8. ZÜ Ana 3 4. 12. 2019

(Multi) Lineare Algebra

Vektorräume $V, W, \dots$ über Körper K. (irgendwann: endlich-dim)

$V \xrightarrow[\text{lin}]{A} W$ $\quad$ $\mathrm{Hom}(V,W)$ Raum aller lin Abb $V \to W$

$\mathrm{Abb}(V,W) \supset$
W^V $\quad$ ist ein K-VR

$A, B \in \mathrm{Hom}(V,W) \implies A+B \in \mathrm{Hom}(V,W)$
$\lambda A \in \mathrm{Hom}(V,W) \quad (\lambda \in K)$

A ist festlegt durch Werte auf einer Basis (e_i) von V.

$\dim \mathrm{Hom}(V,W) = \dim V \cdot \dim W$ (falls V, W endl-dim)

$\boxed{\text{Tensorprodukt}}$

Determinante

$$V_1 \times \dots \times V_k \xrightarrow[K\text{- multi lin}]{M} W$$

dh linear in jeder Var

$\mathrm{Multi}(V_1, \dots, V_k ; W)$ ist wieder ein K-VR.
$(e^{(1)}_{i_1})$ $\quad$ $(e^{(k)}_{i_k})$

$M \in \mathrm{Multi}(V_1, \dots, V_k ; W)$ festgelegt durch Werte
$M(e^{(1)}_{i_1}, \dots, e^{(k)}_{i_k})$

$v_j \in V_j$ $\quad$ $M(v_1, \dots,) = \sum_{i_1, \dots, i_k} \prod_j a_{j i_j} M(e^{(1)}_{i_1}, \dots)$
$\| $
$\sum_{i_j} a_{j i_j} e^{(j)}_{i_j}$

Multilinearform

$W = K$.

$V^n \qquad V \times \dots \times V \xrightarrow{\text{alte.} \quad n\text{-multilin}} K$

Bsp $\quad$ Determinante $\quad$ alternierend (schiefsymm.) $\quad$ multilinear

Hessesche, Skalarprodukte $\qquad$ symm bilinear

Kreuzprodukt $\qquad$ alt. bilinear

$$\begin{aligned} V^* \times V &\xrightarrow{\text{Eval}} K \\ (\lambda, v) &\longmapsto \lambda(v) \end{aligned}$$

<u>Produkte</u> sind bilin Abb

Endomorphismen $\qquad \underset{\text{Algebra}}{A} \times A \xrightarrow{\text{multiplikation}} A$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(U,V) \times \mathrm{Hom}(V,W) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(U,W) \\ (A,B) &\longmapsto BA \end{aligned}$$

$$U \xrightarrow{A} V \xrightarrow{B} W, \qquad U \xrightarrow{BA} W$$

<u>symm</u> k-Multilinearform : $\qquad$ Sei V endlich-dim.

$\underbrace{V \times \dots V}_{k} \xrightarrow{\mu} K \qquad \mathrm{Mult}_k^{symm}(V)$ Vektorraum

(e_i) Basis von V.

μ symmetrisch $\Longleftrightarrow \boxed{\mu(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \mu(v_1, \dots, v_k) \quad \forall \sigma \in S_k}$

μ festgelegt durch $\mu(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$,

invariant unter Permutationen der i_j

schon festgelegt durch Werte

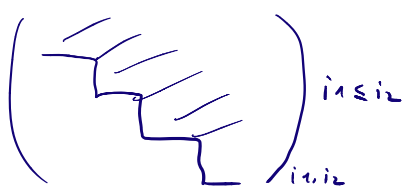
$\mu(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ für $1 \le i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k \le \dim V$

$\updownarrow$

$1 \le i_1 < i_2 + 1 < i_3 + 2 < \dots < i_k + (k-1) \le \dim V + (k-1)$

diese sind <u>frei</u> wählbar.

$\Longrightarrow \dim \mathrm{Mult}_k^{symm}(V) = \binom{\dim V + k - 1}{k}$



$\underbrace{V \times \dots V}_{k} \xrightarrow{\alpha} K \qquad \mathrm{Alt}_k(V) = \mathrm{Mult}_k^{\mathrm{alt}}(V) \qquad \dim V < \infty$

$\mathrm{char}\, K \neq 2$

μ alternierend $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\mu(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \alpha(v_1, \dots) \quad \forall \sigma \in S_k}$

Existenz von alt. multilin. Abbildungen basiert auf Existenz des Signums von Permutationen

$A_n \longrightarrow S_n \xrightarrow[\text{Homom}]{\mathrm{sgn}} \{\pm 1\}$ multiplikativ

Kern

alternierende Gruppe

Transpos $\longrightarrow -1$

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i-j}$$

μ festgelegt durch $\mu(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$,

alternierend unter Perm der i_j

$\mu(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ für $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq \dim V$,

diese sind frei wählbar

signum

$$\Longrightarrow \dim \mathrm{Mult}_k^{\mathrm{alt}}(V) = \binom{\dim V}{k}$$

$\dim V = n \qquad \dim \underset{\alpha \neq 0}{\mathrm{Alt}_n V} = 1$, dh es existieren alternierende n-Multilinearformen und sie sind eindeutig bis auf skalare Vielfache.

