15. VL Ana 3 2. 12. 2019

I. 5. 13 Existenz nicht-messb. Teilmengen in $\mathbb{R}^d$

$$\mathbb{R}^d = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Repräsentantensystem} \\ \text{für } \mathbb{R}^d/\mathbb{Q}^d}}{M} + \mathbb{Q}^d$$

(zB zu $\mathbb{Q}^d$ komplementärer $\mathbb{Q}$-UVR von $\mathbb{R}^d$)
IA muss M jedoch keine Untergruppe von $\mathbb{R}^d$!

Jedes $x \in \mathbb{R}^d$ besitzt eindeutige Zerlegung

$$x = \underset{\in M}{m} + \underset{\in \mathbb{Q}^d}{q}$$

(wie bei der direkten Summen)

$\leadsto$ Zwei komplementäre Partitionen von $\mathbb{R}^d$

(überab.) $\mathcal{P}$ in Nebenklassen (abz.) $a + \mathbb{Q}^d$

(abz.) $\mathcal{P}^*$ in Repräsentantensys (überabz.) $M + q$, $q \in \mathbb{Q}^d$

also rationale Translate von M

Haben gezeigt: $\underbrace{\lambda^*(M+q)}_{\text{unab. von } q} > 0$ (wegen σ-Subadd äußerer Maße)

Satz Alle messb Teilm eines Repsys $M \subset \mathbb{R}^d$ sind λ^d-Nullmengen.

Kor die Repräsentantensys $M \subset \mathbb{R}^d$ sind nicht Lebesgue-messb, $M \notin \mathcal{L}^d$!

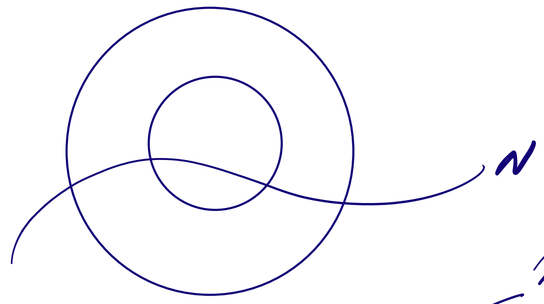
Beweisidee (Satz)

Packungsargument. eine Familie nichtleerer disjunkter Teilmengen

$N \subset M$

$\uparrow$

$\mathcal{L}^d$



λ^d messb. unabhängig von q.

OBdA N disjunkt. Betr. $N + q$, $q \in \mathbb{Q}^d \cap B_1(0)$

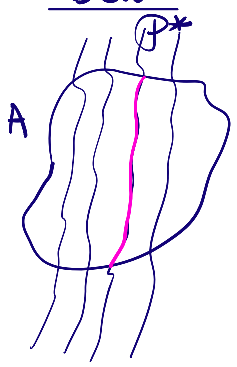
$\Rightarrow$ Vereinigung beschränkt, hat endliches Volumen $\lambda^d(\text{vereinig}) < \infty$

$\Rightarrow \lambda^d(N) = 0$ $\square$

Erweiterung bzw Lokalisierung dieser Existenzaussage über messb. Teilm.

Satz Jede messb. Teilm von $\mathbb{R}^d$ mit strikt positivem Maß enthält nicht Lebesgue-messb. Teilm.

Bew



$A \in \mathcal{L}^d$ mit $\lambda^d(A) > 0$.

Schneide A mit $\mathcal{P}^*$.

$\rightsquigarrow$ induzierte Partition von A durch Teilm $A \cap (M+q)$, $q \in \mathbb{Q}^d$.

Wie vorher: σ-Subadd äußerer Maße liefert

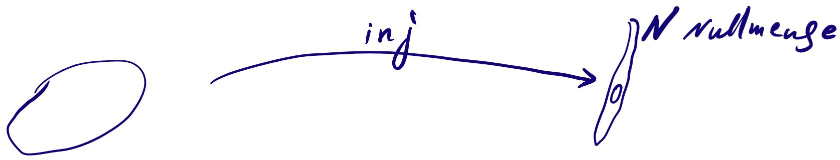
$$\exists q_0 \in \mathbb{Q}^d \text{ sd } \lambda^*\big(\underbrace{A \cap (M+q_0)}_{=: W \subset M+q_0}\big) > 0$$

$\xRightarrow{\text{letzter Satz}}$ $W \notin \mathcal{L}^d$. $\square$

Bem: Selbe Argumente durchführbar für Forts von λ^d auf translationsinv σ-Algebren $\supset \mathcal{L}^d$.

Anwendung auf Frage der Lebesgue-Messbarkeit von Homöomorphismen des $\mathbb{R}^d$:

Wir wissen: stetige Abbildungen eukl Räume sind Borel-messbar, jedoch i a nicht Lebesgue-messbar, Gegenbsp sind injektive stetige Abb $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'>d}$, deren Bilder Nullmengen sind.



