7. ZÜ Ana 3 27. 11. 2019

nächste Woche: Multilineare Algebra
Tensorprodukt
(alternierende) Multilinearform – Determinante

Wallis - Produkt

untersuche asymptotisches Wachstum der Binomialkoeffizienten $\binom{2n}{n}$ für $n \to \infty$

$$\frac{1}{2n+1} \cdot 4^n < \binom{2n}{n} < |P(\{2n\})| = \underbrace{2^{2n}}_{(1+1)^{2n}} = 4^n$$

größte Binomkoeff $\binom{2n}{*}$ $\qquad = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$

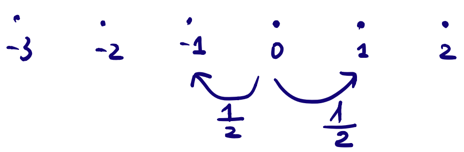
$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}$$

$$\frac{1}{2n+1} < P_n := \underbrace{\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}}_{\text{Intep. als W'keit}} = \frac{1}{4^n}\,\frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n} < 1 \qquad (*)$$

1) Intepretiere P_n als Wahrscheinlichkeit:

fairer Münzwurf bei $2n$ Würfen je n mal Kopf bzw Zahl

2) symm. Irrfahrt / random walk auf $\mathbb{Z}$



P_n ist die W'keit, Rückkehr nach 0 zum Zeitpunkt $2n$.

$$\Longrightarrow \quad \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \qquad \text{(Rekursion)}$$

$$\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} = \sqrt{1+\frac{1}{n+1}} < 1+\frac{1}{2n+2} < \frac{P_n}{P_{n+1}} = \frac{2n+2}{2n+1} < \frac{2n+2}{\sqrt{2n(2n+2)}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

$\uparrow$ bin. Form.

AGM-Ungleichung: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

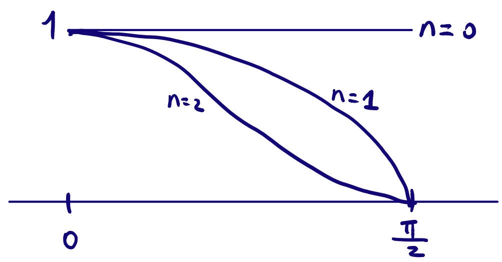
$$\Longrightarrow \quad \frac{P_n\sqrt{n}}{P_{n+1}\sqrt{n+1}} < 1 < \frac{P_n\sqrt{n+1}}{P_{n+1}\sqrt{n+2}}$$

$$\underset{\nearrow}{P_n\sqrt{n}} < \underset{\searrow}{P_n\sqrt{n+1}} \quad \Longrightarrow \quad P_n\sqrt{n} \text{ konvergiert!}$$

dh $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\sqrt{n} \in (0,\infty)$ existiert

Zur Bestimmung des Grenzwertes betrachte Folge von Integralen

$$\boxed{I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx}$$



$n \geq 2$:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}x \,(\sin' x)\, dx$$

$$= \underbrace{\cos^{n-1}x \, \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}x \underbrace{(-\sin^2 x)}_{\cos^2 x - 1} dx$$

$$= -(n-1)\left(I_n - I_{n-2}\right)$$

$\Longrightarrow$ Rekursion (**) $\quad n \cdot I_n = (n-1)\, I_{n-2}$

$$\Longrightarrow \quad I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \underbrace{I_0}_{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \cdot \underbrace{I_1}_{1}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{\boxed{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot 2n}}{\boxed{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n-1)}\,(2n+1)} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{P_n^2} \cdot \frac{2}{\pi}$$

(***)

(*): P_n^{-2}

Rekursion (**) $\Longrightarrow \quad \frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} \longrightarrow 1$

und $\quad \frac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} \longrightarrow 1$

Wollen einsehen dass bereits $\frac{I_{n+1}}{I_n} \longrightarrow 1$.

