Alumno interno

Carlos Baños y Mario Torres

23 de octubre de 2025

Prefacio

En esta memoria vamos a estudiar las homografías en los espacios proyectivos sobre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}$. Buscaremos una forma de clasificar de forma práctica las homografías en los espacios de dimensión finita de forma que nos permita distinguirlas y estudiar sus propiedades más importantes, abordándolas desde el álgebra lineal.

Para cumplir nuestro objetivo, en primer lugar describiremos conceptos básicos del espacio proyectivo y las homografías, para luego constituir diferenciaciones previas, y concluir resultados de éstas de una forma mucho más clara y ordenada.

Índice

Capítulo 1: Forma de clasificación de las homografías y forma de Jordan

Dado un automorfismo $f : V \to V$ podemos considerar su homografía asociada $F : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ y analizarla desde diversas perspectivas. Desde el punto de vista del álgebra, las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita se estudian a través de sus variedades fijas, lo que en el espacio proyectivo se convierte en variedades lineales fijas.

Entonces, ¿podemos utilizar ese criterio para clasificar las homografías? Sí, y ahora lo veremos:

1.1. Forma de Jordan de una matriz

Aquí no presentaremos los resultados de las formas de Jordan, sino que explicaremos porqué se pueden utilizar para clasificar las homografías.

La unicidad de la forma de Jordan nos permite dar una clasificación finita y metódica de todas las homografías fijada una dimensión, y además es bastante útil, ya que nos permite ver todas las variedades fijas y así ver cómo transforma el espacio. Por así decirlo, dan igual los autovalores, ya que la transformación es muy similar, y no varía significativamente desde una perspectiva algebraica. Así pues, clasificaremos las homografías por las formas de Jordan.

Ahora tenemos que ver cuáles son las variedades fijas de estas homografías, para lo que utilizaremos un resultado que nos permitirá darlas de forma simple y algorítmica:

Teorema:Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y dado V un $\mathbb{K}$-espacio vectorialde dimensión finita. Para cualquier isomorfismo $f : V \to V$, con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, considerando W_{λ_i} los espacios maximales asociados a estos autovalores, entonces una variedad lineal $L \subset V$ es fija respecto a f si y sólo si se puede descomponer de forma directa como suma de subespacios fijos de los espacios maximales.
Demostración: Como sabemos que la suma de subespacios fijos de V respecto a f da un espacio fijo, nos falta probar la ptra implicación.
Consideremos L una subvariedad lineal fija de V. Si consideramos la restricción, $f|_L$, tenemos un isomorfismo de espacios vectoriales y, por lo tanto, L se puede descomponer como suma directa de los subespacios maximales asociados a los autovalores de $f|_L$. Ahora, al ser $f|_L$ una restricción, sus autovalores tienen que ser autovalores de f, y los espacios maximales asociados a estos autovalores serán subespacios fijos de los espacios maximales de f. Dándonos así la descomposición que queríamos.

Este resultado se puede resumir en que, dado $f : V \to V$ un isomorfismo y L una variedad fija, tomando $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ los autovalores de f, se tiene la descomposición:

$$L = \bigoplus_{i=1}^{n} (W_{\lambda_i} \cap L)$$

Con esto tenemos que, realmente para tener todas las variedades fijas de una homografía, tenemos que calcular las variedades fijas de los bloques de Jordan y luego ir sumándolas entre sí para tener todos los resultados.

Capítulo 2: Clasificación de Homografías en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

Por lo dicho anteriormente, como lo único que nos interesan son los subespacios maximales asociados a los autovalores de nuestros isomorfismos, podemos considerar únicamente la forma de Jordan asociada a estas aplicaciones. Por lo tanto, asumiremos que la matriz asociada a $f4$: $\mathcal{M}_f$ vendrá dada en una base de forma que sea de Jordan.

2.1. Formas canónicas de Jordan con un único autovalor

En este apartado, estudiaremos todos los casos posibles que podemos obtener teniendo solo un único autovalor con multiplicidad algebraica 3. Dicho autovalor será representado por la letra griega "α".

