13. VL 27.11.2015

V : K-VR. $U \subseteq V$ linearer Unterraum, insb ist $U \leq V$ eine abel. Gruppe bzgl $+$

und nach 2.6 definiert $a \sim a' \Leftrightarrow a - a' \in U$

eine Äquivalenzrelation und V/U sind die äquivalenzklassen,

nämlich $V/U = \{ a + U \mid a \in V \}$

Abbildung (surj) $q : V \to V/U \quad a \mapsto a + U$

Idee: Definiere eine K-vektorraumstruktur auf V/U mittels

$$(a+U) \oplus (a'+U) = (a+a') + U$$

$$\alpha \odot (a+U) = \alpha \cdot a + U$$

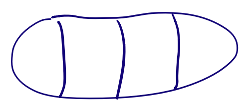
5.7 Def Sei V ein K-VR und $U \subseteq V$ ein linearer Unterraum.

Für $a \in V$ sei $a + U = \{ a + u \mid u \in U \}$. Der Quotienten

oder Faktorraum von V bzgl U ist die Menge

$$V/U = \{ a + U \mid a \in V \}$$

- Es ist $V = \bigcup_{a \in V} (a+U)$



5.8 Lemma V K-VR. $U \subseteq V$ lin Unterraum. Dann

ist der Faktorraum V/U mittels

$$(a_1 + U) + (a_2 + U) = (a_1 + a_2) + U$$

und $\alpha (a+U) = \alpha a + U$

ein K-VR. Die Abbildung $q : V \to V/R \quad a \mapsto a + U$

ist ein Epimorphismus.

Bew: z.z: die Operationen auf V/U sind wohldef.

Ist $\underbrace{a_1 + U = a_1' + U}_{a_1 - a_1' = u \in U}$ und $\underbrace{a_2 + U = a_2' + U}_{a_2 - a_2' = u' \in U}$, so

$a_1 + u = a_1' + u' \quad u' - u \in U$

ist $a_1 - a_1' = u \in U$ und $a_2 - a_2' = u' \in U$.

(zz $a_1 + a_2 + U = a_1' + a_2' + U$)

Es folgt: $(a_1 + a_2) + U - [(a_1' + a_2') + U]$

$$= (u + U) - (u' + U)$$

$$= (u - u') + U = U$$

Ähnlich für die Skalarmultiplikation.

Weiter ist V/U bzgl dieser $+$ und $\cdot$ ein K-VR, da diese Operationen von $+$ und $\cdot$ auf V induziert wird.

Zum Beispiel ist

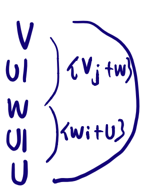
$$\alpha\big((a_1+U) + (a_2+U)\big) = \alpha(a_1+U) + \alpha(a_2+U)$$

da $\alpha(a_1 + a_2) = \alpha a_1 + \alpha a_2$ in V gilt.

Aus dem gleichen Grund ist $\varphi : V \to V/U$ linear.

und damit ein Epimorphismus. $\square$

5.9 Lemma Sei V ein K-Vektorraum und $U \leq W \leq V$ lineare Unterräume.



(a) Sei $\{w_i + U \mid i \in I\}$ eine Basis von W/U und $\{v_j + W \mid j \in J\}$ eine Basis von V/W.
Dann ist $\{w_i + U, v_j + U \mid i \in I, j \in J\}$ eine Basis von V/U.

(b) Ist $\dim V/U = n < \infty$, so ist

$$\dim V/U = \dim V = \dim U$$

(c) Ist $\dim V = n < \infty$, so ist

$$\dim V/W = \dim V - \dim W$$

(a) Ist $a \in V$, so ist $\underbrace{\overset{\in V}{a} + W}_{\in V/W} = \sum_{j \in J} \alpha_j (v_j + W) = \sum \alpha_j v_j + W$
$\alpha_j \in K$

und $a = \sum_{j\in J} \alpha_j v_j \in W$

sodass $\left(a - \sum_j \alpha_j v_j\right) + U = \sum_{i\in I} \beta_i (w_i + U)$

$$\Longrightarrow \quad a + U = \sum_j \alpha_j (v_j + U) + \sum_i \beta_i (w_i + U)$$

zz $\{v_j + U,\ w_i + U \mid i \in I,\ j \in J\}$ ist linear unabhängig.

