

# 7 Monte-Carlo-Methoden

Im vorangegangenen Kapitel wurden mit dem EKF, dem Kalman-Filter zweiter Ordnung und dem Sigma-Point-Kalman-Filter bereits mehrere nichtlineare Filter vorgestellt. Diese Filter beschreiben den Systemzustand als gaußverteilten Zufallsvektor. Desse Dichtefunktion ist über Mittelwert und Kovarianzmatrix vollständig beschrieben und damit mathematisch gut handhabbar. Eine Gaußverteilung bleibt jedoch nur bei linearen Transformationen erhalten, wird ein gaußverteilter Zufallsvektor durch eine nichtlineare Funktion – sei es ein System- oder ein Messmodell – propagiert, ist das Ergebnis kein gaußverteilter Zufallsvektor mehr. Bei nicht allzu nichtlinearen Schätzproblemen kann die resultierende Dichtefunktion aber durch eine Gaußverteilung gut approximiert werden, wie das eben bei EKF und Sigma-Point-Kalman-Filter geschieht. Liegen massive Nichtlinearitäten vor, ist das nicht mehr möglich. In diesen Fällen kann versucht werden, die Dichtefunktion durch die Überlagerung mehrere Gaußverteilungen zu beschreiben, was auf die Gaussian Sum Filter führt. Einen anderen Ansatz stellen Partikelfilter dar, die die Dichtefunktion durch eine Summe von Partikeln approximieren, wobei jeder Partikel als eine Realisation des Zustandsvektors verstanden werden kann. Dies hat auf den ersten Blick Ähnlichkeit mit den Sigma-Point-Kalman-Filtern – bei einem Partikel Filter werden die Partikel jedoch zufällig gewählt, die Sigma-Punkte werden deterministisch vorgegeben. Auch ist bei einem Partikelfilter die Anzahl der Partikel nicht durch die Dimension des Zustandsvektors vorgegeben, sondern eher ein Tuning-Parameter – viele Partikel erlauben eine genauere Approximation der Dichtefunktion, zu wenige Partikel können zum Scheitern des Filters führen.

In diesem Kapitel soll nur eine kurze Einführung zum Partikelfilter als Beispiel für einen Monte-Carlo-Ansatz gegeben werden; eine umfassende Beschreibung der fast überabzählbar vielen Varianten nichtlinearer Filter, die auf einer numerischen Approximation der Dichtefunktion basieren, wird nicht versucht – für weiterführende Betrachtungen sei auf [104][12][47][22] verwiesen.

## 7.1 Chapman-Kolmogorov-Gleichung

Ein Partikelfilter modelliert den zu schätzenden Systemzustand als einen Zufallsvektor, dessen Dichtefunktion numerisch approximiert wird. Um mit einem solchen Ansatz einen Filteralgorithmus realisieren zu können, muss zunächst einmal klar sein, wie sich die zeitliche Evolution dieser Dichtefunktion beschreiben lässt und wie Beobachtungen diese Dichtefunktion verändern. Ersteres ist durch die Chapman-Kolmogorov-Gleichung gegeben, die im Folgenden hergeleitet werden soll.

Bei dem zu schätzende Systemzustand soll es sich um einen Markov-Prozess handeln. Das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des aktuellen Systemzustan-

des  $\vec{x}_k$  vom Systemzustand einen Zeitschritt zuvor,  $\vec{x}_{k-1}$ , abhängt – eine Abhängigkeit von Systemzuständen mehrere Zeitschritte zuvor besteht aber nicht. Damit kann man schreiben

$$p(\vec{x}_k | \vec{x}_{k-1}, \vec{x}_{k-2}, \dots, \vec{x}_0) = p(\vec{x}_k | \vec{x}_{k-1}) \quad (7.1)$$

sowie

$$p(\vec{x}_k | \vec{x}_{k-1}, \mathbf{Y}_{k-1}) = p(\vec{x}_k | \vec{x}_{k-1}) . \quad (7.2)$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbf{Y}_{k-1}$  alle bis zum Zeitpunkt  $k-1$  angefallenen Beobachtungen<sup>1</sup>,  $\mathbf{Y}_{k-1} = \vec{y}_{k-1}, \vec{y}_{k-2}, \dots, \vec{y}_0$ . Anschaulich lässt sich Gl. (7.2) so verstehen, dass alle bis zum Zeitpunkt  $k-1$  vorliegenden Beobachtungen  $\mathbf{Y}_{k-1}$  bereits in  $\vec{x}_{k-1}$  eingeflossen sind und  $\mathbf{Y}_{k-1}$  daher keine zusätzliche Bedingung darstellt.

