1. VL Ana 3 14. 10. 2019

Analysis
- Maßtheorie
  - Volumenmessung in euk. Raum — Konstruktion des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^d$ + seine Charakterisierung durch Bewegungsinvarianz
  - W'theorie
- Integration — Konstr des Lebesgue-Integrals. allg auf Maßräumen

Geometrie { Mannigfaltigkeiten + Differentialformen + Integration

Satz von Stokes — Verallg „Hauptsatz der Diff + Interechnung"

Elstrodt	Maß- u. Integrationstheorie
Walter	Ana 2
Bauer	W theorie + Grundzüge Maßtheorie

Zentralübung Mi 12-14 C123
Beginn 16.10, flexibel: Ergänzungen + übungen

Tutorien ab 2. Woche

Mo	14-16, 16-18	B041
Di	16-18	B132
Do	12-14	B133
	16-18	B046
Fr	12-14	B041

I. Maßtheorie

I.1 Maßproblem und Paradoxien

Theorie des Volumens.

motivierendes Bsp
- Volumina von Teilmengen des euk Raums
- Wahrscheinlichkeiten (= „Volumina von Ereignissen")

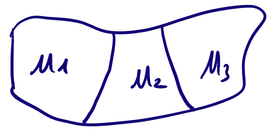
Konzentrieren uns auf $\mathbb{R}^d$ (Rest des Abschnitts)

wollen leistungsfähigen Vol Begriff
$\}$ flexibel
Volumina von mögl vielen Teilmengen messen

erster „naiver" Ansatz: verlangen Vol. messung für <u>alle</u> Teilm

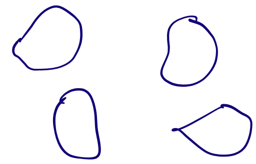
$$\underset{\text{Potenzmenge}}{\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow{\text{vol}} [0, \infty]$$

grundlegende Forderung: Additivität von Volumina bei Zerlegungen

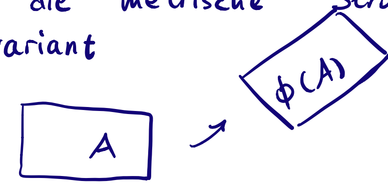


(i) (endliche) Additivität: $M_1, \ldots, M_n \subset \mathbb{R}^d$ paarweise disjunkt

$\Longrightarrow \text{vol}(M_1 \cup \cdots \cup M_n) = \text{vol}(M_1) + \ldots + \text{vol}(M_n)$

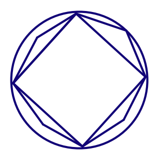


Volumina als geom. Größen sollte durch die metrische Struktur (Längenmessung) bestimmt sein, also auch invariant unter Symmetrien der metrischen Struktur:



(ii) Bewegungsinvarianz: Für jede Bewegung $\mathbb{R}^d \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^d$ und jede Teilm $A \subset \mathbb{R}^d$ gilt
$\text{vol}(\phi(A)) = \text{vol}(A)$

(iii) Normierung: $\text{vol}([0,1]^d) = 1$



Archim

verstärke Forderung (i) (Borel, Lebesgue)

(i'): σ-Additivität: Für Folgen $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkte Teilmengen $M_n \subset \mathbb{R}^d$ gilt:

σ: abzählbar, ∞ oft

$$\text{vol}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n\Big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \underset{\underset{[0,\infty]}{\cap}}{\text{vol}(M_n)}$$

(Umordnungssatz)

$\rightsquigarrow$ flexibilisiert Volmessung entscheind (können komplizierte Figuren durch einfache Fig approximieren)

Cantors Mengenlehre $\rightsquigarrow$ Existenz von „naiver" Volumenfunktion wurde hinterfragt

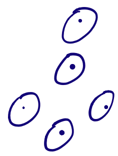
Maßproblem (naiv) Existiert eine Volumenfunktion $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\text{vol}} [0,\infty]$ mit (i') + (ii) + (iii)

Satz (Vitali 1905): Nein

Bew: Auswahlaxiom $\rightsquigarrow$ Existenz „Verrückter" Teilm. des $\mathbb{R}^d$

geom. unvollstellbar

gegeben Familie disjunkter nichtleerer Mengen



$\Downarrow$

$\exists$ Menge, die von jeder von ihnen genau ein Element enthält (und keine weiteren)

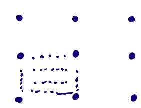
hier: $\exists\, M \subset \mathbb{R}^d$ Vertretersystem für Nebenklassen von $\mathbb{Q}^d$ in $\mathbb{R}^d$

