

Analysis III: Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

15. Oktober 2019

Inhaltsverzeichnis

1	Maßtheorie	2
1.1	Maßproblem und Paradoxien	2

1 Maßtheorie

1.1 Maßproblem und Paradoxien

14.10.2019

Maßtheorie ist die Theorie des Volumens. Motivierende Beispiele sind:

- i) Volumina von Teilmengen des euklidischen Raums
- ii) Wahrscheinlichkeiten (= "Volumina von Ereignissen")

Wir konzentrieren uns im Rest des Abschnitts auf \mathbb{R}^d . Wir wollen leistungsfähigen Volumenbegriff haben, sodass die Volumina von möglich vielen Teilmengen flexibel gemessen werden können. Unser erster "naiver" Ansatz wäre, dass wir Volumenmessung für *alle* Teilmengen verlangen, also eine Funktion

$$\text{vol} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0, \infty] \quad (1)$$

Unsere grundlegende Forderung ist die Additivität von Volumina bei Zerlegungen, also

- (i) **(endliche) Additivität:** Sind $M_1, \dots, M_n \subset \mathbb{R}^d$ paarweise disjunkt, so gilt

$$\text{vol}(M_1 \cup \dots \cup M_n) = \text{vol}(M_1) + \dots + \text{vol}(M_n) \quad (2)$$

Volumina als geometrische Größen sollten durch die metrische Struktur (Längenmessung) bestimmt sein, also invariant unter Symmetrien der metrischen Struktur:

- (ii) **Bewegungsinvarianz:** Für jede Bewegung $\phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ und jede Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ gilt

$$\text{vol}(\phi(A)) = \text{vol}(A) \quad (3)$$

- (iii) **Normierung:** $\text{vol}([0, 1]^d) = 1$.

Verstärkte Forderung (i): (Borel, Lebesgue)

- (i') **σ -Additivität¹:** Für Folgen $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Teilmengen $M_n \subset \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\text{vol}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\text{vol}(M_n)}_{\in [0, \infty]} \quad (4)$$

Bemerkung. Wegen des Umordnungssatzes spielt die Reihenfolge der Summanden keine Rolle.

\rightsquigarrow flexibilisiert Volumenmessung entscheidend, wir können also komplizierte Figuren durch einfach Figuren approximieren.

Cantons Mengenlehre \rightsquigarrow Existenz von "naiver" Volumenfunktion wurde hinterfragt:

¹ σ : abzählbar, unendlich oft.

Maßproblem (naiv) Existiert eine Volumenfunktion $\text{vol} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ mit (i') + (ii) + (iii)?

Satz (Vitali, 1905). Nein, das naive Maßproblem ist unlösbar.

Beweis. Aus dem Auswahlaxiom folgt die Existenz “verrückter” (d.h. geometrisch unvorstellbarer) Teilmengen des \mathbb{R}^d . Hier existiert $M \subset \mathbb{R}^d$, ein *Vertretersystem* für Nebenklassen von \mathbb{Q}^d (Untergruppe von \mathbb{R}^d) in \mathbb{R}^d . Der Quotient abelscher Gruppen $\mathbb{R}^d/\mathbb{Q}^d$ ist also die Menge der Nebenklassen. Die Nebenklassen $a + \mathbb{Q}^d$ für $a \in \mathbb{R}^d$ partitionieren (d.h. zerlegen disjunkt) \mathbb{R}^d (überabzählbar viele). Für alle $a, b \in \mathbb{R}^d$ besteht Dichotomie:

- i) entweder $a + \mathbb{Q}^d = b + \mathbb{Q}^d$ (nämlich wenn $a - b \in \mathbb{Q}^d$),
- ii) oder $(a + \mathbb{Q}^d) \cap (b + \mathbb{Q}^d) = \emptyset$ (nämlich wenn $a - b \notin \mathbb{Q}^d$).

