



**Universidade Federal de Uberlândia**  
Faculdade de Engenharia Elétrica  
Eletromagnetismo (GEE517)

### **Relatório:**

Simulação FEMM de um Capacitor Esférico

Matheus Felipe Lima      Matrícula: 41921ETE006

Professor:  
Gustavo Nozella Rocha

**15 de fevereiro de 2022**

## 1 Resumo

Potencial elétrico é a capacidade que um corpo energizado tem de realizar trabalho, ou seja, atrair ou repelir outras cargas elétricas. Com relação a um campo elétrico, interessamos a capacidade de realizar trabalho, associada ao campo em si, independentemente do valor da carga q colocada num ponto desse campo. Para medir essa capacidade, utiliza-se a grandeza potencial elétrico.[3]

Um campo elétrico é o campo de força provocado pela ação de cargas elétricas, (elétrons, prótons ou íons) ou por sistemas delas. Cargas elétricas colocadas num campo elétrico estão sujeitas à ação de forças elétricas, de atração e repulsão.[4]

A capacitância ou capacidade elétrica é a grandeza escalar que mede a capacidade de armazenamento de energia em equipamentos e dispositivos elétricos, relacionando carga com diferença de potencial.[1]

Deseja-se, através de um paralelo entre a teoria e a simulação, analisar o potencial, campo elétrico e a capacitância entre duas esferas concêntricas de um capacitor.

## 2 Objetivo

Dado um capacitor com duas esferas concêntricas onde  $V(r = 0,5[cm]) = 0[V]$  e  $V(r = 2[cm]) = 20[V]$  e a região entre as esferas está livre de cargas, será feita uma análise quanto ao potencial, campo elétrico e a capacitância armazenada em três dielétricos: ar, porcelana e sílica fundida.

Tabela 1: Constante dielétrica relativa [2]

Material	$\epsilon_r$
Ar	1,00059
Porcelana	6,0
Sílica fundida	3,8

## 3 Método

Utilizou-se a teoria junto aos cálculos numéricos e os resultados das simulações para discussão.

### 3.1 Teoria

Considerando que a densidade volumétrica de cargas é nula entre as esferas, aplica-se a equação de Laplace

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} (V) \right) = 0 \quad (1)$$

Nota-se que o laplaciano contém apenas o termo da parcial em relação à r, isso porque, devido a simetria do problema, V depende apenas desse parâmetro.

Isolando V, chegamos na equação

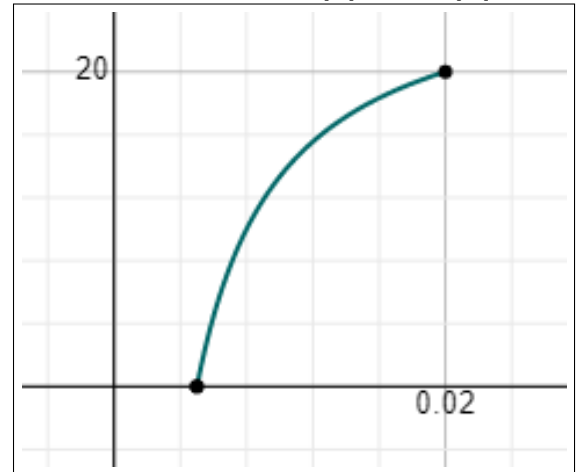
$$V(r) = -\frac{A}{r} + B \quad (2)$$

onde deve-se determinar A e B através do sistema dado os valores introduzidos e compor a equação que determina o potencial elétrico

$$\begin{cases} V(0,5 \cdot 10^{-2}) = -\frac{A}{0,5 \cdot 10^{-2}} + B = 0 \\ V(2 \cdot 10^{-2}) = -\frac{A}{2 \cdot 10^{-2}} + B = 20 \end{cases} \quad (3)$$

$$V(r[m]) = -\frac{2}{15r} + \frac{80}{3} \quad (4)$$

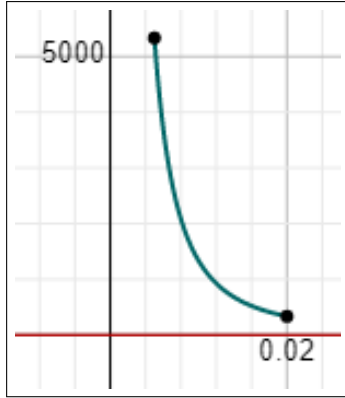
Figura 1: Potencial[V] vs Raio[m]



A partir desta também encontramos a função intensidade do campo elétrico

$$|\vec{E}| = -\nabla V = \frac{2}{15r^2} \quad (5)$$

Figura 2: Campo Elétrico[V/m] vs Raio[m]



Para determinar capacitância em um capacitor esférico, dado por

$$C = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \quad (6)$$

onde  $a$  é o raio da esfera interna e  $b$  o da esfera externa, obtemos a seguinte relação para os diferentes tipos de dielétricos