Ziel ist es nun, die Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(\vec{x}_k | \mathbf{Y}_{k-1})$  als Funktion von  $p(\vec{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_{k-1})$  zu formulieren. Durch Integration der Verbunddichte erhält man die marginale Dichte

$$p(\vec{x}_k, \mathbf{Y}_{k-1}) = \int_{V_{\vec{x}_{k-1}}} p(\vec{x}_k, \vec{x}_{k-1}, \mathbf{Y}_{k-1}) d\vec{x}_{k-1} . \quad (7.3)$$

Mit der Bayes'schen Regel  $p(A, B) = p(A)p(B|A) = p(B)p(A|B)$  kann der Integrand umgeschrieben werden:

$$p(\vec{x}_k, \mathbf{Y}_{k-1}) = \int_{V_{\vec{x}_{k-1}}} p(\vec{x}_k | \vec{x}_{k-1}, \mathbf{Y}_{k-1}) p(\vec{x}_{k-1}, \mathbf{Y}_{k-1}) d\vec{x}_{k-1} \quad (7.4)$$

Erneutes Anwenden der Bayes'schen Regel auf den zweiten Term ergibt

$$p(\vec{x}_k, \mathbf{Y}_{k-1}) = \int_{V_{\vec{x}_{k-1}}} p(\vec{x}_k | \vec{x}_{k-1}, \mathbf{Y}_{k-1}) p(\vec{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_{k-1}) p(\mathbf{Y}_{k-1}) d\vec{x}_{k-1} . \quad (7.5)$$

Da  $p(\mathbf{Y}_{k-1})$  unabhängig von  $\vec{x}_{k-1}$  ist, kann diese Dichte vor das Integral gezogen und durch sie dividiert werden:

$$\frac{p(\vec{x}_k, \mathbf{Y}_{k-1})}{p(\mathbf{Y}_{k-1})} = \int_{V_{\vec{x}_{k-1}}} p(\vec{x}_k | \vec{x}_{k-1}, \mathbf{Y}_{k-1}) p(\vec{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_{k-1}) d\vec{x}_{k-1} \quad (7.6)$$

Anwenden der Bayes'schen Regel auf die linke Seite von Gl. (7.6) und Ausnützen der Markov-Eigenschaft auf der rechten Seite führt auf

$$p(\vec{x}_k | \mathbf{Y}_{k-1}) = \int_{V_{\vec{x}_{k-1}}} p(\vec{x}_k | \vec{x}_{k-1}) p(\vec{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_{k-1}) d\vec{x}_{k-1} . \quad (7.7)$$

---

<sup>1</sup>Auf die explizite Kennzeichnung von Messwerten durch eine Tilde ( $\vec{\phantom{x}}$ ) soll im Folgenden verzichtet werden.

Gl. (7.7) ist als Chapman-Kolmogorov-Gleichung bekannt und beschreibt die zeitliche Propagation der Wahrscheinlichkeitsdichte des als Zufallsvektor  $\vec{x}_k$  modellierten Systemzustandes. Die Auswirkung von Beobachtungen auf diese Dichte wird im nächsten Abschnitt behandelt.

## 7.2 Berücksichtigung von Beobachtungen

Liegt eine Beobachtung  $\vec{y}_k$  vor, kann ausgehend von der Dichtefunktion  $p(\vec{x}_k|\mathbf{Y}_{k-1})$  die Dichte  $p(\vec{x}_k|\mathbf{Y}_k)$  berechnet werden. Mit dem Zusammenhang  $\mathbf{Y}_k = \{\vec{y}_k, \mathbf{Y}_{k-1}\}$  kann diese Dichte unter Verwendung der Bayes'schen Regel wie folgt dargestellt werden:

$$p(\vec{x}_k|\vec{y}_k, \mathbf{Y}_{k-1}) = \frac{p(\vec{x}_k, \vec{y}_k, \mathbf{Y}_{k-1})}{p(\vec{y}_k, \mathbf{Y}_{k-1})} \quad (7.8)$$

Einsetzen der ebenfalls mittels der Bayes'schen Regel gewonnenen Zusammenhänge

$$p(\vec{x}_k, \vec{y}_k, \mathbf{Y}_{k-1}) = p(\vec{y}_k|\vec{x}_k, \mathbf{Y}_{k-1}) p(\vec{x}_k, \mathbf{Y}_{k-1}) \quad (7.9)$$

und

$$p(\vec{y}_k, \mathbf{Y}_{k-1}) = p(\vec{y}_k|\mathbf{Y}_{k-1}) p(\mathbf{Y}_{k-1}) \quad (7.10)$$