(v_i) Basis von $V \Longleftrightarrow \alpha(v_1, \dots) \neq 0$

denn dieser Wert legt α fest

(e_i) Basis von $V \qquad v_j = \sum_{i=1} a_{ij} e_i$

$$\alpha(v_1, \dots) = \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{n} \left(\prod_j a_{i_j j}\right) \cdot \alpha(e_{i_1}, \dots)$$

$$\overset{\alpha \text{ alt}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \underbrace{\left(\prod_j a_{\sigma(j) \underbrace{j}_{\sigma^{-1}(\sigma(j))}}\right)}_{\prod_i a_{i\sigma^{-1}(i)}} \cdot \underbrace{\alpha(e_{\sigma(1)}, \dots)}_{\underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma)}_{\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})} \cdot \alpha(e_1, \dots)}$$

$$= \underbrace{\left(\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_i a_{i\sigma(i)}\right)}_{\text{Det der Matrix } (a_{ij})} \cdot \alpha(e_1, \dots) \quad (\text{Leibniz})$$

$$\alpha(v_1, \dots) = \det(a_{ij}) \cdot \alpha(e_1, \dots)$$

charakterisierende Eigenschaft der Det einer Matrix:

- alt, multilin in Spalten (Zeilen) — klar aus Leibniz formel
- Normierung $\det E = 1$
- $\det a_{ij} \neq 0 \iff$ Zeilen lin unabh $\iff$ Spalten lin unabh

det ist alternierend:

$\tau \in S_n$

$$\det\left(a_{i\tau(j)}\right) = \sum_\sigma \underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma)}_{\underbrace{\operatorname{sgn}(\tau^{-1})}_{\operatorname{sgn}(\tau)} \operatorname{sgn}(\tau\sigma)} \cdot \prod_i a_{i \underbrace{\tau(\sigma(i))}_{\tau\sigma(i)}}$$

$$= \operatorname{sgn}(\tau) \cdot \underbrace{\sum_{\tau\sigma} \operatorname{sgn}(\tau\sigma) \cdot \prod a_{i\tau\sigma(i)}}_{\det(a_{ij})}$$

---

kontravar.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"', "\text{lin}"] \arrow[dr, "A^*\lambda = \lambda \circ A"'] & W \arrow[d, "\lambda"] \\ & K \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccl} W^* & \xrightarrow{A^*} & V^* \\ \lambda & \longmapsto & A^*\lambda = \lambda \circ A \\ & & \qquad\quad \shortparallel \\ & & \qquad\quad \lambda(A\,\cdot) \end{array}$$

zurückgezogene Linform

$$(A^*\lambda)(v) = \lambda(Av)$$

$$\rightsquigarrow \quad Mult_K(W) \xrightarrow{A^*} Mult_K(V)$$

$$\mu \longmapsto A^*\mu = \mu(A\cdot, \ldots, A\cdot$$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "B"] \arrow[rr, bend left, "AB"] & \bullet \arrow[r, "A"] & \bullet \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l, "B^*"'] & \bullet \arrow[l, "A^*"'] \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$$

$$\boxed{(AB)^* = B^* A^*} \quad (*)$$

speziell für alt Multilinearformen auf V im max Grad $n = \dim V$

$A \in \operatorname{End} V$

$V \xrightarrow{A} V$

$$\rightsquigarrow \quad Alt_n(V) \xrightarrow{A^*} Alt_n(V)$$

$Alt_n(V)$: 1-dim

$$A^* = \boxed{D(A)} \cdot id_{Alt_n(V)}$$

$D(A) \in K$ vielfache

$D(A)$: $\det A$ Determinante des Endomorphismus A

Beziehung zur Det einer Matrix:

$$A^*\alpha = (\det A) \cdot \alpha$$

$\downarrow$ setze $v_1, \ldots, v_n$ Basis ein

$$\alpha(Av_1, \ldots) = \underbrace{(\det A)}_{\text{also } = \det(a_{ij})} \cdot \alpha(v_1, \ldots)$$

wobei (a_{ij}) die Matrix von A relativ (v_i) ist

Insbesondere: $\det(a_{ij})$ unabhängig von gewählter Basis!

Multiplikationssatz

$A^* = \det(A) \cdot id_{Alt_n(V)}$

$$\underbrace{(AB)^*} = \underbrace{B^*}\,\underbrace{A^*}$$

$$\det(AB)\cdot \mathrm{id} \qquad \underbrace{\det B \cdot \mathrm{id} \; (\det A)\cdot \mathrm{id}_{\mathrm{Alt}_k(V)}}_{(\det B)\cdot(\det A)\cdot \mathrm{id}}$$

$$\Longrightarrow \quad \det AB = \det A \cdot \det B.$$