Analysis III: Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

15. Oktober 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Maßtheorie

1.1 Maßproblem und Paradoxien

14.10.2019

Maßtheorie ist die Theorie des Volumens. Motivierende Beispiele sind:

i) Volumina von Teilmengen des euklidischen Raums

ii) Wahrscheinlichkeiten (= "Volumina von Ereignissen")

Wir konzentrieren uns im Rest des Abschnitts auf $\mathbb{R}^d$. Wir wollen leistungsfähigen Volumenbegriff haben, sodass die Volumina von möglich vielen Teilmengen flexibel gemessen werden können. Unser erster "naiver" Ansatz wäre, dass wir Volumenmessung für *alle* Teilmengen verlangen, also eine Funktion

$$\text{vol} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0.\infty] \tag{1}$$

Unsere grundlegende Forderung ist die Additivität von Volumina bei Zerlegungen, also

(i) **(endliche) Additivität**: Sind $M_1, ..., M_n \subset \mathbb{R}^d$ paarweise disjunkt, so gilt

$$\text{vol}(M_1 \cup ... \cup M_n) = \text{vol}(M_1) + ... + \text{vol}(M_n) \tag{2}$$

Volumina als geometrische Größen sollten durch die metrische Struktur (Längenmessung) bestimmt sein, also invariant unter Symmetrien der metrischen Struktur:

(ii) **Bewegungsinvarianz**: Für jede Bewegung $\phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ und jede Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ gilt

$$\text{vol}(\phi(A)) = \text{vol}(A) \tag{3}$$

(iii) **Normierung**: $\text{vol}([0,1]^d) = 1$.

Verstärke Forderung (i): (Borel, Lebesgue)

(i') **σ-Additivität**[1]: Für Folgen $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Teilmengen $M_n \subset \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\text{vol}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\text{vol}(M_n)}_{\in[0,\infty]} \tag{4}$$

Bemerkung. Wegen des Umordnungssatzes spielt die Reihenfolge der Summanden keine Rolle, da sie alle positiv sind.

$\rightsquigarrow$ flexibilisiert Volumenmessung entscheidend, wir können also komplizierte Figuren durch einfach Figuren approximieren.

Cantons Mengenlehre $\rightsquigarrow$ Existenz von "naiver" Volumenfunktion wurde hinterfragt:

[1] σ: abzählbar, unendlich oft.

Maßproblem (naiv) Existiert eine Volumenfunktion $\mathrm{vol} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0, \infty]$ mit (i') + (ii) + (iii)?

Satz (Vitali, 1905)**.** Nein, das naive Maßproblem ist unlösbar.

Beweis. Aus dem Auswahlaxiom folgt die Existenz "verrückter" (d.h. geometrisch unvorstellbarer) Teilmengen des $\mathbb{R}^d$. Hier existiert $M \subset \mathbb{R}^d$, ein *Vertretersystem* für Nebenklassen von $\mathbb{Q}^d$ (Untergruppe von $\mathbb{R}^d$) in $\mathbb{R}^d$. Der Quotient abelscher Gruppen $\mathbb{R}^d/\mathbb{Q}^d$ ist also die Menge der Nebenklassen. Die Nebenklassen $a + \mathbb{Q}^d$ für $a \in \mathbb{R}^d$ partitionieren (d.h. zerlegen disjunkt) $\mathbb{R}^d$ (überabzählbar viele). Für alle $a, b \in \mathbb{R}^d$ besteht Dichotomie:

i) entweder $a + \mathbb{Q}^d = b + \mathbb{Q}^d$ (nämlich wenn $a - b \in \mathbb{Q}^d$),

ii) oder $(a + \mathbb{Q}^d) \cap (b + \mathbb{Q}^d) = \varnothing$ (nämlich wenn $a - b \notin \mathbb{Q}^d$).