führt auf

$$\begin{aligned} p(\vec{x}_k|\mathbf{Y}_k) &= \frac{p(\vec{y}_k|\vec{x}_k, \mathbf{Y}_{k-1}) p(\vec{x}_k, \mathbf{Y}_{k-1})}{p(\vec{y}_k|\mathbf{Y}_{k-1}) p(\mathbf{Y}_{k-1})} \\ &= \frac{p(\vec{y}_k|\vec{x}_k, \mathbf{Y}_{k-1}) p(\vec{x}_k|\mathbf{Y}_{k-1})}{p(\vec{y}_k|\mathbf{Y}_{k-1})}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Mit Gl. (7.2) folgt daraus

$$p(\vec{x}_k|\mathbf{Y}_k) = \frac{p(\vec{y}_k|\vec{x}_k) p(\vec{x}_k|\mathbf{Y}_{k-1})}{p(\vec{y}_k|\mathbf{Y}_{k-1})}. \quad (7.12)$$

Gl. (7.12) beschreibt, wie Beobachtungen die Dichtefunktion des Systemzustandes beeinflussen; zusammen mit Gl. (7.7) zur zeitlichen Propagation ist damit das nichtlineare Filterproblem in diskreter Zeit formal gelöst. Eine analytische Lösung dieser Gleichungen ist im Allgemeinen nicht möglich; unter den einschränkenden Annahmen linearer System- und Messmodelle und gaußverteilter Zufallsvariablen gelingt eine analytische Lösung: das Kalman-Filter<sup>2</sup>. Eine allgemeine Möglichkeit zur numerischen Lösung dieser Gleichungen stellen die Partikelfilter dar.

---

<sup>2</sup>Eine Herleitung der Kalman-Filter-Gleichungen aus Gl. (7.7) und (7.12) ist in [89] zu finden.

## 7.3 Partikelfilter

Im Folgenden soll der einfachste Partikelfilter, der Bootstrap-Filter, beschrieben werden. Hierzu wird von den nichtlinearen System- und Messmodellen

$$\vec{x}_k = \vec{f}(\vec{x}_{k-1}) + \vec{w}_k \quad (7.13)$$

$$\vec{y}_k = \vec{h}(\vec{x}_k) + \vec{v}_k \quad (7.14)$$

ausgegangen. Bei dem Systemrauschen  $\vec{w}_k$  und dem Messrauschen  $\vec{v}_k$  handelt es sich um weißes Rauschen, die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen werden im Folgenden mit  $p_{\vec{w}_k}$  und  $p_{\vec{v}_k}$  bezeichnet, hierbei muss es sich nicht um Gaußverteilungen handeln. Es wird vorausgesetzt, dass  $\vec{w}_k$  und  $\vec{v}_k$  nicht miteinander korreliert sind.

### 7.3.1 Repräsentation der WDF

Grundlage des Partikelfilters ist die Darstellung einer Wahrscheinlichkeitsdichte mit Hilfe von Partikeln. Eine Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(\vec{x}_{k-1}|\mathbf{Y}_{k-1})$  wird approximiert, indem  $N$  Partikel  $\vec{x}_{k-1}^i$  mit einem Zufallszahlengenerator gezogen werden, der Zufallsvektoren mit eben dieser Wahrscheinlichkeitsdichte produziert:

$$\vec{x}_{k-1}^i \propto p(\vec{x}_{k-1}|\mathbf{Y}_{k-1}) \quad (7.15)$$

Hierbei beschreibt das Symbol  $\propto$  das Ziehen von Zufallsvektoren entsprechend einer Dichtefunktion. Die Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(\vec{x}_{k-1}|\mathbf{Y}_{k-1})$  wird nun dargestellt durch

$$p(\vec{x}_{k-1}|\mathbf{Y}_{k-1}) = \sum_{i=1}^N w^i \cdot \delta(\vec{x}_{k-1} - \vec{x}_{k-1}^i) , \quad (7.16)$$

wobei  $w^i$  Gewichte sind, für die  $\sum_{i=1}^N w^i = 1$  gilt. Bei  $\delta$  handelt es sich um die Dirac'sche Delta-Funktion, die durch

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = 0 \quad \text{für } \vec{x} \neq \vec{x}_0 \quad (7.17)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) dx = 1 \quad (7.18)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) dx = f(\vec{x}_0) \quad (7.19)$$

gekennzeichnet ist. Die Gleichungen (7.15)–(7.16) stellen zugleich den Initialisierungsschritt des Filteralgorithmus dar, hierbei wird  $w^i = 1/N$  gewählt. Es lässt sich zeigen, dass der Approximationsfehler bei dieser Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichte für  $N \rightarrow \infty$  verschwindet. Auf der anderen Seite ist klar, dass bei einer geringen Anzahl von Partikeln die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion nur ungenügend approximiert wird.