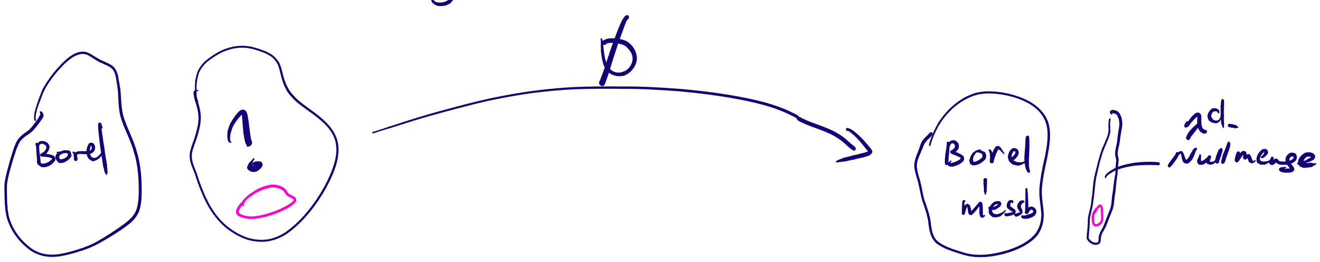
Das lässt offen, ob Homöomorphismen von $\mathbb{R}^{d \geq 1}$ Lebesgue-messbar sind. Nein! Gibt genaues Kriterium:

Satz Für Homöos $\mathbb{R}^d \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^d$ gilt:

ϕ Lebesgue-messbar $\iff$ ϕ^{-1} bildet $\overset{\text{Borel}}{\mathcal{B}^d}$-Nullmengen auf $\mathcal{B}^d$-Nullmengen ab.

(wir wissen, dass er sie auf Borel-Mengen abbildet.)

Bew Jede Teilmenge in $\mathcal{L}^d$ ist darstellbar als Vereinigung einer Borel-Menge und einer λ^d-Nullmenge.



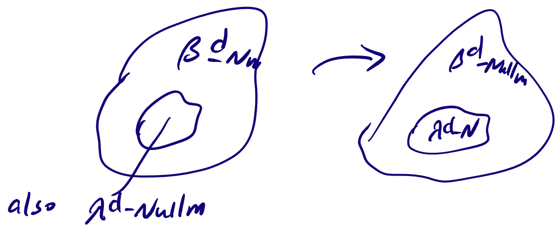
$\rightsquigarrow$ ϕ Lebesgue-messbar $\iff$ $\underbrace{\phi\text{-Urbilder}}_{\phi^{-1}\text{-Bilder}}$ von λ^d-Nullmengen sind Lebesgue-messbar.

Wegen der Injektivität von ϕ und wegen des letzten Satzes folgt, dass diese ϕ-Urbilder ebenfalls λ^d-Nullmengen sein müssen, denn sonst enthalten sie nicht Lebesgue-messb Teilmengen, und diese sind ebenfalls Urbilder von λ^d-Nullmengen.

Injektivität von ϕ

$\leadsto$ ϕ Lebesg-messb $\Longleftrightarrow$ ϕ-Urbilder von λ^d-Nullm sind λ^d-Nullm

$\Updownarrow$ Jede λ^d-Nullm ist Teilm einer β^d-Nullm (folgt aus Approx von Lebesg-messb Teilm)



ϕ-Urbilder von β^d-Null sind β^d-Null $\square$

Bsp (d = 1) s. Übung Idee: Cantor-Fkt $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ist stetig,

$$\begin{array}{ccc} & \cup & & \\ & [0,1] & \xrightarrow{\text{surj}} & [0,1] \\ & \cup & & \cup \\ \text{Nullmenge} & C & \longrightarrow & [0,1]\text{-abz} \\ & & & \text{Maß} = 1 \end{array}$$

$\xrightarrow{\text{Modifi}}$ „kleine Steigung hinzufügen"

$$\mathbb{R} \xrightarrow[\text{Homöo}]{\varphi} \mathbb{R}$$

$$\lambda^1\big(\varphi([0,1] \setminus C)\big) << 1$$

$$\Longrightarrow \lambda^1(\varphi(C)) > 0$$

II Integrationstheorie

II. 1 Messbare Funktionen

numerische Funktionen : $=$ $\overline{\mathbb{R}}$-wertige Fkt

trägt nat. messb. Struktur

σ-Alg $\overline{\mathcal{B}}$ erz. von jeder der Familien von Intervallen $[-\infty, a]$ bzw $[-\infty, a)$ bzw $(a, \infty]$ bzw $[a, \infty]$ jeweils für $a \in \mathbb{R}$.

Erweiterung von $\mathcal{B}$.

Erweitere Borel-Maß, indem $\pm\infty$ Masse Null erhalten. Vervollständigung von $\overline{\mathcal{B}} \rightsquigarrow \mathcal{L}$

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum.

