

8 Anwendungsbeispiel

GPS/INS-Integration

Ein integriertes Navigationssystem ist dadurch gekennzeichnet, dass verschiedene Navigationssensoren und Navigationsverfahren miteinander kombiniert werden. Aufgrund der komplementären Charakteristiken dieser Informationsquellen können hierbei die Nachteile des einen Verfahrens oder Sensors durch die Vorteile eines anderen kompensiert werden. Das Ergebnis ist ein Navigationssystem, dass die Leistungsfähigkeit der einzelnen Subsysteme bei weitem übersteigt. Häufig kann auch eine gewisse Redundanz geschaffen werden, so dass Verfahren zur Fehlererkennung und Isolation eingesetzt werden können. Weit verbreitet ist die Kombination von inertialer Navigation mit GPS, da sich diese Verfahren hervorragend ergänzen.

Das Inertialnavigationssystem kann durch externe Einflüsse nicht gestört werden und stellt somit die kontinuierliche Verfügbarkeit einer vollständigen Navigationslösung bestehend aus Position, Geschwindigkeit und Lage sicher. Diese Navigationslösung liegt mit einer hohen Datenrate vor, was bei vielen Anwendungen unabdingbar ist, z.B. wenn diese Navigationslösung als Eingangsgröße eines Fluglagereglers dient. Wie in Kapitel 3 aufgezeigt handelt es sich bei inertialer Navigation jedoch nur um ein kurzzeitgenaues Navigationsverfahren, die Navigationsfehler wachsen mit der Zeit an. Dies wird durch Kombination mit einem GPS-Empfänger verhindert.

Ein GPS-Empfänger stellt langzeitgenaue Positions- und Geschwindigkeitsinformationen bzw. Pseudoranges, Deltaranges und Trägerphasenmessungen zur Verfügung, Lageinformationen können mit einer einzelnen GPS-Antenne jedoch nicht gewonnen werden¹. Die Datenrate eines GPS-Empfängers ist vergleichsweise gering, typischerweise liegen ein bis vier Messungen pro Sekunde vor, einige hochwertige Empfänger liefern bis zu zwanzig Messwerte pro Sekunde oder mehr. Eine kontinuierliche Verfügbarkeit dieser Messwerte ist jedoch nicht gegeben, sinkt die Anzahl der sichtbaren Satelliten auf weniger als vier, kann ohne zusätzliche Annahmen keine Position oder Geschwindigkeit mehr ermittelt werden². Die Ursachen hierfür können vielfältig sein. Eine häufige Ursache sind Abschattungen, wenn z.B. Gebäude, Berge oder Teile des den Empfänger tragenden Fahrzeugs die Sicht auf Satelliten verdecken. Desweiteren können durch mutwilliges oder unbeabsichtigtes Jamming GPS-Ausfälle verursacht werden. Während mutwilliges Jamming – ebenso wie Spoofing – eher im militärischen Bereich anzusiedeln

¹Die Genauigkeit von Trägerphasenmessungen reicht aus, um mit mehreren GPS-Antennen Lageinformationen zu gewinnen, wobei der Abstand der Antennen die Genauigkeit der Lageinformationen bestimmt.

²Bei bekannter Höhe genügen drei Satelliten zur Positionsbestimmung. Bei einigen Anwendungen ist nur eine Positionskoordinate unbekannt, z.B. wenn sich ein Schienenfahrzeug auf einem bekannten Gleis befindet. Hier genügen zwei sichtbare Satelliten.

ist, kann ein unbeabsichtigtes Stören der Satellitensignale von Fernseh- oder WLAN-Sendern verursacht werden.

Zur Fusion der Daten eines Inertialnavigationssystems und eines GPS-Empfängers werden fast ausschließlich Kalman-Filter eingesetzt. Üblicherweise kommen error-state-space-Kalman-Filter zum Einsatz, die anhand der vom GPS-Empfänger gelieferten Stützinformationen die Fehler der Inertialnavigationslösung schätzen, die daraufhin korrigiert wird. Zusätzlich werden meist deterministische Fehler der Inertialsensorik wie Biase, manchmal auch noch Skalenfaktorfehler und Misalignment, geschätzt. Durch diese Online-Kalibration der IMU verbessert sich die Performance des Inertialnavigationssystems, was insbesondere bei GPS-Ausfällen relevant ist.

