

# 9 Anwendungsbeispiel Transfer Alignment

Unter Transfer Alignment versteht man die Bestimmung einer initialen Navigationslösung eines Navigationssystems unter Verwendung von Informationen eines anderen Navigationssystems. Das zu initialisierende Navigationssystem wird als Slave bezeichnet. Das Navigationssystem, das die zur Initialisierung verwendeten Informationen zur Verfügung stellt, wird Master oder Host genannt. Die Notwendigkeit, ein Navigationssystem mit Hilfe eines anderen zu initialisieren, tritt bei einer Reihe von Anwendungen auf. Beispiele hierfür wären die Initialisierung des Navigationssystems eines Flugkörpers, der an einem Flugzeug montiert ist oder die Bestimmung der Ausrichtung eines flugzeuggetragenen SAR-Sensors, die sehr genau erfolgen muss damit bei der Georeferenzierung der vom SAR-Sensor gelieferten Bilder die Fehler möglichst gering ausfallen. Auch andere an einem Flugzeug montierte Sensoren benötigen hochgenaue Lageinformationen, ein weiteres Beispiel wäre ein Warnsensor, der anfliegende Objekte detektiert und deren Position schätzt.

Bei der Initialisierung des Slave ist die Bestimmung von Position und Geschwindigkeit meist unkritisch, die Initialisierung der Lage hingegen ist ein komplexes Problem. Meist werden als erster Schritt vom Slave die Lageinformationen des Masters übernommen, dies wird auch als 'one-shot alignment' bezeichnet. Die dabei erzielte Genauigkeit ist in der Regel unzureichend, da sich die Ausrichtung des Slave Systems zwangsläufig von der Ausrichtung des Masters unterscheidet: Unter Umständen sind die mechanischen Gegebenheiten, die die relative Orientierung von Master und Slave bestimmen, nur näherungsweise bekannt. Häufig variiert diese relative Orientierung aber auch mit der Zeit, z.B. wenn das Slave-System an einem Flügel oder Höhenleitwerk befestigt ist, das unter Krafteinwirkung natürlich flexibel reagiert.

Im Folgenden werden unterschiedliche Transfer-Alignment-Verfahren aufgezeigt und in numerischen Simulationen verglichen.

## 9.1 Konventionelle Transfer-Alignment-Verfahren

Bei einem konventionellen Transfer Alignment wird die Lage des Slave von einem Kalman-Filter geschätzt, das die Geschwindigkeit des Masters als Messung verarbeitet. Um den Einfluss von Vibrationen zu minimieren, wird manchmal auch das Integral der Geschwindigkeit des Masters als Messwert verwendet, siehe [106]. Dies soll jedoch, ebenso wie die Verwendung der zweifach integrierten Geschwindigkeit, nicht weiter betrachtet werden.

Das Systemmodell des bei einem solchen Transfer Alignment benötigten Kalman Filters kann identisch zu dem Systemmodell gewählt werden, das in Abschnitt 8.2.1 zur GPS/INS Integration verwendet wurde. Wenn das Alignment Filter anschließend nicht als Navigationsfilter dient, werden natürlich keine Positionsfehler im Zustandsvektor benötigt und können eingespart werden.

Bei dem zur Verarbeitung der Geschwindigkeit des Masters benötigten Messmodell muss beachtet werden, dass sich die Geschwindigkeiten von Master und Slave bei vorliegenden Drehbewegungen unterscheiden. Das körperfeste Koordinatensystem des Masters wird durch einen Index  $bH$  gekennzeichnet, beim Slave wird die Indizierung  $bS$  verwendet. Der Zusammenhang der Geschwindigkeiten von Master und Slave lautet damit

$$\begin{aligned}\vec{v}_{ebH}^n &= \vec{v}_{ebS}^n + \mathbf{C}_{bS}^n \vec{\omega}_{ebS}^{bS} \times \vec{l}^{bS} \\ &\approx \vec{v}_{ebS}^n + \mathbf{C}_{bS}^n \vec{\omega}_{ibS}^{bS} \times \vec{l}^{bS} .\end{aligned}\quad (9.1)$$

Der Vektor  $\vec{l}^{bS}$  weist hierbei vom Ursprung des körperfesten Koordinatensystems des Masters zum Ursprung des körperfesten Koordinatensystems des Slaves. Die Fehler  $\psi_{n,bS}$  der geschätzten Slave-Lage werden über die Gleichung

$$\mathbf{C}_{bS}^n = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Psi}_{n,bS}) \hat{\mathbf{C}}_{bS}^n \quad (9.2)$$

definiert, die dem Slave zur Verfügung stehenden Drehraten  $\vec{\omega}_{ibS}^{bS}$  unterscheiden sich von den realen Drehraten aufgrund der Drehratensensorbiase  $\vec{b}_{\omega,S}$ , das Rauschen der Drehratensensoren soll für die Berechnung der Relativgeschwindigkeit vernachlässigt werden:

$$\vec{\omega}_{ibS}^{bS} \approx \vec{\omega}_{ibS}^{bS} + \vec{b}_{\omega,S} \quad (9.3)$$

Damit erhält man schließlich das Messmodell

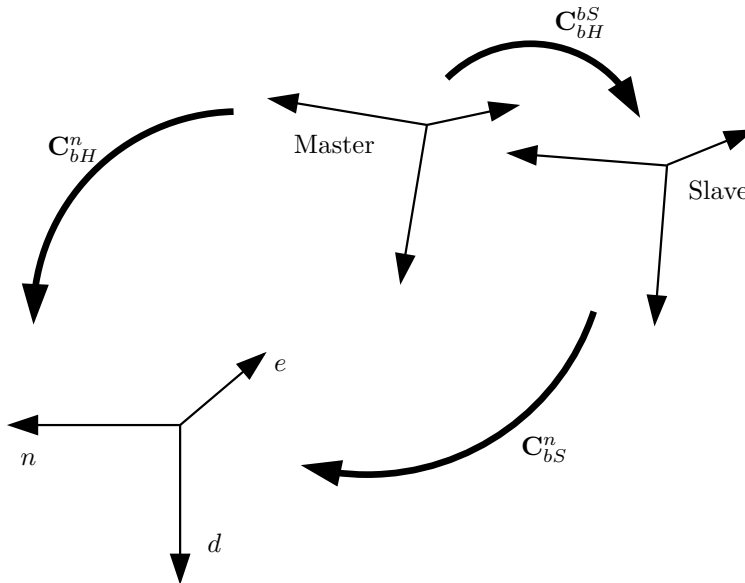
$$\vec{v}_{ebH}^n = \vec{v}_{ebS}^n + (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Psi}_{n,bS}) \hat{\mathbf{C}}_{bS}^n (\vec{\omega}_{ibS}^{bS} - \vec{b}_{\omega,S}) \times \vec{l}^{bS} . \quad (9.4)$$

Eine weitere Beschreibung dieses Alignment-Filters ist aufgrund der Parallelität zu der in Abschnitt 8.2 beschriebenen GPS/INS-Integration hier nicht notwendig.

Der Nachteil eines solchen konventionellen Transfer-Alignment-Verfahrens ist, dass zur vollen Beobachtbarkeit der Lage des Slave-Systems horizontale Beschleunigungen benötigt werden, das Flugzeug muss daher während des Alignments eine S-Kurve oder Ähnliches fliegen. Dieser Nachteil kann durch Einsatz eines Rapid-Transfer-Alignment-Verfahrens überwunden werden, das darüber hinaus eine schnellere Initialisierung der Slave-Lage erlaubt.

## 9.2 Rapid Transfer Alignment

Rapid-Transfer-Alignment-Verfahren sind dadurch gekennzeichnet, dass neben der Geschwindigkeit des Masters auch noch die Lage des Masters als Messung im Alignment



**Abbildung 9.1:** Körperfeste Koordinatensysteme und relative Orientierung von Master und Slave.

Filter verarbeitet wird. Dazu muss die relative Orientierung zwischen Master und Slave explizit geschätzt werden, der Zustandsvektor des Alignment-Filters muss daher um drei Lagefehler der geschätzten relativen Orientierung erweitert werden. Eine der ersten Beschreibungen eines solchen Rapid-Transfer-Alignment-Verfahrens ist in [62] zu finden, die Ergebnisse von Flugversuchen werden in [36],[37] und [113] beschrieben.

