2.1.5 Como converter um modelo de tempo contínuo para um modelo de tempo discreto

Até agora, os modelos de circuito equivalente que desenvolvemos foram expressos em **tempo contínuo**, através de equações diferenciais ordinárias. No entanto, os algoritmos de um Sistema de Gerenciamento de Bateria (BMS) operam em um ambiente digital, que funciona em intervalos de tempo discretos. Portanto, para que nossos modelos sejam úteis em uma aplicação final, precisamos converter essas equações para uma forma equivalente em **tempo discreto**, representada como equações de diferenças.

Vamos, passo a passo, pelo processo matemático de conversão de uma EDO linear genérica de primeira ordem da forma

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

Para sua forma equivalente em tempo discreto.

$$x[k+1] = a_d x[k] + b_d u[k]$$

Passo 1: A Solução Analítica da Equação em Tempo Contínuo

A derivação começa com a solução analítica conhecida para a EDO linear de primeira ordem. A solução para

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

é dada por:

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

Esta equação nos informa o estado x em qualquer tempo contínuo t, dado seu estado inicial $x(0)$ e a entrada $u(t)$ ao longo do tempo. O termo integral é conhecido no campo de processamento de sinais como uma **integral de convolução**. Esta solução é a base a partir da qual derivaremos a forma em tempo discreto.

Passo 2: Derivando a Relação Recursiva em Tempo Discreto

Nosso objetivo é encontrar uma relação entre o estado no instante de amostragem atual, k, e o estado no próximo instante, $k+1$. Para fazer isso, avaliamos a solução de tempo contínuo no tempo

$$t = (k+1)\Delta t$$

, onde Δt é o intervalo de amostragem.

Após avaliar a equação nesse ponto e realizar uma manipulação algébrica chave — dividindo a integral de 0 a $(k+1)\Delta t$ em duas partes, uma de 0 a $k\Delta t$ e outra de $k\Delta t$ a $(k+1)\Delta t$ — podemos isolar o termo para $x[k]$. Isso resulta em uma relação recursiva crucial:

$$x[k+1] = e^{a\Delta t}x[k] + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{a((k+1)\Delta t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

Esta equação já está na forma desejada: o próximo estado $x[k+1]$ é uma função do estado atual $x[k]$, mais um termo integral que depende da entrada $u(t)$ durante o último intervalo de amostragem.

Passo 3: Resolvendo a Integral para Finalizar a Conversão

Para resolver a integral restante, fazemos uma suposição padrão em controle digital: assumimos que a entrada $u(\tau)$ é **constante** durante o pequeno intervalo de amostragem entre $k\Delta t$ e $(k+1)\Delta t$. Com essa suposição, $u(\tau)$ pode ser retirado da integral. A integral restante do termo exponencial pode então ser resolvida analiticamente. O resultado final depende se o coeficiente 'a' é zero ou não.

O Caso Geral (para $a \neq 0$)

Quando a não é zero, a resolução da integral leva à seguinte equação de diferença:

$$x[k+1] = e^{a\Delta t}x[k] + \frac{1}{a}(e^{a\Delta t} - 1)bu[k]$$

O Caso Especial (para $a = 0$)

Se $a = 0$, a fórmula acima resultaria em uma divisão por zero. Portanto, devemos retornar à equação recursiva e resolver a integral com $a = 0$. Neste caso, os termos exponenciais se tornam 1, e a integral de 1 sobre um intervalo de Δt é simplesmente Δt. Isso nos dá a equação de diferença para o caso especial:

$$x[k+1] = x[k] + (\Delta t)bu[k]$$

Aplicação ao Modelo de Célula de Bateria

Agora podemos aplicar essas duas fórmulas genéricas às EDOs específicas do nosso modelo de Thévenin.

Convertendo a Equação de Estado do Par RC

A equação de estado para o par RC é:

$$\frac{di_{R_1}(t)}{dt} = (-\frac{1}{\tau_1})i_{R_1}(t) + (\frac{1}{\tau_1})i(t)$$

Comparando com a forma genérica, vemos que

$$a = -1/\tau_1, b = 1/\tau_1, x = i_{R_1} e u = i$$

Substituindo na fórmula do caso geral, obtemos a equação de tempo discreto para a corrente do par:

$$i_{R_1}[k+1] = \exp(-\Delta t/\tau_1) i_{R_1}[k] + (1 - \exp(-\Delta t/\tau_1)) i[k]$$

Convertendo a Equação de Estado de Carga (SOC)

A equação de estado para o SOC é:

$$\dot{z}(t) = (-\frac{\eta(t)}{Q}) i(t)$$

Nesta equação, não há um termo multiplicado por $z(t)$, o que significa que $a = 0$. Portanto, usamos a fórmula do caso especial. Identificamos:

$$b = 1/Q, x = z, u = -\eta i$$

Substituindo, obtemos:

$$z[k+1] = z[k] - \frac{\eta[k]\Delta t}{Q} i[k]$$

Isso prova formalmente a equação de SOC em tempo discreto que foi apresentada sem prova.

O Modelo Completo em Tempo Discreto

Com todas as conversões concluídas, agora temos o modelo de Thévenin completo, totalmente expresso em tempo discreto, pronto para ser implementado em um BMS:

- Equações de Estado:

$$z[k+1] = z[k] - \frac{\eta[k]\Delta t}{Q} i[k]$$

$$i_{R_1}[k+1] = \exp(-\frac{\Delta t}{R_1 C_1}) i_{R_1}[k] + (1 - \exp(-\frac{\Delta t}{R_1 C_1})) i[k]$$

- Equação de Saída:

$$v[k] = OCV(z[k]) - R_1 i_{R_1}[k] - R_0 i[k]$$