Bei einem solchen integrierten Navigationssystem sind verschiedene Systemarchitekturen möglich.

8.1 GPS/INS-Integrationsstrategien

Anhand der verwendeten Stützinformationen kann zwischen den verschiedenen Systemarchitekturen unterschieden werden.

8.1.1 Loosely Coupled System

Ein Loosely Coupled System ist dadurch gekennzeichnet, dass GPS-Positions- und Geschwindigkeitsmessungen als Stützinformationen verwendet werden. Diese Integrationsvariante ist am weitesten verbreitet, nicht zuletzt weil die Realisierung eines solchen Systems verglichen mit anderen Ansätzen den geringsten Entwicklungsaufwand erfordert. Der wesentliche Nachteil dieses Ansatzes besteht darin, dass bei weniger als vier sichtbaren Satelliten keine Stützung der Inertialnavigation mehr erfolgen kann, die Navigationsfehler wachsen also während GPS-Ausfällen entsprechend der Güte des Inertialnavigationssystems an. Weitere Probleme können auftreten, wenn die vom GPS-Empfänger gelieferten Positions- und Geschwindigkeitsinformationen aus einem empfangereigenen Kalman-Filter stammen³. Die gefilterten Positionen und Geschwindigkeiten weisen Zeitkorrelationen auf, die potentiell zu Problemen im Navigationsfilter führen können. Unter Umständen liefert der GPS-Empfänger basierend auf dem empfangereigenen Kalman-Filter auch bei weniger als vier sichtbaren Satelliten noch Messwerte. Die Verarbeitung dieser Messwerte als unabhängig führt dazu, dass der Navigationsfilter zu einer überoptimistischen Einschätzung der Güte der Zustandsschätzung gelangt, was bis zur Divergenz des Filters führen kann. Prinzipiell kann versucht werden, diesen Problemen mit sogenannten Federated-Filter-Architekturen zu begegnen, siehe [20], darauf soll hier jedoch nicht näher eingegangen werden.

³Aufgrund der Hintereinanderschaltung zweier Filter ist auch die Bezeichnung Cascaded Integration geläufig.

8.1.2 Tightly Coupled System

Für die meisten Autoren ist ein Tightly Coupled System dadurch gekennzeichnet, dass im Navigationsfilter direkt Pseudorange- und Deltarange-Messungen als Stützinformationen verarbeitet werden [13], [108], [98], [66]. Für andere Autoren ist zusätzlich die Stützung des GPS-Empfängers durch das Inertialnavigationssystem ein entscheidender Gesichtspunkt, [123],[99], ohne diese Stützung wird von einem Closely Coupled System gesprochen [74]. Die Stützung des GPS-Empfängers kann sich dabei sowohl auf die Akquisition bzw. Re-Akquisition als auch auf das Tracking beziehen. Während im ersteren Fall die für die Akquisition benötigte Zeit verkürzt werden soll, ist das Ziel bei der Stützung des Trackings eine geringe Bandbreite der Tracking Loops des GPS-Empfängers zu ermöglichen: Für eine gute Jamming-Robustheit ist eine geringe Bandbreite vorteilhaft, um Trajektoriendynamiken folgen zu können, ist jedoch eine größere Bandbreite notwendig [44]. Wird die Trajektoriendynamik dem Inertialnavigationssystem entnommen, kann auch bei signifikanten Manövern eine geringe Bandbreite beibehalten werden.

Der entscheidende Vorteil eines Tightly Coupled Systems besteht nun darin, dass auch bei weniger als vier sichtbaren Satelliten eine eingeschränkte Stützung des Inertialnavigationssystems anhand der Pseudorange- und Deltarange-Messungen erfolgt. Dadurch kann das in dieser Situation bei einem Loosely Coupled System vorliegende Anwachsen der Navigationsfehler je nach Szenario verlangsamt oder eventuell sogar verhindert werden. Nachteilig ist der deutlich größere Integrationsaufwand: Abhängig von den vom Empfänger zur Verfügung gestellten Nachrichten müssen nun GPS-Subframe-Daten dekodiert, Satellitenpositionen und Geschwindigkeiten aus Ephemeriden-Daten berechnet und Korrekturen der Satellitenuhrenfehler sowie relativistische Korrekturen durchgeführt werden. Die meisten Empfänger liefern Pseudorange- und Deltarange-Messungen die zur vollen Sekunde der GPS-Zeit gültig sind, über den Sendezeitpunkt des Satellitensignals ist in der Regel jedoch nichts bekannt. Da zur Verarbeitung dieser Messungen aber die Satellitenpositionen und -geschwindigkeiten zu den jeweiligen Sendezeitpunkten relevant sind, müssen diese iterativ berechnet werden.