Für die Herleitung der zur Verarbeitung der Lage des Masters benötigten Messgleichung wird die Lage des Masters als perfekt angenommen, diese soll in Form der Richtungskosinusmatrix  $C_{bH}^n$  vorliegen. Zusätzlich wird angenommen, dass sich die relative Orientierung von Master und Slave nicht ändert, die Schätzung des Slaves dieser relativen Orientierung ist durch  $\hat{C}_{bS}^{bH}$  gegeben. Die eigentliche Lagemessung ist durch den Unterschied zwischen der Lage des Masters  $C_{bH}^n$  und der erwarteten Lage des Masters  $\hat{C}_{bH}^n$  bestimmt, die auf der geschätzten relativen Orientierung  $\hat{C}_{bS}^{bH}$  und der geschätzten Lage  $\hat{C}_n^{bS}$  des Slaves basiert. Die Zusammenhänge zwischen den beteiligten Koordinatensystemen sind in Abb. 9.1 veranschaulicht; genau genommen existieren in diesem Szenario zwei Navigationskoordinatensysteme, deren Ursprünge mit den Ursprüngen der körperfesten Koordinatensysteme von Master und Slave zusammenfallen. Zur besseren Übersichtlichkeit ist in Abb. 9.1 nur ein Koordinatensystem mit den Koordinatenachsen Norden, Osten und Unten dargestellt. Das ist zulässig, da durch die Richtungskosinusmatrizen sowieso nur Drehungen, nicht aber Translationen erfasst werden und somit die Positionen der Koordinatensystemursprünge irrelevant sind.

Der Unterschied zwischen der Lage des Masters und der vom Slave erwarteten Lage des Masters kann wie folgt beschrieben werden:

$$\mathbf{C}_{bH}^n = (\mathbf{I} + \mathbf{\Psi}_{n,bH}) \hat{\mathbf{C}}_{bH}^n \quad (9.5)$$

Die als Messung verarbeiteten Größen sind durch die drei Winkelfehler  $\vec{\psi}_{n,bH}$  gegeben, die in der kreuzproduktbildenden Matrix  $\mathbf{\Psi}_{n,bH}$  enthalten sind. Um diese berechnen zu können, muss Gl. (9.5) nach dieser Matrix aufgelöst werden. Man erhält

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{bH}^n \hat{\mathbf{C}}_n^{bH} &= (\mathbf{I} + \mathbf{\Psi}_{n,bH}) \\ \mathbf{\Psi}_{n,bH} &= \mathbf{C}_{bH}^n \hat{\mathbf{C}}_n^{bH} - \mathbf{I} \\ &= \mathbf{C}_{bH}^n \hat{\mathbf{C}}_{bS}^{bH} \hat{\mathbf{C}}_n^{bS} - \mathbf{I} . \end{aligned} \quad (9.6)$$

Das Messmodell beschreibt die Beziehung zwischen den so gewonnenen Winkelfehlern  $\vec{\psi}_{n,bH}$  und den Fehlern  $\vec{\psi}_{n,bS}$  der Slave-Lage und der geschätzten relativen Orientierung  $\vec{\psi}_{bS,bH}$  von Master und Slave. Mit Gl. (9.2) und dem Zusammenhang

$$\mathbf{C}_{bH}^{bS} = (\mathbf{I} + \mathbf{\Psi}_{bS,bH}) \hat{\mathbf{C}}_{bH}^{bS} \quad (9.7)$$

kann man schreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{bH}^n &= \mathbf{C}_{bS}^n \mathbf{C}_{bH}^{bS} \\ \mathbf{C}_{bH}^n &= (\mathbf{I} + \mathbf{\Psi}_{n,bS}) \hat{\mathbf{C}}_{bS}^n (\mathbf{I} + \mathbf{\Psi}_{bS,bH}) \hat{\mathbf{C}}_{bH}^{bS} \\ \mathbf{C}_{bH}^n \hat{\mathbf{C}}_n^{bH} &= (\mathbf{I} + \mathbf{\Psi}_{n,bS}) \hat{\mathbf{C}}_{bS}^n (\mathbf{I} + \mathbf{\Psi}_{bS,bH}) \hat{\mathbf{C}}_{bH}^{bS} \hat{\mathbf{C}}_n^{bH} \\ \mathbf{C}_{bH}^n \hat{\mathbf{C}}_n^{bH} - \mathbf{I} &= (\mathbf{I} + \mathbf{\Psi}_{n,bS}) \hat{\mathbf{C}}_{bS}^n (\mathbf{I} + \mathbf{\Psi}_{bS,bH}) \hat{\mathbf{C}}_{bH}^{bS} \hat{\mathbf{C}}_n^{bH} - \mathbf{I} \end{aligned} \quad (9.8)$$

Durch Vergleich mit Gl. (9.6) erkennt man, dass die linke Seite von Gl. (9.8) gerade der kreuzproduktbildenden Matrix der als Messung verarbeiteten Winkelfehler entspricht. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{\Psi}_{n,bH} &= (\mathbf{I} + \mathbf{\Psi}_{n,bS}) \hat{\mathbf{C}}_{bS}^n (\mathbf{I} + \mathbf{\Psi}_{bS,bH}) \hat{\mathbf{C}}_n^{bS} - \mathbf{I} \\ &= \left( \hat{\mathbf{C}}_{bS}^n + \hat{\mathbf{C}}_{bS}^n \mathbf{\Psi}_{bS,bH} + \mathbf{\Psi}_{n,bS} \hat{\mathbf{C}}_{bS}^n + \mathbf{\Psi}_{n,bS} \hat{\mathbf{C}}_{bS}^n \mathbf{\Psi}_{bS,bH} \right) \hat{\mathbf{C}}_n^{bS} - \mathbf{I} \\ &= \hat{\mathbf{C}}_{bS}^n \mathbf{\Psi}_{bS,bH} \hat{\mathbf{C}}_n^{bS} + \mathbf{\Psi}_{n,bS} + \mathbf{\Psi}_{n,bS} \hat{\mathbf{C}}_{bS}^n \mathbf{\Psi}_{bS,bH} \hat{\mathbf{C}}_n^{bS} . \end{aligned} \quad (9.9)$$

Da Winkelfehler als klein angenommen werden können, ist das Produkt von Winkelfehlern vernachlässigbar, man erhält

$$\mathbf{\Psi}_{n,bH} = \hat{\mathbf{C}}_{bS}^n \mathbf{\Psi}_{bS,bH} \hat{\mathbf{C}}_n^{bS} + \mathbf{\Psi}_{n,bS} . \quad (9.10)$$

Durch Übergang zur vektoriellen Schreibweise kann man schließlich das Messmodell formulieren:

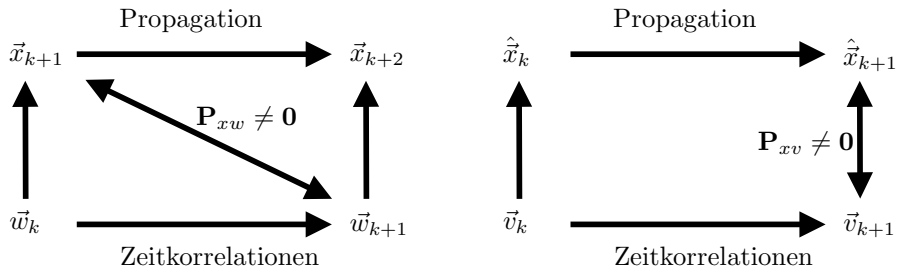
$$\vec{\psi}_{n,bH} = \hat{\mathbf{C}}_{bS}^n \vec{\psi}_{bS,bH} + \vec{\psi}_{n,bS} + [\text{Rauschen}] \quad (9.11)$$

Wird neben der Geschwindigkeit des Masters zusätzlich mit Hilfe des Messmodells Gl. (9.11) die Lage des Masters als Messung vom Alignment-Filter verarbeitet, ist für die vollständige Beobachtbarkeit der Slave-Lage ein sogenanntes wing-rock-Manöver ausreichend, es müssen also keine S-Kurven mehr geflogen werden. Unter wing rock versteht man ein kurzes Rollen in eine Schräglage und wieder zurück. Die unter Umständen wenigen Sekunden, die ein Rapid Transfer Alignment dauert, genügen oft nicht, um die Inertialsensoren des Slave zu kalibrieren. Stehen nach dem Alignment weiterhin Stützinformationen z.B. durch einen GPS-Empfänger zur Verfügung, kann diese Kalibration auch im Anschluss an das Alignment erfolgen, siehe [112].

