16. VL Ana 3 5. 12. 2019

II. 1. messbare numerische Funktionen

$\overline{\mathbb{R}}$-wertig $\overline{\mathcal{B}}$ erw Borel σ-Alg auf $\overline{\mathbb{R}}$

$(X, \mathcal{A})$ Messraum.

Def $X \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{R}}$ heißt messbar, falls sie als Abb $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}$-messbar.

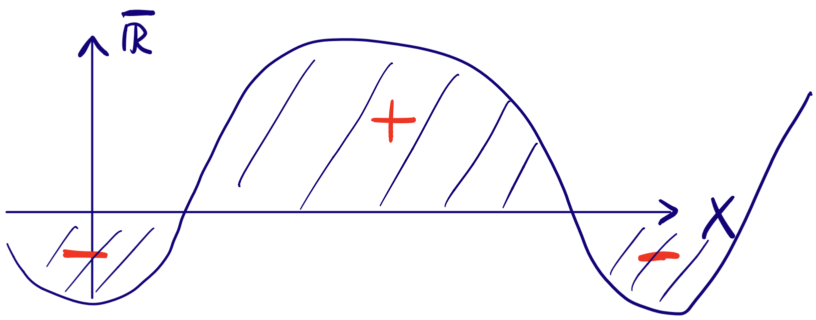
Bsp X topol. Raum, dh versehen mit Topologie $\mathcal{T} \rightsquigarrow \mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{T})$

Dann $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, gdw Borel-messbar als Abb. Insbes sind stetige num Fkt messbar

II. 2 Konstruktion des Lebesgue-Integrals

Integration $\longleftrightarrow$ Volumenberechnung.

$f: X \to \overline{\mathbb{R}}$. $\int_X f \, d\mu$ interpretiere Integral als orientiertes Volumen des Bereichs „zwischen Graph von f und X-Achse".



Ansatz: Def $\int_X f \, d\mu$ als

$$\mathrm{vol}\,\{(x,y) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f(x)\} - \mathrm{vol}\,\{\dots \mid f(x) < y < 0\}$$

Volumenmessung mit Produktmaß $\mu \otimes \beta^1$ auf $X \times \mathbb{R}$

Definiert, solange höchstens eines dieser Volumina unendlich ist.

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum.

Konstruktion des Lebesgue-Int $\longleftrightarrow$ Konstruktion des Produktmaßes

$$f \longmapsto \int_X f \, d\mu = \int_X f(x) \, d\mu(x)$$

wir gehen aus von $\mu \otimes \beta^1$ auf $(X \times \mathbb{R}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}^1)$

$\cup$

$\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ Ring

$\mu \boxtimes \beta^1$ Prämaß auf $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$

Fortsetzung zu Maß auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ eindeutig, falls μ σ-endlich

Einschränkung des äußeren Maßes $(\mu \boxtimes \beta^1)^*$

II.2.1 Integral nichtneg Fkt

$X \xrightarrow{f} [0, \infty]$ messbar $\Longrightarrow \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f(x)\}$ messbar, dh $\in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}^1$

Definiere das <u>μ-Integral</u> von f als

$$\int_X f \, d\mu := \mu \otimes \beta \left(\{(x,y) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 < y < f(x)\} \right) \in [0, \infty]$$

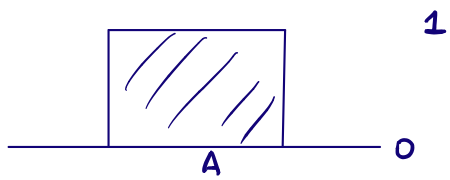
Fasse μ-Integral auf als Funktional

$$\mathcal{M}_{\geq 0}(X, \mathcal{A}) \longrightarrow [0, \infty]$$
$$f \longmapsto \int_X f \, d\mu$$

Für besonders einfache Funkt ist der Bereich zwischen Graph und X-Achse eine Figur. (dh endl Vereinig von Quadern (Rechtecke)) und in diesem Fall können wir das Integral direkt angeben.

<u>Char Fkt</u> χ_A

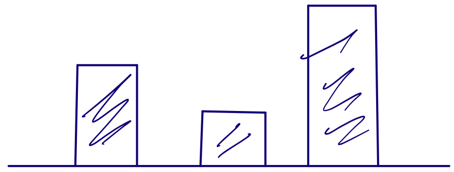
$A \in \mathcal{A}$



$$\int_A \chi_A \, d\mu = (\mu \otimes \beta^1)(A \times (0,1)) = \mu(A) \cdot \underbrace{\beta^1((0,1))}_{1} = \mu(A)$$

Treppenfkt (endl viele Werte annehmen)

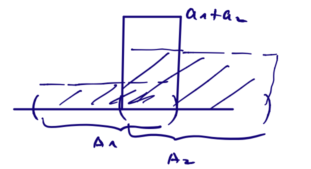
$A_i \in \mathcal{A}$ pw disjunkt



$$\tau = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} \qquad a_i \in [0,\infty]$$

$$\int_X \tau \, d\mu = (\mu \otimes \beta^1)\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times (0,a_i))\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mu(A_i) \qquad (*)$$

Gilt auch, wenn A_i nicht notwendig disjunkt.



