.$$

Definition (Differenzierbare Abbildung). Eine stetige Abbildung $F : X \to Y$ zwei lokal euklidischer Räume versehen mit $\mathcal{C}^k$-differenzierbaren Strukturen heißt im Punkt $p \in X$ *l-fach differenzierbar*, $1 \leqslant l \leqslant k$, falls eine und damit alle ihre lokalen Koordinatendarstellungen in p im Punkt $\kappa(p)$ l-fach differenzierbar sind.

Analog definiert man $\mathcal{C}^l$-Differenzierbarkeit. Den Raum der $\mathcal{C}^l$-Abbildungen bezeichnen wir mit $\mathcal{C}^l(X, Y)$ und spezieller den Raum der $\mathcal{C}^l$-Funktionen mit $\mathcal{C}^l(X)$. Ein Diffeomorphismus ist wieder eine bijektive differenzierbare Abbildung, deren Umkehrabbildung auch differenzierbar ist. Karten einer $\mathcal{C}^k$-differenzierbaren Struktur sind Diffeomorphismen.

Definition (Mannigfaltigkeit).

(i) Eine m-dim *topologische Mannigfaltigkeit* ist ein m-dim lokal euklidischer Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis.

(ii) Eine m-dim *$\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit* ist eine topologische Mannigfaltigkeit mit $\mathcal{C}^k$-differenzierbarer Struktur.

Die Hausdorff Eigenschaft stellt sicher, dass wir Punkte durch stetige Funktionen trennen können. Die abzählbare Basis der Topologie sichert die Existenz einer Partition der Eins.

Beispiel.

(o) Die natürliche $\mathcal{C}^\infty$-differenzierbare Struktur auf $\mathbb{R}^n$ besteht aus $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ zusammen mit allen $\mathcal{C}^\infty$-kompatiblen Karten. So wird $\mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit.

(i) Eine m-dim $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist, versehen mit der relativen Topologie, ein lokal euklidischer Raum. Sie trägt eine $\mathcal{C}^k$-differenzierbare Struktur induziert durch die Karten $\Phi|_{M \cap U}$.

(i') Sei N^n eine n-dim $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit. Dann heißt für $0 \leqslant m \leqslant n$ eine Teilmenge $M \subset N$ eine m-dim (bzw. $(n-m)$-kodim) $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeit von N, falls in jedem Punkt $p \in M$ eine Karte $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ im Atlas von N existiert, s.d. U eine Umgebung von p ist und $\Phi(U \cap M) \subset \mathbb{R}^m$ gilt. D.h. $\Phi(U \cap M)$ ist eine m-dim Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. In diesem Fall erbt M die Struktur als $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit von N.

(ii) Euklidische Produkte von $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten sind auf natürliche Art $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit.

(iii) Jede $\mathcal{C}^k$-differenzierbare Struktur kann zu einer $\mathcal{C}^l$-differenzierbare Struktur für $l \leqslant k$ abgeschwächt werden. D.h. jede $\mathcal{C}^l$-Mannigfaltigkeit ist auch $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit, $l \leqslant k$.

Man kann ausgehend von einer *Menge*, mit Hilfe eines geeigneten "Atlas" direkt sowohl die topologische als auch die differenzierbare Struktur einer Mannigfaltigkeit induzieren. Dies ist oft nützlich für die Konstruktion von Mannigfaltigkeiten. 13.1.2020

Satz. Sei M eine Menge, und seien $m \geqslant 0$ und $k \geqslant 1$. Wir nehmen an:

(i) $\mathscr{A}$ ist eine Familie bijektiver Abbildungen

$$\kappa_l : U_l \longrightarrow V_l, \quad l \in L$$

von Teilmengen $U_l \subset M$ und $V_l \subset \mathbb{R}^m$ offen, so dass $M \subset \bigcup_{l \in L} U_l$.

(ii) Die Definitionsbereiche der Abbildungen $(\kappa_j \circ \kappa_l^{-1})$ sind offene Teilmengen und die $(\kappa_j \circ \kappa_l^{-1})$ sind $\mathcal{C}^k$.

Dann existiert auf M eine eindeutige m-dim lokal euklidische Topologie $\mathcal{T}$ sowie auf $(M, \mathcal{T})$ eine eindeutige $\mathcal{C}^k$-differenzierbare Struktur, sodass $\mathscr{A}$ für sie ein $\mathcal{C}^k$-Atlas ist.

Beweisskizze. Wir betrachten die Familie $\mathcal{T}$ aller Teilmengen $O \subset M$ sodass $\kappa_\iota(O \cap U_\iota)$ offen ist für alle $\iota \in L$. Sie ist eine Topologie auf M (Ü). Sie wird von den Teilmengen der Form $\kappa_\iota^{-1}(O'_\iota)$ für offene Teilmengen $O'_\iota \subset V_\iota$ erzeugt. Genauer gesagt sind die U_ι offen bzgl $\mathcal{T}$ und die κ_ι sind Homöomorphismen. Weiter folgt, dass $\mathscr{A}$ einen $\mathcal{C}^k$-differenzierbaren Atlas liefert. ∎

Man kann auch Kriterien angeben wann eine Mannigfaltigkeit vorliegt: **Zusatz.**

(i) Die Topologie $\mathcal{T}$ ist Hausdorff, wenn je zwei Punkte in einer gemeinsamen Teilmenge U_ι enthalten sind oder in disjunkten.

(ii) $\mathcal{T}$ hat eine abzählbare Basis, wenn M durch abzählbar viele U_ι's überdeckt wird.

Beweis. (Ü). ∎

Das folgende ist eine wichtiges Beispiel für eine "abstrakte" Mannigfaltigkeit in dem Sinne, dass sie keine bevorzugte Einbettung in den euklidischen Raum besitzt.