Bei der Entwicklung eines Alignment-Verfahrens muss die Vibrationsumgebung, in der sich das Slave-System befindet, besonders beachtet werden. So wurden beispielsweise in [105] Positionsinformationen im Alignment-Filter verarbeitet, da sich der resultierende Algorithmus als robuster gegenüber den dort vorliegenden Vibrationen herausgestellt hatte. Vibrationen können als rotatorische und translatorische Oszillationen betrachtet werden, die anhand der Inertialsensordaten nicht korrekt aufgelöst werden. Diese Vibrationen stellen sich daher in den Inertialsensordaten als zusätzliches Rauschen dar, das bei der üblichen Berücksichtigung der Inertialsensordaten als Eingangsgrößen im Propagationsschritt des Filters als Systemrauschen in den Filtergleichungen erscheint. Da typischerweise die Eigenfrequenzen des Systems angeregt werden, konzentriert sich die Rauschleistung des vibrationsinduzierten Rauschens bei bestimmten Frequenzen, die von Anwendung zu Anwendung stark variieren können. In [62] wird von vibrationsinduziertem Rauschen mit Frequenzen um die zehn Hertz berichtet, in [106] konzentriert sich die Rauschleistung bei fünfzig Hertz nahe der halben Abtastfrequenz der dort eingesetzten Inertialsensoren. In [125] wurden bei der Analyse von Flugversuchsdaten Vibrationen um die achtzig Hertz festgestellt. Hierbei besteht immer die Möglichkeit, dass die eigentlichen Vibrationsfrequenzen höher liegen und durch Aliasing in den festgestellten Frequenzbereich abgebildet werden. Auf jeden Fall handelt es sich bei dem vibrationsinduzierten Rauschen um zeitkorreliertes Rauschen. Werden diese Zeitkorrelationen ignoriert, kann das einen negativen Einfluss auf die Dauer und die Genauigkeit des Transfer Alignments haben. In [113] werden daher die Zeitkorrelationen des vibrationsinduzierten Rauschens durch eine Erweiterung des Zustandsvektors mit geeigneten Rauschprozessmodellen berücksichtigt. Der Nachteil dieser in Abschnitt 6.5.1 beschriebenen Vorgehensweise zur Berücksichtigung von Zeitkorrelationen besteht in einem deutlich gesteigerten Rechenaufwand, numerische Probleme können ebenfalls auftreten. Daher wird im Folgenden ein Verfahren aufgezeigt, mit dem zeitkorreliertes Rauschen berücksichtigt werden kann, ohne dass eine Erweiterung des Zustandsvektors des Filters notwendig ist.

## 9.3 Effiziente Berücksichtigung von Zeitkorrelationen

Um ein effizientes Verfahren zur Berücksichtigung von Zeitkorrelationen entwickeln zu können, muss zunächst der Einfluss von Zeitkorrelationen im Rahmen eines Filterproblems verstanden werden.



**Abbildung 9.2:** Kreuzkorrelationen zwischen Systemrauschen und Zustandsvektor (links) und zwischen Messrauschen und Zustandsschätzung (rechts) als Folge von zeitkorreliertem Mess- und Systemrauschen.

Hierzu wird wie in Abschnitt 6.5.1 ein Systemmodell der Form

$$\vec{x}_{k+1} = \Phi_k \vec{x}_k + \mathbf{G}_k \vec{w}_k \quad (9.12)$$

betrachtet, das zeitkorrelierte Systemrauschen wird durch

$$\vec{w}_k = \mathbf{C} \vec{w}_{k-1} + \vec{\eta}_k \quad (9.13)$$

beschrieben. Auf bekannte Eingangsgrößen wird aus Übersichtsgründen verzichtet.

Liegt nun Systemrauschen vor, so beeinflusst das Systemrauschen  $\vec{w}_k$  den Systemzustand  $\vec{x}_{k+1}$ . Ist das Systemrauschen zeitkorreliert, so geht  $\vec{w}_k$  auch in das Systemrauschen zum nächsten Zeitschritt,  $\vec{w}_{k+1}$ , ein. Damit müssen aber auch  $\vec{w}_{k+1}$  und  $\vec{x}_{k+1}$  korreliert sein, siehe Abb. 9.2. Diese Korrelationen werden in den üblichen Kalman-Filter-Gleichungen nicht berücksichtigt.

Die Situation bei zeitkorreliertem Messrauschen gestaltet sich ähnlich, es soll ein Messmodell der Form

$$\vec{y}_k = \mathbf{H}_k \vec{x}_k + \vec{v}_k \quad (9.14)$$

angenommen werden, das zeitkorrelierte Messrauschen wird durch

$$\vec{v}_k = \mathbf{D} \vec{v}_{k-1} + \vec{\mu}_k \quad (9.15)$$

beschrieben.

Wird zum Zeitpunkt  $k$  ein Messwert verarbeitet, so beeinflusst dessen Messrauschen  $\vec{v}_k$  die Zustandsschätzung  $\hat{\vec{x}}_k$ . Diese wird zum nächsten Zeitschritt  $k+1$  propagiert. Ist das Messrauschen  $\vec{v}_k$  mit dem Messrauschen  $\vec{v}_{k+1}$  korreliert, so muss  $\vec{v}_k + 1$  mit  $\hat{\vec{x}}_k$  ebenfalls korreliert sein, auch diese Zusammenhänge sind in Abb. 9.2 veranschaulicht. Die üblichen Kalman-Filter-Gleichungen setzen voraus, dass keine Korrelationen zwischen Messrauschen und Zustandsschätzung vorliegen.

Zeitkorreliertes Mess- und Systemrauschen lässt sich also berücksichtigen, in dem die resultierenden Kreuzkorrelationen zwischen Messrauschen und Zustandsschätzung bzw. Systemrauschen und Zustandsvektor korrekt behandelt werden. Die entsprechenden Filtergleichungen werden im Folgenden hergeleitet.

### 9.3.1 Propagationsschritt

Im Propagationsschritt des Filters wird die Zustandsschätzung und die zugehörige Kovarianzmatrix in der Zeit propagiert, Grundlage hierfür ist das Systemmodell Gl. (9.12). Während die Propagation des Systemzustandes wie üblich erfolgt, müssen bei der Propagation der Kovarianzmatrix die Korrelationen des Systemzustandes mit dem Systemrauschen berücksichtigt werden. Mit

$$\mathbf{P}_{xw,k}^+ = E \left[ \left( \vec{x}_k - \hat{x}_k^+ \right) \vec{w}_k^T \right] \quad (9.16)$$

$$\mathbf{P}_{xv,k}^+ = E \left[ \left( \vec{x}_k - \hat{x}_k^+ \right) \vec{v}_k^T \right] \quad (9.17)$$

$$\mathbf{P}_{ww,k} = E \left[ \vec{w}_k \vec{w}_k^T \right] \quad (9.18)$$

$$\mathbf{P}_{vv,k} = E \left[ \vec{v}_k \vec{v}_k^T \right] \quad (9.19)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1}^- &= E \left[ \left( \vec{x}_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^- \right) \left( \vec{x}_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^- \right)^T \right] \\ &= E \left[ \left( \Phi_k \left( \vec{x}_k - \hat{x}_k^+ \right) + \mathbf{G}_k \vec{w}_k \right) \left( \Phi_k \left( \vec{x}_k - \hat{x}_k^+ \right) + \mathbf{G}_k \vec{w}_k \right)^T \right] \\ &= \Phi_k \mathbf{P}_k^+ \Phi_k^T + \Phi_k \mathbf{P}_{xw,k}^+ \mathbf{G}_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{P}_{wx,k}^+ \Phi_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{P}_{ww,k} \mathbf{G}_k^T. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Wenn sich durch die Propagation die Zustandsschätzung ändert, muss natürlich auch die Korrelation mit dem Mess- und Systemrauschen entsprechend angepasst werden. Die zugehörigen Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{xw,k+1}^- &= E \left[ \left( \vec{x}_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^- \right) \vec{w}_{k+1}^T \right] \\ &= E \left[ \left( \Phi_k \left( \vec{x}_k - \hat{x}_k^+ \right) + \mathbf{G}_k \vec{w}_k \right) (\mathbf{C} \vec{w}_k + \vec{\eta}_{k+1})^T \right] \\ &= \Phi_k \mathbf{P}_{xw,k}^+ \mathbf{C}^T + \mathbf{G}_k \mathbf{P}_{ww,k} \mathbf{C}^T \end{aligned} \quad (9.21)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{xv,k+1}^- &= E \left[ \left( \vec{x}_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^- \right) \vec{v}_{k+1}^T \right] \\ &= E \left[ \left( \Phi_k \left( \vec{x}_k - \hat{x}_k^+ \right) + \mathbf{G}_k \vec{w}_k \right) (\mathbf{D} \vec{v}_k + \vec{\mu}_{k+1})^T \right] \\ &= \Phi_k \mathbf{P}_{xv,k}^+ \mathbf{D}^T. \end{aligned} \quad (9.22)$$

Hierbei wurde ausgenutzt, dass die weißen Rauschprozesse  $\vec{\eta}_{k+1}$  und  $\vec{\mu}_{k+1}$ , die die zeitkorrelierten System- und Messrauschprozesse treiben, nicht mit dem Systemrauschen  $\vec{w}_k$  und dem Messrauschen  $\vec{v}_k$  korreliert sind. Die Kovarianz der zeitkorrelierten Rauschprozesse wird ebenfalls propagiert:

$$\mathbf{P}_{ww,k+1} = \mathbf{C}\mathbf{P}_{ww,k}\mathbf{C}^T + E[\vec{\eta}_{k+1}\vec{\eta}_{k+1}^T] \quad (9.23)$$

$$\mathbf{P}_{vv,k+1} = \mathbf{D}\mathbf{P}_{vv,k}\mathbf{D}^T + E[\vec{\mu}_{k+1}\vec{\mu}_{k+1}^T] \quad (9.24)$$

Sind die Rauschprozessparameter konstant, so kann die Kovarianz der zeitkorrelierten Rauschprozesse auch im Voraus berechnet werden, die Gleichungen (9.23) und (9.24) werden dann nicht benötigt.