### 7.3.2 Propagationsschritt

Die propagierte Wahrscheinlichkeitsdichte erhält man durch Auswertung der Chapman-Kolmogorov-Gl. (7.7). Dazu muss die Dichte  $p(\vec{x}_k|\vec{x}_{k-1})$  bestimmt werden: Setzt man in das Systemmodell Gl. (7.13) einen spezifischen Zustandsvektor  $\vec{x}_{k-1}$  ein, so erkennt man, dass  $\vec{x}_k$  die gleiche Wahrscheinlichkeitsdichte besitzen muss wie das Systemrauschen  $\vec{w}_k$ , der Mittelwert ist jedoch um  $\vec{f}(\vec{x}_{k-1})$  verschoben. Damit ist die gesuchte Dichte gegeben durch

$$p(\vec{x}_k|\vec{x}_{k-1}) = p_{\vec{w}_k}(\vec{x}_k - \vec{f}(\vec{x}_{k-1})) . \quad (7.20)$$

Einsetzen in Gl. (7.7) liefert

$$\begin{aligned} p(\vec{x}_k|\mathbf{Y}_{k-1}) &= \int_{V_{\vec{x}_{k-1}}} p(\vec{x}_k|\vec{x}_{k-1}) p(\vec{x}_{k-1}|\mathbf{Y}_{k-1}) d\vec{x}_{k-1} \\ &= \int_{V_{\vec{x}_{k-1}}} p_{\vec{w}_k}(\vec{x}_k - \vec{f}(\vec{x}_{k-1})) \sum_{i=1}^N w^i \cdot \delta(\vec{x}_{k-1} - \vec{x}_{k-1}^i) d\vec{x}_{k-1} \\ &= \sum_{i=1}^N w^i \cdot p_{\vec{w}_k}(\vec{x}_k - \vec{f}(\vec{x}_{k-1}^i)) . \end{aligned} \quad (7.21)$$

Die propagierte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion kann also approximiert werden, indem neue Partikel  $\vec{x}_k^i$  entsprechend der Wahrscheinlichkeitsdichte  $p_{\vec{w}_k}(\vec{x}_k - \vec{f}(\vec{x}_{k-1}^i))$  gezogen werden:

$$\vec{x}_k^i \propto p_{\vec{w}_k}(\vec{x}_k - \vec{f}(\vec{x}_{k-1}^i)) \quad (7.22)$$

Die Gewichte  $w^i$  bleiben hierbei unverändert.

Alternativ zum Ziehen entsprechend  $p_{\vec{w}_k}(\vec{x}_k - \vec{f}(\vec{x}_{k-1}^i))$  können auch Hilfspartikel  $\vec{\omega}_{k-1}^i$  entsprechend  $p_{\vec{w}_k}(\vec{x}_k)$  gezogen werden,

$$\vec{\omega}_{k-1}^i \propto p_{\vec{w}_k}(\vec{x}_k) , \quad (7.23)$$

die Partikel  $\vec{x}_k^i$  ergeben sich dann durch

$$\vec{x}_k^i = \vec{\omega}_{k-1}^i + \vec{f}(\vec{x}_{k-1}^i) . \quad (7.24)$$

### 7.3.3 Estimationsschritt

Die Berücksichtigung von Messwerten erfolgt durch Auswertung von Gl. (7.12). Aufgrund analoger Überlegungen wie schon beim Propagationsschritt erhält man mit dem Messmodell Gl. (7.14) für die bedingte Dichte der Messung

$$p(\vec{y}_k|\vec{x}_k) = p_{\vec{v}_k}(\vec{y}_k - \vec{h}(\vec{x}_k)) , \quad (7.25)$$

Einsetzen in Gl. (7.12) führt auf

$$\begin{aligned}
 p(\vec{x}_k | \mathbf{Y}_k) &= \frac{p(\vec{y}_k | \vec{x}_k) p(\vec{x}_k | \mathbf{Y}_{k-1})}{p(\vec{y}_k | \mathbf{Y}_{k-1})} \\
 &= c \cdot p(\vec{y}_k | \vec{x}_k) p(\vec{x}_k | \mathbf{Y}_{k-1}) \\
 &= c \cdot p_{\vec{v}_k}(\vec{y}_k - \vec{h}(\vec{x}_k)) \sum_{i=1}^N w^i \cdot \delta(\vec{x}_k - \vec{x}_k^i) \\
 &= \sum_{i=1}^N c \cdot p_{\vec{v}_k}(\vec{y}_k - \vec{h}(\vec{x}_k^i)) \cdot w^i \cdot \delta(\vec{x}_k - \vec{x}_k^i) .
 \end{aligned} \tag{7.26}$$