D.h. für alle $a \in \mathbb{R}^d$ besteht $M \cap (a + \mathbb{Q}^d)$ aus genau einem Element. Daraus folgt, die Translate $q + M$ (abzählbar viele) für $q \in \mathbb{Q}^d$ partitionieren $\mathbb{R}^d$. Aus der σ-Additivität von Volumen folgt

$$\underbrace{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^d)}_{>0} = \sum_{q \in \mathbb{Q}^d} \underbrace{\mathrm{vol}(q + M)}_{\overset{\text{Bew Inv}}{=} \mathrm{vol}(M)} \tag{5}$$

und somit also $\mathrm{vol}(M) > 0$.
Jetzt wähle M spezieller, nämlich beschränkt, z.B. für $O \subset \mathbb{R}^d$ offen können wir M so wählen, dass $M \subset O$, weil $a + \mathbb{Q}^d$ dicht in $\mathbb{R}^d$, also $(a + \mathbb{Q}^d) \cap O \neq \varnothing$. Z.B. wähle $M \subset (0, \frac{1}{2})^d$, so enthält $[0, 1]^d$ abzählbar unendlich viele paarweise disjunkte Translate $q + M$, nämlich für alle $q \in \mathbb{Q}^d \cap (0, \frac{1}{2})^d$ gilt

$$V := \bigcup_{q \in (0, \frac{1}{2})^d \cap \mathbb{Q}^d} (q + M) \subset [0, 1]^d \tag{6}$$

weil $\mathrm{vol}(V) + \underbrace{\mathrm{vol}([0, 1]^d - V)}_{\geq 0} = \underbrace{\mathrm{vol}([0, 1]^d)}_{=1}$. Daraus folgt $\mathrm{vol}(V) \leq 1 < \infty$ und

$$\mathrm{vol}(V) = \sum_{q \in (0, \frac{1}{2})^d \cap \mathbb{Q}^d} \underbrace{\mathrm{vol}(q + M)}_{= \mathrm{vol}(M)} \tag{7}$$

Somit muss gelten $\mathrm{vol}(M) = 0$. ↯ ■

Noch dramatischer: In dim ≥ 3 kann man je zwei Teilmengen (unter sehr allgemeinen Annahmen) aus demselben (abzählbaren, oft sogar endlichen) "Bausatz" zusammensetzen.

Satz (Banach-Tarski, 1924)**.** Seien $A, B \subset \mathbb{R}^d$ Teilmengen mit nichtleerem Inneren.

(i) Sei $d \geq 3$ und seien A, B beschränkt. Dann existieren endlich viele Teilmengen $M_k \subset \mathbb{R}^d$ und Bewegungen ϕ_k des $\mathbb{R}^d$, so dass *disjunkte Zerlegungen* $A = \bigsqcup_k M_k$ und $B = \bigsqcup_k \phi(M_k)$ bestehen.

(ii) Jetzt $d \geq 1$ beliebig und A, B nicht notwendig beschränkt. Dann existieren abzählbar viele Teilmengen $M_k \subset \mathbb{R}^d$ und Bewegungen ϕ_k, sodass *disjunkte Zerlegungen* $A = \bigsqcup_k M_k$ und $B = \bigsqcup_k \phi(M_k)$ bestehen.

Der Beweis verwendet Gruppentheorie, Struktur von orthogonalen Gruppen $\mathrm{O}(d)$. (nicht mehr auflösbar für $d \geq 3$.)

Das naive *Inhaltsproblem*, also eine Volumenfunktion mit Eigenschaften (i), (ii) und (iii), ist lösbar in $d \leq 2$, aber nicht eindeutig, nicht lösbar in $d \geq 3$. (Banach 1923, Hausdorff 1914) Dies führt zu:

Maßproblem (post-paradox) : Man definiere eine Volumenfunktion $\mathrm{vol} : \mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty]$ mit Eigenschaften (i'), (ii) und (iii) auf einer möglich großen und flexiblen Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, die die geometrisch wichtigen Teilmengen umfasst und abgeschlossen ist unter grundlegenden mengentheoretischen Operationen (Vereinigung, Schnitt, Differenz und Komplement). 17.10.2019