8.1.3 Ultra-Tight Integration und Deep Integration

Bei diesen Integrationsvarianten werden im Navigationsfilter die in der empfängerinternen Signalverarbeitung anfallenden I & Q samples verarbeitet, die Tracking Loops des GPS-Empfängers werden durch das Navigationsfilter geschlossen. Diese sind damit nicht mehr unabhängig voneinander, wie das bei den bisher angesprochenen Integrationsstrategien der Fall war. Durch diese Verknüpfung profitiert das Tracking eines Satelliten von dem Tracking weiterer Satelliten [123],[46],[13]. Der Vorteil dieser Integrationsvariante besteht in einer gesteigerten Genauigkeit der Navigationslösung, vor allem aber in der Fähigkeit, ein schlechteres Signal-Rauschverhältnis des GPS-Signals zu tolerieren. Dies resultiert in einer größeren Jamming-Robustheit, so dass diese Systemarchitektur vor allem bei militärischen Anwendungen von Interesse ist. Der Nachteil dieser Ansätze besteht in einem nochmals gesteigerten Integrationsaufwand, darüber hinaus sind Eingriffe in die empfängerinterne Signalverarbeitung notwendig, was in der Regel nur den

Empfängerherstellern oder in enger Zusammenarbeit mit diesen möglich ist. Diese Integrationsvarianten werden daher im Folgenden nicht näher betrachtet, weiterführende Informationen sind z.B. in [41] und [84] zu finden.

8.2 Entwurf eines Navigationsfilters

Im Folgenden soll exemplarisch der Entwurf eines Navigationsfilters zur Fusion von GPS- und Inertialsensordaten gezeigt werden. Aufgrund der vielen Gemeinsamkeiten werden Loosely und Tightly Coupled Integration parallel betrachtet. Es wird ein error-state-space-Kalman-Filter entworfen.

8.2.1 Systemmodell

Zu Beginn des Filterentwurfs sind eine Reihe von Designentscheidungen zu treffen. Neben der Wahl einer error-state-space-Formulierung zählt dazu die Behandlung der Inertialsensordaten als bekannte Eingangsgrößen, die somit im Propagationsschritt des Filters und nicht – obwohl es sich natürlich um Messwerte handelt – im Messschritt verarbeitet werden. Das Rauschen der Inertialsensoren wird dem Systemrauschen zugeschlagen. Durch diese Vorgehensweise lässt sich ohne merkliche Einbußen in der Performance die Rechenlast deutlich reduzieren: Bei einer Verarbeitung der Inertialsensordaten im Messschritt des Filters müsste dieser mit der Taktrate der Inertialsensordaten ausgeführt werden, was aufgrund der Berechnung einer Inversen und der Anpassung der Kovarianzmatrix der Zustandsschätzung mit einer massiven Rechenlast verbunden wäre. Bei einer Berücksichtigung der Inertialsensordaten im Propagationsschritt des Filters muss dieser nicht zwingend mit der Taktrate der Inertialsensordaten ausgeführt werden. Bei einem error-state-space-Kalman-Filter besteht die Aufgabe des Propagationsschrittes in der Fortschreibung der Kovarianzmatrix des Schätzfehlers; die nach dem letzten Messschritt im Zustandsvektor enthaltenen geschätzten Fehler verschwinden nach deren Korrektur, so dass eine Propagation des Filterzustandsvektors entfallen kann. Während die eigentliche Verarbeitung der Inertialsensordaten im Strapdown-Algorithmus natürlich mit der vollen Datenrate erfolgen muss, kann der Einfluss dieser Propagation auf die Kovarianzmatrix der Zustandsschätzung in der Regel mit einer niedrigeren Taktrate gerechnet werden, ein typischer Wert wären zehn Hertz.