Wir nennen eine num. Funktion $X \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{R}}$ (Borel-) messbar, falls sie $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}$-messbar ist.

Dies ist äquivalent dazu, dass die Sub/supniveaumengen

$$\{f \leq a\} = \{x \in X \mid f(x) \leq a\}$$

bzw $\{f < a\}$ bzw $\{f > a\}$ bzw $\{f \geq a\}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ zu $\mathcal{A}$ gehören.

$\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}} := \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X, \mathcal{A})$ Raum aller messb Fkt $X \to \overline{\mathbb{R}}$.

$\cup$

Unterräume $\mathcal{M}_{\geq 0}$ der nichtneg bzw $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ der endlichwertigen Fkt.

Operationen auf Funktionen führen wir pkw aus.

Rechenop, Bildung von Max, Sup etc.

Lemma Für eine Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$ sind auch die Fkt
$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$, $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$

messbar dh liegen in $\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$.

Bew $\{\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n \le a\} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\{f_n \le a\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$

$\Longrightarrow \sup\limits_n f_n$ messb

(analog für $\inf\limits_n f_n = -(\sup\limits_n(-f_n))$ messb)

$\limsup\limits_{n\to\infty} f_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{k\ge n} f_k \Longrightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ messb. $\square$

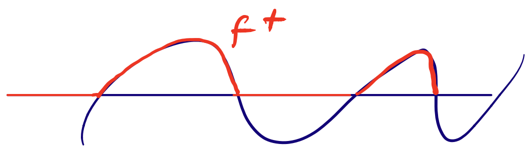
Insb

Kor $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$

$\Longrightarrow \max(f_1, \dots, f_n)$, $\min(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$

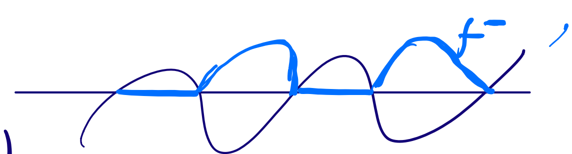
Kor Falls $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$, so liegen auch der Positivanteil

$f^+ = \max(f, 0)$



und der Negativanteil

$f^- = \max(-f, 0)$



und der Absolutbetrag

$|f| = f^+ + f^- = \max(f, -f)$

wieder in $\mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}$. (Bem: $f = f^+ - f^-$).

Sei $M \subset X$.

$M \xrightarrow{f_M} \overline{\mathbb{R}}$ durch Null fortsetzen zu $X \xrightarrow{\overline{f_M}} \overline{\mathbb{R}}$

durch $F_M(x) = \begin{cases} f_M(x), & x \in M \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ außerhalb der Teilmenge M abschneiden, indem wir übergehen zu $X \xrightarrow{\chi_M f} \overline{\mathbb{R}}$

$$(\chi_M f)(x) = \begin{cases} f(x), & x \in M \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dh $\chi_M f$ setzt $f|_M$ durch 0 fort.

$$\begin{matrix} X & \xrightarrow{f} & \overline{\mathbb{R}} \\ \cup & & \\ A \in \mathcal{A} & & \end{matrix}$$

$\chi_A f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X, \mathcal{A}) \iff f|_A \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(A, \mathcal{A}|_A)$

tritt ein, wenn $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(X, \mathcal{A})$

Bei Rechenoperationen auf num Funktionen sind die resultierenden Fkt in All. nicht überall auf dem gemeinsamen Def bereich definiert.

$$\begin{matrix} A_i & \xrightarrow{f_i} & \overline{\mathbb{R}} \\ \cap & & \\ X & & \end{matrix} \qquad (i = 1, \dots, n)$$

Summe $f_1 + \dots + f_n$ ist in allen Pkten def, in denen alle f_i def sind und nicht gleichzeitig ∞ und $-\infty$ als Werte auftreten, also auf

$$A := \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \setminus \left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} f_i^{-1}(\infty)\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} f_i^{-1}(-\infty)\right)\right)$$

$$= \underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\mathbb{R})\right)}_{\text{Summe endlich}} \sqcup \left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cap \underbrace{\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} f_i^{-1}(-\infty)\right) \triangle \left(\bigcup_{i=1}^{n} f_i^{-1}(\infty)\right)\right)}_{\text{Summe } \pm\infty}\right)$$

Falls Fkten f_i messbar, dh $A_i \in \mathcal{A}$ und

$f_i \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(A_i, \mathcal{A}|_{A_i})$, so auch ihre Summe,

d.h. $A \in \mathcal{A}$ und $f_1 + \dots + f_n \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(A, \mathcal{A}|_A)$

auf Bereich endlicher Werte:

$f_1 + \dots + f_n$ ist Komposition von $\underbrace{(f_1, \dots, f_n)}_{\text{messb}}$ mit Addition ~ stetig, also messbar

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$$