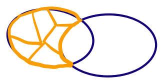
Klausur Ana 3 8. Feb C123, B051, B138 9–12 h

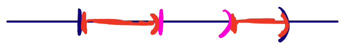
$\mathcal{H}$ Halbring (i) $\emptyset \in \mathcal{H}$

(ii) $\cap$ - stabil



(iii) $A, B \in \mathcal{H} \Rightarrow A \setminus B$ hat endliche disj Zerlegung in Teilmengen aus $\mathcal{H}$

Bsp. $\mathbb{R}$ halboffene Intervalle $[a,b) \subset \mathbb{R}$, $a < b$

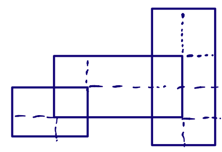


Lemma A (simultane Zerlegung)

zu $H_1, \dots, H_m \in \mathcal{H}$ (bel. end)

ex $H_1', \dots, H_n' \in \mathcal{H}$ paarw. disj

sd jedes H_i Vereinigung einiger H_j''s.



prop B Jede Teilmenge im von einem Halbring $\mathcal{H}$ erzeugten Ring ist eine endl disj Vereinigung von Teilm in $\mathcal{H}$.

einfacher Erz-Prozeß!

Ringe $\emptyset$, $\cup$-stabil, $\setminus$-stabil

Bew. $\mathcal{R} :=$ Familie der endl disj Vereinigungen von Teilmengen in $\mathcal{H}$

$\|$ Lemma

Familie aller endlichen Vereinigungen von Teilmengen in $\mathcal{H}$.

offensichtlich $\cup$-stabil

zu verifizieren bleibt $\setminus$-stabilität.

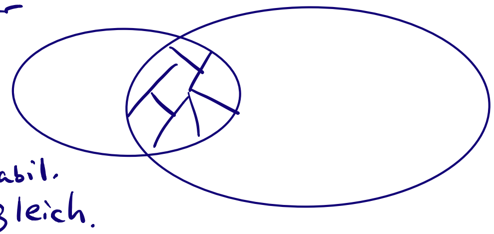
$A = A_1 \cup \dots \cup A_m$, $B = B_1 \cup \dots \cup B_n$ $A_i, B_j \in \mathcal{H}$

Lemma $\rightsquigarrow$ $\exists$ endlich viele $H_k' \in \mathcal{H}$ nichtleer, paarw disj.

sd jedes A_i und B_j eine Vereinigung einiger H_k' ist,

$\Longrightarrow$ auch A und B Vereinigungen einiger H_k''s.

$\Longrightarrow$ $A \setminus B$ Vereinigung einiger H_k''s, nämlich derer, die in A, aber nicht in B enthalten sind.



Also $\mathcal{R}$ Ring, enthalten in von $\mathcal{H}$ erz Ring, also gleich.

Ring $\cup$-stabil.

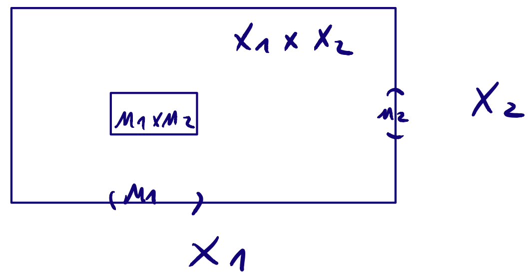
$\square$

I. 2.4. Produkte von Halbringen und Ringen

Familien $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{P}(X_i)$ $\quad i = 1, \dots, n$

$\rightsquigarrow$ Produkt von "Quadern"

$$\mathcal{F}_1 * \dots * \mathcal{F}_n := \{ M_1 \times \dots \times M_n \mid M_i \in \mathcal{F}_i \text{ für } i = 1, \dots, n \} \subset \mathcal{P}(X_1 \times \dots \times X_n)$$



und $\cup$-stabile Hülle, die Familie $\mathcal{F}_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{F}_n$ der $\underbrace{\text{endl. Vereinigungen von „Quadern"}}_{\text{„Figuren"}}$ in $\mathcal{F}_1 * \dots * \mathcal{F}_n$.

Beide Produkte $*$ und $\boxtimes$ assoziativ,

z. B.

$$(\mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2) * \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2 * \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 * (\mathcal{F}_2 * \mathcal{F}_3)$$

$M_1 \times M_2 \in \mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2$, $\quad M_1 \times M_2 \times M_3 \in (\mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2) * \mathcal{F}_3$, $\quad M_1 \times M_2 \times M_3 \in \mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2 * \mathcal{F}_3$

und $(\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2) \boxtimes \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 \boxtimes (\mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{F}_3)$

