21. VL Ana 3 19. 12. 2019

II. 6 Transformationen von Maßen und Integralen unter Abb

II. 6. 1. Allg Transformationsformel: Integration rel zu Bildmaßen

Zur Transformation unter messbaren Abbildungen

Transformationssatz $(X, \mathcal{A}) \xrightarrow[\text{messbar}]{\phi} (Y, \mathcal{B}) \xrightarrow{f}$, $f \circ \phi$, μ Maß auf $\mathcal{A}$.

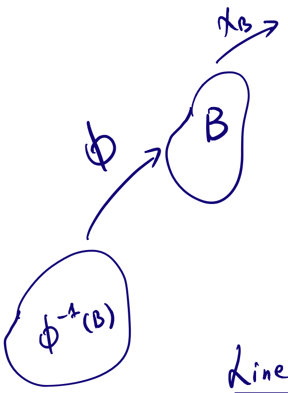
Dann gilt:

(i) Falls $f \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}(Y, \mathcal{B})$, so

$$\int_Y f \, d(\phi_* \mu) = \int_X (f \circ \phi) \, d\mu \qquad (*)$$

(ii) $f \in \mathcal{M}_{\overline{\mathbb{R}}}(Y, \mathcal{B})$ ist $\phi_* \mu$-integrierbar gdw $f \circ \phi$ μ-integrierbar ist. In diesem Fall gilt auch $(*)$

Bew (i) Für χ_B mit $B \in \mathcal{B}$ folgt die Beh aus der Def des Bildmaßes.



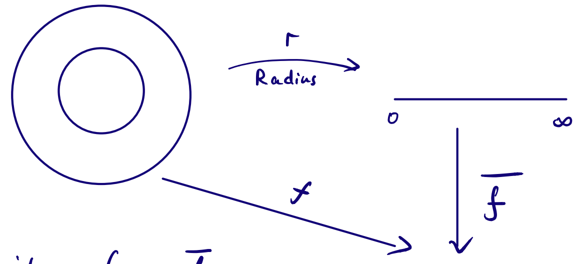
$$\int_Y \chi_B \, d(\phi_* \mu) = (\phi_* \mu)(B) = \mu\left(\phi^{-1}(B)\right) = \int_X \underbrace{\chi_{\phi^{-1}(B)}}_{\chi_B \circ \phi} \, d\mu$$

$\xRightarrow[\text{des Integrals}]{\text{Linearität}}$ $(*)$ für Treppenfkt aus $\mathcal{M}_{[0,\infty]}(Y, \mathcal{B})$

$\xRightarrow[\text{Konvergenz}]{\text{Monotone}}$ $(*)$ auf ganz $\mathcal{M}_{[0,\infty]}(Y, \mathcal{B})$

(ii) Folgt direkt durch Anwendung von (i) auf $f^{\pm}$. $\square$

Bsp Integration rotationssymmetrischer Funktionen.



$f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ rotationssymmetrisch

$:\Longleftrightarrow \quad \exists \; [0,\infty) \xrightarrow{\overline{f}} \mathbb{R}$ mit $f = \overline{f} \circ r.$

Transfsatz, $f, \overline{f}$ messb $\Longrightarrow \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f \, d\lambda^d \overset{\text{Trans}}{=} \int_{[0,\infty)} \overline{f} \, d(r_* \lambda^d) =$

(Existenz beider Integrale äquivalent)

Wir wissen:

$r_* \lambda^d = d \cdot \underbrace{V_d}_{\text{Volumen des d-dim Einheitsballs}} \cdot r^{d-1} \cdot \lambda^1\big|_{[0,\infty)}$

$$= d \cdot V_d \cdot \int_0^\infty \overline{f}(r) \, r^{d-1} \, dr \qquad (\Delta)$$

zB Ebene $(d = 2)$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda^2 = 2\pi \int_0^\infty \overline{f}(r) \, r \, dr$$

Für $\overline{f}(x) = e^{-x^2}$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\|x\|^2} d\lambda^2(x) = 2\pi \int_0^\infty \underbrace{e^{-r^2} r}_{(-\frac{1}{2} e^{-r^2})'} \, dr = \pi \qquad (*)$$

Nutze dies, um mit Fubini das unbestimmte Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$$

zu bestimmen.