### 9.3.2 Messwertverarbeitung

Grundlage der Messwertverarbeitung sind die bei Normalverteilungen gültigen Gleichungen (5.31) und (5.32) für den bedingten Mittelwert und die bedingte Kovarianz. Um diese berechnen zu können, muss zunächst die Kovarianz der Messwertvorhersage und die Korrelation von Messwertvorhersage und Zustandsvektor bestimmt werden, man erhält

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{yy,k} &= E \left[ \left( \vec{y}_k - \hat{y}_k \right) \left( \vec{y}_k - \hat{y}_k \right)^T \right] \\ &= E \left[ \left( \mathbf{H}_k(\vec{x}_k - \hat{x}_k^-) + \vec{v}_k \right) \left( \mathbf{H}_k(\vec{x}_k - \hat{x}_k^-) + \vec{v}_k \right)^T \right] \\ &= \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{xv,k}^- + \mathbf{P}_{vx,k}^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{P}_{vv,k} \end{aligned} \quad (9.25)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{xy,k} &= E \left[ \left( \vec{x}_k - \hat{x}_k^- \right) \left( \vec{y}_k - \hat{y}_k \right)^T \right] \\ &= E \left[ \left( \vec{x}_k - \hat{x}_k^- \right) \left( \mathbf{H}_k(\vec{x}_k - \hat{x}_k^-) + \vec{v}_k \right)^T \right] \\ &= \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{P}_{xv,k}^- . \end{aligned} \quad (9.26)$$

Mit der Gewichtsmatrix

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{xy,k} \mathbf{P}_{yy,k}^{-1} \\ &= \left( \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{P}_{xv,k}^- \right) \left( \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{xv,k}^- + \mathbf{P}_{vx,k}^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{P}_{vv,k} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (9.27)$$

ergibt sich für die a-posteriori-Zustandsschätzung

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + \mathbf{K}_k \left( \vec{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{x}_k^- \right) , \quad (9.28)$$



die zugehörige Kovarianzmatrix ist durch

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_k^+ &= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \left( \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{P}_{xv,k}^- \right)^T \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{vx,k}^- \end{aligned} \quad (9.29)$$

gegeben. Genau wie beim Propagationsschritt müssen aufgrund der Anpassung der Zustandsschätzung die Korrelationen mit Mess- und Systemrauschen aktualisiert werden. Man erhält

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{xw,k}^+ &= E \left[ \left( \vec{x}_k - \hat{x}_k^+ \right) \vec{w}_k^T \right] \\ &= E \left[ \left( \vec{x}_k - \hat{x}_k^- - \mathbf{K}_k \left( \vec{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{x}_k^- \right) \right) \vec{w}_k^T \right] \\ &= E \left[ \left( \vec{x}_k - \hat{x}_k^- - \mathbf{K}_k \left( \mathbf{H}_k \vec{x}_k + \vec{v}_k - \mathbf{H}_k \hat{x}_k^- \right) \right) \vec{w}_k^T \right] \\ &= E \left[ \left( \left( \vec{x}_k - \hat{x}_k^- \right) - \mathbf{K}_k \left( \mathbf{H}_k \left( \vec{x}_k - \hat{x}_k^- \right) + \vec{v}_k \right) \right) \vec{w}_k^T \right] \\ &= \mathbf{P}_{xw,k}^- - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{xw,k}^- \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{xw,k}^- \end{aligned} \quad (9.30)$$

sowie

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{xv,k}^+ &= E \left[ \left( \vec{x}_k - \hat{x}_k^+ \right) \vec{v}_k^T \right] \\ &= E \left[ \left( \left( \vec{x}_k - \hat{x}_k^- \right) - \mathbf{K}_k \left( \mathbf{H}_k \left( \vec{x}_k - \hat{x}_k^- \right) + \vec{v}_k \right) \right) \vec{v}_k^T \right] \\ &= \mathbf{P}_{xv,k}^- - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{xv,k}^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{vv,k} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{xv,k}^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{vv,k} . \end{aligned} \quad (9.31)$$

Damit sind die modifizierten Filtergleichungen zur Berücksichtigung von zeitkorreliertem Mess- und Systemrauschen vollständig bekannt.

### 9.3.3 Diskussion der Filtergleichungen

Zur Übersicht sollen hier die zu implementierenden Filtergleichungen nochmals zusammengestellt werden:

#### Propagationsschritt

$$\begin{aligned}\vec{x}_{k+1}^- &= \Phi_k \vec{x}_k^+ \\ \mathbf{P}_{k+1}^- &= \Phi_k \mathbf{P}_k^+ \Phi_k^T + \Phi_k \mathbf{P}_{xw,k}^+ \mathbf{G}_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{P}_{wx,k}^+ \Phi_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{P}_{ww,k} \mathbf{G}_k^T \\ \mathbf{P}_{xw,k+1}^- &= \Phi_k \mathbf{P}_{xw,k}^+ \mathbf{C}^T + \mathbf{G}_k \mathbf{P}_{ww,k} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{P}_{xv,k+1}^- &= \Phi_k \mathbf{P}_{xv,k}^+ \mathbf{D}^T . \end{aligned}$$

### Messschritt

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_k &= \left( \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{P}_{xv,k}^- \right) \left( \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{xv,k}^- + \mathbf{P}_{vx,k}^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{P}_{vv,k} \right)^{-1} \\
\hat{x}_k^+ &= \hat{x}_k^- + \mathbf{K}_k \left( \vec{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{x}_k^- \right) \\
\mathbf{P}_k^+ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{vx,k}^- \\
\mathbf{P}_{xw,k}^+ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{xw,k}^- \\
\mathbf{P}_{xv,k}^+ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{xv,k}^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{vv,k}
\end{aligned}$$

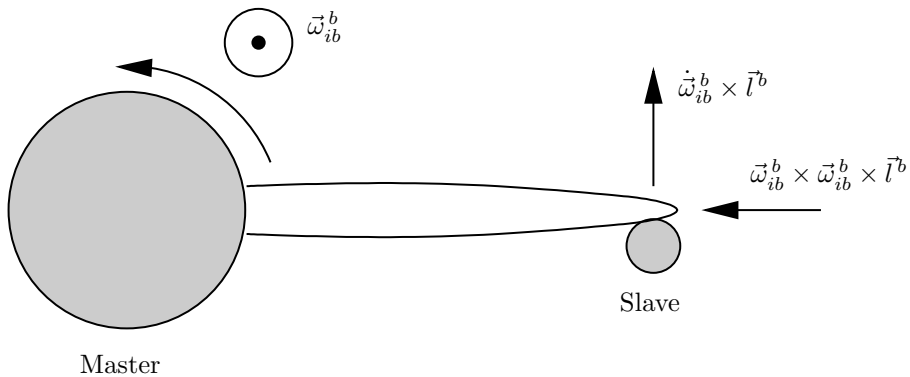
Werden für die Matrizen  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{D}$  Nullmatrizen angenommen, wird aus dem zeitkorrelierten Mess- und Systemrauschen weißes Rauschen. Man erkennt sofort, dass in obigen Filtergleichungen damit auch sämtliche Korrelationsmatrizen  $\mathbf{P}_{xw}$  und  $\mathbf{P}_{xv}$  verschwinden, die hergeleiteten Filtergleichungen reduzieren sich zu den üblichen Kalman-Filter-Gleichungen.

Dieses Verfahren zur Berücksichtigung zeitkorrelierten Rauschens hat zwei entscheidende Vorteile gegenüber einer Erweiterung des Zustandsvektors: Zum Einen ist der Rechenaufwand deutlich geringer, zum Anderen handelt es sich um ein modulares Verfahren: Soll untersucht werden, ob eine Berücksichtigung der Zeitkorrelationen eine Verbesserung mit sich bringt und welche Ordnung der Rauschprozessmodelle akzeptable Ergebnisse liefert, sind bei einer Erweiterung des Zustandsvektors aufgrund der Änderung der Dimension des Zustandsvektors jeweils umfangreiche Modifikationen des Filteralgorithmus notwendig. Bei dem hier beschriebenen Verfahren hingegen können einfach die zusätzlichen Gleichungen und Terme implementiert werden, während der Kern des Filteralgorithmus, die üblichen Kalman-Filter Gleichungen, unverändert bleibt.