2.1.1. Con multiplicidad geométrica 1 (mg(α) = 1)

La forma de Jordan que tendrá esta aplicación será:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

De esta manera, bajo la base que hemos supuesto, tenemos que el punto fijo de la homografía se encuentra en $P_0 := [1 : 0 : 0]$. Por dualidad podemos encontrar el único hiperplano fijo, H_2 $:=\{X_2 = 0\}$., el cual es una recta fija.

2.1.2. Con multiplicidad geométrica 2 (mg(α) = 2)

En este caso, al ser 3 columnas en la matriz obtenemos un único caso salvo orden compuesto de 2 bloques de Jordan de dimensión 1 y 2. Por ello, la matriz asociada será:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Tenemos una mayor cantidad de elementos interesantes, como por ejemplo los dos puntos fijos, que, en esta base, son P_0 y P_2, que dan por consecuencia una recta fija $P_0 + P_2$. Por dualidad, al mismo tiempo tenemos un haz de rectas fijas, que intersecan en P_0.
Este caso se estudió en clase, y resulta ser una homología de centro P_0 y eje $P_0 + P_2$.

2.1.3. Con multiplicidad geométrica 3 (mg(α) = 3)

Para este último caso de un único autovalor, tendremos nuevamente que hay una única posibilidad. Y es que en este caso sólo cabe como posibilidad el haber 3 bloques 1x1 de Jordan, es decir, una matriz diagonal de la forma:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Aquí realmente, como se puede apreciar, tenemos una homografía que bien se corresponde con la identidad, por lo que no tenemos nada interesante aquí ya que todo es fijo y no ocurre nada destacable. De ahora en adelante, obviaremos la identidad como homografía.

2.2. Formas canónicas de Jordan con varios autovalores

Por último, nos quedan 3 formas posibles que podemos encontrar en la clasificación donde hay más de un autovalor diferentes. Así pues tenemos los tres siguientes casos.

2.2.1. Espectro de A formado por 2 autovalores

En este caso, las únicas posibilidades son que encontremos un autovalor con multiplicidad geométrica 2 (Por ejemplo, sea α dicho autovalor) y otro con multiplicidad geométrica 1 (Sea el otro autovalor β); o que ambos tengan multiplicidad geométrica 1.

<u>Caso 1</u> (mg(α) = 1; mg(β) = 1)

En primer lugar, podemos encontrar este caso, donde entonces tendremos una matriz de la forma:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

De forma parecida al caso de -mg(α) = 2 en único autovalor de A-, tenemos que hay un par de puntos fijos formados por P_0, asociado a α, y P_2, asociado a β, que hacen que formen una recta de puntos fijos $H_1 := \{X_1 = 0\}$, base del haz de rectas fijas propiciado por la dualidad de los dos puntos fijos y del haz de puntos fijos que proporciona la recta dicha de puntos fijos. El haz es descrito como $H_{(a,b)} := \{aX_1 + bX_2 = 0\}$, y en particular se encuentra $H_2 := \{X_2 = 0\}$, que está asociado a α.

Bajo esta configuración se puede observar que claramente hay una homología, con la recta de puntos fijos H_1 bajo el papel de eje, y el punto fijo asociado a α como centro, ya que en este caso es el punto fijo asociado al autovalor con mayor dimensión en su bloque de Jordan el que proporciona el centro de la homología

<u>Caso 2</u> (mg(α) = 2 mg(β) = 1)

Este es el segundo caso posible cuando tenemos dos autovalores en el espectro de A. En este caso tenemos que hay 3 bloques de Jordan, todos 1x1, único pues salvo orden, y donde por ejemplo podemos tomar como representante una matriz D descrita (salvo orden de nuevo) como

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Podemos encontrar ahora una gran cantidad de puntos fijos, ya que encontramos una recta de puntos fijos asociada al autovalor α, $H_2 := \{X_2 = 0\}$ y un punto fijo aparte asociado al autovalor β, $P_2 := [0 : 0 : 1]$.
Encontramos también una infinidad de rectas fijas dadas por $P_{(a,b)}$ (:= [a : b : 0]) + P_2 (:= [0 : 0 : 1]).
En cuanto a la dualidad, tenemos que hay un haz de rectas fijas asociado al autovalor α que serían $H_{(a,b)} := \{aX_0 + bX_1 = 0\}$ al igual que el asociado a β, H_2, que coincide con la recta de puntos fijos de α (como era de esperar puesto que los puntos fijos asociados a otros autovalores pertenecen a los hiperplanos fijos obtenidos por la dualidad de un autovalor designado) .