D.h. für alle $a \in \mathbb{R}^d$ besteht $M \cap (a + \mathbb{Q}^d)$ aus genau einem Element. Daraus folgt, die Translate $q + M$ (abzählbar viele) für $q \in \mathbb{Q}^d$ partitionieren \mathbb{R}^d . Aus der σ -Additivität von Volumen folgt

$$\underbrace{\text{vol}(\mathbb{R}^d)}_{>0} = \sum_{q \in \mathbb{Q}^d} \underbrace{\text{vol}(q + M)}_{\substack{\text{Bew} \\ \text{Inv} \\ \text{vol}(M)}} \quad (5)$$

und somit also $\text{vol}(M) > 0$.

Jetzt wähle M spezieller, nämlich beschränkt, z.B. für $O \subset \mathbb{R}^d$ offen können wir M so wählen, dass $M \subset O$, weil $a + \mathbb{Q}^d$ dicht in \mathbb{R}^d , also $(a + \mathbb{Q}^d) \cap O \neq \emptyset$. Z.B. wähle $M \subset (0, \frac{1}{2})^d$, so enthält $[0, 1]^d$ abzählbar unendlich viele paarweise disjunkte Translate $q + M$, nämlich für alle $q \in \mathbb{Q}^d \cap (0, \frac{1}{2})^d$ gilt

$$V := \bigcup_{q \in (0, \frac{1}{2})^d \cap \mathbb{Q}^d} (q + M) \subset [0, 1]^d \quad (6)$$

weil $\text{vol}(V) + \underbrace{\text{vol}([0, 1]^d - V)}_{\geq 0} = \underbrace{\text{vol}([0, 1]^d)}_{=1}$. Daraus folgt $\text{vol}(V) \leq 1 < \infty$ und

$$\text{vol}(V) = \sum_{q \in (0, \frac{1}{2})^d \cap \mathbb{Q}^d} \underbrace{\text{vol}(q + M)}_{=\text{vol}(M)} \quad (7)$$

Somit muss gelten $\text{vol}(M) = 0$. \nexists ■

Noch dramatischer: In $\dim \geq 3$ kann man je zwei Teilmengen (unter sehr allgemeinen Annahmen) aus demselben (abzählbaren, oft sogar endlichen) “Bausatz” zusammensetzen.

Satz (Banach-Tarski, 1924). Seien $A, B \subset \mathbb{R}^d$ Teilmengen mit nichtleerem Inneren.

- (i) Sei $d \geq 3$ und seien A, B beschränkt. Dann existieren endlich viele Teilmengen $M_k \subset \mathbb{R}^d$ und Bewegungen ϕ_k des \mathbb{R}^d , so dass *disjunkte Zerlegungen* $A = \bigsqcup_k M_k$ und $B = \bigsqcup_k \phi(M_k)$ bestehen.
- (ii) Jetzt $d \geq 1$ beliebig und A, B nicht notwendig beschränkt. Dann existieren abzählbar viele Teilmengen $M_k \subset \mathbb{R}^d$ und Bewegungen ϕ_k , sodass *disjunkte Zerlegungen* $A = \bigsqcup_k M_k$ und $B = \bigsqcup_k \phi(M_k)$ bestehen.

Der Beweis verwendet Gruppentheorie, Struktur von orthogonalen Gruppen $O(d)$. (nicht mehr auflösbar für $d \geq 3$.)

Das naive *Inhaltsproblem*, also eine Volumenfunktion mit Eigenschaften (i), (ii) und (iii), ist lösbar in $d \leq 2$, aber nicht eindeutig, nicht lösbar in $d \geq 3$. (Banach 1923, Hausdorff 1914) Dies führt zu:

Maßproblem (post-paradox) : Man definiere eine Volumenfunktion $\text{vol} : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ mit Eigenschaften (i'), (ii) und (iii) auf einer möglich großen und flexiblen Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, die die geometrisch wichtigen Teilmengen umfasst und abgeschlossen ist unter grundlegenden mengentheoretischen Operationen (Vereinigung, Schnitt, Differenz und Komplement).

17.10.2019