Schreibe $(*)$ um (im Hinblick auf Linearität des Integrals)

$$\int_X \tau \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \int_X \chi_{A_i} \, d\mu .$$

Daraus folgt direkt die **Additivität** und **Homogenität** auf nichtneg messbaren Treppenfkt.

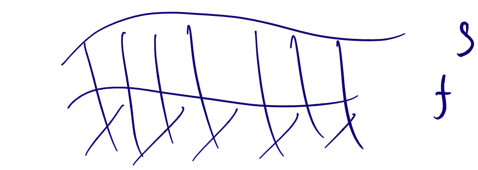
Additivität + pos. Homogenität des Integrals auf nichtneg messb Treppenfkt

$\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{M}_{\geq 0}$ Treppenfkt
$c_1, c_2 \in [0,\infty]$

$$\Longrightarrow \underbrace{\int_X \underbrace{(c_1\tau_1 + c_2\tau_2)}_{\sum_i c_1 a_i \chi_{A_i} + \sum_j c_2 b_j \chi_{B_j}} d\mu}_{} = \underbrace{c_1 \int_X \tau_1 \, d\mu}_{c_1 \sum a_i \mu(A_i)} + \underbrace{c_2 \int_X \tau_2 \, d\mu}_{c_2 \sum b_j \mu(B_j)}$$

with $\tau_1 = \sum a_i \chi_{A_i}$, $\tau_2 = \sum b_j \chi_{B_j}$

Monotonie des Integrals: folgt ebenfalls direkt aus Def



$$\left.\begin{array}{l} f, g \in \mathcal{M}_{\geq 0} \\ f \leq g \end{array}\right\} \Longrightarrow \int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$$

folgt aus Monotonie von Maßen hier für $\mu \otimes \beta^1$

Auch grundliegende Konvergenzeig des Integrals auf nichtneg Fkt lassen sich unmittelbar aus Eig des Produktmaßes ableiten, nämlich aus seinen Stetigkeitseigen als Maß. Betrachte $(f_n)_n$ $\quad X \xrightarrow{f_n} [0,\infty]$

Ann: $f_n \nearrow$ schwach monoton (punktweise)

$$\Longrightarrow \quad f = \lim_{n\to\infty} f_n : X \to [0,\infty]$$

überall definiert

$$\{(x,y) \mid 0 < y < f_n(x)\} \nearrow \{(x,y) \mid 0 < y < f(x)\}$$

falls f_n messbar. $\quad f_n \in \mathcal{M}_{\geq 0}$

$$\Big\Downarrow \text{ Stetigkeit von unten von } \mu \otimes \beta^1$$

$$\int_X f_n \, d\mu \nearrow \int_X f \, d\mu$$

Klar: (wegen Monotonie von Maßen) $\quad \lim \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$

$\Longrightarrow$ <u>Satz von der monotonen Konvergenz (B. Levi)</u>:

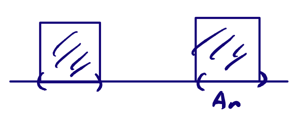
Für eine schwach monoton wachsende Folge (f_n) von Fkt $f_n \in \mathcal{M}_{\geq 0}(X, \mathcal{A})$ gilt

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

kann Integral und Grenzwert vertauschen!

<u>Bem</u> Eine solche Konvergenzaussage gilt ohne Monotonie-Voraussetzung nicht.

zB $(A_n)_n \quad A_n \in \mathcal{A}$ pw disjunkt



$\Longrightarrow \quad \chi_{A_n} \longrightarrow 0$, aber $\int_X \chi(A_n)\,d\mu$ kann beliebige Folge sein.

Wenn wir auf die Monotonie-Verhalten verzichten, gilt jedoch eine Ungleichung. Dieser gilt allgemein auch ohne Konvergenzann.

> <u>**Satz (Lemma von Fatou)**</u> Für jede Folge (f_n) von Fkt $f_n \in \mathcal{M}_{\geq 0}(X, \mathcal{A})$ gilt
>
> $$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu$$

<u>Bew</u>

$$\inf_{k\geq n} f_k \leq f_\ell \qquad \forall\, \ell \geq n$$

$$\xRightarrow[\text{des Integrals}]{\text{Monotonie}} \quad \underbrace{\int_X \underbrace{\left(\inf_{k\geq n} f_k\right)}_{\nearrow \text{ in } n \ \liminf\limits_{n\to\infty} f_n} d\mu}_{\nearrow \int_X (\liminf\limits_{n\to\infty} f_n)\, d\mu} \leq \underbrace{\inf_{k\geq n} \int_X f_k\, d\mu}_{\nearrow \liminf\limits_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu}$$