Neben einer Schätzung der Navigationsfehler sollen auch die Fehler der angenommenen Inertialsensorbiase geschätzt werden, um eine Online-Kalibration der IMU zu ermöglichen. Mit diesen Vorgaben resultiert für ein Loosely Coupled System ein Filter mit einem Zustandsvektor der Dimension fünfzehn:

$$\Delta \vec{x} = \left(\underbrace{\Delta x_n, \Delta x_e, \Delta x_d}_{\text{Positionsfehler } \Delta \vec{p}}, \underbrace{\Delta v_{eb,n}^n, \Delta v_{eb,e}^n, \Delta v_{eb,d}^n}_{\text{Geschwindigkeitsfehler } \Delta \vec{v}}, \underbrace{\Delta \alpha, \Delta \beta, \Delta \gamma}_{\text{Lagefehler } \Delta \vec{\psi}}, \right. \\ \left. \underbrace{\Delta b_{a,x}, \Delta b_{a,y}, \Delta b_{a,z}}_{\text{Fehler der B.-Messer-Biase } \vec{b}_a}, \underbrace{\Delta b_{\omega,x}, \Delta b_{\omega,y}, \Delta b_{\omega,z}}_{\text{Fehler der Drehratensensor-Biase } \vec{b}_\omega} \right)^T \quad (8.1)$$

Prinzipiell hätten die Positionsfehler in Nord- und Ostrichtung als Winkelfehler von Längen- und Breitengrad auch in Radian angegeben werden können. Dies kann jedoch zu numerischen Problemen führen, falls in einem Messschritt eine vollständige GPS-Positionsmessung bestehend aus Längengrad, Breitengrad und Höhe verarbeitet werden soll: Eine Standardabweichung der GPS-Positionsmessung in Nord- und Ostrichtung von $\sigma_x = 10\text{ m}$ führt auf eine Standardabweichung in Längen- und Breitengrad in der Größenordnung $\sigma_{\varphi,\lambda} \approx \frac{\sigma_x}{R_{Erde}} = \frac{10\text{ m}}{6378137\text{ m}} \approx 1.57 \times 10^{-6}\text{ rad}$. Betrachtet man nun den Fall, dass die Standardabweichung der Positionsschätzung in allen drei Raumrichtungen ebenfalls 10 m beträgt, so muss zur Berechnung der Kalman-Gain-Matrix die Inverse einer Matrix berechnet werden, deren relevante Einträge im Wertebereich zwischen 4.9×10^{-12} und 200 liegen. Die Inversion einer solchen Matrix ist numerisch extrem anspruchsvoll, mit einer Standard-Floating-Point-Arithmetik ohne weitere Maßnahmen sogar unmöglich. Die Angabe der Positionsfehler in Nord- und Ostrichtung in Metern ist eine Möglichkeit, diese Schwierigkeiten sehr einfach zu vermeiden.

Das Systemmodell des Kalman-Filters muss – neben den deterministischen Inertialsensorfehlern – die Propagation der Navigationsfehler mit der Zeit beschreiben. Diese Fehlerdifferentialgleichungen können aus den Gleichungen der inertialen Navigation gewonnen werden. Da es sich hierbei um nichtlineare Gleichungen handelt, muss um den geschätzten Systemzustand linearisiert werden.

Positionsfehlerdifferentialgleichungen

Die Änderung des Positionsfehlers in Nordrichtung hängt im Wesentlichen von dem Geschwindigkeitsfehler in Nordrichtung $\Delta v_{eb,n}^n$ und dem Höhenfehler Δx_d ab. Die zeitliche Ableitung des Breitengrades ist gegeben durch

$$\dot{\varphi} = \frac{v_{eb,n}^n}{R_n - h}. \quad (8.2)$$

Unter der Annahme, dass für die Bestimmung der Fehlerdifferentialgleichungen die Krümmungsradien der Erde als konstant angenommen werden können, ist die Taylor-Reihenentwicklung von Gl. (8.2) gegeben durch

$$\Delta \dot{\varphi} = \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial h} \cdot \Delta x_d + \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial v_{eb,n}^n} \cdot \Delta v_{eb,n}^n \\ = \frac{v_{eb,n}^n}{(R_n - h)^2} \Delta x_d + \frac{1}{R_n - h} \Delta v_{eb,n}^n. \quad (8.3)$$