Definition der I_n als Integrale $\Longrightarrow I_n \downarrow 0$ (da $\cos^n x \downarrow$ für festes $0 < x < \frac{\pi}{2}$)

$$\Longrightarrow \quad \frac{I_{n+1}}{I_{n-1}} \overset{\text{Beob. (Monot)}}{<} \frac{I_{n+1}}{I_n} \overset{\text{Def (**)}}{<} 1$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{I_{n+1}}{I_n} \longrightarrow 1$$

$$\overset{(***)}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}}_{P_n}\sqrt{n} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

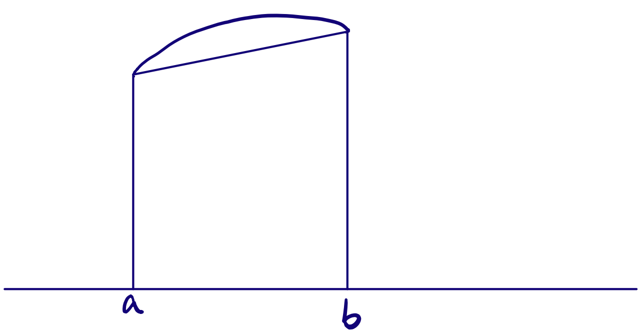
bzw $\displaystyle\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$

dh Quot $\to 1$ für $n \to \infty$

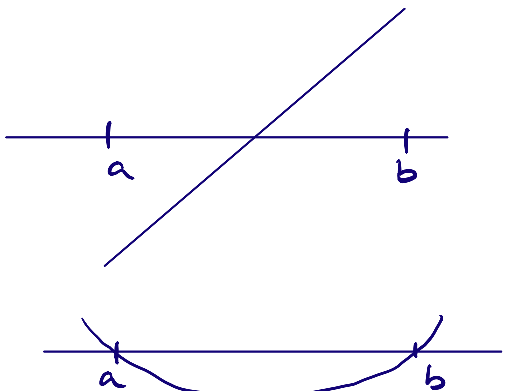
$\Longrightarrow$ Wallis-Produkt (1655) $\quad \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot \ldots = \frac{\pi}{2}$

Abschätzung von Integralen: Trapez-Regel und Euler-Maclaurin-Summation.

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \mathcal{C}^0$.



$h_1(x) = x - \frac{a+b}{2}$



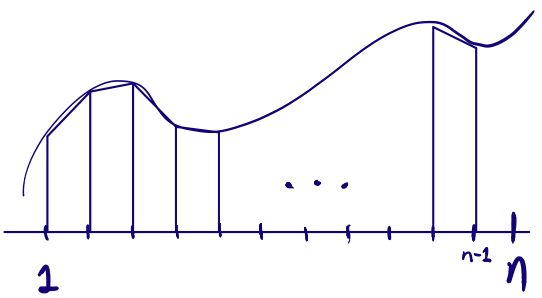
$h_2(x) = \varphi(x) := \frac{1}{2}(x-a)(x-b)$

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^b f\,h_1'\,dx = \underbrace{f h_1\Big|_a^b}_{\substack{\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))\\ \text{Trapez-Fl}}} - \underbrace{\int_a^b f' \overset{h_2'}{\overset{\parallel}{\overbrace{h_1}}}\,dx}_{\underbrace{f' h_2\big|_a^b}_{=0} - \int_a^b f''\varphi\,dx}$$

Trapez-Regel $\boxed{\displaystyle\int_a^b f\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) + \underbrace{\int_a^b f''\varphi\,dx}_{\substack{\geq 0, \text{ falls } f \text{ konkav,}\\ \leq 0, \text{ falls } f \text{ konvex}}}}$

$$\xrightarrow{\varphi\leq 0} \int_a^b f''\varphi\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Mittelw.}\\ \text{satz}\\ \text{der Int.R.}}}{=} f''(\underset{\substack{\uparrow\\ \in[a,b]}}{\xi}) \cdot \underbrace{\int_a^b \varphi\,dx}_{-\frac{1}{12}(b-a)^3}$$

$$\Longrightarrow \text{Abschätzung} \quad \left|\int_a^b f''\varphi\,dx\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12}\,\|f''\|$$



$$f : [1, n] \longrightarrow \mathbb{R}$$

Vergleiche $\displaystyle\int_1^n f\,dx$ mit $\displaystyle\big(f(1)+\dots+f(n)\big) - \frac{f(1)+f(n)}{2}$

$$\boxed{\log n! = \sum_{k=1}^n \log k}$$

Trapez-Regel $\rightsquigarrow$ <u>Summationsregeln</u>

$$\int_1^n f\,dx - \big(f(1)+\dots+f(n)\big) = -\frac{f(1)+f(n)}{2} + \int_1^n f''\tilde{\varphi}\,dx$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x - [x])$$