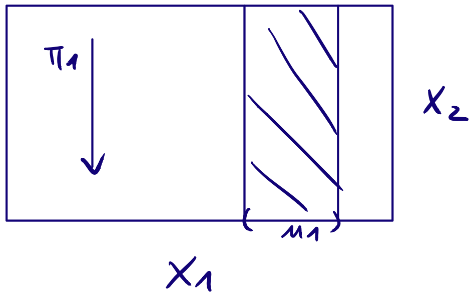
Definiere weiter

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n) \subset \mathcal{F}_1 * \dots * \mathcal{F}_n$$

die <u>Zylindermenge</u>

$$\pi_k^{-1}(M_k) = X_1 \times \dots \times X_{k-1} \times M_k \times X_{k+1} \times \dots \times X_n$$

mit $1 \leq k \leq n$, $M_k \in \mathcal{F}_k$



wobei: $X_1 \times \dots \times X_n \xrightarrow{\pi_k} X_k$, $(x_1, \dots, x_k) \mapsto x_k$

die natürliche Projektion ist.

<u>prop. C</u> (i) Seien $\mathcal{H}_i \in \mathcal{P}(X_i)$ Halbringe $(i = 1, \dots, n)$ und $\mathcal{R}_i \subset \mathcal{P}(X_i)$ die von ihnen erzeugte Ringe.

Dann ist $\mathcal{H}_1 * \dots * \mathcal{H}_n$ ein Halbring auf $X_1 \times \dots \times X_n$ und $\mathcal{H}_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{H}_n = \mathcal{R}_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{R}_n$ der von ihm erzeugte Ring.

(ii) Sind $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{H}_i$ Erzsys der Halbringe, so ist $\mathcal{Z}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$ ein Erzsys von $\mathcal{H}_1 * \dots * \mathcal{H}_n$ als Halbring sowie (folglich) ein Erzsys von $\mathcal{H}_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{H}_n$ als Ring.

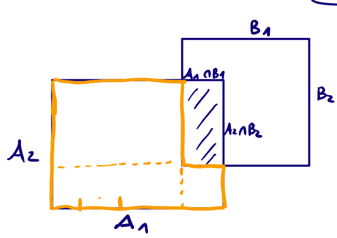
<u>Bew</u> (i) Zumindest $n = 2$.

Klar $\mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2$ enthält $\emptyset$, ist $\cap$-stabil.

$A_i \cap B_i \in \mathcal{H}$ für $A_i, B_i \in \mathcal{H}_i$

disj zerlegung

$(A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2)$ ← z.z: disjunkt zerlegbar in Teilmengen aus $\mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2$



$$= \big(\underbrace{(A_1 \cap B_1)}_{\in \mathcal{H}_1} \times \underbrace{(A_2 \setminus B_2)}_{\text{zerlegbar in Teilmengen aus } \mathcal{H}_2} \big)$$

$$\sqcup \big((A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \setminus B_2) \big) \sqcup \big(\underbrace{(A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \cap B_2)} \big)$$

analog zerlegbar

$\underbrace{\text{zerlegbar in Teilm aus } \mathcal{H}_1 \quad \text{zerlegbar in Teilmeng aus } \mathcal{H}_2}_{\text{zerlegbar in Teilmengen aus } \mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2}$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2$ erfüllt auch Axiom (iii) für Halbringe.

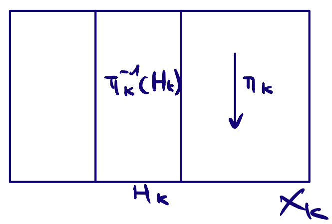
dh $\mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2$ Halbring

Induktion $\Longrightarrow$ auch für $\mathcal{H}_1 * \dots * \mathcal{H}_n$, $n \geq 1$

prop B $\Longrightarrow$ $\mathcal{H}_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{H}_n$ ist der von $\mathcal{H}_1 \times \dots \times \mathcal{H}_n$ erz. Ring.

(ii) für jedes k: Der Halbring auf $X_1 \times \dots \times X_n$ bestehend aus den Zylmengen $\pi_k^{-1}(H_k)$ für $H_k \in \mathcal{H}_k$

wird erzeugt von den Zylindermengen $\pi_k^{-1}(E_k)$ für $E_k \in \mathcal{E}_k$.



$\mathcal{E}_k \subset \{ H_k \in \mathcal{H}_k \mid \pi_k^{-1}(H_k)$ gehört zum von den $\pi_k^{-1}(E_k)$ für $E_k \in \mathcal{E}_k$ erz Halbring $\} \subset \mathcal{H}_k$

ist ein Halbring, also Gleichheit.

$\Longrightarrow$ $\mathcal{Z}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_k)$ erzeugen denselben Halbring $\mathcal{Z}(\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n)$ und damit denselben wie $\mathcal{H}_1 * \dots * \mathcal{H}_n$.

<u>Def</u> Wir nennen den Halbring $\mathcal{H}_1 * \dots * \mathcal{H}_n$ das Produkt der Halbringe $\mathcal{H}_i$, den Ring $\mathcal{R}_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{R}_n$ das Produkt der Ringe $\mathcal{R}_i$.

