2.1.8 Resumindo um modelo de circuito equivalente de uma célula de íon-lítio

Combinaremos todos os elementos de um modelo de circuito equivalente em um único local e resumiremos as equações do modelo. Este modelo final e abrangente inclui uma descrição da tensão de circuito aberto dependente do estado de carga, da resistência ôhmica e das tensões de difusão, e uma descrição das tensões de histerese dinâmica e instantânea.

O modelo final que combina todas essas equações é conhecido como o modelo de célula **Corrigido e Aprimorado (Enhanced Self-Correcting - ESC)**.

- **"Aprimorado" (Enhanced):** Porque o modelo inclui uma descrição da histerese, aprimorando os modelos de circuito equivalente anteriores que não continham essa característica.
- **"Autocorrigível" (Self-Correcting):** No sentido de que, mesmo que não modele perfeitamente os comportamentos transitórios de uma célula, ele modela corretamente o comportamento em **estado estacionário**. Ou seja, a tensão do modelo converge corretamente para a OCV mais a histerese quando em repouso, assim como a célula real.

Generalizando o Modelo com Múltiplos Pares RC

O modelo ESC pode conter mais de um par resistor-capacitor (RC) para aproximar com mais precisão as dinâmicas de difusão da célula. Em vez de escrever equações escalares separadas para cada par RC, uma abordagem matematicamente mais compacta é usar a notação de vetores e matrizes.

Podemos definir um vetor, $i_R[k]$, que contém as correntes de todos os resistores dos pares RC. As múltiplas equações de estado para cada par RC podem então ser combinadas em uma única equação vetorial:

$$i_R[k+1] = A_{RC} i_R[k] + B_{RC} i[k]$$

Nesta formulação, A_{RC} é uma matriz diagonal e B_{RC} é um vetor coluna. Esta forma compacta é completamente consistente com as equações individuais que aprendemos anteriormente, mas permite uma representação muito mais limpa para modelos com múltiplos pares RC.

$$\begin{bmatrix} i_{R_1}[k+1] \\ i_{R_2}[k+1] \\ \vdots \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \exp\left(\frac{-\Delta t}{R_1 C_1}\right) & 0 & \cdots \\ 0 & \exp\left(\frac{-\Delta t}{R_2 C_2}\right) & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix}}_{A_{RC}} \begin{bmatrix} i_{R_1}[k] \\ i_{R_2}[k] \\ \vdots \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \left(1 - \exp\left(\frac{-\Delta t}{R_1 C_1}\right)\right) \\ \left(1 - \exp\left(\frac{-\Delta t}{R_2 C_2}\right)\right) \\ \vdots \end{bmatrix}}_{B_{RC}} i[k]$$

A Formulação Completa do Modelo de Espaço de Estados

O passo seguinte é ir além e combinar *todas* as equações dinâmicas do nosso modelo — estado de carga, todos os pares RC e histerese — em uma única e unificada equação de estado. Para isso, definimos um **vetor de estado**, $x[k]$, que engloba todos os estados dinâmicos do modelo.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} z[k+1] \\ i_R[k+1] \\ h[k+1] \end{bmatrix}}_{x[k+1]} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A_{RC} & 0 \\ 0 & 0 & A_H[k] \end{bmatrix}}_{A[k]} \underbrace{\begin{bmatrix} z[k] \\ i_R[k] \\ h[k] \end{bmatrix}}_{x[k]} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\eta[k]\Delta t/Q & 0 \\ B_{RC} & 0 \\ 0 & A_H[k]-1 \end{bmatrix}}_{B[k]} \underbrace{\begin{bmatrix} i[k] \\ \operatorname{sgn}(i[k]) \end{bmatrix}}_{u[k]}$$

A Equação de Estado

O vetor de estado $x[k]$ agrupa o estado de carga $z[k]$, o vetor de correntes dos resistores RC $i_R[k]$, o estado de histerese dinâmica $h[k]$ e o estado de histerese instantânea $s[k]$. A evolução de todo este vetor de estado pode ser descrita pela forma padrão de **espaço de estados**:

$$x[k+1] = A[k]x[k] + B[k]u[k]$$

Nesta equação:

- $x[k]$ é o **vetor de estado** que contém todas as variáveis dinâmicas do modelo.
- $u[k]$ é o **vetor de entrada**, que contém a corrente da célula $i[k]$.
- $A[k]$ é a **matriz de transição de estado**, uma grande matriz (geralmente diagonal ou quase diagonal) que descreve como os estados evoluem por si próprios.
- $B[k]$ é a **matriz de entrada**, que descreve como as entradas afetam os estados.

Esta única equação vetorial descreve de forma compacta e completa todos os efeitos dinâmicos dentro da célula.

A Equação de Saída

A equação de saída do modelo calcula a tensão terminal final, $v[k]$, somando todos os componentes de tensão individuais: a tensão de circuito aberto, as tensões de histerese e as quedas de tensão através de todos os elementos resistivos.

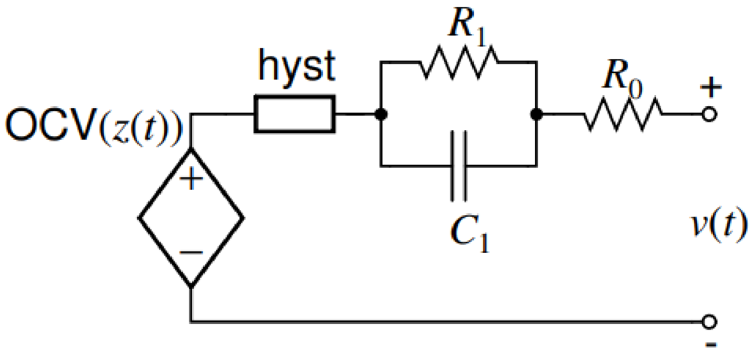
$$v[k] = OCV(z[k], T[k]) + M_0 s[k] + Mh[k] - \sum_j R_j i_{R_j}[k] - R_0 i[k]$$

Isso também pode ser escrito na forma funcional genérica $v[k] = f(x[k], u[k])$, pois a tensão é uma função dos estados atuais ($z[k]$, $i_R[k]$, $h[k]$, $s[k]$) e da entrada atual ($i[k]$).

O Poder do Modelo de Espaço de Estados

Em resumo, derivamos agora completamente o modelo de célula **ESC**, que descreve a tensão de circuito aberto dependente do SOC, as tensões ôhmicas e de difusão, e a histerese.

Este modelo pode ser visualizado como o circuito equivalente mostrado, mas matematicamente ele é representado por um conjunto acoplado de duas equações: a **equação de estado** e a **equação de saída**. Esta estrutura é conhecida como um **modelo de espaço de estados**.



A importância desta forma de modelo não pode ser subestimada. O formato de espaço de estados é uma estrutura padrão e poderosa, amplamente utilizada na teoria de sistemas de controle. Ao colocar nosso modelo de bateria nesta forma, agora aplicar ao nosso problema de bateria. Isso será de importância vital para as técnicas avançadas de estimação.