Untergruppe

$\mathbb{R}^d / \mathbb{Q}^d$ Menge von Nebenklassen (Quot abelscher Gruppen)

dh $\forall a \in \mathbb{R}^d$ besteht $a + \mathbb{Q}^d = \{a + q \mid q \in \mathbb{Q}^d\}$

von a repräs Nebenklasse von $\mathbb{Q}^d$ in $\mathbb{R}^d$



die Nebenklassen $a + \mathbb{Q}^d$ für $a \in \mathbb{R}^d$ partitionieren $\mathbb{R}^d$ (überabz viele)

dh zerlegen disjunkt

$\forall a, b \in \mathbb{R}^d$ besteht Dichotomie

- entweder $a + \mathbb{Q}^d = b + \mathbb{Q}^d$ (nämlich, wenn $a - b \in \mathbb{Q}^d$)
- oder $(a + \mathbb{Q}^d) \cap (b + \mathbb{Q}^d) = \emptyset$ (wenn $\ldots \notin \mathbb{Q}^d$)

dh $\forall a \in \mathbb{R}^d$ besteht $M \cap (a + \mathbb{Q}^d)$ aus genau einem Element

$\Longrightarrow$ die Translate $\underline{q + M}$ für $q \in \mathbb{Q}^d$ partitionieren $\mathbb{R}^d$

abzählbar viele

$x \in q + M$

$x - q \in M$

$\cap$

$x + \mathbb{Q}^d$

σ-Additivität von vol $\Rightarrow$ $\underbrace{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^d)}_{>0} = \sum_{q \in \mathbb{Q}^d} \mathrm{vol}(q + M)$

|| Bew Inv

$\mathrm{vol}(M)$

$\Rightarrow \mathrm{vol}(M) > 0$

Jetzt wähle M spezieller, nämlich beschränkt,

zB Für $O \subset \mathbb{R}^d$ offen können wir M so wählen, dass $M \subset O$.

weil $a + \mathbb{Q}^d$ dicht in $\mathbb{R}^d$, also $(a + \mathbb{Q}^d) \cap O \neq \emptyset$.

zB $M \in (0, \frac{1}{2})^d$

$\Longrightarrow$ $[0,1]^d$ enthält abzählbar ∞ viele

Translate $q + M$, nämlich für alle $q \in \mathbb{Q}^d \cap (0, \frac{1}{2})^d$

paarw. disjunkt

$$\underset{\mathrm{vol} < \infty}{V} := \bigcup_{q \in (0,\frac{1}{2})^d \cap \mathbb{Q}^d} \underset{\text{paarw. disjunkt}}{(q + M)} \subset [0,1]^d$$

weil $\text{vol}(V) + \underbrace{\text{vol}([0,1]^d - V)}_{\geq 0} = \underbrace{\text{vol}([0,1]^d)}_{=1}$

$\Longrightarrow \text{vol}(V) \leq 1 < \infty$

$$\Longrightarrow \underbrace{\text{vol}(V)}_{<\infty} = \sum_{q \in (0,\frac{1}{2})^d \cap \mathbb{Q}^d} \underbrace{\text{vol}(q+M)}_{=\text{vol}(M)}$$

$$\Rightarrow \quad \text{vol}(M) = 0 \quad \lightning$$

noch dramatischer: In Dim ≥ 3 kann man je zwei Teilmengen (unter sehr allg Annahmen) aus demselben (abzählbaren, oft sogar endlichen) „Bausatz" zusammensetzen.

Satz (Banach-Tarski, 1924) Seien $A, B \subset \mathbb{R}^d$ Teilmengen mit nichtleerem Inneren.

(i) Sei $d \geq 3$ und seien A, B beschränkt. Dann existieren endlich viele Teilmengen $M_k \subset \mathbb{R}^d$ und Bewegungen ϕ_k des $\mathbb{R}^d$, s.d. disjunkte Zerlegungen $A = \bigsqcup_k M_k$

$B = \bigsqcup_k \phi(M_k)$ bestehen. (*)

(ii) Jetzt $d \geq 1$ bel. und A, B nicht notw beschränkt). Dann ex abz viele Teilm $M_k \subset \mathbb{R}^d$ und Bewegungen ϕ_k, s.d. (*)

(Bew verwendet Gruppentheorie, Struktur von $O(d)$) nicht mehr auflösbar für $d \geq 3$

Maßproblem (naiv) : $\exists$? vol mit (i')+(ii)+(iii) BT $\Rightarrow$ nein

Inhaltsproblem (naiv): ... ... (i)+(ii)+(iii) BT $\Rightarrow$ nein in $d \geq 3$ Hausdorff 1914
(lösbar in $d \leq 2$, aber nicht eindeutig)
Banach 1923

$\rightsquigarrow$ Maßproblem (post-paradox):

Man definiere eine Volfkt $\mathcal{F} \xrightarrow{\text{vol}} [0, \infty]$ mit (i'+ ii + iii) auf einer mög großen + flexiblen Familie $\mathcal{F} \subset P(\mathbb{R}^d)$, die die geometrisch wichtigen Teilmengen umfasst und abgeschlossen ist unter grundlegenden mengentheor. Operationen

$\cup, \cap, \setminus, {}^c$