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass es bei anderen Anwendungen als Transfer Alignment und GPS/INS-Integration möglich sein kann, bei einer Erweiterung des Zustandsvektors tatsächlich die Vektoren  $\vec{w}_k$  und  $\vec{v}_k$  zu schätzen. In diesem Fall profitiert das Filterergebnis bei Berücksichtigung der Zeitkorrelationen nicht nur von der korrekten Berechnung der Kovarianzmatrix des Schätzfehlers, sondern auch von dieser Schätzung der Rauschterme. Da eine Schätzung der Rauschterme bei obigem Verfahren nicht stattfindet, kann bei solchen Problemstellungen die Erweiterung des Zustandsvektors unter Umständen bessere Ergebnisse liefern.

## 9.4 Numerische Simulation

Die bei Berücksichtigung der Zeitkorrelationen des Systemrauschens möglichen Verbesserungen wurden für verschiedene Transfer-Alignment-Szenarien in numerischen Simulationen untersucht. Um diese Simulationen durchführen zu können, müssen unter anderem die Daten der Inertialsensoren von Master und Slave generiert werden. Dabei müssen deren unterschiedliche Positionen berücksichtigt werden.



**Abbildung 9.3:** Einfluss von Rotationen auf die von der Inertialsensorik des Slave detektierten Beschleunigungen.

### 9.4.1 Erzeugung von Inertialsensordaten

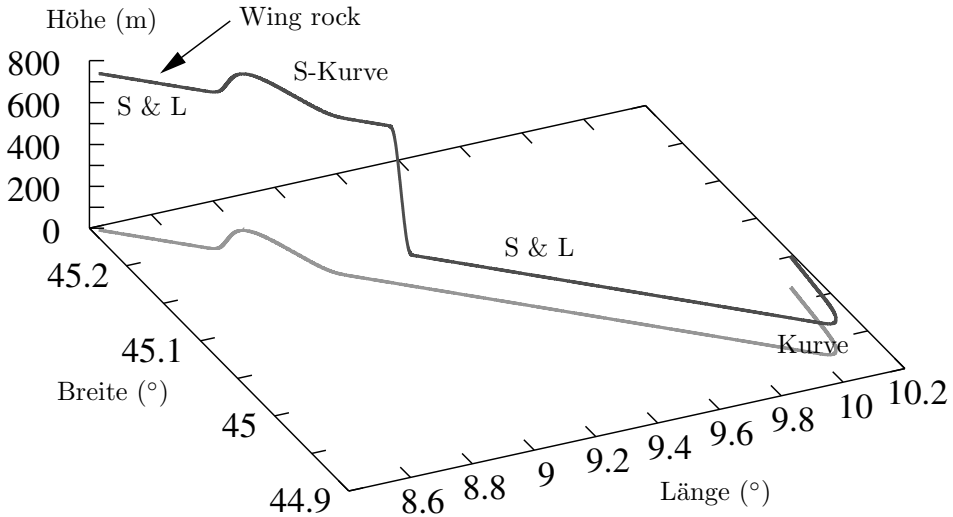
Zur Erzeugung der Inertialsensordaten von Master und Slave kann im ersten Schritt davon ausgegangen werden, dass sich die relative Position und Orientierung von Master und Slave nicht ändert; eventuelle rotatorische und translatorische Relativbewegungen z.B. aufgrund der Flexibilität eines Flügels können anschließend hinzugefügt werden. Während unabhängig von der Relativposition von Master und Slave identische Drehraten vorliegen, unterscheiden sich die gemessenen Beschleunigungen je nach Manöver unter Umständen deutlich.

Exemplarisch soll hier gezeigt werden, welche Beschleunigungen sich am Ort des Slaves in Abhängigkeit von den Beschleunigungen und Rotationen eines Referenzkoordinatensystems ergeben. Dieses Referenzkoordinatensystem soll die gleiche Lage besitzen wie das körperfeste Koordinatensystem des Slaves und durch den Index  $b$  gekennzeichnet sein. Im Inertialkoordinatensystem lässt sich folgender Zusammenhang formulieren:

$$\vec{r}_{bS}^i = \vec{r}_b^i + \mathbf{C}_b^i \vec{l}^b \quad (9.32)$$

Hierbei bezeichnet  $\vec{r}_{bS}^i$  den Vektor vom Ursprung des Inertialkoordinatensystems zum Ursprung des körperfesten Koordinatensystems des Slaves,  $\vec{r}_b^i$  ist der Vektor zum Ursprung des Referenzkoordinatensystems und  $\vec{l}^b$  ist der Vektor, der vom Ursprung des Referenzkoordinatensystems zum Ursprung des Slave-Koordinatensystems weist.

Die Beschleunigung im körperfesten Koordinatensystem des Slaves lässt sich durch Be-



**Abbildung 9.4:** Flugtrajektorie, die in den Simulationen verwendet wurde.

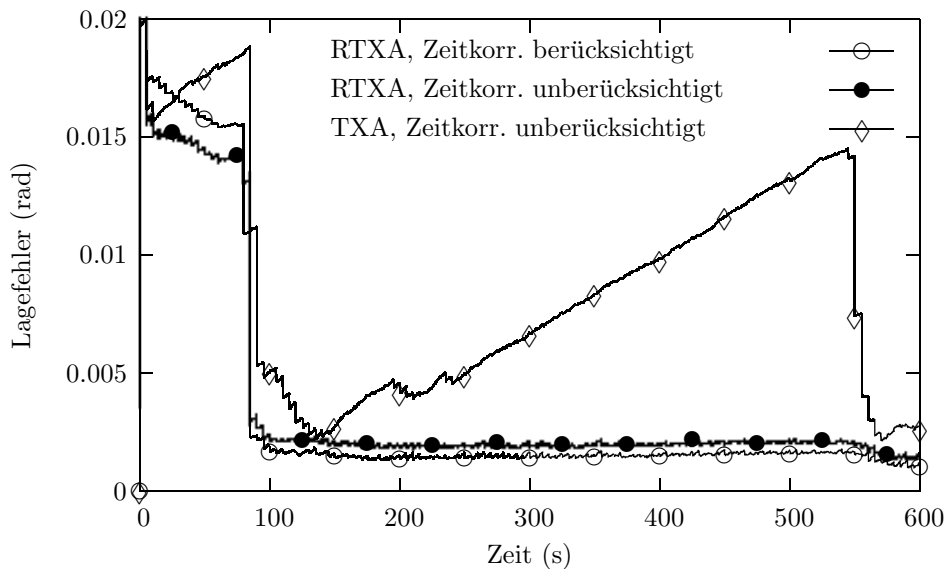
rechnung der zweifachen Ableitung dieses Zusammenhanges ermitteln, man erhält

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{r}}_{bS}^i &= \dot{\vec{r}}_b^i + \dot{\mathbf{C}}_b^i \vec{l}^b \\
 \vec{v}_{ibS}^i &= \vec{v}_{ib}^i + \mathbf{C}_b^i \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \vec{l}^b \\
 \dot{\vec{v}}_{ibS}^i &= \dot{\vec{v}}_{ib}^i + \dot{\mathbf{C}}_b^i \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \vec{l}^b + \mathbf{C}_b^i \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ib}^b \vec{l}^b \\
 \vec{a}_{ibS}^i &= \vec{a}_{ib}^i + \mathbf{C}_b^i \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \vec{l}^b + \mathbf{C}_b^i \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ib}^b \vec{l}^b \\
 \vec{a}_{ibS}^b &= \vec{a}_{ib}^b + \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \vec{l}^b + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ib}^b \vec{l}^b \\
 \vec{a}_{ibS}^b &= \vec{a}_{ib}^b + \vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{l}^b + \dot{\vec{\omega}}_{ib}^b \times \vec{l}^b .
 \end{aligned} \tag{9.33}$$

Die Terme, in denen sich die in Referenzkoordinatensystem und Slave anfallenden Beschleunigungen unterscheiden, sind in Abb. 9.3 veranschaulicht.

## 9.4.2 Ergebnisse

Zur Erzeugung der dem Slave zur Verfügung gestellten Lage- und Geschwindigkeitsinformationen wurde ein Master-GPS/INS-System basierend auf einer inertial-grade-IMU simuliert. Die Verwendung eines GPS/INS-Systems als Referenzsystem kann zu Problemen führen, wenn nach einem GPS-Ausfall Sprünge in den Navigationsinformationen des Masters auftreten, siehe [40]. Daher wurde für die hier durchgeführten Simulationen von einer kontinuierlichen GPS-Verfügbarkeit ausgegangen. Eine Beschreibung von Verfahren zur Berücksichtigung von GPS-Ausfällen in einem solchen Transfer-Alignment-Szenario ist in [43] zu finden.

