Como primer paso, estudio el problema de Riemann unidimensional para un borde con normal en la dirección $\nabla\xi$. Las ecuaciones que definen el problema de Riemann homogéneo en este borde, en coordenadas curvilíneas y siguiendo la notación de la tesis de Maricarmen son [1]

$$\frac{\partial}{\partial t}(2C) + U\frac{\partial}{\partial \xi}(2C) + C\xi_x\frac{\partial u}{\partial \xi} + C\xi_x\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u) + C\xi_x\frac{\partial}{\partial \xi}(2C) + U\frac{\partial u}{\partial \xi} + 0 = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(v) + C\xi_y\frac{\partial}{\partial \xi}(2C) + 0 + U\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0 \tag{3}$$

Sumando $||\nabla\xi|| \times (1) + \xi_x \times (2) + \xi_y \times (3)$, y usando que $U = u\xi_x + v\xi_y$, y $||.||$ la norma euclidiana de $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial}{\partial t}(U + 2C||\nabla\xi||) + (U||\nabla\xi|| + C\xi_x^2 + C\xi_y^2)\frac{\partial}{\partial \xi}(2C) + (C\xi_x||\nabla\xi|| + U\xi_x)\frac{\partial u}{\partial \xi} + (C\xi_y||\nabla\xi|| + U\xi_y)\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(U + 2C||\nabla\xi||) + (U + C||\nabla\xi||)\frac{\partial}{\partial \xi}(||\nabla\xi||2C + u\xi_x + v\xi_y) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(U + 2C||\nabla\xi||) + (U + C||\nabla\xi||)\frac{\partial}{\partial \xi}(U + 2C||\nabla\xi||) = 0 \tag{4}$$

Análogamente, sumando $-||\nabla\xi|| \times (1) + \xi_x \times (2) + \xi_y \times (3)$

$$\frac{\partial}{\partial t}(U - 2C||\nabla\xi||) + (U - C||\nabla\xi||)\frac{\partial}{\partial \xi}(U - 2C||\nabla\xi||) = 0 \tag{5}$$

Y sumando $\xi_y \times (2) - \xi_x(3)$ se deduce que

$$\frac{\partial}{\partial t}(u\xi_y - v\xi_x) + U\frac{\partial}{\partial \xi}(u\xi_y - v\xi_x) = 0 \tag{6}$$

Notar que el vector U es la proyección de (u, v) en la dirección $\nabla\xi$ amplificada por $||\nabla\xi||$, y que si definimos $U_{||} = u\xi_y - v\xi_x$ entonces se puede ver que el vector $(\xi_y, -\xi_x)$ es un vector ortogonal a $\nabla\xi$ y que $U_{||}$ es entonces la proyección ortogonal de (u, v) sobre $\nabla\xi$, y por lo tanto es la componente tangencial al borde, cuya normal es justamente $\nabla\xi$ [2].

Los invariantes de Riemann son entonces

$$R^0 = u\xi_y - v\xi_x$$

$$R^+ = U + 2C||\nabla\xi||$$

$$R^- = U - 2C||\nabla\xi||$$

y las trayectorias características asociadas

$$\gamma^0 = \{\xi : \frac{d}{dt}\xi = U\}$$

$$\gamma^+ = \{\xi : \frac{d}{dt}\xi = U + C||\nabla\xi||\}$$

$$\gamma^- = \{\xi : \frac{d}{dt}\xi = U - C||\nabla\xi||\}$$

[1] también se puede escribir la deducción de este sistema a partir de las SWE originales
[2] esto habría que hacerlo explícito también, de que $\nabla\xi$ es el vector normal al borde, no?