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du\right)^2 \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} \underbrace{e^{-x_1^2} e^{-x_2^2}}_{e^{-\|x\|^2}} \underbrace{dx_1\,dx_2}_{=:d\lambda^2(x_1,x_2)} \overset{(*)}{=} \pi$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}}$$

Erlaubt Berechnung des Wertes $\Gamma(\frac{1}{2})$ der Γ-Fkt.

$\operatorname{Re} z > 0$

$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\,dx$

$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$

$$\underline{\Gamma(\tfrac{1}{2})} = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{v}} e^{-v}\,dv \underset{v=u^2}{\overset{\text{Subst}}{=}} \int_0^\infty \frac{1}{u} e^{-u^2} 2u\,du = \sqrt{\pi}.$$

zurück zum Kugelvolumen. V_d: Erhalten Darstellung mit Γ-Fkt.

Integriere $e^{-\|x\|^2}$ über $\mathbb{R}^d$

$$e^{-\|x\|^2} = e^{-x_1^2}\cdot \ldots \cdot e^{-x_d^2}$$

verwende Fubini für d-fache Zerlegung $\mathbb{R}^d = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|x\|^2}\,d\lambda^d(x) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du\right)^d = \pi^{\frac{d}{2}}$$

Anderseits ergibt obige Formel (Δ)

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|x\|^2}\,d\lambda^d(x) = d\cdot V_d \cdot \int_0^\infty e^{-r^2} \underbrace{r^{d-1}\,dr}_{\frac{1}{2} r^{d-2}\, 2r\,dr} \underset{r^2=s}{\overset{\text{Subst}}{=}} d\,V_d \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\int_0^\infty e^{-s} s^{\frac{d}{2}-1}\,ds}_{\Gamma(\frac{d}{2})}$$

$$\Longrightarrow \boxed{V_d = \frac{2\pi^{d/2}}{d\cdot\Gamma(\frac{d}{2})} \underset{\uparrow \text{ Fkt gl}}{=} \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}} \longrightarrow 0 \quad \text{für } d \longrightarrow \infty$$

interpoliert Fakultäten

II.2.6. Transformationen des Lebesgue-Maßes unter Diffeos

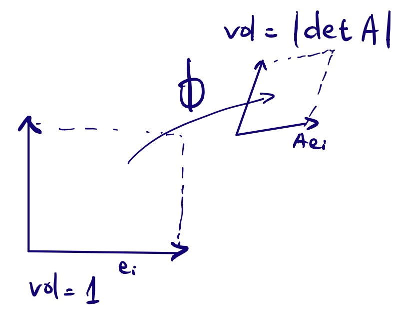
„infinitesimal affin"
dh affin approx. 1. Ord

wir kennen schon: Transformationsverhalten von λ^d unter affinen Transformationen.

$$\phi_{A,v}(x) = Ax + v$$

$A \in GL(d,\mathbb{R})$ $\qquad v \in \mathbb{R}^d$

$$\boxed{(\phi_{A,v})_* \lambda^d = |\det A^{-1}| \cdot \lambda^d}$$



Volumen verzerrt mit Faktor $|\det A|$

⇝ Massendichte im Bild um Faktor $\frac{1}{|\det A|}$ verändert

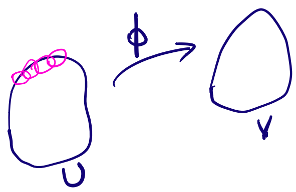
---

Satz Für $U \xrightarrow{\phi} V$ C^1-Diffeo offener Teilmengen $U, V \subset \mathbb{R}^d$ gilt

$$\phi_*(\beta^d|_U) = \underbrace{|\det d\phi^{-1}|}_{C^0 \text{ auf } V} \cdot \beta^d|_V$$

$\beta^d|_U$: kurz für $\beta^d|_{\mathcal{B}(U)}$

C^0 auf V: Dichte!



