Integrale stetiger Funktionen einer Variable

23.10.2019

Wir unterscheiden zwischen

- dem *bestimmten Integral*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- und dem *unbestimmten Integral*, d.h. die Menge der Funktionen dieser Art

$$x \mapsto \int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \underset{\text{const}}{C}$$

Notation: $\int f\,\mathrm{d}x$.

Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).

(i) Ist f von der Klasse $\mathcal{C}^0$ (d.h. stetig), so ist

$$\left(\int f\,\mathrm{d}x\right)' = f$$

d.h. die Repräsentanten des unbestimmten Integrals sind Stammfunktionen.

(ii) Ist f von der Klasse $\mathcal{C}^1$ (d.h. stetig differenzierbar), so ist

$$\int F'\,\mathrm{d}x = F$$

(zu lesen: F repräsentiert $\int F'\,\mathrm{d}x$) bzw.

$$\int_a^x F'(\xi)\,\mathrm{d}x = F(x) - F(a)$$

Rechenregeln für Differentialrechnung $\rightsquigarrow$ Rechenregeln für Integralrechnung z.B.

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \implies \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| \text{ auf } \mathbb{R}\setminus\{0\}$$
$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \implies \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \text{ auf } (-1,1)$$
$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} \implies \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x \text{ auf } \mathbb{R}$$

Kettenregel $\rightsquigarrow$ Substitutionsregel Aus der Kettenregel

$$(F\circ\varphi)'(u) = F'(\varphi(u))\cdot\varphi'(u)$$

folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Sei $f := F'$ ($\mathcal{C}^0$),

$$\int_a^b f(\varphi(u))\cdot\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b (F\circ\varphi)(u)\,\mathrm{d}u = F\circ\varphi\Big|_a^b = F\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\,\mathrm{d}x$$

Also die **Substitutionsregel** (Bezeichne $I := (a, b)$, $J = (\varphi(a), \varphi(b))$)

$$\boxed{\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x}$$

und die **Version für unbestimmtes Integral**

$$\int f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \underbrace{\int f(x)\,\mathrm{d}x\Big|_{x=\varphi(u)}}_{\substack{\text{die Komposition } \varphi \\ \text{mit } \int f(x)\,\mathrm{d}x}}$$

Beispiel.

(i) **Lineare Substitution** mit $x = u + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(u+\alpha)\,\mathrm{d}x = \int_{a+\alpha}^{b+\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$$

bzw.

$$\int f(u+\alpha)\,\mathrm{d}u = \int f(x)\,\mathrm{d}x\Big|_{x=u+\alpha}$$

z.B. $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}u}{u+\alpha} = \int_{a+\alpha}^{b+\alpha} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|\Big|_{a+\alpha}^{b+\alpha} = \ln\left|\frac{b+\alpha}{a+\alpha}\right|$$

bzw.

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u+\alpha} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}\Big|_{x=u+\alpha} = \ln|x|\Big|_{x=u+\alpha} = \ln|u+\alpha|$$

(i') **(Multiplikative) lineare Substitution** mit $x = \lambda u (\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

$$\int_a^b f(\lambda u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

bzw.

$$\int f(\lambda u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\lambda}\int f(x)\,\mathrm{d}x\Big|_{x=\lambda u}$$

z.B.

$$\int \cos\lambda u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\lambda}\int \underbrace{\cos x}_{\sin' x}\,\mathrm{d}x\Big|_{x=\lambda u} = \frac{1}{\lambda}\sin\lambda u$$

(ii) **Quadratische Substitution** mit $x = u^2$

$$\int_a^b f(u^2)u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

bzw.

$$f(u^2)u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}f(x)\,\mathrm{d}x\Big|_{x=u^2}$$

z.B. $f(x) = e^x$:

$$\int ue^{u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int e^x\,\mathrm{d}x\Big|_{x=u^2} = \frac{1}{2}e^{u^2}$$

(iii) Mit $f(x) = \frac{1}{x}$, (falls $\varphi|_J$ keine Nullstelle hat)

$$\int_a^b \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}\,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \ln|\varphi(u)|\Big|_a^b$$

bzw.