Im Estimationsschritt werden folglich neue Gewichte  $w^{i,+}$  gemäß

$$w^{i,+} = c \cdot p_{\vec{v}_k}(\vec{y}_k - \vec{h}(\vec{x}_k^i)) \cdot w^i \tag{7.27}$$

berechnet, die Normierungskonstante  $c$  wird dabei so gewählt, dass die Summe der Gewichte eins ergibt:

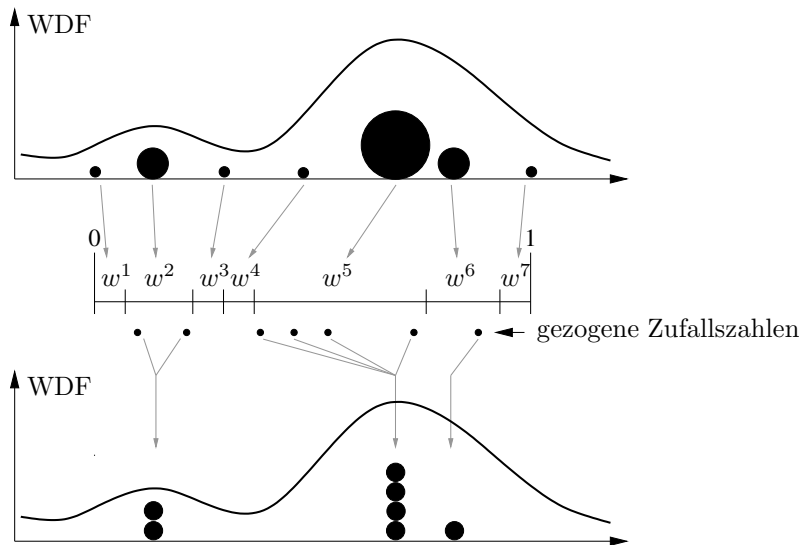
$$c = \frac{1}{\sum_{i=1}^N p_{\vec{v}_k}(\vec{y}_k - \vec{h}(\vec{x}_k^i)) \cdot w^i} \tag{7.28}$$

Die Partikel bleiben im Estimationsschritt unverändert.

### 7.3.4 Resampling

Im Propagationsschritt des Filters, Gl. (7.23) und Gl. (7.24), werden die Partikel anhand des Systemmodells propagiert und entsprechend dem Systemrauschen immer weiter verteilt. Im Messschritt, Gl. (7.27) und (7.28), erhalten nur diejenigen Partikel ein großes Gewicht, die gut zu dem vorliegenden Messwert passen. Ohne weitere Maßnahmen würden dadurch nach wenigen Iterationsschritten einige wenige Partikel einen Großteil der Gewichtung auf sich vereinen, während die Gewichte der restlichen Partikel fast verschwinden. Dieser Mechanismus ist als Degeneration der Partikelwolke bekannt und muss verhindert werden, da die Partikel in diesem Fall keine gute Approximation der Wahrscheinlichkeitsdichte mehr darstellen, der Filter divergiert. Da es nicht möglich ist, mit unendlich vielen Partikeln zu arbeiten, müssen andere Wege gefunden werden, um diese Degeneration zu verhindern. Eine Möglichkeit hierzu ist das Resampling.

Zur Beschreibung des Resamplings soll von der in Abb. 7.1 oben dargestellten Situation ausgegangen werden. Gezeigt ist dort die tatsächliche Wahrscheinlichkeitsdichte sowie deren Approximation mit Hilfe von Partikeln, wobei der Durchmesser der Partikel deren Gewicht symbolisieren soll. Hierbei handelt es sich natürlich um kein realistisches Szenario, in der Regel werden einige hundert bis mehrere tausend Partikel benötigt, um einen funktionierenden Filter zu erhalten. Aufgrund der Verarbeitung von Beobachtungen haben einige wenige Partikel ein großes Gewicht, die Gewichte der restlichen Partikel verschwinden nahezu. Ziel des Resamplings ist es, neue Partikel zu wählen, die alle das

