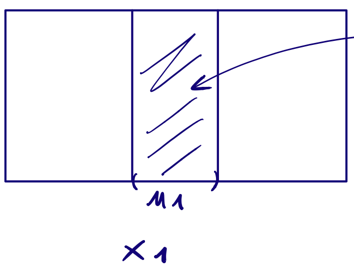
7. VL Ana 3 4. 11. 2019

Zu Zylindermengen:

$X_1 \times \ldots \times X_n$



$\pi_i^{-1}(M_i) = X_1 \times \ldots \times X_{i-1} \times M_i \times X_{i+1} \times \ldots \times X_n$
Zylindermenge

$\mathcal{F}_i \subset \mathcal{P}(X_i)$

$\rightsquigarrow \mathcal{Z}(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n) \subset \mathcal{P}(X_1 \times \ldots \times X_n)$

alle $\pi_k^{-1}(M_k)$ für $M_k \subset X_k$ und $k = 1, \ldots, n$

Falls $X_i \in \mathcal{F}_i \; \forall i$, so $\mathcal{Z}(\mathcal{F}_1, \ldots) \subset \mathcal{F}_1 * \ldots * \mathcal{F}_n$ Quader

Prop (i) Sind $\mathcal{R}_i \subset \mathcal{P}(X_i)$ Ringe und $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{R}_i$ Erzsys., so wird der Produktring $\mathcal{R}_1 \boxtimes \ldots \boxtimes \mathcal{R}_n$ von $\mathcal{E}_1 * \ldots * \mathcal{E}_n$ erzeugt.

(ii) Sind die $\mathcal{R}_i$ Algebren, so wird ...... von $\mathcal{Z}(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n)$ erz.

$(X, \mathcal{T})$ $\rightsquigarrow$ Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{T})$

topol. Raum

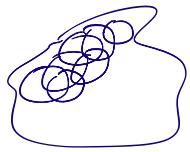
alternativer Erzeuger: · die Familie abgeschlossener Teilm.

· Kompakte Teilmengen falls $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffsch und Ausschöpfung durch Kompakta besitzt.

$\mathcal{B}^d = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ hat verschiedener natürlicher Erzeuger, z.B.

- offene TM
- abgeschlossen TM

- Kompakta
- offene Bälle
  (bzw offene Bälle
  mit Radien $\in \mathbb{Q}^+$
  und Zentren $\in \mathbb{Q}^d$)

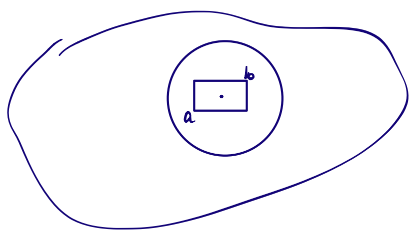


(denn Jede offene TM ist eine abzählbare vereinigung von offenen Bällen)

- abgeschlossene Bälle
- offene (achsenparallele) Quader
- abg. ... ...

Lemma $\mathcal{B}^d$ wird auch von $\mathcal{Q}^d$ (halboffener, achsenparallele Quader) erzeugt.

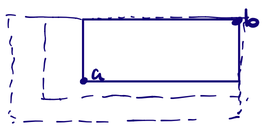
Bew. Einerseits: Jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ ist (notw) abzählbare Vereinigung von Quadern $[a,b)$ aus $\mathcal{Q}^d$ mit rationalen Ecken mit $a_i < b_i \; \forall i$, $a, b \in \mathbb{Q}^d$.



Also $\mathcal{B}^d \subset \sigma(\mathcal{Q}^d)$.

Anderseits ist jeder Quader $[a,b)$ mit $a_i < b_i \; \forall i$ ist abzähl. Durchschnitt offener Quader. gehört also zu $\mathcal{B}^d$.

denn



$$[a,b) = \underbrace{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left(a_1 - \tfrac{1}{n}, b_1\right) \times \dots \times \left(a_d - \tfrac{1}{n}, b_d\right)}_{\in \mathcal{T}}}_{\in \sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{B}^d} \qquad \square$$

$\mathcal{B}^d$ so reichhaltig, dass sie alle „denkbaren" geometrischen Gebilde in $\mathbb{R}^d$ enthält. Genauerer Vgl von $\mathcal{B}^d$ mit $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^d}$ später.

I.4.2 Dynkin-Systeme

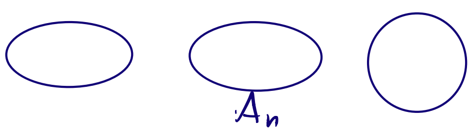
Abschwächung von σ-Algebren, die nat. auftritt.

Def Eine Fam $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt ein Dynkin-System auf X, falls

(i) $\emptyset \in \mathcal{D}$

(ii) ^{c}-stabil

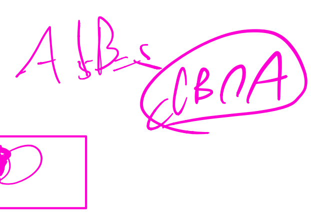
(iii) Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarw disjunkten Teilmengen $A_n \in \mathcal{D}$ gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$



σ-Algebren sind Dynkin-Sys!