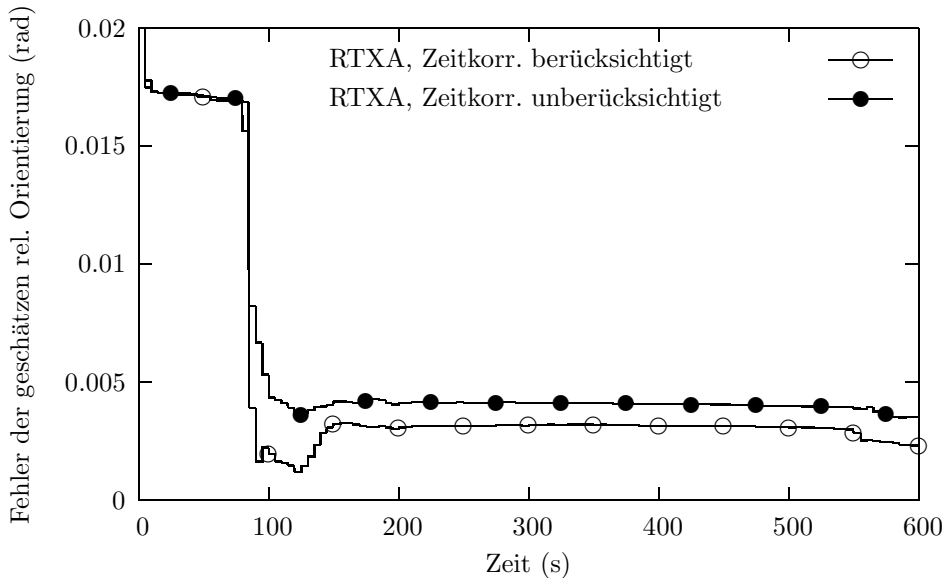


**Abbildung 9.5:** Gesamtlagefehler des Slaves, Datenrate 0.2 Hz,  $10^\circ/\text{h}$ -Slave-IMU.

Die in den Simulationen verwendete Flugtrajektorie ist in Abb. 9.4 dargestellt. Zu Beginn wurde für fünfundzwanzig Sekunden geradeaus geflogen ('straight & level', S & L), dann folgte ein wing-rock-Manöver. Dieses Manöver dauerte zwei Sekunden, der maximale Rollwinkel betrug dabei sechzig Grad. Anschließend folgten fünfzig Sekunden Geradeausflug, bevor hundertdreißig Sekunden lang Kurven geflogen wurden, an die sich fünf Minuten Geradeausflug anschlossen. Das abschließende Manöver war eine scharfe neunzig-Grad-Kurve.

Für die Inertialsensorik des Slave wurden eine  $10^\circ/\text{h}$ - und eine  $2^\circ/\text{h}$ -IMU angenommen, die zur Erzeugung der Sensordaten verwendeten Rauschprozessmodelle wurden anhand von Flugversuchsdaten ermittelt. Neben der Sensorgüte ist ein weiterer Faktor von entscheidender Bedeutung, nämlich die Datenrate, mit der der Master Geschwindigkeits- und Lageinformationen zur Verfügung stellt. Typische Datenraten liegen nach [70] hierbei im Bereich von 1/6 Hz bis 12.5 Hz.

Ein erstes Simulationsergebnis ist in Abb. 9.5 dargestellt, das den über fünfundzwanzig Simulationsläufe gemittelten Gesamtlagefehler des Slaves bei einer  $10^\circ/\text{h}$ -Slave-IMU und einer Master-Slave-Datenrate von 0.2 Hz für verschiedene Alignment-Verfahren zeigt. Aufgrund des Geradeausflugs ist der Yaw-Winkel zunächst nicht beobachtbar. Die geringe Datenrate, mit der der Master Geschwindigkeits- und Lageinformationen zur Verfügung stellt, führt dazu, dass die Rapid-Transfer-Alignment-Verfahren von dem wing-rock-Manöver nicht profitieren können. Daher nimmt der Lagefehler erst ab, als bei 75 Sekunden der Kurvenflug beginnt. Offensichtlich führt die Berücksichtigung der Zeitkorrelationen des vibrationsinduzierten Inertialsensorrauschens beim Rapid Trans-



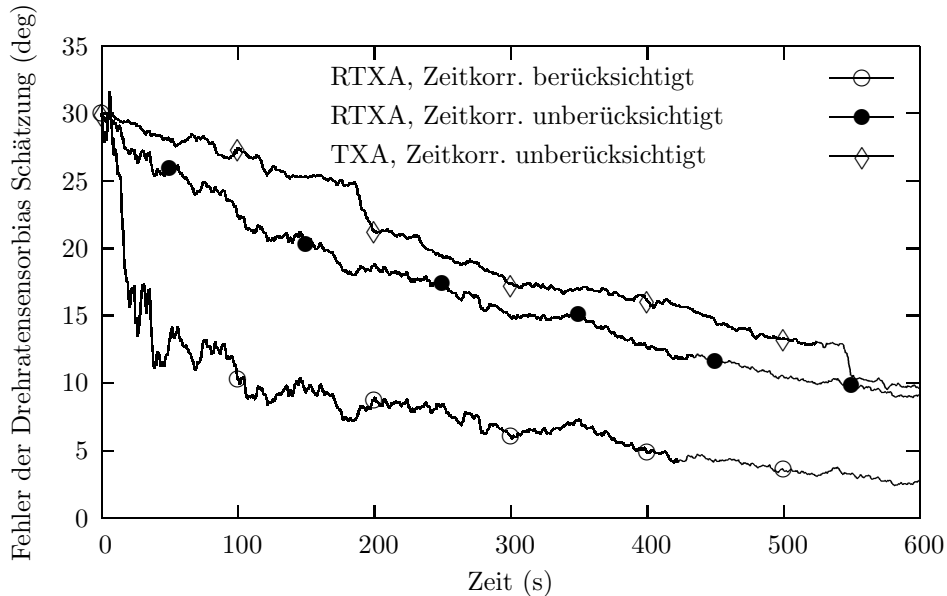
**Abbildung 9.6:** Fehler der geschätzten relativen Orientierung von Master und Slave, Datenrate  $0.2\text{ Hz}$ ,  $10^\circ/\text{h}$ -Slave-IMU.

fer Alignment zu einer Verbesserung der Lageschätzung. Zum Vergleich sind auch die Ergebnisse eines konventionellen Alignment-Verfahrens dargestellt. Hierbei fällt auf, dass zum Einen die Konvergenz der Lageschätzung beim Kurvenflug etwas langsamer ausfällt, zum Anderen wachsen beim anschließenden Geradeausflug aufgrund der Unbeobachtbarkeit des Yaw-Winkels die Lagefehler wieder an. Dieser Anstieg der Lagefehler wird bei den Rapid-Transfer-Alignment-Verfahren nicht beobachtet. Aufgrund der von diesen Algorithmen geschätzten relativen Orientierung zwischen Master und Slave profitiert hier die Yaw-Winkelschätzung des Slaves von der Yaw-Winkelschätzung des Masters. Da für den Master sehr hochwertige Inertialsensoren angenommen wurden die darüber hinaus auch nicht der gleichen extremen Vibrationsumgebung ausgesetzt sind, wächst der Yaw-Winkelfehler des Masters während des Geradeausfluges kaum an.

Abb. 9.6 zeigt den Fehler der von den Rapid-Transfer-Alignment-Verfahren geschätzten Orientierung von Master und Slave. Auch hier führt die Berücksichtigung der Zeitkorrelationen zu einer Verbesserung des Schätzergebnisses.

Die gleiche Aussage lässt sich für die Schätzung der Drehratensensorbiase treffen. Abb. 9.7 zeigt für die verschiedenen Alignmentverfahren die Gesamtfehler der Drehratensensorbiasschätzung. Während ohne Berücksichtigung der Zeitkorrelationen das konventionelle Transfer-Alignment-Verfahren ähnliche Ergebnisse liefert wie das Rapid-Transfer-Alignment-Verfahren, liefert letzteres bei Berücksichtigung der Zeitkorrelationen eine deutlich schnellere und präzisere Biasschätzung.