$\varphi(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$

$$\int_1^n f\,dx - (f(1) + \dots + f(n)) = -\frac{f(1)+f(n)}{2} - \frac{1}{12}(f''(\xi_1) + \dots + f''(\xi_{n-1}))$$

mit $\xi_k \in [k, k+1]$

Stirling-Abschätzung für Fakultäten $2019!$?

Vergleiche $\ln n! = \ln 1 + \dots \ln n$ mit $\underbrace{\int_1^n \log x\,dx}$

$$= x(\log x - 1)\Big|_1^n$$

Summationsformel für $f(x) = \log x$

$$\Longrightarrow \underbrace{\underbrace{\log 1 + \dots + \log n}_{\log n!} - \underbrace{\int_1^n \log x\,dx}_{n\log\frac{n}{e} + \log e}}_{\log\frac{n!}{(\frac{n}{e})^n \cdot e}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\log n}_{\log\sqrt{n}} - \underbrace{\int_1^n \underbrace{(\log'')}_{-\frac{1}{x^2}} \varphi\,dx}_{\int_1^n \frac{\varphi(x)}{x^2}dx}$$

konvergiert, da $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$ konvergiert

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(\frac{n}{e})^n\sqrt{n}} =: g \text{ existiert}$$

$$\Longrightarrow \frac{g}{g^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n)!}{(\frac{2n}{e})^{2n}\sqrt{2n}}}{\underbrace{\left(\frac{n!}{(\frac{n}{e})^n\sqrt{n}}\right)^2}_{=\binom{2n}{n}\cdot\frac{1}{4^n}\sqrt{\frac{n}{2}}}} \overset{\text{Wallis}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$$

$$\boxed{n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$$

$$\boxed{-\frac{1}{8} \le \tilde{\varphi}(x) \le 0}$$

konkrete Abschätzung:

$$\log \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} = \underbrace{1 + \int_1^\infty \frac{\tilde{\varphi}(x)}{x^2}\,dx}_{\log\sqrt{2\pi}} - \underbrace{\underbrace{\int_n^\infty \frac{\tilde{\varphi}(x)}{x^2}\,dx}_{\to 0}}_{0 < \cdots < \frac{1}{8}\int_n^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{8n}}$$

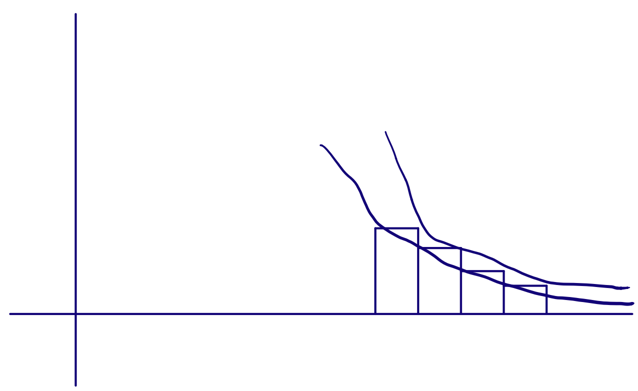
weil $\int_1^\infty \frac{\tilde{\varphi}(x)}{x^2}\,dx$ konvergiert

$$\Longrightarrow \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} < n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \cdot \underbrace{e^{+\frac{1}{8n}}}_{\to 1}$$

Verbesserung:

$$-\int_n^\infty \frac{\tilde{\varphi}(x)}{x^2}\,dx = \frac{1}{12}\sum_{k=n}^\infty \frac{1}{\xi_k^2} < \frac{1}{12}\sum_{k=n}^\infty \frac{1}{k^2}$$

$$= \frac{1}{12(n-1)}$$



$$\frac{1}{(x-1)^2}$$

$\Longrightarrow$ bessere obere Schranke

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} < n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \; e^{+\frac{1}{12(n-1)}}$$