2.2.2. Espectro de A formado por 3 autovalores

Para este caso único, veremos que la matriz de la homografía, A, puede ser equivalente a una matriz D cuya forma de Jordan es única salvo orden. (Llamaremos al tercer autovalor ρ). Sea D tal que

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

En este caso, tenemos 3 autovalores distintos, junto a sendos únicos puntos fijos, $P_0 := [1 : 0 : 0]$, $P_1 := [0 : 1 : 0]$ y $P_2 := [0 : 0 : 1]$. La suma de dos puntos fijos cualesquiera nos dará una recta fija que nos dará a su vez un eje de homología, con el punto fijo del autovalor restante como centro de dicha. En realidad, la dualidad de cualquier punto fijo asociado a un autovalor nos va a dar la recta fija que pasa por los otros dos. Y esto es esperable, puesto que realmente deben estarlo tal y como mencionamos anteriormente (-aquí-).

Por tanto, en este caso tendremos 3 rectas fijas, 3 puntos fijos y 3 homologías, cada una con centro un punto fijo de un autovalor distinto a los otros.

Capítulo 3: Clasificación de Homografías en $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$

Siguiendo el mismo *modus operandi*, vamos a comenzar distinguiendo los distintos autovalores encontrados en una representación de cada clase de equivalencia posible de la forma canónica de Jordan

3.1. Formas canónicas de Jordan con un único autovalor

Veamos los siguientes casos posibles, al aumentar en uno la dimensión del espacio proyectivo. Tomaremos ese autovalor único con la letra "α", nuevamente

3.1.1. Con multiplicidad geométrica 1 (mg(α)=1)

Para este caso, tenemos que existe una única posibilidad, y es que, siendo [A] = F, se tenga que A $\sim$ D, con

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

En este caso, $\exists!$ punto fijo, que bajo un sistema de referencia adecuado, es $P_0 = [1{:}\ 0{:}\ 0{:}\ 0]$.
Por dualidad, tendremos entonces un único hiperplano fijo, $H_3 := \{X_3 = 0\}$. Restringiendonos a la subvariedad fija H_3, tenemos que pasamos a un caso ya estudiado en el capítulo anterior, véase -aquí-

3.1.2. Con multiplicidad geométrica 2 (mg(α)=2)

Sea [A] = F, donde se tenga que A $\sim$ D. Si la multiplicidad geométrica de α es 2, se tiene que pueden darse dos casos distintos, dependiendo de los tamaños de los bloques de Jordan asociados al autovalor.
Así pues, vamos a estudiar cada caso:

Caso 1
En este caso, tenemos que D es de la forma:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Al ser la multiplicidad geométrica de "α" igual a 2 (mg(α) = 2), tenemos que $\exists \boldsymbol{r}$:= recta de puntos fijos, que con un sistema de referencia adecuado, seria $\mathbf{r} := Lp\{[1:0:0:0],[0:0:0:1]\}$. Por dualidad, tenemos que hay un Haz de hiperplanos fijos $H_{(a,b)} := \{aX_2 + bX_3\}$, con (a: b) $\in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ y base del haz la recta $\mathbf{r}_{H_{(a,b)}} := \{X_0 = X_3 = 0\}$

Se puede apreciar que el único hiperplano que cumple que contiene la recta de puntos fijos es $H_{(1,0)} := \{X_2 = 0\}$, donde al contener entonces dicha recta, se tiene que $F|_{H_{(1,0)}}$ es una homología, con eje $\mathbf{r}$, y centro $P_0 := [1:0:0:0]$.