Schließlich wurden diese Simulationen unter Annahme einer  $2^\circ/\text{h}$ -Slave-IMU wiederholt,



**Abbildung 9.7:** Fehler der geschätzten Drehratensensorbiase bei verschiedenen Transfer-Alignment-Verfahren.

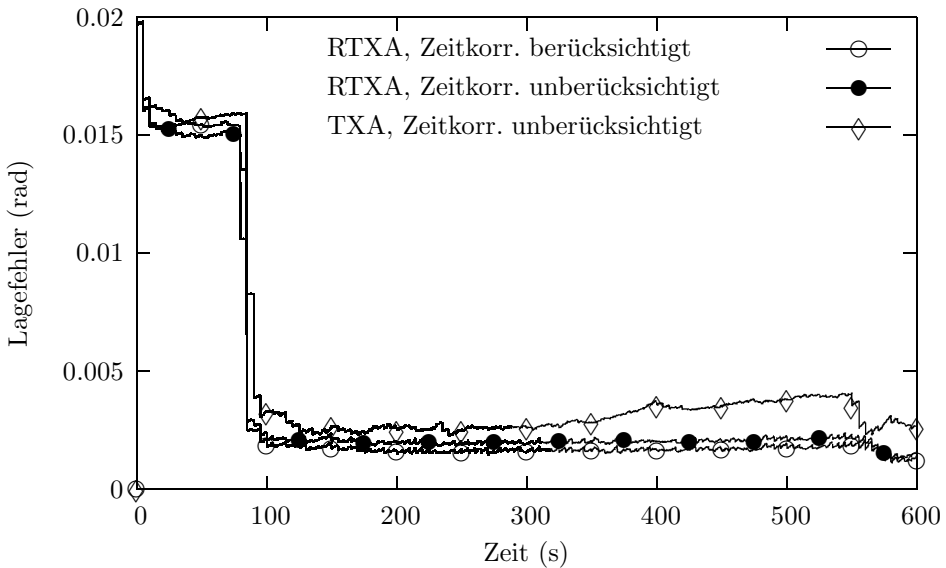
Abb. 9.8 zeigt die von den verschiedenen Verfahren erzielten, mittleren Gesamtlagefehler. Prinzipiell ergeben sich die gleichen Resultate wie bei der  $10^\circ/\text{h}$ -Slave-IMU, die Unterschiede zwischen den einzelnen Alignment-Verfahren fallen jedoch geringer aus, insbesondere das beim konventionellen Alignment beobachtete Anwachsen des Lagefehlers während des Geradeausfluges ist verlangsamt.

Abschließend wurden Simulationen durchgeführt, bei denen eine Datenrate von 5 Hz für die vom Master zur Verfügung gestellten Informationen angenommen wurde, siehe Abb. 9.9. Mit dieser größeren Messdatenrate sind die Rapid-Transfer-Alignment-Verfahren in der Lage, von dem kurzen wing-rock-Manöver zu profitieren, wohingegen die Lageschätzung bei Verwendung eines konventionellen Transfer-Alignment-Verfahrens nach wie vor erst mit Beginn des Kurvenfluges konvergiert.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, dass neben der Berücksichtigung der Zeitkorrelationen des vibrationsinduzierten Rauschens die Erweiterung des Zustandsvektors des Alignment-Filters zur Schätzung von Skalenfaktoren und Misalignment der Inertialsensoren zu einer Verbesserung der Schätzergebnisse führen kann, siehe [42].

## 9.5 Adaptive Schätzung der Rauschprozessmodelle

Voraussetzung für die Berücksichtigung der Zeitkorrelationen des vibrationsinduzierten Rauschens ist, dass geeignete Rauschprozessmodelle zu Verfügung stehen. Häufig hängt



**Abbildung 9.8:** Gesamtlagefehler des Slaves, Datenrate 0.2 Hz, 2°/h-Slave-IMU.

das vibrationsinduzierte Rauschen von der Flugsituation ab, so dass sich eine adaptive Schätzung dieser Rauschprozessmodelle anbietet.

Da sich in numerischen Simulationen gezeigt hat, dass die Kreuzkorrelationen des vibrationsinduzierten Inertialsensorrauschens vernachlässigt werden können und eine Modellierung als Prozess zweiter Ordnung bereits gute Ergebnisse liefert, kann für jeden Inertialsensor ein Rauschprozessmodell der Form

$$w_k = a_1 w_{k-1} + a_2 w_{k-2} + n_k \quad , \quad E[n_k^2] = \sigma_n^2 \quad (9.34)$$

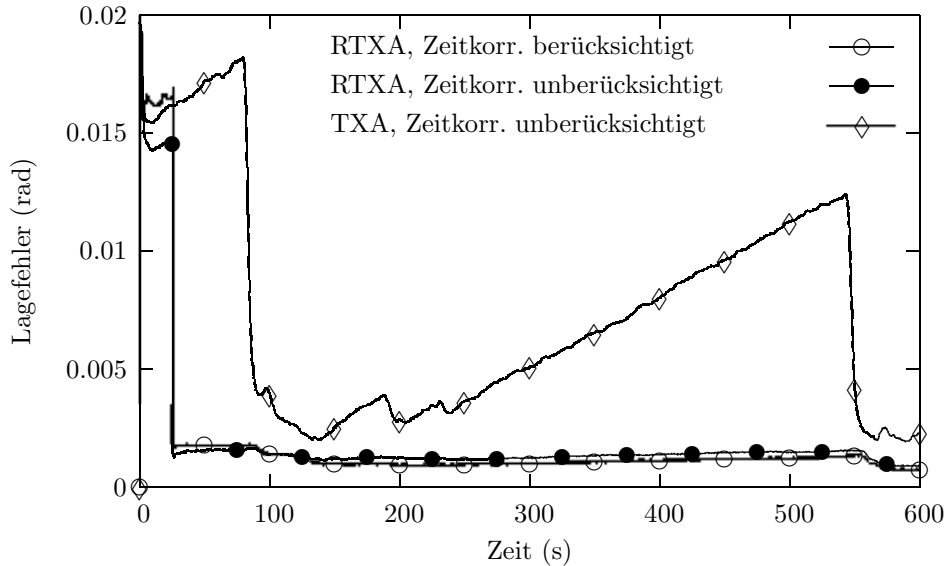
angesetzt werden. Die adaptive Schätzung der Rauschprozessmodelle besteht daher in der Bestimmung der Parameter  $a_1$ ,  $a_2$  und  $\sigma_n^2$ . Erschwert wird diese Schätzung dadurch, dass neben dem vibrationsinduzierten Rauschen natürlich auch die Trajektoriendynamik in die Inertialsensordaten eingeht. Eine direkte Schätzung dieser Parameter anhand der Inertialsensordaten z.B. durch Anwendung der Yule-Walker-Gleichung ist daher nicht möglich.

### 9.5.1 Identifikation anhand von Messwertdifferenzen

Um den Einfluss der Trajektoriendynamik zu minimieren, können zeitliche Differenzen der Inertialsensordaten gebildet werden. Diese zeitlichen Differenzen können näherungsweise durch

$$u_k = w_k - w_{k-1} \quad (9.35)$$





**Abbildung 9.9:** Gesamtlagefehler des Slaves, Datenrate 5 Hz, 10°/h-Slave-IMU.

beschrieben werden. Hierbei wurde angenommen, dass die Differenzenbildung die Trajektoriendynamik zum größten Teil eliminiert.

Nun können für unterschiedliche zeitliche Verschiebungen rekursiv Korrelationen

$$E[u_k u_{k-i}] = r(i) \quad , \quad i \in [0, 1, 2] \quad (9.36)$$

dieser Inertialsensordatendifferenzen geschätzt werden:

$$r_k(i) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) r_{k-1}(i) + \frac{1}{\alpha} u_k u_{k-i} \quad (9.37)$$

Je größer der Parameter  $\alpha$  in Gl. (9.37) gewählt wird, desto rauschärmer sind die geschätzten Korrelation; andererseits wird eine Änderung der Zeitkorrelationsstruktur entsprechend langsamer erkannt.

Um den Zusammenhang zwischen den Korrelationen  $r(0)$ ,  $r(1)$  und  $r(2)$  und den Parametern  $a_1$ ,  $a_2$  sowie  $\sigma_n^2$  herzuleiten, wird zunächst die z-Transformierte von Gl. (9.34) berechnet:

$$\begin{aligned} w(z) &= a_1 z^{-1} w(z) + a_2 z^{-2} w(z) + n(z) \\ w(z) &= \frac{n(z)}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} \end{aligned} \quad (9.38)$$

Damit ergibt sich durch z-Transformation von Gl. (9.35)

$$\begin{aligned} u(z) &= (1 - z^{-1})w(z) \\ &= \frac{(1 - z^{-1})n(z)}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} \\ u(z)(1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}) &= (1 - z^{-1})n(z) \quad . \end{aligned} \quad (9.39)$$

Die Rücktransformation von Gl. (9.39) ins Zeitdiskrete liefert

$$\begin{aligned} u_k - a_1 u_{k-1} - a_2 u_{k-2} &= n_k - n_{k-1} \\ u_k &= a_1 u_{k-1} + a_2 u_{k-2} + n_k - n_{k-1} \quad . \end{aligned} \quad (9.40)$$

Mit

$$\begin{aligned} E[u_k n_k] &= E[(a_1 u_{k-1} + a_2 u_{k-2} + n_k - n_{k-1})n_k] \\ &= a_1 \underbrace{E[u_{k-1} n_k]}_0 + a_2 \underbrace{u_{k-2} n_k}_0 + E[n_k^2] - \underbrace{E[n_{k-1} n_k]}_0 \\ &= \sigma_n^2 \end{aligned} \quad (9.41)$$

und

$$\begin{aligned} E[u_k n_{k-1}] &= E[(a_1 u_{k-1} + a_2 u_{k-2} + n_k - n_{k-1})n_{k-1}] \\ &= a_1 E[u_{k-1} n_{k-1}] + a_2 \underbrace{u_{k-2} n_{k-1}}_0 + \underbrace{E[n_k n_{k-1}]}_0 - E[n_{k-1}^2] \\ &= (a_1 - 1)\sigma_n^2 \end{aligned} \quad (9.42)$$

folgt

$$\begin{aligned} r(0) &= E[(a_1 u_{k-1} + a_2 u_{k-2} + n_k - n_{k-1})u_k] \\ &= a_1 r(1) + a_2 r(2) + E[n_k u_k] - E[n_{k-1} u_k] \\ r(0) &= a_1 r(1) + a_2 r(2) + (2 - a_1)\sigma_n^2 \quad . \end{aligned} \quad (9.43)$$