Da der Positionsfehler in Nordrichtung in Metern angegeben werden soll, muss der Breitengradfehler durch Multiplikation mit dem entsprechenden Faktor umgerechnet werden:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}_n &= (R_n - h) \cdot \Delta \dot{\varphi} \\ &= \frac{v_{eb,n}^n}{(R_n - h)} \Delta x_d + \Delta v_{eb,n}^n\end{aligned}\quad (8.4)$$

In der gleichen Weise lässt sich die Änderung des Positionsfehlers in Ostrichtung herleiten. Die Ableitung des Längengrades ist gegeben durch

$$\dot{\lambda} = \frac{v_{eb,e}^n}{(R_e - h) \cos \varphi}, \quad (8.5)$$

die Taylor-Reihenentwicklung liefert

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\lambda} &= \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \varphi} \cdot \Delta \varphi + \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial h} \cdot \Delta x_d + \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial v_{eb,e}^n} \cdot \Delta v_{eb,e}^n \\ &= \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\Delta x_n}{R_n - h} + \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial h} \cdot \Delta x_d + \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial v_{eb,e}^n} \cdot \Delta v_{eb,e}^n \\ &= \frac{v_{eb,e}^n \sin \varphi}{(R_e - h) \cos^2 \varphi} \cdot \frac{\Delta x_n}{R_n - h} + \frac{v_{eb,e}^n}{(R_e - h)^2 \cos \varphi} \cdot \Delta x_d \\ &\quad + \frac{1}{(R_e - h) \cos \varphi} \cdot \Delta v_{eb,e}^n.\end{aligned}\quad (8.6)$$

Die Änderung des Positionsfehlers in Ostrichtung erhält man aus der Änderung des Längengradfehlers zu

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}_e &= (R_e - h) \cos \varphi \cdot \Delta \dot{\lambda} \\ &= \frac{v_{eb,e}^n \tan \varphi}{R_n - h} \cdot \Delta x_n + \frac{v_{eb,e}^n}{(R_e - h)} \cdot \Delta x_d + \Delta v_{eb,e}^n.\end{aligned}\quad (8.7)$$

Die zeitliche Ableitung der Höhe h über dem Erdellipsoid ist gleich der Vertikalgeschwindigkeit, daher ist der Zusammenhang zwischen Höhenfehler und Vertikalgeschwindigkeitsfehler gegeben durch

$$\Delta \dot{x}_d = \Delta v_{eb,d}^n. \quad (8.8)$$

Geschwindigkeitsfehlerdifferentialgleichungen

Im Rahmen der Strapdown-Rechnung muss die von den Beschleunigungsmessern mitgemessene Schwerkraftbeschleunigung rechnerisch aus den Beschleunigungsmesserdaten eliminiert werden. Da hierzu Lageinformationen notwendig sind, führen Lagefehler zu einer

fehlerhaften Interpretation der Beschleunigungsmesserdaten und damit zu Geschwindigkeitsfehlern. Natürlich beeinflussen die deterministischen Fehler der Beschleunigungsmesser ebenfalls die zeitliche Propagation der Geschwindigkeitsfehler.

Ausgangspunkt der Herleitung der Geschwindigkeitsfehlerdifferentialgleichungen ist die aus Abschnitt 3 bekannte Gleichung (3.151)

$$\dot{\vec{v}}_{eb}^n = \mathbf{C}_b^n \vec{f}_{ib}^b - (2\vec{\omega}_{ie}^n + \vec{\omega}_{en}^n) \times \vec{v}_{eb}^n + \vec{g}_l^n.$$

Zunächst müssen die Zusammenhänge der darin enthaltenen Größen mit den Größen, deren Fehler im Zustandsvektor des Kalman-Filters enthalten sind, ermittelt werden: Die reale Richtungskosinusmatrix \mathbf{C}_b^n ist natürlich nicht bekannt, der Zusammenhang zwischen der realen Richtungskosinusmatrix und der bekannten, geschätzten Richtungskosinusmatrix $\mathbf{C}_b^{\hat{n}}$ wird durch eine Richtungskosinusmatrix $\mathbf{C}_n^{\hat{n}}$ beschrieben:

$$\mathbf{C}_b^{\hat{n}} = \mathbf{C}_n^{\hat{n}} \mathbf{C}_b^n \quad (8.9)$$

Die geschätzte Richtungskosinusmatrix transformiert Größen, die in Koordinaten des körperfesten Koordinatensystems gegeben sind, in ein geschätztes Navigationskoordinatensystem, das sich vom realen Navigationskoordinatensystem unterscheidet. Die Transformation vom realen ins geschätzte Navigationskoordinatensystem ist durch die Lagefehler $\vec{\psi} = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ gegeben. Da diese als klein angenommen werden können, kann eine entsprechende Näherung der Richtungskosinusmatrix verwendet werden:

$$\mathbf{C}_n^{\hat{n}} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{pmatrix} = (\mathbf{I} + [\vec{\psi}_n^{\hat{n}} \times]) = (\mathbf{I} + \mathbf{\Psi}_n^{\hat{n}}) \quad (8.10)$$