Beispiel (Reell projektiver Raum)**.** Der *d-dim reell projektiver Raum* $\mathbb{R}P^d$ ist die Menge der Geraden in $\mathbb{R}^{d+1}$ durch den Ursprung, d.h. die Menge der 1-dim Unterräume. Dem Punkt $\mathbb{R}x$ repräsentiert durch den Punkt $x \in \mathbb{R}^{d+1} \backslash \{0\}$ ordnen wir die homogenen Koordinaten zu

$$[x] = [x_0 : x_1 : ... : x_d].$$

Sie sind eindeutig bis auf Skalierung:

$$[x] = [x'] \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\} : \lambda x = x'.$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} U_i = \quad & \{[x] \in \mathbb{R}P^d \mid x_i \neq 0\} & \xrightarrow{\kappa_i} \quad & \{x_i = 1\} \cong \mathbb{R}^d \\ & [x_0 : ... : x_d] & \longmapsto \quad & \left(\frac{x_0}{x_i}, ... \,\widehat{1}, ..., \frac{x_d}{x_i}\right) \end{aligned}$$

wobei $\widehat{x_i}$ bedeutet, dass der Term x_i ausgelassen wird. Die κ_i heißen *affine Koordinaten*, mit den Umkehrabbildungen

$$[y_1, ..., \underset{i\text{-te}}{1}, ..., y_d] \longleftarrow (y_1, ..., y_d).$$

Wir prüfen, dass die Familie der κ_i die Voraussetzungen vom letzten Satz erfüllt. Dazu stellen wir fest, dass $\kappa_i(U_i) = V_i \cong \mathbb{R}^d$, also sicher offen. $\mathbb{R}P^d$ wird von den U_i überdeckt. Weiter sind für $i \neq j$ die Definitionsbereiche

$$\{x_i = 1 \wedge x_j \neq 0\} \subset \{x_i \neq 0\}$$

der Kartenwechsel $\kappa_j \circ \kappa_i^{-1}$, sind Komplemente von Hyperebene, insbesondere offen, und die $\kappa_j \circ \kappa_i^{-1}$ sind als rationale Funktionen glatt. Also induzieren sie den Atlas einer glatten Struktur. Man prüft auch die Voraussetzungen von dem letzten Zusatz, also ist $\mathbb{R}P^d$ eine glatte Mannigfaltigkeit.

Für Verklebekonstruktion ist folgende Verallgemeinerung nützlich: Die Aussagen von dem Satz und Zusatz gelten auch, wenn die V_ι $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten und die κ_ι $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismen sind.

3.2 Tangentialbündel und Differential

Wir approximieren nun differenzierbare Mannigfaltigkeiten lokal durch Vektorräume, indem wir den Begriff des Tangentialraums an eine Untermannigfaltigkeit adaptieren.

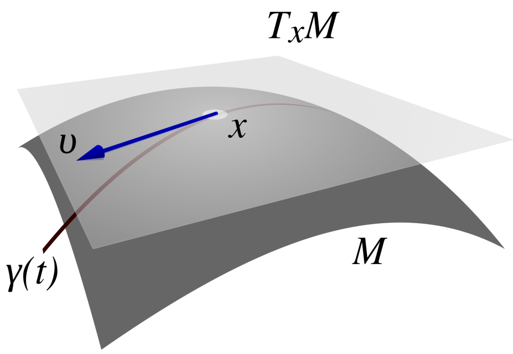


Abbildung: Tangentialraum[38]

Sei M^m eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit. Wir betrachten $\mathcal{C}^1$-Kurven $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ durch einen Punkt $p \in M$. Wir sagen, dass zwei solche Kurven $c_i : (-\varepsilon_i, \varepsilon_i) \to M$ durch p in $t = 0$ *erster Ordnung übereinstimmen*, falls für eine Karte (U, x) in p gilt

$$(x \circ c_1)'(0) = (x \circ c_2)'(0).$$

Dies ist unabhängig von der Karte x, denn ist $(\widetilde{U}, \widetilde{x})$ eine zweite Karte in p, so gilt

$$(\widetilde{x} \circ c_i)'(0) = d(\widetilde{x} \circ x^{-1})_{(x \circ c_i)(0)}(x \circ c_i)'(0). \tag{3.2.1}$$

Die Äquivalenzklasse in $t = 0$ erster Ordnung übereinstimmender Kurven nennt man *1-Jet* von Kurven durch p. Wir bezeichnen den 1-Jet der Kurve c mit $[c]$.

[38] Quelle: Wikipedia.

Definition (Tangentialvektor, -räume, -bündel). Sei M eine m-dimensionale $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit, $p \in M$.

(i) Ein *Tangentialvektor* im Punkt p ist ein 1-Jet durch p, also eine Äquivalenzklasse in $t = 0$ erster Ordnung übereinstimmender Kurven.

(ii) Der *Tangentialraum* T_pM an M im Punkt p ist die Vereinigung aller Tangentialvektoren in p.

(iii) Das *Tangentialbündel* an M ist die *disjunkte* Vereinigung aller Tangentialräume $TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$ zusammen mit der Fußpunktprojektion $\pi = \pi_{TM} : TM \to M$.

Die Tangentialräume an verschiedenen Punkten einer Mannigfaltigkeit sind also disjunkt. Sie tragen natürliche Strukturen als *lineare Räume.* Weil die Differentiale

$$d(\underbrace{\widetilde{x} \circ x^{-1}}_{\mathcal{C}^k})_{x(p)}$$

der Kartenwechsel lineare Automorphismen sind, existiert angesichts (3.2.1) sowie der Kettenregel auf T_pM eine eindeutige lineare Struktur als m-dim Vektorraum, sodass die Bijektionen

$$T_pM \xrightarrow{1:1} \mathbb{R}^m, c \longmapsto (x \circ c)'(0) \tag{3.2.2}$$

für alle Karten x in p lineare Automorphismen sind. Jede Karte x zeichnet eine Basis des Tangentialraums aus, die aus den Koordinatenrichtungen

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p := [t \longmapsto x^{-1}(x(p) + te_i)] \in T_pM$$

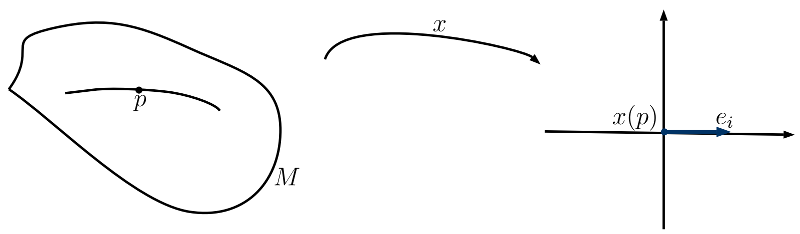


Abbildung: Richtungsableitung bzgl. einer Karte x

bzgl. x besteht, unter der Identifizierung (3.2.2) in die Standardbasis überträgt. Die Notation reflektiert, dass Tangentialvektoren *Richtungsableitungen* entsprechen, hier den partiellen Ableitungen. Wir nennen $\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right)$ die Standardbasis von T_pM bzgl. der Karte x in p. Ein allgemeiner Tangentialvektor $[c] \in T_pM$ hat dann wegen $(x \circ c)'(0) = \sum_{i=1}^m (x_i \circ c)'(0) e_i$ die Darstellung

$$(x \circ c)'(0) = \sum_{i=1}^m (x_i \circ c)'(0) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p . \tag{3.2.3}$$

Eine Karte (U, x) für M induziert, indem man die Identifikationen (3.2.2) zusammennimmt, insgesamt eine *Karte* (TU, Tx)

$$\begin{array}{rlcl} Tx: & TU = \bigsqcup_{p \in U} T_pM & \xrightarrow{1:1} & x(U) \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{2m} \\ & [c] & \longmapsto & ((x \circ c)(0), (x \circ c)'(0)) \end{array} \tag{3.2.4}$$

für den entsprechenden Teil von dem Tangentialbündel TM.