Bew Bereits bekannt im affinen Fall, dh für konstantes Differential.

Da die Beh lokaler Natur ist, ist der wesentliche Fall der fast konstanten Differentials.

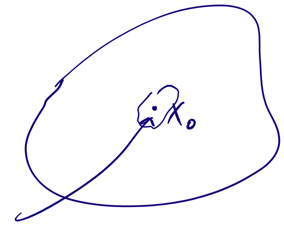
Annahme: $d\phi \approx A$

$$\|A^{-1} d\phi_x - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}\| < \varepsilon \quad \text{mit } A \in GL(d,\mathbb{R}) \text{ und } \varepsilon > 0 \quad \forall x \in U$$

Operatornorm

und $\left| \det (A^{-1} d\phi_x) - 1 \right| < \varepsilon$

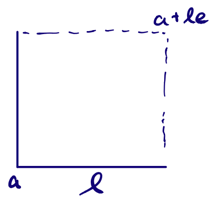
$$\| Bv \| \le \|B\| \cdot \|v\|$$



lokal erfüllt für $A = d\phi_{x_0}$

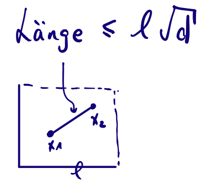
Betrachte Würfel $W = [\,a, a + l\underset{\uparrow}{e}\,)$

$e = e_1 + \ldots + e_d$



Kantenlänge $l > 0$

$$\underbrace{d(\underbrace{A^{-1}\phi}_{\approx id} - id)_x}_{\text{also "kleines" Differential, dh fast konstant}} = A^{-1} d\phi_x - id$$

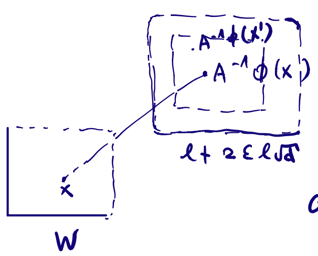


Schrankensatz liefert, dass für $x_1, x_2 \in W$

$$\Big\| \overbrace{A^{-1}\phi(x_2) - A^{-1}\phi(x_1) - (x_2 - x_1)}^{(A^{-1}\phi(x_2) - x_2) - (A^{-1}\phi(x_1) - x_1)} \Big\| \le \varepsilon l \sqrt{d}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{A^{-1}\phi - id \,\Big|_{x_1}^{x_2}}$$

$\rightsquigarrow$ Differential hat Norm $< \varepsilon$

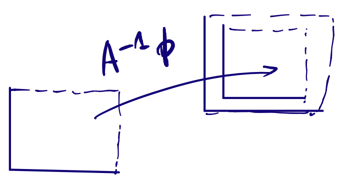


$\Longrightarrow$ $(A^{-1}\phi)(W)$ enthalten in offener Tubelumgebung vom Radius $\varepsilon l \sqrt{d}$ eines Würfels der Kantenlänge l,

Translat von W

also enthalten in Würfel der Kantenlänge $l(1 + 2\varepsilon\sqrt{d})$.

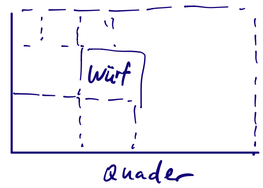
$\Longrightarrow$



$$\beta^d(\underbrace{\phi}_{AA^{-1}\phi}(W)) = |\det A| \cdot \beta^d(A^{-1}\phi(W))$$

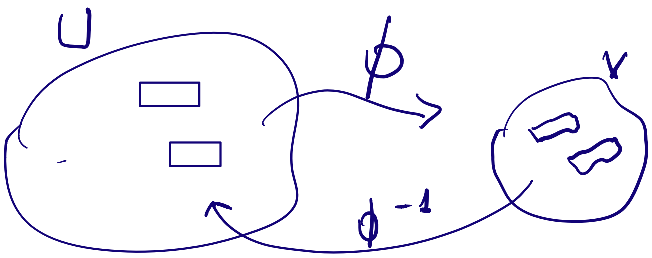
$\leq (1+2\varepsilon\sqrt{d})^d \cdot |\det A| \cdot \beta^d(W)$