$$\int \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}\,\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}\Big|_{x=\varphi(u)} = \ln|\varphi(u)|$$

z.B. $\varphi(u) = \cos u$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\int \tan u\,\mathrm{d}u = \int -\frac{\cos' u}{\cos u}\,\mathrm{d}u = -\ln|\cos u|$$

Berechne $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$ auf $\mathbb{R}(= I = J)$. Substituiere $x = \sinh u$ mit der Umkehrfunktion $u = \operatorname{arsinh} x$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sinh' u}{\sqrt{1+\sinh^2 u}}\,\mathrm{d}u\Bigg|_{u=\operatorname{arsinh} x} = \int \frac{\cosh' u}{\cosh' u}\,\mathrm{d}u\Big|_{u=\operatorname{arsinh} x} = \operatorname{arsinh} x$$

Die *Produktregel* für die Ableitung führt zur Methode der *partiellen* Integration. 30.10.2019

Partielle Integration: Für $\mathcal{C}^1$ Funktionen $f, g : I \to \mathbb{C}$ auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{\int_a^b f'\cdot g\,\mathrm{d}x = f\cdot g\Big|_a^b - \int_a^b f\cdot g'\,\mathrm{d}x}$$

für $a, b \in I$ Mann nennt $f \cdot g|_a^b$ *Randterm.*

Für unbestimmte Integrale schreibt man

$$\boxed{\int f'g\,\mathrm{d}x = f\cdot g\Big| - \int f\cdot g'\,\mathrm{d}x}$$

Man kann diese Gleichung lesen als eine Gleichheit von Funktionenmengen oder so, dass jeder Repräsentant der rechten Seite $f\cdot g\Big| - \int f\cdot g'$ ein Repräsentant der linken Seite $\int f'g$ ist.

Beweis. Nach der Produktregel ist $f\cdot g$ Stammfunktion von $f'g + fg'$. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert dann

$$\int (f'g + fg') = fg\Big|$$

■

Beispiel. (i) Berechnung von $\int \ln x \,\mathrm{d}x$ auf $(0,\infty)$. Dort gilt wegen $\ln' x = \frac{1}{x}$

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x = \int (x)' \ln x \,\mathrm{d}x = x \ln x \Big| - \int x \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = x(\ln x - 1)\Big|$$

(ii) Berechnung von $\int xe^x \,\mathrm{d}x$ auf $\mathbb{R}$.

$$\int xe^x \,\mathrm{d}x = \int x(e^x)' \,\mathrm{d}x = xe^x\Big| - \int \underbrace{(x)'}_{=1} e^x \,\mathrm{d}x = e^x(x-1)$$

(ii)' Berechnung von $\int x^n e^x \,\mathrm{d}x$ auf $\mathbb{R}$.

$$I_n(x) := \int x^n e^x \,\mathrm{d}x = \int x^n (e^x)' \,\mathrm{d}x = x^n e^x - n \underbrace{\int x^{n-1} e^x \,\mathrm{d}x}_{I_{n-1}(x)}$$

Wir erhalten die Rekursionsformel

$$I_n(x) = x^n e^x\Big| - nI_{n-1}(x)$$

(iii) Berechnung von $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ auf $(-1,1)$.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int (x')\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= x\sqrt{1-x^2}\Big| + \int x \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{1-x^2}\Big| + \underbrace{\int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}}_{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x}_{\arcsin x} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\Big(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\Big)\Big|\end{aligned}$$

Bemerkung. Die Regel für die Berechnung der Ableitung von Umkehrfunktion ist

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1})}$$

und somit haben wir die Ableitung von arcsin:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\big(\arcsin(x)\big)}} = \frac{1}{1-x^2}$$

Insbesondere erhalten wir durch Grenzübergang (Hier ist der Grenzübergang nötig, da $\sqrt{1-x^2}$ nicht stetig differenzierbar in Punkten -1 und 1 sind) für das abgeschlossene Intervall $[-1,1]$:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\Big(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\Big)\Big|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Dies zeigt insbesondere, dass die Fläche der Einheitsscheibe π ist.
Außerdem können wir das Integral auch mit Substitution berechnen:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \overset{x=\sin u}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(u)}\cos u\,\mathrm{d}u = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\cos^2 u}_{\frac{1+\cos 2u}{2}}\,\mathrm{d}u$$
$$= \left(\frac{u}{2} + \frac{1}{4}\sin 2u\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