Hauptbsp Quader und Figuren in $\mathbb{R}^d$

$a, b \in \mathbb{R}^d$ mit $a_i < b_i \; \forall i$ $\rightsquigarrow$ achsenparalleler halboffener Quader $[a,b) := [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_d, b_d)$

$\mathcal{Q}^d$:= Familie dieser Quader

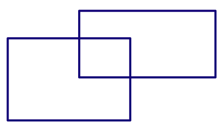
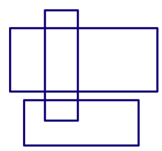
$\mathcal{I} := \mathcal{Q}^1$ Fam der halboffenen Intervalle

$$\Rightarrow \mathcal{Q}^d = \underbrace{\mathcal{I} * \ldots * \mathcal{I}}_{d}$$

prop C $\Rightarrow$ Halbring auf $\mathbb{R}^d$

$$\rightsquigarrow \mathcal{F}^d := \underbrace{\mathcal{I} \boxtimes \ldots \boxtimes \mathcal{I}}_{d} \quad \text{Ring erz von } \mathcal{Q}^d$$

Ring der d-dim „Figuren"

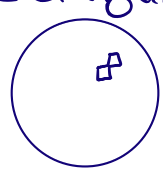



Wir haben gesehen: Figuren sind disjunkte Vereinigungen von Quadern.

Wir arbeiten aus teschnischen Gründen mit halboffenen Intervallen & Quadern, besonders übersichtliche Halbringe, abgeschlossen unter Produktbildung, enthält jedoch nicht die Teilmengen, die uns geometrisch primär interessieren: offene + abg. Quader (nicht achsenparallele)
Polygone & Polytope
gekrümmte „elementar geom" Gebilde:
Scheiben, Bälle, Zylinder, Kegel.

Wir müssen unsere Ringe weiter anreichern.

flexibilisieren (damit stabil unter abz. Vereinigungen)

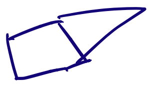


$$\rightsquigarrow \sigma\text{-Algebra}$$

I.3 Inhalte und Prämaße

(Halb)Ring, Algebren	σ-Alg
Inhalte, Prämaße	Maße

Wir beginnen mit der Untersuchung von Volumenfunktionen.



grundlegende Forderung: Additivität

Volumina nichtnegativ

$\in [0, \infty]$ erweiterte pos Halbgerade

$\quad \| $

$[0, \infty) \cup \{\infty\}$

$\cap$

erwei. reelle Zahlen $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

nat. Konvention $\quad x + \infty = \infty$ für $x > -\infty$

$x \cdot \infty = \infty$ für $x > 0$

(später außerdem $0 \cdot \infty = 0$)

$0 \cdot n \to 0$

I.3.1 Inhalte auf Halbringen und Ringen

allgemeinste Sorte von uns betrachteter Volumenfkt ist endlich additiv und def auf Halbringen

Def. (Inhalt) Ein Inhalt auf einer Halbring $\mathcal{H}$ ist eine Funktion $\mu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ mit den Eigenschaften:

μ ↗ Maß

(i) $\mu(\emptyset) = 0$ $\quad$! $\neq \infty$

(ii) Additivität: Sind $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{H}$ paarweise disjunkt mit $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{H}$, so

$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n)$

↑ „Volumina"

redundant, falls $\mathcal{H}$ Ring.

Bsp. (o) $\mu \equiv 0$ Nullinhalt

$\nu(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \end{cases}$

∞ , sonst

Stets Inhalte (auf beliebigen Halbringen)

(i) Algebra $\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{P}(X)$, X nichtleer

Inhalt $\begin{cases} \emptyset \mapsto 0 \\ X \mapsto v \in [0,\infty] \text{ bel.} \end{cases}$

Grundbaustein (für Lebesgue-Maß)

<u>Bsp</u> (halboffene Intervalle in $\mathbb{R}$)

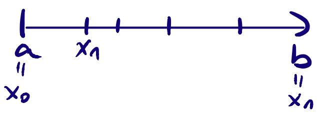
Halbring $\mathcal{I} = \mathcal{Q}^1 \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$

Inhalt gegeben durch euklidische Länge

$\lambda^1_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \to [0,\infty)$

$\lambda^1_{\mathcal{I}}([a,b)) := b-a \quad (a<b)$

<u>Additivität</u>



$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < b$

Unterteilung

$\rightsquigarrow$ disjunkte Zerlegung $[a,b) = [a,x_1) \sqcup \dots \sqcup [x_{n-1},b)$

$$\underbrace{\lambda^1_{\mathcal{I}}([a,b))}_{b-a} = \underbrace{\lambda^1_{\mathcal{I}}([a,x_1))}_{x_1-a} + \underbrace{\lambda^1_{\mathcal{I}}([x_1,x_2))}_{x_2-x_1} + \dots + \underbrace{\dots}_{b-x_{n-1}}$$