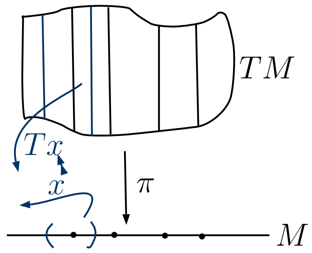


Abbildung: von (U, x) induzierte Karte (TU, Tx)

Ist $(\widetilde{U}, \widetilde{x})$ eine weitere Karte, so ist der Bündelkartenwechsel

$$T\widetilde{x} \circ (Tx)^{-1} : x(U \cap \widetilde{U}) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \widetilde{x}(U \cap \widetilde{U}) \times \mathbb{R}^m \tag{3.2.5}$$

auf dem Tangentialbündel TM gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} ((x \circ c)(0), (x \circ c)'(0)) & \longmapsto & ((\widetilde{x} \circ c)(0), (\widetilde{x} \circ c)'(0)) \\ & = & ((\widetilde{x} \circ x^{-1})(x \circ c)(0), d(\widetilde{x} \circ x^{-1})_{(x \circ c)(0)}(x \circ c)'(0)). \end{array}$$

Bezeichnen wir suggestiver die Koordinaten in M bzgl. der beiden Karten mit x bzw $\widetilde{x}$ und den Kartenwechsel mit $\widetilde{x}(x)$, so nimmt der Kartenwechsel auf TM die Form

$$(x, v) \longmapsto (\widetilde{x}(x), d\widetilde{x}_x(v)) \tag{3.2.6}$$

an. Das Differential einer Abbildung $\widetilde{x}(x)$ zwischen offenen Teilmengen euklidischer Räume, ist explizit für $v = \sum_{j=1}^m x_j e_j \in \mathbb{R}^m$ gegeben durch

$$d\widetilde{x}_x(v) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m v_j \frac{\partial \widetilde{x}_i}{\partial x_j}(x) \right) e_i. \tag{3.2.7}$$

Aus der letzten Formel (3.2.7) können wir insbesondere den Basiswechsel in den Tangentialräumen ablesen. Weil die Basisvektoren $\frac{\partial}{\partial x_j}$ bzgl Tx Vektorkoordinate $v = e_j$ haben, und entsprechend $\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_i}$ bzgl. $T\widetilde{x}$, gilt 16.1.2020

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \widetilde{x}_i}{\partial x_j}(x(p)) \left.\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_i}\right|_p \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \widetilde{x}_i}{\partial x_j} \circ x \right) \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_i}. \tag{3.2.8}$$

Weil die Einträge $\dfrac{\partial \widetilde{x}_i}{\partial x_j}$ der Jacobi-Matrix $\mathcal{C}^{k-1}$ sind, zeigt dies insbesondere, dass die Kartenwechsel $T\widetilde{x} \circ (Tx)^{-1}$ für TM $\mathcal{C}^{k-1}$ sind. Der Tangentialbündel erhält also die Struktur als $2m$-dim lokal euklidischer Raum zusammen mit der $\mathcal{C}^{k-1}$-differenzierbaren

Struktur. Außerdem ist es klar, dass die Topologie von TM eine abzählbare Basis hat, weil dies für M erfüllt ist und dass die Topologie auf TM wieder Hausdorffsch ist. Also ist TM eine $2m$-dim $\mathcal{C}^{k-1}$-Mannigfaltigkeit.

Ist nun $W \subset \mathbb{R}^m$ offen, so ist die Identität id_W eine globale Karte auf W und W hat die Struktur als eine $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit. Wie erhalten die natürliche Identifikation von Tangentialräumen T_pW

$$T_pW \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m, [c] \longmapsto c'(0), \tag{3.2.9}$$

einen linearen Isomorphismus, und vom Tangentialbündel TW

$$TW = \bigsqcup_{p \in W} T_pW \longrightarrow W \times \mathbb{R}^m, [c] \longmapsto (c(0), c'(0)), \tag{3.2.10}$$

einen $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus. Das Standardbasenfeld ist gegeben durch

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x = [t \mapsto x + te_i].$$

Wir *approximieren* jetzt *differenzierbare Abbildungen* lokal durch lineare Abbildung der Tangentialräume, indem wir den Begriff des Differentials für Abbildungen von Untermannigfaltigkeiten verallgemeinern.

Definition (Differential). Sei $F : M^m \to N^n$ eine differenzierbare Abbildung von $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten, $k \geqslant 1$. Dann induziert F eine Abbildung von Tangentialbündeln

$$dF : TM \to TN, [c] \mapsto [F \circ c].$$

Die Abbildung dF heißt *das Differential* von F.

Die Abbildung dF ist wohldefiniert, denn die Kettenregel liefert uns

$$(\underbrace{y \circ (F \circ c)}_{y \circ F \circ x^{-1} \circ x \circ c})'(0) = d(y \circ F \circ x^{-1})_{(x \circ c)(0)}((x \circ c)'(0)),$$

also hängt der 1-Jet $[F \circ c]$ nur vom 1-Jet $[c]$ ab.

Das Differential bildet Tangentialräume auf Tangentialräume ab:

$$dF_p := df|_{T_pM} : T_pM \to T_{F(p)}N,$$

ist insbesondere unter natürlichen Identifikationen als Komposition linearer Abbildungen wieder linear. Das Differential dF ist also eine Familie linearer Abbildungen dF_p von Tangentialräumen, der Differentiale von F in den Punkten $p \in M$.

$$\begin{tikzcd}
T_pM \arrow[rr, "dF_p := dF|_{T_pM}", "\text{linear als Komposition lin Abb}"'] \arrow[d, "Tx|_{T_pM}"', "\cong\ \text{lin}"] & & T_{F(p)}N \arrow[d, "\cong\ \text{lin}"', "Ty|_{T_{F(p)}N}"] \\
\mathbb{R}^m \arrow[rr, "d(y \circ F^{-1} \circ x)_{x(p)}", "\text{linear}"'] & & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

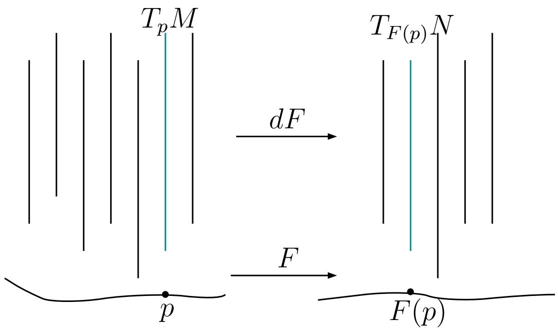


Abbildung: Illustration des Differentials

Im Fall von Abbildungen offener Teilmengen euklidischer Räume ist das Differential konsistent mit dem früher eingeführten, denn letztes bildet

$$c'(0) \mapsto (F \circ c)'(0)$$

ab. Für das Differential gilt

- *Kettenregel.* Sind $F : X \to Y$ und $G : Y \to Z$ differenzierbare Abbildungen von $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten, so gilt die Kettenregel

  $$d(G \circ F) = dG \circ dF,$$

  denn $d(G \circ F)([c]) = [G \circ (F \circ c)] = dG([F \circ c]) = dG(dF[c])$.