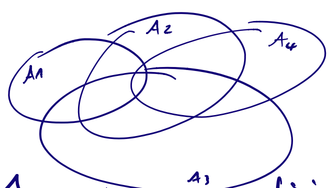
Prop $\cap$-stabile Dynkin-Systeme sind σ-Algebren.

Bew: $\left.\begin{array}{l} ^c\text{-stabil} \\ \cap\text{-stabil} \end{array}\right\} \Longrightarrow \cup$-stabil



Sind also Algebren.

In Algebren lassen sich abz Vereinigungen als abz disjunkte Vereinigungen ausdrücken:



A_n nicht notw. disjunkt

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$$

$$= A_1 \sqcup \underbrace{(A_2 \setminus A_1)}_{\in \mathcal{D},\ \text{Algebra!}} \sqcup \underbrace{(A_3 \setminus (A_1 \cup A_2))}_{\in \mathcal{D}} \sqcup \ldots \in \mathcal{D}$$

dh $\mathcal{D}$ enthält beliebige abzähl Vereinigungen von Teilmengen aus $\mathcal{D}$. $\square$

Sei $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ Dynkin-System.

Lemma $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ mit $D_1 \subset D_2 \implies D_2 \setminus D_1 \in \mathcal{D}$.

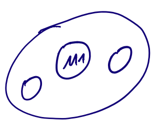
Bew. Folgt aus $\complement(D_2 \setminus D_1) = D_1 \sqcup \underbrace{\complement D_2}_{\in \mathcal{D}} \in \mathcal{D}$

$$\implies D_2 \setminus D_1 \in D$$

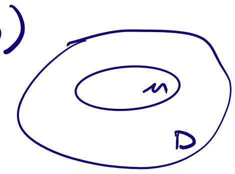
$\square$

$\rightsquigarrow$ Die Dynkin-Eig vererbt sich bei gewissen Konstruktionen.

Folgerung: Für $D \in \mathcal{D}$ ist die Spur



$$\mathcal{D}|_D := \{ M \subset D \mid M \in \mathcal{D} \} \subset \mathcal{P}(D)$$

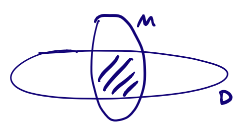


von $\mathcal{D}$ auf D ein Dynkin-System auf D.

Ebenso ist

$$\mathcal{D}_D := \{ M \subset X \mid M \cap D \in \mathcal{D} \} \subset \mathcal{P}(X)$$

ein Dynkin-System auf X.

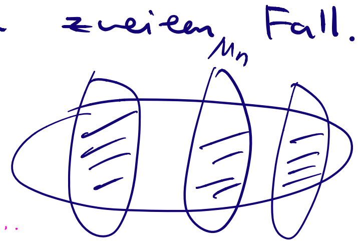


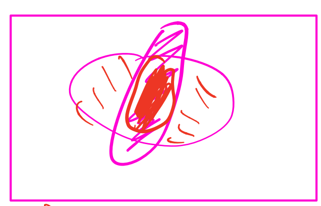
Bew. Die $\complement$-Stabi von $\mathcal{D}|_D$ folgt aus dem Lemma, und die Stabilität unter abzählbaren disjunkten Vereinigungen ist klar. Genauso im zweiten Fall.

$\cdot$ $\underbrace{M_1 \cup \dots \cup M_n \cup \dots}_{\text{zz.}} \in \mathcal{D}_D \iff (\dots) \cap D$ $\quad M_i \in \mathcal{D}_D$

$\implies M_i \cap D \in \mathcal{D}$ $\quad \iff (M_1 \cap D) \cup \dots \cup \dots$

$\cdot$ $M \in \mathcal{D}_D$ zz $\underbrace{\complement M \in \mathcal{D}_D}_{\complement M \cap D \in \mathcal{D}}$ ✓





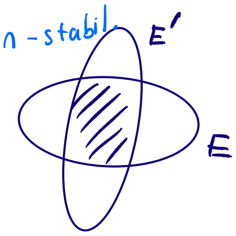
$\square$

Da beliebige Durchschnitte von Dynkin-Systemen wieder solche sind, gibt es für jede Fam $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ ein eindeutiges kleinstes sie enthaltendes Dynkin-Sys $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{P}(X)$, genannt das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-Sys. Klar gilt $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E})$.

$$\boxed{\text{\underline{Satz} Von } \cap\text{-Stab. Familien erzeugte Dynkin-Sys sind } \cap\text{-stabil, also } \sigma\text{-Algebren}}$$

<u>Bew</u> $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ $\cap$-stabil.