Angenommen in V/U ist

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (v_j + U) + \sum_{i=1}^{m} \beta_i (w_i + U) = \overset{\text{in } V/U}{0} = U$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \beta_i w_i}_{\in W} \in U$$

Da $W \subseteq V$ ein linearer Unterraum ist und $w_i \in W$

dann auch $\sum_{i=1}^{m} \beta_i w_i \in W$ und in $\underline{V/W}$ gilt halte ein $v \in V$ fest

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (v_j + W) = 0 = W.$$

Da die $\{v_j + W \mid j \in J\}$ eine Basis von V/W bilden ist $\alpha_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$. Wegen $w_i + U \in W/U$ ergibt sich in W/U die Identität

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i (w_i + U) = 0$$

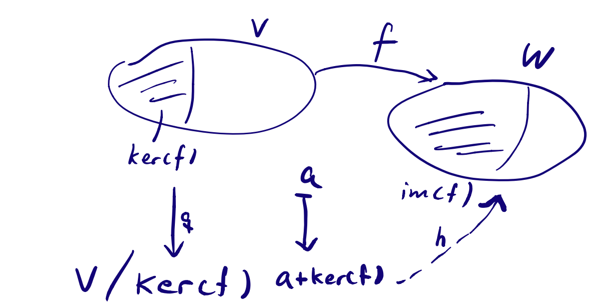
und da die $\{w_i + U \mid i \in I\}$ eine Basis von W/U sind $\beta_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$.

(b) folgt aus (a)

(c) Spezialfall $U = \{0\}$ von (b). □

5.10 Theorem (Homomorphiesatz)

Seien V, W K-VR und $f: V \to W$ eine lin. Abb. Dann gilt



Falls h existiert, dann

(a) Es gibt einen <u>Epimorphismus</u>

$$q: V \to V/\ker(f)$$

und einen <u>Monomorphismus</u>

$$h: V/\ker(f) \to W$$

sodass

$f = h \circ q$ und

$\operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(h)$ ist, d.h.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"', "\text{Epimor}"] & W \\ V/\ker(f) \arrow[ur, dashed, "h", "\text{Monomor}"'] & \end{tikzcd}$$

$$h(a + \ker(f)) = f(a)$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & f(a) \\ a + \ker(f) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$V/\ker(f) \xrightarrow{h} \operatorname{im}(f)$$

(b) Ist $\dim_K V = n < \infty$, so gilt $\dim_K V = \dim_K \ker(f) + \dim_K \operatorname{im}(f)$

Beweis: Die Abb $q: V \to V/\ker(f)$ ist der Epimorphismus $a \mapsto a + \ker(f)$. Das einzige mögliche h mit $f = h \circ q$ ist die Abbildung

$$V/\ker(f) \xrightarrow{h} W$$
$$a + \ker(f) \mapsto f(a).$$

zu zeigen: h ist wohldet (unab. von Auswahl der Reprä)

$$a + \ker(f) = \tilde{a} + \ker(f)$$
$$\downarrow h$$
$$f(a) \overset{?}{=} f(\tilde{a})$$

sei $a + \ker(f) = \tilde{a} + \ker(f)$, dh

$$a - \tilde{a} \in \ker(f).$$

Es folgt

$$h(a + \ker(f)) - h(\tilde{a} + \ker(f))$$
$$\overset{\text{def}}{=} f(a) - f(\tilde{a}) \overset{f\,\text{lin}}{=} f(\underbrace{a - \tilde{a}}_{\in \ker(f)}) = 0$$

Ähnlich für die skalarmultiplikation.

Weiter ist h linear, da f linear ist.

zB $\quad h\big((a+\ker(f)) + (\tilde{a}+\ker(f))\big)$

$$= h\big((a+\tilde{a}) + \ker(f)\big)$$

$$= f(a+\tilde{a}) = f(a) + f(\tilde{a}) = h\big(a+\ker(f)\big) + h\big(\tilde{a}+\ker(f)\big).$$

Genauso ist $h(\alpha(a+\ker(f))) = \alpha\, h(a+\ker(f))$.

Nach Konstruktion ist $f = h \circ q$ und $\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(h)$.
(da q surj!)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & B \\ C \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

$f = h \circ q$

$f(a) = (h \circ q)(a) = h(q(a))$

$\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{im}(h)$

$\supseteq$ wenn q surjektiv ist.

zz h ist Monomorphismus.

Sei $a + \ker(f) \in \ker(h)$ zz $a + \ker(f) = 0$

Dann ist $0 = \underbrace{h\big(a+\ker(f)\big)}_{f(a)} \underset{\substack{\text{Def} \\ \text{von } h}}{=} f(a)$

Daraus folgt $a + \ker(f) = \ker(f) \Rightarrow h$ Monomorphismus.

(b) zz $\dim V = \dim \ker(f) + \dim \mathrm{im}(f)$

Nach (a) ist $V/\ker(f) \cong \mathrm{im}(f)$ und

$\dim(V/\ker(f)) = \dim \mathrm{im}(f)$. Nach 5.9 folgt

$\dim V - \dim \mathrm{im}(f) = \dim \ker(f)$ $\square$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Monomorphismus, isomorp

$f: \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ inj Gruppenhomomorphismus