- Für die Identität id_M gilt $d\,\mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{TM}$.

- Für die Umkehrabbildung F^{-1} eines Diffeomorphismus $F : M \to N$ gilt

  $$d(F^{-1}) = (dF)^{-1}.$$

Wir haben gesehen (vgl (3.2.4)), dass eine Karte (U, x) der Mannigfaltigkeit eine Bündelkarte (TU, Tx) des Tangentialbündels induziert. Nachdem wir den Begriff des Differentials eingeführt haben, stellen wir nun fest, dass die induzierten Bündelkarten $Tx : TU \to x(U) \times \mathbb{R}^m$ bis auf der natürlichen Identifikation (3.2.10) mit den Differentialen $dx : TU \to T(x(U)), [c] \mapsto [x \circ c]$ der Kartenabbildungen übereinstimmen, insbesondere ist die Identifikation (3.2.2) des Tangentialraums das Differential dF_p.

$$\begin{tikzcd}
TU \arrow[r, "Tx"] \arrow[dr, "dx"'] & x(U) \times \mathbb{R}^m \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"', "(3.2.10)"] \\
& T(\underbrace{x(U)}_{\subset \mathbb{R}^m})
\end{tikzcd}$$

Im Einklang hiermit stimmen die Bündelkartenwechsel (3.2.5) $T\widetilde{x} \circ (Tx)^{-1}$ bis auf der Identifikationen (3.2.10) mit den Differentialen $T(x(U)) \to T(\widetilde{x}(U)), [x \circ c] \mapsto [\widetilde{x} \circ c]$ der Kartenwechsel auf M überein und (3.2.6) ist das Differential des Kartenwechsels $\widetilde{x}(x)$.

In lokalen Koordinaten: Das Differential dF_p ist relativ zu den Koordinatenbasen $\frac{\partial}{\partial x_j}$

bzw. $\frac{\partial}{\partial y_i}$ ist gegeben durch die Jacobische durch die Jacobische der lokalen Koordinatendarstellung:

$$dF_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_p\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(y_i \circ F \circ x^{-1})}{\partial x_j}(x(p)) \frac{\partial}{\partial y_i}\bigg|_{F(p)}.$$

Dies verallgemeinert die frühere Formel für den Wechsel zwischen von Karten induzierten Basen der Tangentialräume. Daraus folgt, dass die lokale Koordinatendarstellung $T_y \circ dF \circ (Tx)^{-1}$ des Differentials bzgl. induzierter Bündelkarten bis auf der Identifikationen

$$T(x(U)) \cong x(U) \times \mathbb{R}^m \quad \text{und} \quad T(y(U')) \cong y(U') \times \mathbb{R}^n$$

mit dem Differential dy von $y(x)$ übereinstimmt. Das letztere hat die Form

$$(x, v) \mapsto (y(x), dy_x(v)).$$

Wir sehen insbesondere: F von der Klasse $\mathcal{C}^k \implies dF$ von der Klasse $\mathcal{C}^{k-1}$.

Die *Ableitung* oder *Geschwindigkeit* einer differenzierbaren Kurve $c : I \to M$ ist definiert durch

$$\frac{dc}{dt}(\tau) := c'(\tau) := [t \mapsto c(t+\tau)] = [c(\cdot + \tau)] \in T_{c(\tau)}M. \tag{3.2.11}$$

wobei $c(\cdot + \tau)$ die durch Zeitverschiebung reparametrisierte Kurve meint. Sie ist das Bild des Standardvektorfelds $\tau \mapsto \frac{\partial}{\partial t}|_\tau = [t \mapsto \tau + t] \in T_\tau I \cong T_\tau\mathbb{R}$ auf I unter dem Differential der Kurve

$$c'(\tau) = dc_\tau\left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_\tau\right). \tag{3.2.12}$$

3.3 Totales Differential, 1-Formen und Kotangentialbündel

Sei M eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit, $k \geqslant 1$ und sei $f : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Die Abbildung

$$df : TM \to T\mathbb{R}$$

heißt das *totale Differential* von f. Das totale Differential ist die Familie der linearen Abbildungen, bzw. Linearformen

$$df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}.$$

auf Tangentialräumen, d.h. $df_p \in (T_pM)^*$.

Definition (Kotangentialraum, -bündel).

(i) Der Dualraum $(T_pM)^*$ zu dem Tangentialraum T_pM heißt *Kotangentialraum* an M in p, geschrieben T_p^*M.

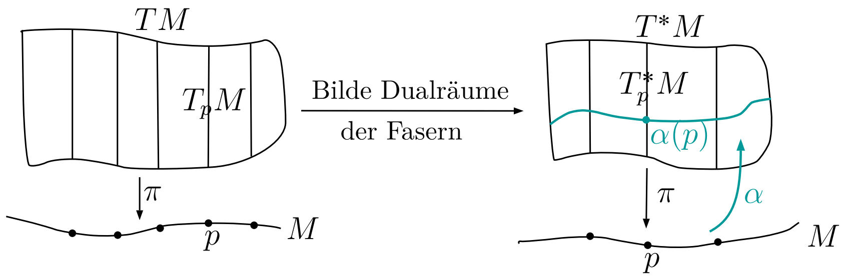
(ii) Das *Kotangentialbündel* an M ist die disjunkte Verneigung von Kotangentialräumen $T^*M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M$ mit der Fußpunktprojektion $\pi_{T^*M} : T^*M \longrightarrow M$.

Die Definition erlaubt uns, das totale Differential df aufzufassen als die Abbildung

$$M \longrightarrow T^*M, p \longmapsto df_p \in T_p^*M$$

mit $\pi_{T^*M} \circ df = \mathrm{id}_M$. Wir können also das totale Differential auffassen als einen Schnitt des Kotangentialbündels T^*M. Auf natürliche Weise gelangen wir zur der folgenden Definition: 20.1.2020

Definition (Differentialform vom Grad 1, 1-Form). Eine *Differentialform* vom Grad 1, kurz *1-Form*, auf M ist ein *Schnitt* des Kotangentialbündels π_{T^*M}, d.h. eine Abbildung $\alpha : M \to T^*M$ mit $\pi_{T^*M} \circ \alpha = \mathrm{id}_M$.



