6. ZÜ Ana 3 20. 11. 2019

Borel-Hierarchie (Konstruktion mit transfiniter Induktion)

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X) \rightsquigarrow \sigma(\mathcal{E})$$ Ziel: Beschreibung

$$\emptyset \in \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X) \xrightarrow{\text{abzählbare Vereinigungen}} \mathcal{F} \subset \mathcal{F}^{\vee} \subset \mathcal{P}(X)$$

von Teilmengen in $\mathcal{F}$ und deren Komplemente

enthalten gleich
Gleichheit gdw $\mathcal{F}$ schon eine σ-Alg ist

$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i$, $M_i \in \mathcal{F}$ oder $M_i^c \in \mathcal{F}$

$$\mathcal{E}_1 := \mathcal{E} \cup \{\emptyset\}, \quad \mathcal{E}_2 := \mathcal{E}_1^{\vee}, \quad \mathcal{E}_3 := \mathcal{E}_2^{\vee}, \ \dots, \quad \mathcal{E}_n = \mathcal{E}_{n-1}^{\vee}$$

$$\mathcal{E}_{\omega} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_n, \quad \mathcal{E}_{\omega+1} = \mathcal{E}_{\omega}^{\vee} = \bigcup_{\beta\leq\omega} \mathcal{E}_\beta$$

kleinste Ordinalzahl $\longleftrightarrow$ als wohlgeord Menge $\mathbb{N}$.

ω ω ω

Ketten: α Ordinalzahl („Länge der Kette") $(\mathcal{E}_\beta)_{\beta<\alpha}$ sd $\mathcal{E}_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} \mathcal{E}_\gamma^{\vee} \ \forall 1<\beta<\alpha$

$\subset \mathcal{P}(X)$

und $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} \cup \{\emptyset\}$

(Existenz) existieren zB für endliche Ordinalzahlen $\alpha = 1, 2, \dots, n, \dots$

Eindeutigkeit Beh $(\mathcal{E}_\beta)_{\beta<\alpha}$ und $(\mathcal{E}'_\beta)_{\beta<\alpha} \Longrightarrow \mathcal{E}_\beta = \mathcal{E}'_\beta \ \forall \beta<\alpha$

$$\underset{\text{minimal}}{\beta_0} \underset{\text{wohlordn}}{\in} \underbrace{\{\beta<\alpha \mid \mathcal{E}_\beta \neq \mathcal{E}'_\beta\}}_{\text{Ann: nichtleer}} \subseteq \{\beta \mid \beta<\alpha\} \ (\cong \alpha)$$

$$\mathcal{E}_{\beta_0} = \bigcup_{\beta<\beta_0} \underbrace{\mathcal{E}_\beta^{\vee}}_{\mathcal{E}'_\beta} = \mathcal{E}'_{\beta_0} \ \lightning \quad \text{Also } \{\beta<\alpha \mid \mathcal{E}_\beta \neq \mathcal{E}'_\beta\} = \emptyset$$

dh Eindeutigkeit gilt.

$\rightsquigarrow$ es existieren solche Ketten für alle Ordinalzahlen α.

Länge

Ann: $\nexists$ ← es ex keine Kette für α_0. $\alpha \leq$

$\{\alpha<\alpha_0\}$ wohlgeord. ⟶ oBdA α_0 minimal sodass Kette der Länge α_0 ex. Also $\exists$ Ketten der Länge β $\forall \beta<\alpha_0$

- - - - - - $\underset{\beta}{|}$ - $\underset{\alpha_0}{+}$ - - - bilde $\mathcal{E}_{\alpha_0} := \bigcup_{\beta<\alpha_0} \mathcal{E}_\beta$

$\mathcal{E}_\beta$ $\rightsquigarrow$ Kette der Länge $\mathcal{E}_0$.

Also existieren Ketten für bel. Längen α.