Jeder achsenparallele Quader $[a,b)$ lässt sich zerlegen als abzählbare disjunkte Vereinigung achsenparalleler Würfel, ebenso jede Figur in $\mathcal{F}^d$.



$$\Longrightarrow \underbrace{\beta^d(\phi(F))}_{\left(\phi_*^{-1}(\beta^d|_V)\right)(F)} \leq (1+2\varepsilon\sqrt{d})^d \cdot |\det A| \, \beta^d(F) \qquad \forall F \in \mathcal{F}^d(U)$$

Figuren in U.



also $\underbrace{\phi_*^{-1}(\beta^d|_V)}_{\text{Maß auf } \mathcal{B}(U)}\Big|_{\mathcal{F}^d(U)} \leq (1+2\varepsilon\sqrt{d})^d \cdot |\det A| \cdot \beta^d\Big|_{\mathcal{F}^d(U)}$

Vergleich von Prämaßen auf $\mathcal{F}^d(U)$

Dieselbe Ungleichung folgt für die assoz äußeren Maße auf $\mathcal{P}(U)$, also für ihre Einschränkungen auf die von $\mathcal{F}^d(U)$ erz Borel-σ-Alg $\mathcal{B}(U)$, dh die eindeutigen, die beiden Prämaßen fortsetzenden Maße $\phi_*^{-1}(\beta^d|_V)$ und $\beta^d|_U$.

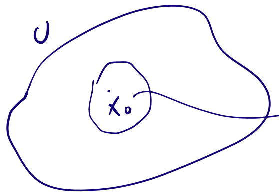
$$\Longrightarrow \phi_*^{-1}(\beta^d|_V) \leq (1+2\varepsilon\sqrt{d})^d \cdot |\det A| \cdot \beta^d|_U$$

$$\left|\det(A^{-1} d\phi_x) - 1\right| < \varepsilon$$

$$1-\varepsilon < \frac{\det d\phi_x}{\det A} < 1+\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \phi_*^{-1}(\beta^d|_V) \le \underbrace{\frac{(1+2\varepsilon\sqrt{d})^d}{1-\varepsilon}}_{\longrightarrow 1 \text{ für } \varepsilon \downarrow 0} \cdot |\det d\phi| \cdot \beta^d|_U \qquad (*)$$

In dieser Form überträgt sich die Abschätzung auf beliebige C^1-Diffeos, dh $(*)$ gilt in hinreichend kleiner Umg



wähle $A = d\phi_{x_0}$

jedes Punktes $x_0 \in U$.

lokale Natur $\Longrightarrow$ der Abschä. $(*)$ gilt auf U global

überträgt sich auf Vereinigungen von Umgebungen

$$\xrightarrow{\varepsilon \to 0} \qquad \phi_*^{-1}(\beta^d|_V) \le |\det d\phi|\, \beta^d|_U$$

analog für ϕ^{-1}:

$$\phi_*(\beta^d|_U) \le |\det d\phi^{-1}| \cdot \beta^d|_V$$

Zusammen folgt

$$\phi_*(\beta^d|_U) \le |\det d\phi^{-1}| \cdot \underbrace{\beta^d|_V}_{\phi_* \phi_*^{-1} \beta|_V} \le |\det d\phi^{-1}| \cdot \phi_*\left(|\det d\phi| \cdot \beta^d|_U\right)$$

$$= \underbrace{|\det d\phi^{-1}| \cdot \left(|\det d\phi| \circ \phi^{-1}\right)}_{=1} \cdot \phi_*(\beta^d|_U)$$

jetzt Gleichheit

$\Longrightarrow$ Gleichheit. Insb. behauptete Gleichung $\square$

Kor $\mathcal{C}^1$-Diffeos offner Teilm des $\mathbb{R}^d$ erhalten Borel-Nullmengen und sind daher Lebesgue-messbar. Es gilt allgemeiner

$$\phi_*(\lambda^d|_U) = |\det \phi^{-1}| \cdot \lambda^d|_V$$