Eine 1-Form α ist also eine Familie von Linearformen $\alpha_p := \alpha(p) \in T_p^*M$ auf den Tangentialräumen T_pM. Z.B. sind totale Differentiale 1-Formen.

Wir beschreiben jetzt einige *Rechenregeln* für das totale Differential. Sei $f : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Das totale Differential df ist dann gegeben durch

$$df([c]) = [f \circ c] \overset{T_{(f\circ c)(0)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}}{=} (f \circ c)'(0).$$

Sind $f_i, f, g : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $a_i \in \mathbb{R}$, so gilt

- *$\mathbb{R}$-Linearität,* $d(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 df_1 + a_2 df_2$,
- *Produktregel,* $d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg$.

Das Kotangentialbündel T^*M erbt von M ebenfalls die Struktur als differenzierbare Mannigfaltigkeit, indem die Karten für M die entsprechenden Karten für T^*M induzieren. Ist (U, x) eine lokale Karte für M in p und $\lambda \in (\mathbb{R}^m)^*$ eine Linearform,

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "dx_p"] \arrow[dr, dashed] & T_{x(p)}\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m \arrow[d, "\lambda"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

so wird eine Linearform $(\lambda \circ dx_p) \in T_p^*M$ induziert. Hier gelangen wir zu der natürlichen dualen linearen Identifikation des Kotangentialraums

$$dx_p^* : (\mathbb{R}^m)^* \overset{\cong}{\to} T_p^*M, \lambda \mapsto \underbrace{d(\lambda \circ x)_p}_{\substack{d\lambda_{x(p)} \circ dx_p \\ = \lambda \circ dx_p}}. \tag{3.3.1}$$

Insbesondere wird die zu Standardbasis (e_i) von $\mathbb{R}^m$ duale Basis $(e_i)^*$

$$(e_i)^* \mapsto (dx_i)_p$$

abgebildet. Wir nennen $(dx_i)_p$ die duale Basis zu $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\right)$ von dem Tangentialraum T_pM. In der Tat ist

$$\underset{\substack{\text{Koordinatenfkt}\\ \text{auf } U}}{(dx_j)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p\right) = \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_i}(p)}_{\text{kurz für } \frac{\partial(x_j\circ x^{-1})}{\partial x_i}(p)} = \delta_{ij}.$$

Bzgl. der Standardbasen schreibt sich eine allgemeine 1-Form α lokal für $a_i : U \to \mathbb{R}$ als

$$\alpha|_U = \sum_{i=1}^m a_i dx_i. \tag{3.3.2}$$

Totale Differentiale lassen sich schreiben als

$$df|_U = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial(f\circ x^{-1})}{\partial x_i}\circ x\right) dx_i, \tag{3.3.3}$$

denn

$$df|_U\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p\right) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(f\circ x^{-1})(x(p))+te_i) = \frac{\partial(f\circ x^{-1})}{\partial x_i}(x(p)).$$

Wir beschreiben nun den *induzierten Atlas* für das Kotangentialbündel T^*M. Die lokale Karte (U,x) der Mannigfaltigkeit induziert durch faserweises Zurückziehen dual zu der Karte

$$TU \xrightarrow{Tx=dx} x(U)\times\mathbb{R}^m$$

eine lokale *Parametrisierung* für den entsprechenden Teil des Kotangentialbündels T^*M durch

$$\begin{array}{ccc} x(U)\times(\mathbb{R}^m)^* & \xrightarrow[\cong]{T^*x} & T^*U \\ \left(x(p), \underbrace{\sum_{i=1}^m a_i e_i^*}_{=a}\right) & \longmapsto & \underbrace{\sum_{i=1}^m a_i(dx_i)_p}_{d(a\circ x)_p \overset{(3.3.1)}{=} (dx_p^*)(a)} \end{array}. \tag{3.3.4}$$

Ihre Umkehrung $(T^*x)^{-1}$ dient als lokale Karte für T^*M.

Jetzt bestimmen wir die Kartenwechsel für das Kotangentialbündel T^*M. Sei $(\widetilde{U},\widetilde{x})$ eine weitere Karte für M. Dann haben wir dual zum Basenwechsel der Tangentailräume (3.2.8)

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \underbrace{\left(\frac{\partial\widetilde{x}_i}{\partial x_j}\circ x\right)}_{\text{kurz für } \frac{\partial(\widetilde{x}_i\circ x^{-1})}{\partial x_j}\circ x} \frac{\partial}{\partial\widetilde{x}_i}$$

den Basenwechsel der Kotangentialräume

$$d\widetilde{x}_i = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial \widetilde{x}_i}{\partial x_j} \circ x \right) dx_j, \tag{3.3.5}$$

denn es gilt

$$d\widetilde{x}_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = d\widetilde{x}_i \left(\sum_{l=1}^{m} \left(\frac{\partial \widetilde{x}_l}{\partial x_j} \circ x \right) \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_l} \right) = \frac{\partial \widetilde{x}_i}{\partial x_j} \circ x.$$

Und dual zu den Kartenwechsel auf TM haben wir die Kartenwechsel auf T^*M

$$\begin{array}{ccc}
x(U \cap \widetilde{U}) \times (\mathbb{R}^m)^* & \xrightarrow[\cong]{(T^*\widetilde{x})^{-1} \circ T^*x} & \widetilde{x}(U \cap \widetilde{U}) \times (\mathbb{R}^m)^* \\
(x(p), a) & \left(\xmapsto[(3.3.4)]{T^*x} \right. & \left. \underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_i (dx_i)_p}_{\in T^*(U \cap \widetilde{U}) \subset T^*M} \overset{(3.3.5)}{=} \sum_{i=1}^{m} a_i \left(\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \widetilde{x}_j} (\widetilde{x}(p)) \right) (d\widetilde{x}_j)_p \right) \right) \\
 & \longmapsto & \left(\widetilde{x}(p), \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial x_i}{\partial \widetilde{x}_j} (\widetilde{x}(p) \right)}_{\frac{\partial (a \circ x)}{\partial \widetilde{x}_j} (\tilde{x}(p))} e_j^* \right) \\
 & = & (\widetilde{x}(p), \underbrace{d(x^* a)_{\tilde{x}(p)}}_{d(a \circ x)_{\tilde{x}(p)}}),
\end{array}$$

wobei wir $a = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$ als lineare Funktion auf $x(U) \subset \mathbb{R}^m$ ansehen und die Funktion

$$\underbrace{(a \circ x)}_{\text{kurz für } a \circ x \circ \widetilde{x}^{-1}} (\widetilde{x}) = (x^* a)(\widetilde{x})$$

auf $\widetilde{x}(U)$ als ihre Verknüpfung (Rückzug) mit dem Kartenwechsel $x(\widetilde{x})$, also ihre lokale Darstellung als Funktion der Koordinaten $\widetilde{x}$. Also ist

$$(x, a) \underset{\mathcal{C}^{k-1}}{\longmapsto} (\underset{\mathcal{C}^k}{\widetilde{x}(x)}, \underset{\mathcal{C}^{k-1}}{d(x^* a)_{\tilde{x}(x)}}). \tag{3.3.6}$$