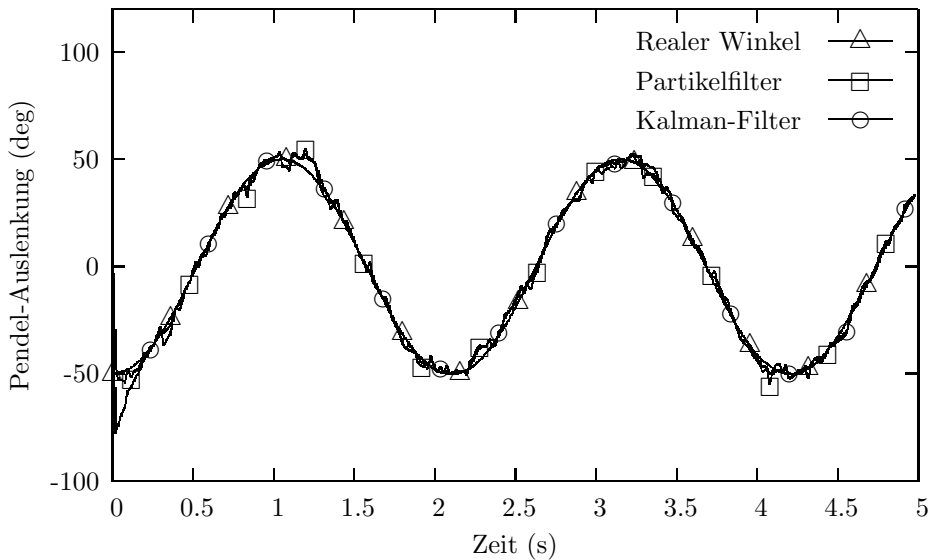


**Abbildung 7.1:** Schematische Darstellung des Resamplings. Oben Partikel und deren Gewichte vor dem Resampling, unten nach dem Resampling.

gleiche Gewicht,  $1/N$ , besitzen. Neben dem Verhindern der Degeneration wird dadurch auch sichergestellt, dass nicht ein Großteil der Rechenzeit auf Partikel verwendet wird, die nichts zur Approximation der Wahrscheinlichkeitsdichte beitragen. Zunächst wird nun das Intervall  $[0,1]$  in  $N$  Intervalle entsprechend der Gewichte der Partikel eingeteilt, siehe Abb. 7.1 Mitte. Anschließend werden  $N$  Zufallszahlen entsprechend einer Gleichverteilung aus dem Intervall  $[0,1]$  gezogen. Der Partikel, in dessen Intervall eine gezogene Zufallszahl fällt, wird reproduziert. Die Partikel mit großem Gewicht werden häufiger reproduziert, Partikel mit geringem Gewicht unter Umständen garnicht. Das Ergebnis des Resamplings für den in Abb. 7.1 Mitte gezeigten, hypothetischen Satz Zufallszahlen ist in Abb. 7.1 unten dargestellt. Alle Partikel besitzen nun das selbe Gewicht und approximieren nach wie vor die tatsächliche Wahrscheinlichkeitsdichte. Man erkennt aber auch eine potentielle Schwierigkeit, die Vielfalt der Partikelpositionen hat abgenommen.

Liegt nur geringes Systemrauschen vor, werden im Propagationsschritt des Filters die Partikel nicht ausreichend verteilt, was dann trotz Resampling zur Divergenz des Filters führen kann. Abhilfe schafft in diesen Fällen eine als Roughening bekannte Technik, die im Wesentlichen einer künstlichen Erhöhung des Systemrauschens entspricht.

Das beschriebene Resampling muss nicht nach jedem Messschritt durchgeführt werden. Einen Hinweis, wann ein Resampling durchgeführt werden muss, liefert die Anzahl der



**Abbildung 7.2:** Schätzung der Pendelschwingung bei einer Anfangsauslenkung von -50 Grad, wobei Partikelfilter und Kalman-Filter mit jeweils +50 Grad initialisiert wurden.

effektiven Partikel. Diese ist gegeben durch

$$N_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (w^i)^2} . \quad (7.29)$$

Haben alle Partikel das gleiche Gewicht  $1/N$ , so ist  $N_{eff} = N$ . Im Extremfall einer degenerierten Partikelwolke, ein einziger Partikel besitzt das gesamte Gewicht, ist  $N_{eff} = 1$ . Ein Resampling wird nur durchgeführt, wenn  $N_{eff}$  unter eine bestimmte Schwelle, meist formuliert als ein bestimmter Prozentsatz von  $N$ , gesunken ist.

Mit dem Resampling und dem zuvor beschriebenen Mess- und Propagationsschritt kann bereits ein einfacher Partikelfilter realisiert werden. Die Möglichkeit der Einführung einer Importance Density wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit ausgeblendet; deren Einführung kann jedoch je nach Applikation von Vorteil sein.