(iv) Berechnung von $\int \arctan$: Wir bemerken, dass $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, denn $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x$.

$$\begin{aligned}\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x = \int (x')\arctan(x)\,\mathrm{d}x &= x \cdot \arctan x\Big| - \int \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &\overset{t=x^2}{=} x \cdot \arctan x - \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t\Big|_{t=x^2} \\ &= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\end{aligned}$$

(v) Berechnung von $\int \arcsin(x)$ auf $(-1,1)$

$$\begin{aligned}\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x = \int (x)'\arcsin(x)\,\mathrm{d}x &= x\arcsin(x)\Big| - \int \frac{1}{2}\frac{2x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &\overset{t:=x^2}{=} x\arcsin(x)\Big| - \int \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}\Big|_{t=x^2} \\ &= x\arcsin x + \sqrt{1-t}\Big|_{t=x^2} \\ &= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\Big|\end{aligned}$$

(vi) Berechnung von $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$. Da

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int (-\cos(x))'\sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x\sin x + \int \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

erhalten wir

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(-\cos x\sin x + x)$$

(vi)' Berechnung von $\int \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$ für $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}I_n(x) := \int \sin^n(x)\,\mathrm{d}x &= \int (-\cos(x))'\sin^{n-1}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\cos x\sin^{n-1} x + \int \underbrace{\cos^2(x)}_{1-\sin^2(x)}(n-1)\sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\cos x\sin^{n-1} x + (n-1)\left(\underbrace{\int \sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x}_{I_{n-2}(x)} - \underbrace{\int \sin^n(x)\,\mathrm{d}x}_{I_n(x)}\right)\end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$n \cdot I_n(x) = -\cos(x)\sin^{(n-1)}(x) + (n-1)I_{n-2}(x)$$

Zum Beispiel gilt $I_0(x) = x$, $I_1(x) = -\cos x$, $I_2(x) = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$, $I_3(x) = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x$.

Rationale Funktionen: $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$ mit p, q Polynome, $q \neq 0$.Zunächst $p, q \in \mathbb{C}[x]$:

> **Satz** (**Fundamentalsatz der Algebra**). Jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad $n = \deg(p)$ besitzt eine Zerlegung in Linearfaktoren:
>
> $$p(x) = c \cdot \prod_{n=1}^{m} (x - \alpha_k)^{n_k}$$
>
> mit $m \leq n, c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{C}, \sum_{k=1}^{m} n_k = n$. Hierbei sind $\alpha_1, ..., \alpha_m$ die verschiedenen Nullstellen von p und n_k die Vielfachheit von α_k. Die Linearfaktorzerlegung ist bis auf Vertauschung von Faktoren eindeutig.

Polynomdivision führt zu:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \quad \text{mit } s \in \mathbb{C}[x] \text{ und } \deg r < \deg q$$

Partialbruchzerlegung: Sei $q(x) \in \mathbb{C}[x]$ mit $q(x) = c \cdot \prod_{n=1}^{m}(x - \alpha_k)^{n_k}$. Für jedes komplexe Polynom $r(x) \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg r < \deg q = n$ existiert eine eindeutige Zerlegung:

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{c_{kj}}{(x - x_k)^j}, \quad c_{jk} \in \mathbb{C}$$

d.h.

$$r(x) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_k} b_{kj}(x) c_{kj}$$

mit

$$b_{kj} = (x - \alpha_k)^{n_k - j} \cdot \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{m} (x - \alpha_l)^{n_l}$$

Anderes gesagt, $\{b_{kj}\}$ für $k = 1, ..., m$ und $j = 1, ..., n_k$ bilden Basis von $\mathbb{C}_{\deg < n}[x]$. Insbesondere $\dim(\mathbb{C}_{\deg < n}[x]) = n$.

Beispiel.

$$\int \frac{1}{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1 - x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1 + x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right|$$