Caso 2 La otra posibilidad es una matriz D de la forma:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

De nuevo, por ser la multiplicidad geométrica de α 2, tenemos una recta de puntos fijos, en este caso $\mathbf{r} := Lp\{[1:0:0:0],[0:0:1:0]\}$. Aplicando la dualidad, el Haz de hiperplanos fijos sería $H_{(a,b)} := \{aX_1 + bX_3 = 0\}$, con (a: b) $\in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

En este caso, como tenemos dos bloques de orden 2, la base del hiperplano es la recta de puntos fijos, por lo que todos los planos que contienen a la recta en particular, son planos fijos. Además, por ser $\dim(H_{a:b}) = 2$, se tiene que $\forall(a:b) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, se tiene que $F|_{H_{(a:b)}}$ es una homología, cuyo centro es incidente, pero varía con respecto al plano seleccionado. Por ejemplo, para un sistema de referencia adecuado, el hiperplano $H_{(1,0)} := \{X_1 = 0\}$ tiene como centro el punto $(P_0 + P_1) \cap (P_0 + P_2) = [1{:}\ 0{:}\ 0{:}\ 0]\ (= P_0)$. Mediante la intersección de rectas fijas se puede obtener también el centro de $F|_{H(0:1)}$ (Y todos los casos en general, por estar en $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$), que sería en este caso P_2.

3.1.3. Con multiplicidad geométrica 3 (mg(α)=3)

Bajo las mismas premisas que anteriormente ([A] $= F$), donde se tenga que A $\sim$ D, con la matriz D de la forma:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Entonces estaríamos ante una homografía donde hay un plano de puntos fijos, $\Pi := \{X_1 = 0\}$, y por argumentos de dualidad, tendríamos también un haz de hiperplanos fijos de base un punto.
Dicho haz es $H_{(a,b,c)} := \{aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0\}$, cuya base es el punto P_0.
Al haber un hiperplano de puntos fijos, tenemos que F es una homología de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, con P_0 centro de la homología.

3.2. Formas canónicas de Jordan con varios autovalores

En esta sección abordaremos los casos donde #sp(A) $\neq 1$ (El espectro de A posee más de un autovalor, con #sp(A) denotando el cardinal de sp(A)) siendo en todo momento A tal que [A] $=$ F. Dentro de este cajón de sastre, vamos a empezar por las matrices de menor a mayor número de autovalores.

3.2.1. Espectro de A formado por dos autovalores (α,β)

Debido a las diferentes formas de Jordan que se pueden presentar con dos autovalores, se pueden ver diferentes distribuciones.

Caso 1 (mg(α) $= 1$; mg(β) $= 1$)

Con respecto a las posibilidades que hay teniendo los autovalores α y β con multiplicidad 1, vemos que podemos tener 2 casos posibles.

→ Caso 1.1 (ma(α) = 3; ma(β) = 1)

En este caso, tenemos que A $\sim$ D, con D tal que:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Aquí vemos que hay dos puntos fijos claros, uno asignado a cada espacio de autovectores. En primer lugar, tenemos a $P_0 := [1:0:0:0]$, con $P_0 \in \pi(V_A(\alpha))$, y $P_3 := [0:0:0:1]$, tal que $P_3 \in \pi(V_A(\beta))$. Por dualidad, tendremos que $\exists H_2, H_3$ únicos hiperplanos fijos, con $H_2 := \{X_2 = 0\}$ (Que en realidad es el dual del punto fijo $\tilde{P_2}$ del espacio dual $(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))^*$ es decir, $*(\pi^*(V_{A^t}(\alpha))))$; $H_3 := \{X_3 = 0\}$ (Idem que con H_2, pero con el espacio de autovalores de β).
Podemos apreciar que, en primer lugar, se cumple que $P_0 \in H_3, P_3 \in H_2$, por estar asociados a autovalores diferentes. Pero en especial, vemos que $P_0 \in H_2$, lo cual hace que por dualidad, hayan dos rectas fijas contenidas en H_2, frente a la única recta que hay por dualidad en H_3. Estas rectas fijas son $r_1 := Lp\{P_0, P_3\}$ y $r_2 := H_3 \cap H_2$
Si nos restringimos al plano H_3, vemos que $F|_{H_4}$ nos hace volver al caso 2.1.1, restringiendo también F_{H_3}

→ Caso 1.2 (ma(α) = ma(β) = 2)