$\xRightarrow[\text{Konvergenz}]{\text{Satz von monot.}}$

$\xRightarrow{\text{Limes } n\to\infty}$ Beh $\square$

Mithilfe der Konvergenzresultate können wir die Add + pos Homog des Integrals auf nichtneg messb Treppenfkt verallg auf bel nichtneg messb Fkt

<u>**Lemma**</u> $f_1, f_2 \in \mathcal{M}_{\geq 0}$, $c_1, c_2 \in [0, \infty]$. Dann

$$\int_X (c_1 f_1 + c_2 f_2)\, d\mu = c_1 \int_X f_1\, d\mu + c_2 \int_X f_2\, d\mu.$$

<u>Bew</u> können approx $\tau_{in} \nearrow f_i$ $(i=1,2)$

$\uparrow$ $\mathcal{M}_{\geq 0}$ Treppenfkt

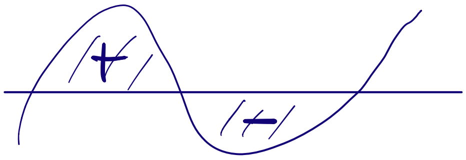
wissen schon:

$$\underbrace{\int_X (\underbrace{c_1 \tau_{1n} + c_2 \tau_{2n}}_{\nearrow c_1 f_1 + c_2 f_2})\, d\mu}_{\nearrow \int_X (c_1 f_1 + c_2 f_2)\, d\mu} = c_1 \underbrace{\int_X \underbrace{\tau_{1n}}_{\nearrow f_1} d\mu}_{\nearrow \int_X f_1\, d\mu} + c_2 \underbrace{\int_X \tau_{2n}\, d\mu}_{\nearrow \int_X f_2\, d\mu}$$

mit Satz v.d. Monotonkonv

II.2.3 Integral allgemeiner numer Fkt

Jetzt Integral für allg Fkt. Müssen diese geeignet <u>beschränken</u>.



sicherstellen, dass Beiträge $< \infty$

<u>Def</u> $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$ heißt μ-integrierbar, falls $\|f\|_1 := \int_X \underbrace{|f|}_{\in \mathcal{M}_{\geq 0}} d\mu < \infty$

Integral schon definiert

f integrierbar $\xRightarrow{0 \leq f^{\pm} \leq |f|}$ $f^{\pm}$ integrierbar

$f = f^+ - f^-$

$|f| = f^+ + f^-$

Definiere das <u>μ-Integral</u> von f als

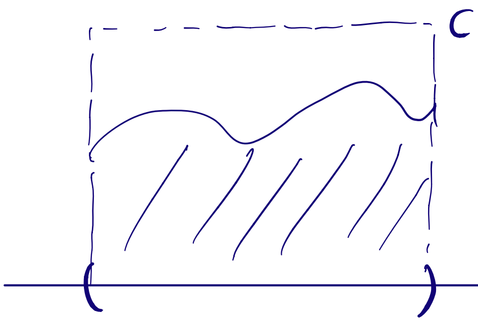
$$(*) \quad \int_X f\, d\mu = \int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu$$

$$= \|f^+\|_1 - \|f^-\|_1$$

Konsistent mit bisheriger Def des Integrals auf $\mathcal{M}_{\geq 0}$.

Bem (*) bleibt sinnvoll, solange f^+ oder f^- integrierbar. Solche Funktion nennt man <u>quasi-integrierbar</u>.
zB alle Funktionen in $\mathcal{M}_{\geq 0}$ sind quasi-integrierbar.

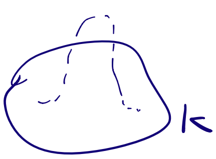
Bsp. Ist $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ beschränkt, dh $\exists C > 0$ sd $|f| < C$, und hat $\underbrace{\{f \neq 0\}}_{\text{„messbarer Träger"}}$ endliches Maß, so ist f integrierbar, denn



$$\|f\|_1 \leq \underbrace{\left(\sup |f|\right)}_{\leq C < \infty} \cdot \underbrace{\mu\left(\{f \neq 0\}\right)}_{< \infty} < \infty$$

Insb auf $\mathbb{R}^d$: Stetige Funktionen $\mathbb{R}^d \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ mit <u>kompaktem Träger</u> sind integrierbar.

topol. Träger $\overline{\{f \neq 0\}}$ ← topol Abschluss

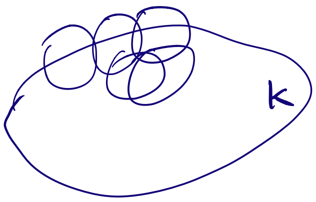


f beschränkt $\lambda^d\left(\overline{\{f \neq 0\}}\right) < \infty$

$\Rightarrow$ integrierbar

Gilt allgemeiner für Borel-Maße μ auf topol. Räumen X

$\forall x \in X \ \exists$ offen Umg U mit $\mu(U) < \infty$



$$\Downarrow$$

$\mu(\text{kompakt}) < \infty$