Insgesamt erhält man so

$$\mathbf{C}_b^{\hat{n}} = (\mathbf{I} + \mathbf{\Psi}_n^{\hat{n}}) \mathbf{C}_b^n \quad (8.11)$$

sowie

$$\mathbf{C}_b^n = (\mathbf{I} - \mathbf{\Psi}_n^{\hat{n}}) \mathbf{C}_b^{\hat{n}}. \quad (8.12)$$

Das Äquivalent zu Gleichung (3.151) formuliert mit geschätzten Größen lautet

$$\dot{\vec{v}}_{eb}^n = \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \hat{\vec{f}}_{ib}^b - \left(2\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ie}^n + \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{en}^n \right) \hat{\vec{v}}_{eb}^n + \hat{\vec{g}}_l^n. \quad (8.13)$$

Mit der Definition $\hat{x} = x + \Delta x$ erhält man

$$\begin{aligned} \dot{\vec{v}}_{eb}^n &= \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \left(\vec{f}_{ib}^b + \Delta \vec{f}_{ib}^b \right) \\ &\quad - (2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n + 2\Delta \boldsymbol{\Omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\Omega}_{en}^n + \Delta \boldsymbol{\Omega}_{en}^n) (\vec{v}_{eb}^n + \Delta \vec{v}_{eb}^n) + \vec{g}_l^n + \Delta \vec{g}_l^n \\ &\approx \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \left(\vec{f}_{ib}^b + \Delta \vec{f}_{ib}^b \right) - (2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\Omega}_{en}^n) (\vec{v}_{eb}^n + \Delta \vec{v}_{eb}^n) \\ &\quad - (2\Delta \boldsymbol{\Omega}_{ie}^n + \Delta \boldsymbol{\Omega}_{en}^n) \vec{v}_{eb}^n + \vec{g}_l^n + \Delta \vec{g}_l^n \quad \text{da } \Delta \cdot \Delta \approx 0. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Damit kann man schreiben

$$\begin{aligned}
 \Delta \dot{\vec{v}}_{eb}^n &= \dot{\vec{v}}_{eb}^n - \dot{\vec{v}}_{eb}^n \\
 &= \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \left(\vec{f}_{ib}^b + \Delta \vec{f}_{ib}^b \right) \vec{f}_{ib}^b - \mathbf{C}_b^n \vec{f}_{ib}^b \\
 &\quad - (2\mathbf{\Omega}_{ie}^n + \mathbf{\Omega}_{en}^n) \Delta \vec{v}_{eb}^n - (2\Delta \mathbf{\Omega}_{ie}^n + \Delta \mathbf{\Omega}_{en}^n) \vec{v}_{eb}^n + \Delta \vec{g}_l^n \\
 &= \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \left(\vec{f}_{ib}^b + \Delta \vec{f}_{ib}^b \right) - (\mathbf{I} - \mathbf{\Psi}_n^{\hat{n}}) \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \vec{f}_{ib}^b \\
 &\quad - (2\mathbf{\Omega}_{ie}^n + \mathbf{\Omega}_{en}^n) \Delta \vec{v}_{eb}^n + [\vec{v}_{eb}^n \times] (2\Delta \vec{\omega}_{ie}^n + \Delta \vec{\omega}_{en}^n) + \Delta \vec{g}_l^n \\
 &= \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \Delta \vec{f}_{ib}^b + \mathbf{\Psi}_n^{\hat{n}} \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \vec{f}_{ib}^b \\
 &\quad - (2\mathbf{\Omega}_{ie}^n + \mathbf{\Omega}_{en}^n) \Delta \vec{v}_{eb}^n + [\vec{v}_{eb}^n \times] (2\Delta \vec{\omega}_{ie}^n + \Delta \vec{\omega}_{en}^n) + \Delta \vec{g}_l^n \\
 &= \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \Delta \vec{f}_{ib}^b - \left[\mathbf{C}_b^{\hat{n}} \vec{f}_{ib}^b \times \right] \vec{\psi}_n^{\hat{n}} \\
 &\quad - (2\mathbf{\Omega}_{ie}^n + \mathbf{\Omega}_{en}^n) \Delta \vec{v}_{eb}^n + [\vec{v}_{eb}^n \times] (2\Delta \vec{\omega}_{ie}^n + \Delta \vec{\omega}_{en}^n) + \Delta \vec{g}_l^n
 \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
 \Delta \dot{\vec{v}}_{eb}^n &= \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \Delta \vec{f}_{ib}^b - \left[\mathbf{C}_b^{\hat{n}} \vec{f}_{ib}^b \times \right] \vec{\psi}_n^{\hat{n}} \\
 &\quad - (2\mathbf{\Omega}_{ie}^n + \mathbf{\Omega}_{en}^n) \Delta \vec{v}_{eb}^n + [\vec{v}_{eb}^n \times] (2\Delta \vec{\omega}_{ie}^n + \Delta \vec{\omega}_{en}^n) + \Delta \vec{g}_l^n . \quad (8.15)
 \end{aligned}$$