$|\mathcal{E}_\alpha|$ beschränkt durch $|\mathcal{P}(X)|$. $\Longrightarrow$ $\mathcal{E}_\alpha$ können nicht paarweise verschieden sein. dh $\exists\, \alpha < \alpha'$ mit $\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{E}_{\alpha'}$.

$$\overset{\alpha+1\le\alpha'}{\Longrightarrow} \quad (\mathcal{E}_\alpha)^\sim = \mathcal{E}_{\alpha+1} = \mathcal{E}_\alpha \Rightarrow \mathcal{E}_\alpha \ \sigma\text{-Alg} = \sigma(\mathcal{E})$$

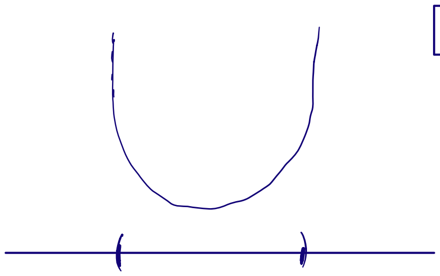
der Nachfolger von α ist hoch. $\alpha+1$

$(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha \text{ ordinal}}$ <u>Borel - Hierarchie</u> $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_\alpha$ für α hinr. groß.

Hahn- Banach

Uneigentliche Integrale

(verallg. unend. Reihen)



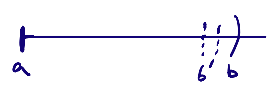
$$[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

$$\text{Int} \quad (a,b) \xrightarrow[\text{stetig}]{f} \mathbb{C}$$

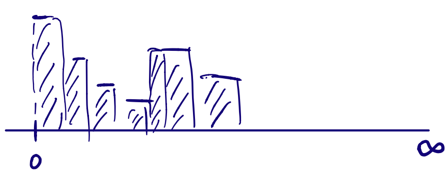
$-\infty \le a \qquad b \le \infty$

$$[a,b) \xrightarrow[\text{stetig}]{f} \mathbb{C}$$

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{b'\to b} \int_a^{b'} f\,dx$$



wir sagen, dieses Integral <u>konvergiert absolut</u>, falls $\int_a^b \underset{\underset{[0,\infty]}{\uparrow}}{|f|}\,dx < \infty$.



<u>Majorantenkrit.</u> absolut Konv. $\Longrightarrow$ Konv.

(und $\left|\int_a^b f\,dx\right| \le \int_a^b |f|\,dx$)

Bsp. • $(0,1) \xrightarrow{x^\alpha} \mathbb{C}$ $\qquad x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ für $x > 0$

komplexe Exponentialfkt

$$|x^\alpha| = x^{\operatorname{Re} \alpha}$$

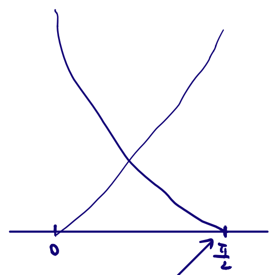
$$\boxed{|e^{it}| = 1 \quad t \in \mathbb{R}}$$

$\int_0^1 x^\alpha \, dx$ konvergiert genau für $\operatorname{Re}\alpha > -1$.

$\int_1^\infty x^\alpha \, dx$ konvergiert $\iff$ $\operatorname{Re}\alpha < -1$

• $\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim\limits_{b \to \infty} \underbrace{\int_0^b e^{-x} dx}_{-e^{-x}\big|_0^b = 1 - e^{-b}} = 1$

• $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underset{\frac{\sin x}{\cos x}}{\underset{\shortparallel}{\tan x}} \, dx$



$\sim \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$

$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} > \frac{1/2}{x}$

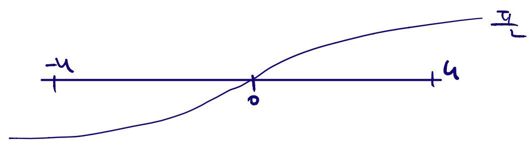
für $0 < x < \varepsilon$

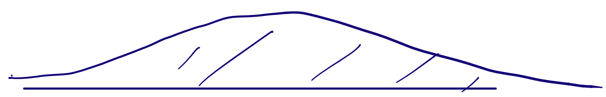
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x \, dx = \infty \iff \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx = \infty$.

• $\int_{-\infty}^\infty \underbrace{\frac{dx}{1+x^2}}_{\arctan' x \, dx}$

$\shortparallel$

$\lim\limits_{u \to \infty} \underbrace{\int_{-u}^{u} \ldots}_{\arctan\big|_{-u}^{u}} \longrightarrow \pi$



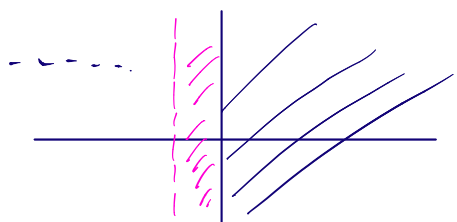


zur Gammafunktion:

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$$

konv absolut für $\operatorname{Re} z > 0$

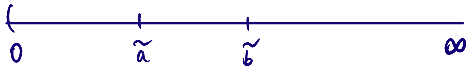
bestätigt für konv bei 0.