Analog findet man

$$\begin{aligned} r(1) &= E[(a_1 u_{k-1} + a_2 u_{k-2} + n_k - n_{k-1})u_{k-1}] \\ &= a_1 r(0) + a_2 r(1) + \underbrace{E[n_k u_{k-1}]}_0 - E[n_{k-1} u_{k-1}] \\ r(1) &= a_1 r(0) + a_2 r(1) - \sigma_n^2 \end{aligned} \quad (9.44)$$

und

$$\begin{aligned}
 r(2) &= E[(a_1 u_{k-1} + a_2 u_{k-2} + n_k - n_{k-1}) u_{k-2}] \\
 &= a_1 r(1) + a_2 r(0) + \underbrace{E[n_k u_{k-2}]}_0 - \underbrace{E[n_{k-1} u_{k-2}]}_0 \\
 r(2) &= a_1 r(1) + a_2 r(0) \quad .
 \end{aligned} \tag{9.45}$$

Die Gl. (9.43)–(9.44) stellen ein nichtlineares Gleichungssystem für die gesuchten Parameter dar, das zwei Lösungen besitzt. Eine nähere Betrachtung dieser Lösungen zeigt, dass die zur Bestimmung der gesuchten Parameter benötigten Zusammenhänge durch

$$a_1 = \frac{r(0) + 2r(1) + r(2)}{r(0) + r(1)} \tag{9.46}$$

$$a_2 = \frac{r(0)r(2) - r(1)r(0) - 2r(1)^2}{r(0)(r(0) + r(1))} \tag{9.47}$$

$$\sigma_n^2 = \frac{r(0)^2 + r(0)r(2) - 2r(1)^2}{r(0)} \tag{9.48}$$

gegeben sind.

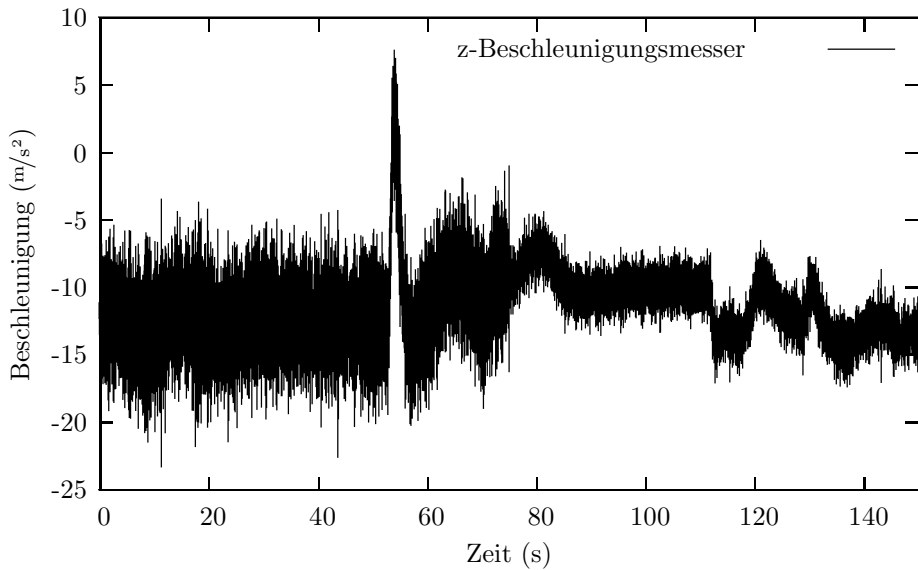
Bei der Übernahme der geschätzten Parameter in den Filteralgorithmus sind jedoch zusätzliche Vorsichtsmaßnahmen notwendig. Die Varianz  $\sigma_w^2$  des Rauschprozesses Gl. (9.34) ist gegeben durch

$$\sigma_w^2 = \frac{\sigma_n^2(1 - a_2)}{(1 - a_2)(1 - a_1^2 - a_2^2) - 2a_1^2 a_2} \quad . \tag{9.49}$$

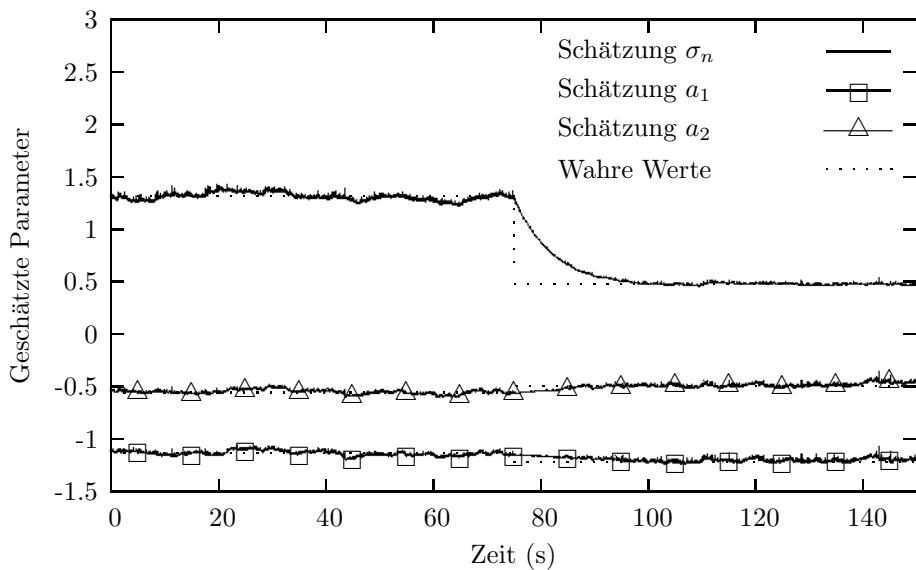
Für  $a_2 = \pm(a_1 + 1)$  sowie für  $a_2 = -1$  geht diese Varianz gegen unendlich. Die Varianz des vibrationsinduzierten Rauschens ist zwar endlich, während der Konvergenz des Verfahrens zu neuen Modellparametern z.B. nach Beginn einer neuen Flugphase können die geschätzten Parameter jedoch die angegebenen Bedingungen zumindest näherungsweise erfüllen. Würden in dieser Situation die geschätzten Parameter in den Filteralgorithmus übernommen, kann dies bis zum Scheitern des Datenfusionsalgorithmus führen.

## 9.5.2 Ergebnisse

Die Leistungsfähigkeit des dargestellten Verfahrens zur Schätzung der Rauschprozessparameter wurde in numerischen Simulationen untersucht. Hierzu wurden zunächst anhand von Flugversuchsdaten typische Trajektoriendynamiken identifiziert. Zu den so gewonnenen Daten wurden bekannte, zeitkorrelierte Rauschprozesse addiert, die identifiziert werden sollten. Die Rauschprozesse wurden dabei typischen Vibrationsumgebungen nachempfunden. Der Vorteil dieser Vorgehensweise besteht darin, dass aufgrund der bekannten Rauschprozessmodelle die Korrektheit der Parameterschätzung sehr einfach überprüft werden kann.



**Abbildung 9.10:** Synthetisch erzeugte Messwerte des z-Beschleunigungssensors, bestehend aus Trajektorien­dynamik und vibrationsinduziertem Rauschen.



**Abbildung 9.11:** Schätzung der Parameter des Rauschprozessmodells.

Abb. 9.10 zeigt von den so erzeugten Inertialsensordaten exemplarisch die Messwerte des z-Beschleunigungsmessers, die deutlich den Einfluss von Gravitation, Trajektorien-dynamik und vibrationsinduziertem Rauschen erkennen lassen.

Abb. 9.11 zeigt die von dem vorgeschlagenen Verfahren gelieferten Schätzungen der Rauschprozessmodellparameter. Offensichtlich stimmen die Schätzungen trotz der signifikanten Trajektorien-dynamik sehr gut mit den wahren Werten überein. Für die zweite Hälfte des Simulationszeitraumes wurden veränderte Modellparameter angenommen, diese Änderung wird von dem Schätzalgorithmus zügig erfasst.

Dieses Identifikationsverfahren bietet daher zusammen mit dem modifizierten Filteralgorithmus zur effizienten Berücksichtigung von Zeitkorrelationen die Möglichkeit, die Leistungsfähigkeit von Rapid-Transfer-Alignment-Verfahren signifikant zu steigern.