Wie im Fall des Tangentialbündels folgt, dass der Atlas auf T^*M bestehend aus den Karten $(T^*x)^{-1}$ eine Struktur als $\mathcal{C}^{k-1}$-Mannigfaltigkeit induziert. Die Fußpunktprojektion π_{T^*M} ist $\mathcal{C}^{k-1}$.

Ist $W \subset \mathbb{R}^m$ offen, so lassen sich 1-Formen α auf W für $a_i : W \to \mathbb{R}$ schreiben als Linearkombinationen

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} a_i dx_i$$

der totalen Differentiale dx_i der Koordinatenfunktionen. Die totalen Differentiale lassen sich dann schreiben als

$$df = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Zurückziehen/ Pull-back. Mit differenzierbaren Abbildungen kann man 1-Formen zurückziehen. Sei $F : M^m \to N^n$ eine differenzierbare Abbildung von $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten. Dann induzieren die Differentiale

$$dF_p : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$$

duale lineare Rückzugsabbildungen

$$dF_p^* : T_{F(p)}^*N \longrightarrow T_p^*M. \tag{3.3.7}$$

damit wir 1-Formen α auf N *punktweise* zu 1-Formen $F^*\alpha$ auf M zurückziehen können:

$$(F^*\alpha)_p := dF_p^*(\alpha_{F(p)}) = \alpha_{F(p)} \circ dF_p. \tag{3.3.8}$$

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "dF_p"] \arrow[dr, dashed, "(F^*\alpha)_p"'] & T_{F(p)}N \arrow[d, "\alpha_{F(p)}"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

In lokalen Koordinaten, Notation wie oben, hat $F^*dy_i = dy_i \circ dF$ die Darstellung

$$F^*dy_i = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \circ x \right) dx_j, \tag{3.3.9}$$

denn mit der lokalen Koordinatendarstellung von dF gilt

$$(F^*dy_i)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = dy_i\left(dF\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \circ x.$$

3.3.1 Integration von 1-Formen längs Kurven

Die Operation des totalen Differentials wird nun umgekehrt durch das Wegintegral. Sei M eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit und $f : M \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion. Man kann f auf jeder Zusammenhangskomponente von M modulo additiver Konstante auf ihrem totalen Differential $df : TM \to T\mathbb{R}$ zurückgewinnen, und zwar durch geeignetes Aufintegrieren. Sind $p, q \in M$ Punkte in derselben Zusammenhangskomponente, so können wir sie zusammen durch eine $\mathcal{C}^1$-Kurve

$$c : [a, b] \to M, c(a) = p, c(b) = q$$

verbinden. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert

$$f\big|_p^q = f \circ c\big|_a^b \overset{\text{HDI}}{=} \int_a^b (f \circ c)'(t)dt = \int_a^b df_{c(t)}(c'(t))dt, \tag{3.3.10}$$

also eine Integraldarstellung für die Differenz der Werte in diesen Punkten. Dies ist das Integral des totalen Differentials im folgenden Sinne.

Definition (Kurven-, Wegintegral). Für eine beliebige stetige 1-Form α, d.h. die Koeffizientenfunktionen der 1-Form sind bzgl lokaler Koordinaten stetig, definieren wir ihr *Integral längs* einer $\mathcal{C}^1$-Kurve $c : I = [a, b] \to M$ als

$$\int_c \alpha := \int_I \alpha(c')dt = \int_I \alpha_{c(t)}(c'(t))dt.$$

Das letzte Integrand ist stetig. Wir nennen ein solches Integral $\int_c \alpha$ ein *Kurven-* oder *Wegintegral*.

Das Wegintegral ist invariant unter orientierungserhaltender Reparametrisierung: Ist

$$\widetilde{I} = [\widetilde{a}, \widetilde{b}] \xrightarrow[\mathcal{C}^1]{\varphi} I = [a, b] \text{ mit } \varphi(\widetilde{a}) = a, \varphi(\widetilde{b}) = b$$

eine $\mathcal{C}^1$ Reparametrisierung, zB ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, so bekommen wir für die reparametrisierte Kurve $\widetilde{c} = c \circ \varphi$ mit der Substitutionsregel

$$\int_{\tilde{c}} \alpha = \int_{\tilde{I}} \alpha_{\tilde{c}(\tilde{t})} \underbrace{(\widetilde{c}'(\widetilde{t}))}_{c'(\varphi(\tilde{t}))\cdot\varphi'(\tilde{t})} d\widetilde{t} = \int_{\tilde{I}} \alpha_{\tilde{c}(\tilde{t})}(c'(\varphi(\tilde{t})))\varphi'(\tilde{t})d\widetilde{t} = \int_I \alpha\alpha_{c(t)}(c'(t))dt = \int_c \alpha.$$

Die Invarianz des Wegintegrals einer unter Reparametrisierung ermöglicht uns, *1-Formen* über orientierten 1-dim *Untermannigfaltigkeiten* zu definieren. 23.1.2023

Wegen

$$\alpha(c') = \underbrace{(\alpha \circ dc)}_{c^*\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

und $c' = dc\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ können wir das Wegintegral schreiben als

$$\int_c \alpha = \int_{\mathrm{id}_I} c^*\alpha. \tag{3.3.11}$$

Im Spezialfall $c = \mathrm{id}_I$ und einer 1-Form $\alpha = gdt$ auf $I \subset \mathbb{R}$ wird die Definition des Wegintegrals zu

$$\int_{\mathrm{id}_I} \underbrace{gdt}_{\text{1-Form}} = \int_I \underbrace{g}_{\text{Fkt}} dt.$$

Also stimmt das Wegintegral $\int_{\mathrm{id}_I} gdt$ mit dem "gewöhnlichen" Integral $\int_I g(t)dt$ der Funktion g überein.

