

Como primer paso, estudio el problema de Riemann unidimensional para un borde con normal en la dirección $\nabla\xi$. Las ecuaciones que definen el problema de Riemann homogéneo en este borde, en coordenadas curvilíneas y siguiendo la notación de la tesis de Maricarmen son ¹

$$\frac{\partial}{\partial t}(2C) + U \frac{\partial}{\partial \xi}(2C) + C\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + C\xi_x \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u) + C\xi_x \frac{\partial}{\partial \xi}(2C) + U \frac{\partial u}{\partial \xi} + 0 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(v) + C\xi_y \frac{\partial}{\partial \xi}(2C) + 0 + U \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0 \quad (3)$$

Sumando $\|\nabla\xi\| \times (1) + \xi_x \times (2) + \xi_y \times (3)$, y usando que $U = u\xi_x + v\xi_y$, y $\|\cdot\|$ la norma euclidiana de \mathbb{R}^2

$$\frac{\partial}{\partial t}(U + 2C\|\nabla\xi\|) + (U\|\nabla\xi\| + C\xi_x^2 + C\xi_y^2) \frac{\partial}{\partial \xi}(2C) + (C\xi_x\|\nabla\xi\| + U\xi_x) \frac{\partial u}{\partial \xi} + (C\xi_y\|\nabla\xi\| + U\xi_y) \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(U + 2C\|\nabla\xi\|) + (U + C\|\nabla\xi\|) \frac{\partial}{\partial \xi}(\|\nabla\xi\|2C + u\xi_x + v\xi_y) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(U + 2C\|\nabla\xi\|) + (U + C\|\nabla\xi\|) \frac{\partial}{\partial \xi}(U + 2C\|\nabla\xi\|) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Análogamente, sumando $-\|\nabla\xi\| \times (1) + \xi_x \times (2) + \xi_y \times (3)$

$$\frac{\partial}{\partial t}(U - 2C\|\nabla\xi\|) + (U - C\|\nabla\xi\|) \frac{\partial}{\partial \xi}(U - 2C\|\nabla\xi\|) = 0 \quad (5)$$

Y sumando $\xi_y \times (2) - \xi_x \times (3)$ se deduce que

$$\frac{\partial}{\partial t}(u\xi_y - v\xi_x) + U \frac{\partial}{\partial \xi}(u\xi_y - v\xi_x) = 0 \quad (6)$$

Notar que el vector U es la proyección de (u, v) en la dirección $\nabla\xi$ amplificada por $\|\nabla\xi\|$, y que si definimos $U_{||} = u\xi_y - v\xi_x$ entonces se puede ver que el vector $(\xi_y, -\xi_x)$ es un vector ortogonal a $\nabla\xi$ y que $U_{||}$ es entonces la proyección tangencial de (u, v) sobre $\nabla\xi$, y por lo tanto es la componente tangencial al borde, cuya normal es justamente $\nabla\xi$ ².

Los invariantes de Riemann son entonces

$$\begin{aligned} R^0 &= u\xi_y - v\xi_x \\ R^+ &= U + 2C\|\nabla\xi\| \\ R^- &= U - 2C\|\nabla\xi\| \end{aligned}$$

y las trayectorias características asociadas

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \{\xi : \frac{d}{dt}\xi = U\} \\ \gamma^+ &= \{\xi : \frac{d}{dt}\xi = U + C\|\nabla\xi\|\} \\ \gamma^- &= \{\xi : \frac{d}{dt}\xi = U - C\|\nabla\xi\|\} \end{aligned}$$

¹también se puede escribir la deducción de este sistema a partir de las SWE originales

²esto habría que hacerlo explícito también, de que $\nabla\xi$ es el vector normal al borde, no?