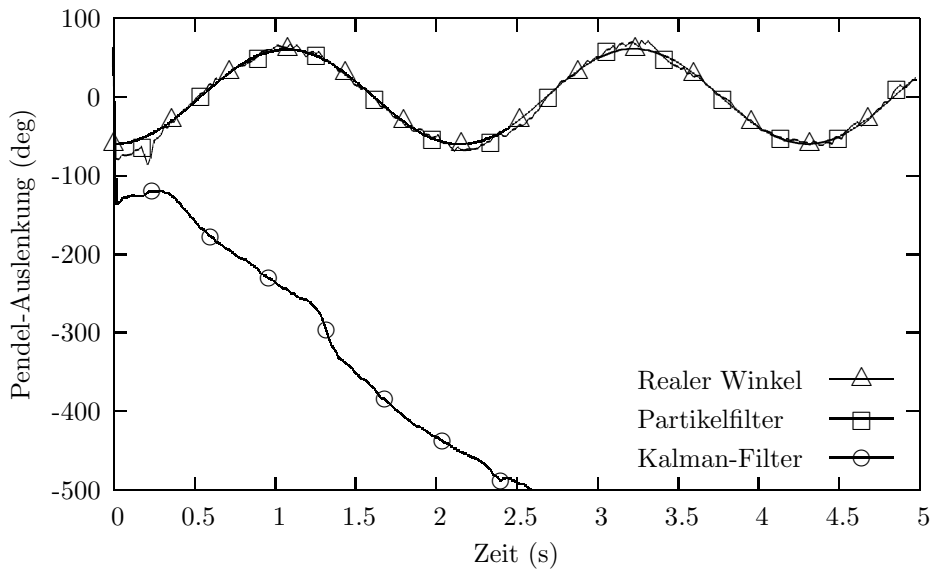
### 7.3.5 Simulationsergebnisse

Anhand von zwei Beispielen soll im Folgenden ein Eindruck von den Eigenschaften des Partikelfilters vermittelt werden.

#### Schätzung der Auslenkung eines Pendels

Als erstes Beispiel soll die Auslenkung eines Pendels anhand von Messungen des Abstandes zwischen dem Lot durch den Drehpunkt und dem Ende des Pendels betrachtet





**Abbildung 7.3:** Schätzung der Pendelschwingung bei einer Anfangsauslenkung von -60 Grad, wobei Partikelfilter und Kalman-Filter mit jeweils +60 Grad initialisiert wurden.

werden. Das Systemmodell ist durch die nichtlineare Differentialgleichung des Pendels Gl. (2.109) gegeben, die Messgleichung lautet

$$\tilde{y} = l \cdot \sin \varphi, \quad (7.30)$$

siehe hierzu auch Abb. 2.8.

Für dieses Schätzproblem wurden ein Partikelfilter und ein erweitertes Kalman-Filter entworfen. Der MATLAB-Code der beiden Filter ist in Anhang C zu finden.

Die Anfangsauslenkung des Pendels wurde nun zunächst zu -50 Grad gewählt, wobei beide Filter mit jeweils +50 Grad initialisiert wurden; die zugehörige Anfangsunsicherheit wurde entsprechend gewählt. Abb. 7.2 zeigt die Schätzungen beider Filter. Nach einer kurzen Einschwingphase, die beim Kalman-Filter etwas unruhiger und länger ausfällt, sind beide Filter in der Lage, die Pendelposition zu schätzen.

Nun wurden die Anforderungen weiter verschärft, indem die Anfangsauslenkung des Pendels zu -60 Grad gewählt wurde, beide Filter wurden mit jeweils +60 Grad initialisiert. Wie man in Abb. 7.3 erkennt, ist der Partikelfilter auch in diesem Szenario in der Lage, die Pendelposition korrekt zu schätzen – das erweiterte Kalman-Filter divergiert jedoch.