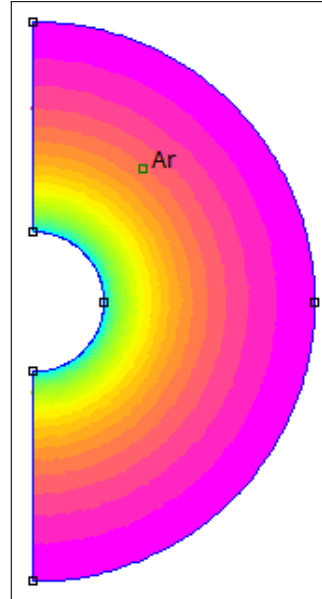
Tabela 2: Capacitância

Material	C [F]
Ar	$7,412 \cdot 10^{-13}$
Porcelana	$4,445 \cdot 10^{-12}$
Sílica fundida	$2,815 \cdot 10^{-12}$

### 3.2 Simulação

Utilizou-se o software FEMM para simular as condições dadas. A princípio foi feita a construção da geometria do problema no CAD e dado início a simulação, como mostra a Figura 3.

Figura 3: Simulação



A imagem 2D, na verdade, preenche 360 graus em um giro no eixo vertical, formando o capacitor 3D como no problema.

Obteve-se também os gráficos mostrados na Figura 4 e 5

Figura 4: Potencial Elétrico[V] vs Raio[cm]

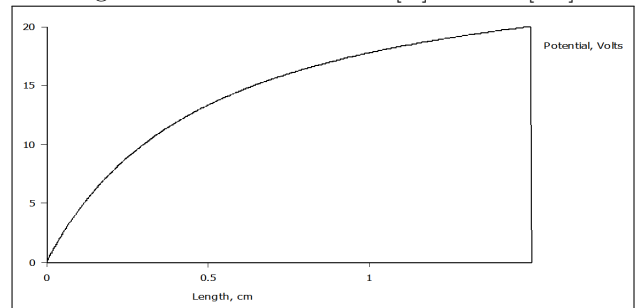
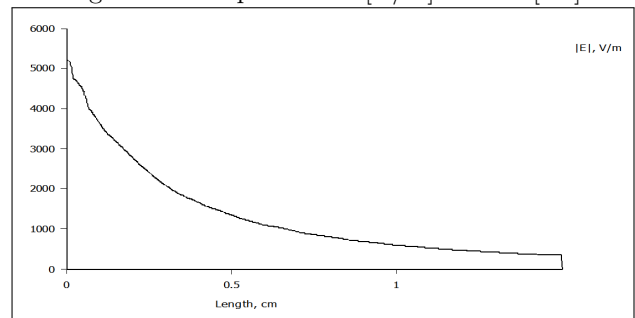


Figura 5: Campo Elétrico[V/m] vs Raio[cm]



traçando uma reta horizontal entre as duas extremidades mais próximas, i.e., de  $r$  variando de 0,5[cm] até 2[cm].

Quanto a capacitância, foi obtido, conforme as Figuras 6, 7 e 8, a densidade superficial de cargas nos condutores externos para cada material.