Das Wegintegral verhält sich gut unter *differenzierbaren Abbildungen*: Ist $F : M \to N$ $\mathcal{C}^1$ und β eine stetige 1-Form auf N, so gilt für die punktweise zurückgezogene 1-Form $F^*\beta = \beta \circ dF$

$$\int_{F\circ c} \beta = \int_c F^*\beta,$$

denn es gilt

$$\beta \underbrace{((F \circ c)')}_{dF(c')} = \underbrace{(\beta \circ dF)}_{F^*\beta}(c').$$

bzw. $(F \circ c)^*\beta = c^*(F^*\beta)$.

3.4 Höhere Differentialformen

Sei M eine m-dim Mannigfaltigkeit.

1-Formen sind Familien von Linearformen auf Tangentialräumen, und sie treten natürlich auf als totale Differentiale von Funktionen.

Auch Familien anderer Typen von "Lineare Algebra-Objekte", dh *Tensoren*, auf den Tangentialräumen treten in der Geometrie natürlich auf. Für uns relevant sind Familien *alternierender Multilinearformen*, die sogenannte *Differentialformen*.[39]

Ein wichtiger Grund, die Familien *alternierender* Multilinearformen zu betrachten, ist, dass diese eine *Volumenmessung* (in der ihrem Grad entsprechenden intermediären Dimension) induzieren und in natürlicher Weise über Mannigfaltigkeiten *integriert* werden können.

Für $0 \leqslant r \leqslant m$ betrachten wir das Vektorbündel

$$\bigwedge^r TM := \bigsqcup_{p \in M} \bigwedge^r T_pM \xrightarrow{\pi} M,$$

die sogenannte r-te *äußere Potenz* von T^*M. Seine Fasern

$$\bigwedge^r T_pM \cong \bigwedge_r T_p^*M \cong \mathrm{Alt}_r(T_pM)$$

sind die Vektorräume der alternierenden r-Linearformen auf den Tangentialräumen T_pM. Kombiniert man diese Bündel für alle r, so erhalten wir das äußere Algebrenbündel

$$\bigwedge^* TM := \bigsqcup_{p \in M} \bigwedge^* T_pM \xrightarrow{\pi} M,$$

dessen Fasern

$$\bigwedge^* T_pM = \bigoplus_{r=0}^{m} \bigwedge^r T_pM$$

die äußeren Algebren der Kotangentialräume T_p^*M sind. $\bigwedge^0 TM = \underline{\mathbb{R}}$ ist das *triviale* Linienbündel, in dem Sinne, dass jeder Punkt eine Kopie von $\mathbb{R}$ ist, und $\bigwedge^1 TM = T^*M$ ist das Kotangentialbündel. Das i.a. nichttriviale Linienbündel $\bigwedge^m TM$ nennt man das *Determinantenlinienbündel*.

Definition (Höhere Differentialform). Eine *Differentialform* vom Grad r, $r \leqslant m$, kurz *r-Form* ist ein Schnitt des Bündels $\bigwedge^r TM \to M$. Eine *gemischte* Differentialform ist ein Schnitt des Bündels $\bigwedge^* TM \to M$.

[39]Ein anderes Wichtiges Beispiel aus der Differentialgeometrie sind Familien von *Skalarprodukten* auf den Tangentialräumen, die sog *Riemannschen Metriken*. Diese Familien von Tensoren bzw Formen nehmen ihre Werte in den entsprechenden *Vektorbündeln* über M an, die aus dem Tangentialbündel TM hervorgehen, indem faserweise auf die Tangentialräume T_pM ein bestimmter Funktor, also eine Konstruktion der (Multi)Linearen Algebra angewandt wird. So entsteht das Kotangentialbündel durch die faserweise Bildung des Dualraums.

Eine r-Form ist also eine Familie alternierender r-Linearformen $\alpha_p := \alpha(p)$ auf den Tangentialräumen T_pM.

Wie vorher induziert die Struktur von M als eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit wiederum eine Struktur auf $\bigwedge^r TM$ eine Struktur als $\mathcal{C}^{k-1}$-Mannigfaltigkeit. Ist (U, x) eine Karte für M, so sind die punktweisen Dachprodukte

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$$

für $i_1 < \ldots < i_r$ r-Formen auf U und bilden ein *lokales Basenfeld* für das eingeschränkte Bündel

$$\bigwedge^r TM|_U = \bigsqcup_{p \in U} \bigwedge^r T_pM \longrightarrow U,$$

das durch die Karte ausgezeichnete *Standardbasenfeld.* Eine allgemeine r-Form α auf M kann bezüglich dieser Karte dargestellt werden als

$$\alpha|_U = \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \alpha_{i_1 \ldots i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r},$$

mit Koeffizientenfunktionen $\alpha_{i_1 \ldots i_r}$.

Ist $W \subset \mathbb{R}^m$ offen, so lassen sich r-Formen α auf W mithilfe der totalen Differentiale der Koordinatenfunktionen schreiben als

$$\alpha = \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \alpha_{i_1 \ldots i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}.$$

Pull-back. Mit differenzierbaren Abbildungen kann man Differentialformen beliebiger Grade zurückziehen. Ist $F : M^m \to N^n$ eine differenzierbare Abbildung von Mannigfaltigkeiten, so setzen sich die linearen Rückzugsabbildungen

$$dF_p^* : T_{F(p)}^* N \to T_p^* M$$

der Kotangentialräume fort zu Homomorphismen

$$dF_p^* : \bigwedge^* T_{F(p)} N \longrightarrow \bigwedge^* T_pM \tag{3.4.1}$$

der von ihnen induzierten äußeren Algebren. Diese ziehen alternierende Multilinearformen $\alpha_{F(p)} \in \bigwedge^r T_{F(p)}N$ auf $T_{F(p)}N$ zurück zu alternierenden Multilinearformen $dF_p^* \alpha_{F(p)}$ auf T_pM,

$$(dF_p^* \alpha_{F(p)})(v_1, \ldots, v_r) = \alpha_{F(p)}(dF_p(v_1), \ldots, dF_p(v_r))$$

für $v_i \in T_pM$. Wieder können wir durch punktweise Anwendung Differentialformen α auf N zu Differentialformen $F^*\alpha$ zurückziehen,

$$(F^*\alpha)_p = dF_p^* \alpha_{F(p)}.$$

Das Dachprodukt wird dabei respektiert, d.h. es vertauscht mit dem Rückzug

$$F^*(\alpha \wedge \beta) = (F^*\alpha) \wedge (F^*\beta)$$

für Differentialformen α, β auf N.