Siguiendo la misma estela, sea A $\sim$ D, con D tal que:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Tenemos que de igual forma, habrán dos puntos fijos, cada uno asociado a cada autovalor, siendo $P_0 := [1:0:0:0]$, con $P_0 \in \pi(V_A(\alpha))$, y $P_2 := [0:0:1:0]$, donde $P_2 \in \pi(V_A(\beta))$. Por dualidad, tendremos que $\exists H_1, H_3$ únicos hiperplanos fijos, con $H_1 := \{X_1 = 0\}$, asociado al espacio de autovalores de α (de la misma forma que en el caso anterior -aquí-, es decir, por dualidad), y $H_3 := \{X_3 := 0\}$, asociado al autovalor β. Aquí sí vemos que los dos puntos fijos asociados están incluídos en los dos hiperplanos, ya que la m.a $(\kappa) > 1$ (con $\kappa \in \{\alpha, \beta\}$)(Caso que probaremos más adelante en las situaciones generales)(A.A)
Por las multiplicidades geométricas de los autovalores, no podemos tener homologías en ningún hiperplano invariante, aunque tenemos que la intersección de los hiperplanos provoca una recta fija, donde F es una homología en $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

Caso 2 (mg(α) = 2; mg(β) = 1)

En este caso 2, tenemos que hay 3 bloques de Jordan, donde a la fuerza uno de ellos es 2x2. Así pues, solo hay que estudiar como afecta cuando el bloque pertenece a α y cuándo pertenece a β.

→ Caso 2.1 (ma(α) = 3; ma(β) = 1)

Una matriz representante de esta clase proyectivamente equivalente es la matriz D, de la forma:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Por la multiplicidad geométrica de α, tenemos que hay una recta de puntos fijos asociado a ella, con $\mathbf{r}_\alpha := Lp\{[1:0:0:0],[0:0:0:1]\}$, mientras que también hay un punto fijo asociado a β, $P_3 :=$ [0: 0: 0: 1].
Por dualidad, tenemos que hay un haz de hiperplanos fijos asociado a α, tal que es $H_{a,b} := \{aX_0 + bX_2 = 0\}$ (Con (a,b) $\neq$ (0,0)), con base $\mathbf{r}_{H_{a,b}} := \{X_0 = X_2 = 0\}$ y un único hiperplano asociado a β, que es $H_3 := \{X_3 = 0\}$.
En particular, tenemos que si tomamos $H_{0,1} := X_2 = 0$, tenemos que $F|_{H_{0,1}}$ es una homología, de centro $P_3 := [0,0,0,1]$ y eje la recta de puntos fijos $\mathbf{r}_\alpha$ definida anteriormente. También encontramos otra homología, pero con el hiperplano H_3, el asociado a β, donde ahí el eje también es $\mathbf{r}_\alpha$, pero el centro es incidente, siendo $P_1 := [0,1,0,0]$ el centro de la homología.

→ Caso 2.2 (ma(α) = 2; ma(β) = 2)

Este caso contempla las matrices tal que A $\sim$ D, con D tal que:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

En este caso, vemos que hay una recta de puntos fijos asociada a α, con $\mathbf{r}_\alpha := Lp\{[1:0:0:0],[0:0:0:1]\}$, y un punto fijo asociado a β, con dicho punto $P_\beta :=$ [0: 0: 1: 0].
Por dualidad, tenemos que existe una recta de planos $H_\alpha := \{aX_0 + bX_1 = 0\}$ (tal que (a: b) $\in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) con base la recta $\mathbf{r}_{H_{(a,b)}} := \{X_0 = X_1 = 0\}$, asociado a α; a parte un hiperplano fijo $H_\beta := \{X_4 = 0\}$.
De hecho, tenemos que en este hiperplano, $F|_{H_\beta}$ es una homología, de eje la base del haz de hiperplanos asociado a α ($r_{a,b}$), y de centro el punto fijo asociado a β, denominado anteriormente P_β

Caso 3 (mg(α) = mg(β) = 2)

En este caso 3 hay una sola posibilidad, que sol las matrices A $\sim$ D, con D de la forma:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