$$C = \frac{Q}{V} \quad (7)$$

Figura 6: Densidade de cargas; Ar

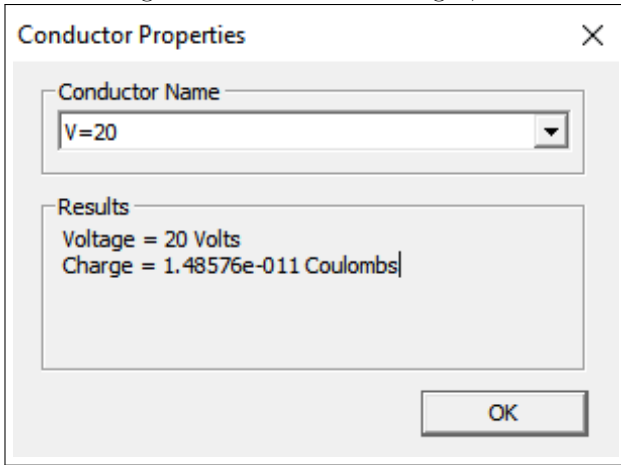


Figura 7: Densidade de cargas; Porcelana

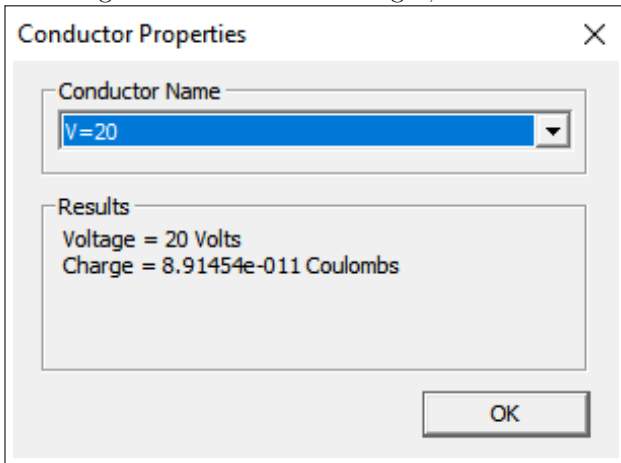
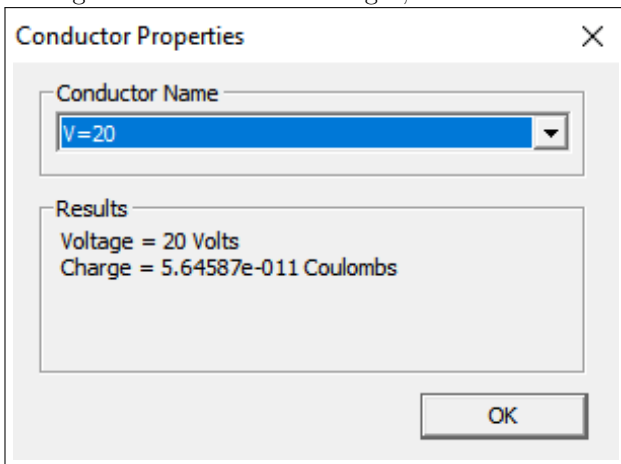


Figura 8: Densidade de cargas; Sílica Fundida



Chegando na Tabela 3 por meio da Equação 7.

Tabela 3: Capacitância

Material	C [F]
Ar	$7,429 \cdot 10^{-13}$
Porcelana	$4,458 \cdot 10^{-12}$
Sílica fundida	$2,823 \cdot 10^{-12}$

## 4 Comparação

Analisando visualmente os gráficos, percebe-se uma coerência nos resultados obtidos. Para além, convém determinar o erro.

Obteve-se 1500 pontos de V e r por meio do FEMM e, utilizando o MatLab, foi feita a subtração do potencial teórico em cada valor de r com o obtido pela simulação; dividido pela quantidade de pontos, conforme a Figura 9.

Figura 9: Erro de V calculado no MatLab

```
V_simulacao = [0.00000000*10^0 4.54767262*10^-7;
1.00066711*10^-3 5.24090710*10^-2;
2.00133422*10^-3 1.04818506*10^-1;
3.00200133*10^-3 1.57227942*10^-1;
...
1.49799867*10^0 1.99931648*10^1;
1.49899933*10^0 1.99965824*10^1;
1.50000000*10^0 0.00000000*10^0];

V_teoria = zeros(1500,1);
for i=1:1500
    V_teoria(i) = -((2)/(15*(V_simulacao(i,1)+0.5)*10^-2))+(80/3);
end
Soma_diferencas = 0;
for j=1:1499
    Soma_diferencas = Soma_diferencas + (abs(V_teoria(j,1))-abs(V_simulacao(j,2)));
end
Erro = abs(Soma_diferencas)/1499
```

Resultando em um erro médio de 0,0071[V]. O último ponto foi desconsiderado pois não obedece a Equação 4 já que V é 0 nos pontos da superfície condutora.

O mesmo foi realizado para o campo elétrico onde o erro médio encontrado foi de 1,76[V/m].

Figura 10: Erro de |E| calculado no MatLab

```
E_teoria = zeros(1500,1);
for i=1:1500
    r=(E_simulacao(i,1)+0.5)*10^-2;
    E_teoria(i) = (2)/(15*r^2);
end
Soma_diferencas = 0;
for j=1:1499
    Soma_diferencas = Soma_diferencas + (abs(E_teoria(j,1))-abs(E_simulacao(j,2)));
end
Erro = abs(Soma_diferencas)/1499
```

O erro médio da capacitância entre o a simulação e teoria dado os três dielétricos foi de  $7,56667 \cdot 10^{-15}[\text{F}]$ .

## 5 Conclusão

Os conceitos e cálculos teóricos puderam se provar com a simulação, entretanto o erro poderia ser amenizado aumentando o número de nós, i.e., de elementos finitos. Percebe-

se, conforme a Tabela 2 e Equação 6, que quanto maior o  $\epsilon_r$ , maior a capacitância do capacitor, o que também se provou com a simulação; fazendo com que o ar, muito utilizado em cálculos teóricos, não seja utilizado como dielétrico em capacitores pela sua baixa constante dielétrica. Percebe-se, com os cálculos da Seção 4, um erro maior para o campo elétrico comparado ao potencial elétrico, o que faz sentido levando em conta o termo ao quadrado no denominador da Equação 5.

## Referências

- [1] WH Hayt Junior. *Engineering Electromagnetics*. McGraw-Hill, 1974.
- [2] Wikipédia. Constante dielétrica — wikipédia, a enciclopédia livre, 2020. [Online; accessed 04-fevereiro-2022].
- [3] Wikipédia. Potencial elétrico — wikipédia, a enciclopédia livre, 2020. [Online; accessed 1-setembro-2020].
- [4] Wikipédia. Campo elétrico — wikipédia, a enciclopédia livre, 2021. [Online; accessed 8-julho-2021].