<u>Beh</u> $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ $\cap$-stabil



$$E \in \underset{E'}{\mathcal{E} \ni} \overset{N.V.}{\Longrightarrow} E' \cap E \in \mathcal{E} \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})$$

$E, E' \in \mathcal{E}$

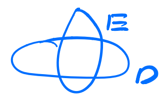
$$\Longrightarrow \mathcal{E} \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})_E$$ d.h. $E' \in \mathcal{D}(\mathcal{E})_E$

$$\Longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})_E$$ d.h. $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})_E \Rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})_E$

Dies bedeutet:

$$\left.\begin{matrix} E \in \mathcal{E} \\ D \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow D \cap E \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$$

dh $E \in \mathcal{D}(\mathcal{E})_D$



also $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})_D$, $\forall D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ weiter $\underset{D'}{\mathcal{D}(\mathcal{E})} \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})_D$ $\forall D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$

Das wiederum bedeutet

$$D, D' \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \Longrightarrow D \cap D' \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$$

Also ist $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ $\cap$-stabil, wird aufgrund der letzten Prop eine σ-Algebra. $\square$

Ist $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil, so gilt $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$.

I.4.3 Die messbare Kategorie

„messbare Objekte": Mengen versehen mit σ-Algebren als „messbarer Zusatzstrukturen"

Def Ein <u>Meßraum</u> ist ein Paar $(X, \mathcal{A})$ bestehend aus einer Menge X und einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Die Teilmengen in $\mathcal{A}$ heißen <u>meßbar</u>.

$\rightsquigarrow$ werden Defbereiche unserer Volumenfkt (Maße) sein.

Def Eine Abb $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$ von Meßräumen heißt <u>meßbar</u>, falls $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \;\; \forall B \in \mathcal{B}$.
d.h. Urbilder meßbarer Teilmengen sollen meßbar sein.
Man sagt auch $X \xrightarrow{f} Y$ ist <u>$\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-meßbar</u>.

<u>Beob.</u> Kompositionen meßbarer Abb sind meßbar.

$(X, \mathcal{A}) \xrightarrow[\text{meßbar}]{f} (Y, \mathcal{B}) \xrightarrow[\text{meßbar}]{g} (Z, \mathcal{C})$, so:

$$C \in \mathcal{C} \Longrightarrow g^{-1}(C) \in \mathcal{B} \Longrightarrow \underbrace{f^{-1}(g^{-1}(C))}_{(g \circ f)^{-1}(C)} \in \mathcal{A}$$

also $g \circ f$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-meßbar.

<u>Zurückziehen von σ-Algebren:</u>

$$\underset{\text{Abb von Mengen}}{X \xrightarrow{f} Y} \quad \underset{\text{kontravariant}}{\xrightarrow{\text{induziert}}} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(Y) & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{P}(X) \\ M & \longmapsto & f^{-1}(M) \end{array}$$

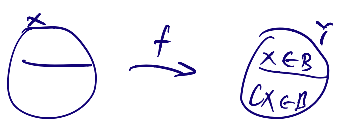
Für $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$ nennt man

$$f^*\mathcal{F} := \{ f^{-1}(M) \mid M \in \mathcal{F} \} \subset \mathcal{P}(X)$$

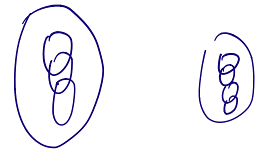
die mit f zurückgezogene Familie.

$\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ σ-Algebra $\Longrightarrow$ $f^*\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ σ-Alg

$$f^{-1}\left(\bigcup M_k\right) = \bigcup f^{-1}(M_k)$$



$$f^{-1}(\complement M) = \complement f^{-1}(M)$$



<u>Beob.</u> Gegeben eine σ-Alg $\mathcal{B}$ auf Y, ist $f^*\mathcal{B}$ die kleinste σ-Alg auf X, bzgl derer f meßbar ist.

⇝ Umfor. der Def:
Eine Abb $(X, \mathcal{A}) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{B})$ ist meßbar genau dann, wenn $f^*\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

Ist speziell $X \subset Y$ Teilm und $X \xrightarrow{\iota} Y$ die Inklusion, so $\iota^{-1}(M) = X \cap M$ für $M \subset Y$.
Für eine σ-Algebra $\mathcal{B}$ auf Y nennt man

$$\mathcal{B}|_X := \iota^*\mathcal{B} = \{M \cap X \mid M \in \mathcal{B}\} \subset \mathcal{P}(X)$$

die Spur-σ-Algebra von $\mathcal{B}$ auf X.
Die Inklusion ist dann $\mathcal{B}|_X$-$\mathcal{B}$-meßbar.

Man kann Erzsys von σ-Algebren zurückziehen:

> <u>Lemma</u> Ist $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abb und $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$, so gilt $\sigma(f^*\mathcal{F}) = f^*(\sigma(\mathcal{F}))$.

<u>Bew.</u>

$$f^*(\sigma(\mathcal{F})) \text{ ist } \sigma\text{-Algebra} \implies \sigma(f^*\mathcal{F}) \subset f^*(\sigma(\mathcal{F}))$$

$$\cup$$
$$f^*\mathcal{F}$$

Andererseits

$f^{-1}(A_n) \in$

$$\mathcal{F} \subset \{A \in \sigma(\mathcal{F}) \mid f^{-1}(A) \in \sigma(f^*\mathcal{F})\} \subseteq \sigma(\mathcal{F})$$

$A_n \in$ ist σ-Algebra

Gleichheit!

d.h. $f^*(\sigma(\mathcal{F})) \subset \sigma(f^*\mathcal{F})$

$\square$