En este caso, vemos que hay dos rectas de puntos fijos, cada una asociada a sendos autovalores, α y β, los cuales son $\mathbf{r}_\alpha := Lp\{[1:0:0:0],[0:1:0:0]\}$ y $\mathbf{r}_\beta := Lp\{[0:0:1:0],[0:0:0:1]\}$.
De igual forma los hiperplanos fijos son $H_{(a:b)} := \{aX_0 + bX_1 = 0\}$, asociado a α, con base la recta $\mathbf{r}_{H_{(a:b)}} := \{X_0 = X_1 = 0\}$ y por otro lado $H_{(c:d)} := \{cX_2 + dX_3 = 0\}$, asociado esta vez a β, con base descrita como $\mathbf{r}_{H_{(c:d)}} := \{X_0 = X_1 = 0\}$. ((a: b), (c: d) $\in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$).
En este caso tenemos que existen cuatro homologías, que cumplen la restricción $F|_{X_i=0}$, con i $\in \{0,1,2,3\}$, con eje la base del haz de hiperplanos fijos al que $H_i := \{X_i = 0\}$ no pertenezca y como centro de la homología el punto P_j, que es aquel punto fijo que está asociado al mismo autovalor que el hiperplano y que pertenece a éste.

3.2.2. Caso de tres autovalores fijos

Aquí los casos son pocos, ya que al ser 3 autovalores y repartirse 4 posiciones, únicamente habrá un bloque de rango 2, y los otros dos tendrán rango 1, por lo que se nos queda en 3 casos: Caso 1 (mg(α)=2)

Tendremos que A es equivalente a una matriz diagonal de la forma:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Donde tendremos una recta de puntos fijos $P_0 + P_1$ y dos puntos fijos aparte, que son P_2 y P_3. Hay, por lo tanto, dos haces de rectas fijas, una que interseca en P_2 y otra que interseca en P_3, que resultan de sumar estos puntos a los puntos fijos de la recta anteriormente mencionada. Al mismo tiempo esto nos da dos planos fijos: $P_0 + P_1 + P_2$ y $P_0 + P_1 + P_3$, que contienen a los haces de rectas mencionados anteriormente.
Tendremos además la recta fija $P_2 + P_3$, que resulta ser la intersección de un haz de planos fijos que resulta de sumar a esta recta los puntos de la recta fija anterior ($P_0 + P_1$).
<u>Caso 2</u> (mg(α)=1)
En este caso la matriz no sería diagonalizable y estaríamos ante una forma de Jordan como la siguiente:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

En este caso tenemos sólo 3 puntos fijos, P_0,P_2 y P_3. Además hay una recta fija asociada al autovalor α, que es la recta $P_0 + P_1$, y por lo tanto tendremos 4 rectas fijas: esta ya mencionada, $P_0 + P_2$, $P_0 + P_3$ y $P_2 + P_3$.
Tendremos además 3 planos fijos: $P_0 + P_1 + P_2$, $P_0 + P_1 + P_3$ y $P_0 + P_2 + P_3$, completando así la colección de variedades fijas.

3.2.3. Caso de cuatro autovalores fijos

Aquí hay sólo un caso, al haber tantos autovalores distintos como posibles. Por lo tanto estamos ante una matriz diagonalizable de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$$

Habrán 4 puntos fijos, y todas las variedades fijas saldrán de combinarlos sin repetición entre ellos, dando todos los casos posibles.

Capítulo 4: Clasificación de homografías en espacios proyectivos reales

4.1. Introducción

Auque $\mathbb{R}$ tiene muy buenas propiedades en el sentido matemático, en álgebra tiene el gran problema de no ser algebraicamente cerrado. Aún así podemos rescatar muy buenas propiedades de este cuerpo en el sentido algebraico.
Y es que, los únicos polinomios irreducibles en $\mathbb{R}$ son de grado 2, y además tenemos que, para cualesquiera polinomios irreducibles p, q:

$$\frac{\mathbb{R}[x]}{(p)} \simeq \frac{\mathbb{R}[x]}{(q)} \simeq \mathbb{C}$$

Tenemmos además el gran resultado de la llamada forma de Jordan real, que nos permite organizar los automorfismos de forma categórica, incluyendo los de autovalores complejos. Al ser un resultado complejo unicamente lo mencionaremos, para no ocupar un valioso espacio. Lo que sí demostraremos