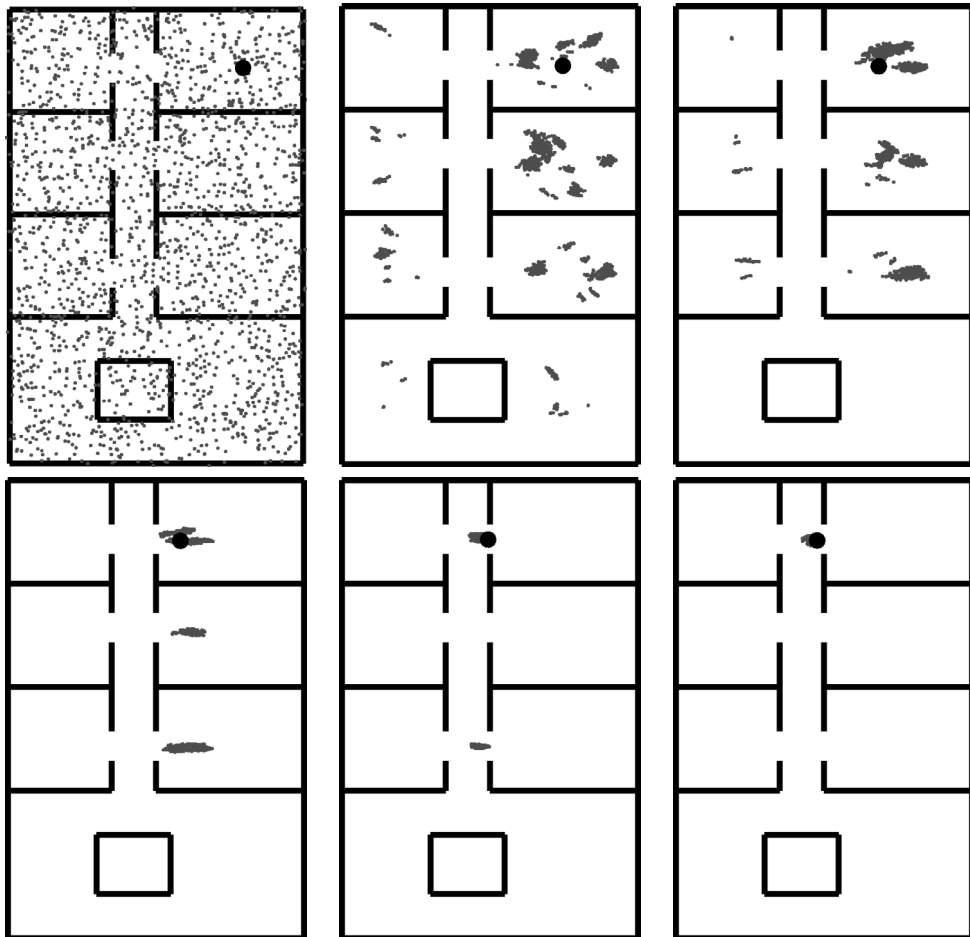
Bei nicht zu großen Anfangsfehlern liefert das Kalman-Filter bei diesem Schätzproblem vergleichbare Ergebnisse wie das Partikelfilter – letzteres ist bei großen Anfangsfehlern jedoch deutlich robuster.

### Positionsbestimmung mit Abstandsmessungen

Während bei einem erweiterten Kalman-Filter und den Sigma-Point-Filtern nur unimodale Dichtefunktionen möglich sind, stellen multimodale Dichten beim Partikelfilter kein Problem dar. Dies soll anhand einer Simulation der Positionsbestimmung mit Hilfe von Abstandsmessungen verdeutlicht werden.

Hierzu wurde angenommen, dass von einem Gebäude ein Grundrissplan vorhanden ist. Ein fahrbarer Roboter befindet sich an einem unbekannten Ort innerhalb dieses Gebäudes. Der Roboter ist mit einem Odometer und einem Gyroskop ausgerüstet; desweiteren ist ein Laser-Scanner vorhanden, mit dem Abstandsmessungen innerhalb eines Öffnungswinkels von 180 Grad zu den umgebenden Wänden vorgenommen werden können. Diese Abstandsmessungen werden mit einem Partikelfilter verarbeitet, Odometrie und Gyroskop-Daten werden als bekannte Eingangsgrößen behandelt. Die Partikelwolke und die Position des Roboters sind in Abb. 7.4 für verschiedene Zeitschritte zu sehen. Für den ersten Zeitschritt (obere Reihe links) wurde für die Partikelwolke eine Gleichverteilung angenommen, da keinerlei Informationen über die Roboterposition vorlagen. Nach einigen Zeitschritten führt die Verarbeitung der Messungen dazu, dass sich die Partikel zunächst vornehmlich in den Räumen auf der rechten Seite konzentrieren. Die Räume auf der linken Seite sind kleiner, so dass diese zunächst unwahrscheinlicher werden und schließlich ab dem vierten dargestellten Zeitschritt (untere Reihe links) anhand der vorliegenden Messungen bereits ganz ausgeschlossen werden können. Als der Roboter den Gang erreicht, sind alle Mehrdeutigkeiten eliminiert und die Position des Roboters eindeutig bestimmt.

Ohne die Möglichkeit mit multimodalen Dichtefunktionen zu arbeiten, ist in diesem Szenario eine initiale Positionsbestimmung unmöglich. Ist die Position des Roboters aber einmal gefunden, kann die Roboterposition auch mit einem Kalman-Filter propagiert und korrigiert werden, was wesentlich weniger Rechenzeit benötigt.



**Abbildung 7.4:** Positionsschätzung eines fahrbaren Roboters mit Hilfe von Abstandsmessungen; erster Zeitschritt obere Reihe links, letzter Zeitschritt untere Reihe rechts. Die Anfangsposition befindet sich im rechten oberen Raum. Die Partikelwolke zeigt mögliche Positionen auf, bis bei Erreichen des Ganges alle Mehrdeutigkeiten eliminiert sind und die wahre Position gefunden ist.