In lokalen Koordinaten verallgemeinert sich (3.3.9)

$$F^* \underbrace{dy_i}_{\text{1-Form auf } V} = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\Big(\underbrace{\frac{\partial y_i}{\partial x_j}}_{\text{def auf } x(U)} \circ x \Big)}_{\text{def auf } U} \underbrace{dx_j}_{\text{1-Form auf } U}$$

zu

$$\begin{aligned} F^*(dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_r}) &= \sum_{1 \leqslant j_1, \dots, j_r \leqslant m} \left(\left(\prod_{l=1}^{r} \frac{\partial y_{i_l}}{\partial x_{j_l}} \right) \circ x \right) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_r} \\ &= \sum_{1 \leqslant j_1 < \dots < j_r \leqslant m} \left(\det \left(\frac{\partial y_{i_s}}{\partial x_{j_t}} \right)_{s,t=1,\dots,r} \circ x \right) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_r}. \end{aligned}$$

Im Fall $r = m = n$ vereinfacht sich die Formel zu

$$F^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m) = \left(\det \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,k} \circ x \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m. \tag{3.4.2}$$

3.5 Partition der Eins

Wir führen nun einige topologische Hilfesmittel ein (Stichwort *Verklebung*), sodass wir *globale* Objekte über Mannigfaltigkeiten einführen können, z.B. Volumenformen, Riemannsche Metriken und Integral von Differentialformen.

Sei M eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit.

Definition (Partition der Eins). Eine $\mathcal{C}^k$-Partition der Eins auf M ist eine Familie $(\varphi_\iota)_{\iota \in I}$ von $\mathcal{C}^k$-Funktionen $\varphi_\iota : M \to [0, 1]$ sodass

(i) die Familie der Träger $(\operatorname{supp} \varphi_\iota)_{\iota \in I} = (\overline{\{\varphi_\iota \neq 0\}})_{\iota \in I}$ lokal endlich ist, d.h. jedes Kompaktum in M schneidet nur endlich viele der Träger.

(ii) $\sum_{\iota \in I} \varphi_\iota \equiv 1$ punktweise gilt.

Die Partition der Eins ist *einer Überdeckung* $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ von M *untergeordnet*, falls eine Abbildung $\alpha : I \to A$ existiert, sodass für jedes $\iota \in I$ gilt $\operatorname{supp}(\varphi_\iota) \subset U_{\alpha(\iota)}$.

Satz. Für jede *offene* Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ von M existiert eine ihr untergeordnete $\mathcal{C}^k$-Partition der Eins $(\varphi_\iota)_{\iota \in I}$ mit kompaktem Trägern $\operatorname{supp}_\iota$ und abzählbarer Indexmenge I.

3.6 Orientierung von Mannigfaltigkeiten

Der Begriff der Orientierung von Mannigfaltigkeiten beruht auf dem Begriff der Orientierung von Vektorräumen. Eine Orientierung einer Mannigfaltigkeit ist, grob gesprochen, eine "stetige" Familie von Orientierungen der Tangentialräume.

Sei M eine m-dim $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit.

Definition (Orientierung). Eine *Orientierung* von M ist eine Familie $o = (o_p)_{p\in M}$ von Orientierungen o_p der Tangentialräume T_pM, sodass für jede lokale Karte das Vorzeichen der Orientierung der Standardbasis $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\right)$ als Funktion von $p \in U$ lokal konstant ist.

Eine Mannigfaltigkeit heißt *orientierbar*, falls sie eine Orientierung zulässt.

Im 0-dim Fall besteht eine Orientierung aus der Wahl eines Vorzeichens $\pm$ in jedem Punkt.

Im Dim $m = 1, 2$ ist eine Orientierung die Wahl einer *Richtung* bzw. eines *Drehsinns.*

Die *Standard-Orientierung* von $\mathbb{R}^m$ als $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit ist diejenige, für die das Standardbasenfeld $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ überall positiv orientiert ist.

Wir nennen einen *lokalen Diffeomorphismus* orientierter Mannigfaltigkeiten *orientierungserhaltend*, wenn sein Differential punktweise orientierungserhaltend ist, dh positiv orientierte Basen von Tangentialräume wieder in solche abbildet.

Insbesondere nennen wir eine *Karte* einer orientierten Mannigfaltigkeit orientierungserhaltend, wenn sie es bzgl der Standard-Orientierung des euklidischen Modellraums ist. Die orientierungserhaltenden $\mathcal{C}^k$-Karten einer orientierten $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit bilden einen Unteratlas ihrer differenzierbaren Struktur, nämlich einen maximalen $\mathcal{C}^k$-Atlas mit orientierungserhaltenden Kartenwechsel. Einen solchen Atlas nennt man eine *orientierte* $\mathcal{C}^k$-Struktur.

Orientierungen können mithilfe der Volumenformen beschrieben werden.

Definition (Volumenform). Eine *Volumenform* auf M^m ist eine nirgends verschwindende m-Form ω auf M, d.h. für alle $p \in M$ ist $0 \neq \omega_p \in \bigwedge^m T_pM$ eine Volumenform auf T_pM.

Eine stetige Volumenform ω induziert eine Orientierung. Eine Basis (v_i) eines Tangentialraums T_pM ist relativ zu ihr positiv orientiert, wenn

$$\omega_p(v_1, ..., v_m) > 0.$$

Wir nennen die Volumenform *positiv* bzgl der von ihr induzierten Orientierung.

Zwei stetige Volumenformen ω, ω' induzieren dieselbe Orientierung genau dann, wenn $\omega' = f\omega$ für eine (notwendigerweise) stetigen Funktion $f > 0$.

Die Standard-Volumenform $dx_1 \wedge ... \wedge dx_m$ auf $\mathbb{R}^m$ induziert die Standardorientierung.

Proposition. Orientierungen von $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit werden immer von $\mathcal{C}^k$-Volumenformen induziert.

Beweis. Sei M^m eine orientierte $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit. Auf jeder Karte existiert eine Volumenform, welche die gegebene Orientierung induziert. Wir verkleben diese lokalen positiven Volumenformen mithilfe einer Partition der Eins zu einer globalen. Genauer betrachten wir eine Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ von M durch Karten. Dann haben wir positive Volumenformen ω_α auf U_α. Wähle $(\varphi_\iota)_{\iota\in I}$ eine abzählbare $\mathcal{C}^k$ Partition der Eins, $\sum_{\iota \in I} \varphi_\iota = 1$, welche der Überdeckung (U_α) untergeordnet ist, d.h. es existiert $\alpha : I \to A$ sodass $\operatorname{supp} \varphi_\iota \subset U_{\alpha(\iota)}$ für jedes $\iota \in I$. Setze $\omega := \sum_{\iota \in I} \varphi_\iota \omega_{\alpha(\iota)}$ und dies ist eine wohldefinierte globale positive $\mathcal{C}^k$-Volumenform. ■

Korollar. Auf einer $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit existieren genau dann Volumenformen, wenn sie orientierbar ist.