es lo siguiente:
Teorema: Supongamos $F : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ una homografía, y consideremos su extensión $\tilde{F} : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Si Z es una variedad fija de $\tilde{F}$ que no tiene autovectores reales, entonces $Z \cap \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \varnothing$.
Para demostrarlo consideramos la intersección $X = Z \cap \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. como Z es una variedad proyectiva real, entonces tiene que serlo X. Ahora como X es una variedad fija tenemos que $F(X) = X$, y por lo tanto tiene un autovalor asociado, pero el autovalor asociado a X es complejo, y como F es real, llegamos a una contradicción.
Tenemos que, por lo tanto, siempre que tengamos una variedad proyectiva compleja, lo que ocurre es que perdemos variedades fijas, y por lo tanto perdemos mucho la capacidad de describir bien las homografías por las variedades fijas que tiene. Por otro lado tenemos la capacidad de 'ver' lo que está pasando, ya que estamos en el espacio 'intuitivo', es decir, las $\mathbb{R}$ variedades de dimensión reducida.
Empecemos, pues, con la clasificación de las homografías reales:

Capítulo 5: Homografías en $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

Por lo dicho anteriormente, vamos a dividir los casos en variedades reales y variedades complejas:

5.1. Homografías con autovalores reales

Existen tres casos, que ya hemos estudiado en el caso complejo. Al ser iguales en el ámbito de las variedades fijas, lo único que nos podría interesar es cómo se entienden los casos en el espacio afín de $\mathbb{R}$, que son los casos de homologías en la recta, y que, por lo tanto, no merece la pena dedicarles todo el espacio que sería necesario para estudiarlas.
Nos centraremos, por lo tanto, en el caso en el que aparecen los autovalores complejos:

5.2. Homografía con autovalores complejos

De hecho, hay un único caso, ya que, si hay un autovalor complejo, por el teorema fundamental del álgebra, tiene que haber otro, y por lo tanto, al poder haber únicamente dos autovalores, ambos tienen que ser complejos, eliminando toda posibilidad de elección.
Vamos a utilizar ahora el teorema de clasificación de variedades reales compactas de una dimensión para decir que $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \simeq S^1$. Sabemos que en $\mathbb{R}^2$ una aplicación lineal con autovalores complejos es realmente una rotación compuesta con una homotecia (multiplicar todos los valores por una constante), ya que si $z = \alpha + \beta i$ es uno de los autovalores complejos, la matriz que nos sale será de la forma:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = |z| \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{|z|} & \frac{\beta}{|z|} \\ -\frac{\beta}{|z|} & \frac{\alpha}{|z|} \end{pmatrix}$$

Ahora, en el proyectivo la homotecia desaparece, por lo tanto es la misma homografía que el caso de que $|z| = 1$. Tenemos por lo tanto que en la práctica la homografía no es más que una traslación en el grupo S^1, sumando específicamente, $\arg(z)$.

Capítulo 6: Homografías en $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Ahora tenemos más juego, ya que los autovalores complejos no 'se comen' del todo a la homografía. Como mencionamos anteriormente, el polinomio irreducible de mayor grado en $\mathbb{R}$ es el de grado 2, por lo que el polinomio característico, en virtud del teorema fundamental del álgebra, deberá tener como mímino una raíz real, lo que hará que al menos exista un punto fijo en la clase que se quiere estudiar.

6.1. Espectro de A con 1 autovalor real, λ, y un autovalor complejo junto a su conjugado

Para comenzar, tenemos la matriz J de la forma:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (\text{con } \beta \neq 0)$$

En este caso tendremos un único punto fijo, que sería P_0. Si considerásemos el espacio afín sobre $\mathbb{R}$, veríamos que, con esta base, la transformación del espacio sería justamente una rotación del plano real, con eje en el origen de coordenadas.
Este caso es el único caso que tiene raíces complejas, ya que al ser obligatoriamente 2, únicamente deja espacio para un único autovalor, y por lo tanto, no puede ser complejo.

6.2. Espectro de A con únicamente autovalores reales

Estos casos son idénticos a los que hemos visto en $\mathbb{C}$, pero en este caso podríamos analizarlos desde la perspectiva del espacio afin, al poder trabajar con ellas de forma visual.
Pero por la terrible cantidad de casos que se pueden dar en el espacio afín, al tener que ir tomando homografías proyectivas y ver cómo se mueve H_∞. Por ello aquí no se verán todos los casos y se utilizarán los estudios de las homografías en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ para cada caso real.