Pol bei $z = 0$.

Funktionalgleichung

$$\underset{\text{def für } \operatorname{Re} z > -1}{\Gamma(z+1)} = z \underset{\text{def für } \operatorname{Re} z > 0}{\Gamma(z)}.$$



$$\underbrace{\int_{\tilde a}^{\tilde b} x^z \overbrace{e^{-x}}^{(-e^{-x})'} dx}_{\longrightarrow \Gamma(z+1) \text{ für } \tilde a \downarrow 0,\ \tilde b \nearrow \infty} = \underbrace{x^{z}(-e^{-x}) \Big|_{\tilde a}^{\tilde b}}_{\to 0} - \underbrace{\int z x^{z-1}(-e^{-x})\, dx}_{\to z(-\Gamma(z))}$$

$\to$ ✓

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1 \xRightarrow{\text{Ind.}} \Gamma(n+1) = n!$$

Gamma-Fkt interpoliert Fakultätsfkt

Fkt gl $\leadsto$ können den Definitionsbereich auf $\mathbb{C} - \{\ldots, -2, -1, 0\}$ erweitern

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \ldots = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}$$

$\operatorname{Re}(z+n) > 0$ für $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß.

Approx von Integralen (Trapez-Regel)

Stirling-Abschätzung für Fakultäten $n!$ 2019!

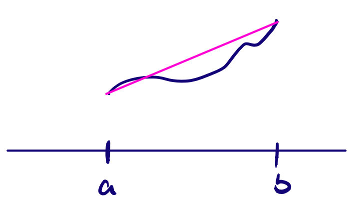
Wallis-Produkt

zB $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

$\boxed{\text{Trapez-Regel}}$

Betrachte $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ stetig

(mehr Regula wir später verlangt)



Vergleich $\int_a^b f\, dx$ mit Trapez-Fläche $(b-a) \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2}$

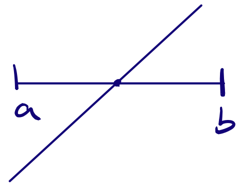
$f \in C^1$

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^b f\cdot h_0\,dx = \int_a^b f h_1'\,dx = \underbrace{f h_1\Big|_a^b}_{\left(f(a)-f(b)\right)\cdot\frac{b-a}{2}} - \int f' h_1\,dx$$

Trapez-Int

$$h_0 \equiv 1 \qquad h_1(x) = x - \frac{a+b}{2}$$

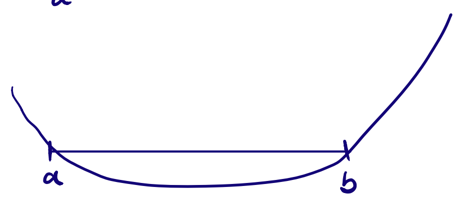
$$h_1 = h_1'$$



Einfachste Trapez-Regel ($f \in C^1$)

$$\int_a^b f\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) - \int_a^b f' h_1\,dx$$

$$f \in C^2 \qquad = f h_1\Big|_a^b - \underbrace{f' h_2\Big|_a^b}_{=0} + \int_a^b f'' h_2\,dx$$



$$\boxed{\varphi(x) = h_2(x) := \tfrac{1}{2}(x-a)(x-b)}$$

Trapez-Regel ($f \in C^2$)

$$\int_a^b f\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) + \underbrace{\int_a^b f'' h_2\,dx}$$

Der Fehlerterm ist die zweite Ableitung, die misst die Konvexität. bzw Abweichung von Linearität.

$$f''(\underset{\substack{\uparrow\\(a,b)}}{\xi}) \cdot \int_a^b h_2\,dx$$

$$\left| \int_a^b f\,dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \right| \le \frac{1}{12}\,\|f''\|\,(b-a)^3$$

Mittelwertsatz der Integrale (da $\varphi \le 0$)