Die Größe $\Delta \vec{g}_l^n$ kann in aller Regel problemlos vernachlässigt werden und wird daher im Folgenden nicht weiter betrachtet.

Der Zusammenhang zwischen den Größen $\Delta \vec{\omega}_{ie}^n$ und $\Delta \vec{\omega}_{en}^n$ mit den Fehlergrößen, die im Zustandsvektor des Kalman-Filters enthalten sind, lässt sich wie folgt darstellen:

$$\Delta \vec{\omega}_{ie}^n = \frac{\partial \vec{\omega}_{ie}^n}{\partial \varphi, \lambda, h} \frac{\partial \varphi, \lambda, h}{\partial x_n, x_e, x_d} \Delta \vec{p} \quad (8.16)$$

$$\Delta \vec{\omega}_{en}^n = \frac{\partial \vec{\omega}_{en}^n}{\partial \varphi, \lambda, h} \frac{\partial \varphi, \lambda, h}{\partial x_n, x_e, x_d} \Delta \vec{p} + \frac{\partial \vec{\omega}_{en}^n}{\partial \vec{v}_{eb}^n} \Delta \vec{v}_{eb}^n \quad (8.17)$$

Hierbei gilt

$$\frac{\partial \varphi, \lambda, h}{\partial x_n, x_e, x_d} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_n - h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(R_e - h) \cos \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.18)$$

und für Erddrehrate und Transportrate

$$\vec{\omega}_{ie}^n = (\Omega \cos \varphi \ 0 \ -\Omega \sin \varphi)^T \quad (8.19)$$

$$\vec{\omega}_{en}^n = \left(\frac{v_{eb,e}^n}{R_e - h} - \frac{v_{eb,n}^n}{R_n - h} - \frac{v_{eb,e}^n \tan \varphi}{R_e - h} \right)^T \quad (8.20)$$

abgeleitet nach den entsprechenden Größen erhält man

$$\frac{\partial \vec{\omega}_{ie}^n}{\partial \varphi, \lambda, h} = \begin{pmatrix} -\Omega \sin \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega \cos \varphi & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.21)$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}_{en}^n}{\partial \varphi, \lambda, h} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{v_{eb,e}^n}{(R_e-h)^2} \\ 0 & 0 & -\frac{v_{eb,n}^n}{(R_n-h)^2} \\ \frac{v_{eb,e}^n}{(R_e-h) \cos^2 \varphi} & 0 & -\frac{v_{eb,e}^n \tan \varphi}{(R_e-h)^2} \end{pmatrix}, \quad (8.22)$$

sowie

$$\frac{\partial \vec{\omega}_{en}^n}{\partial \vec{v}_{eb}^n} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{(R_e-h)} & 0 \\ -\frac{1}{(R_n-h)} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\tan \varphi}{(R_e-h)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.23)$$

Bei diesen Ableitungen können die Terme, bei denen durch das Quadrat des Erdradius dividiert wird, ohne jeden Performance-Verlust vernachlässigt werden.

Der Zusammenhang zwischen $\Delta \vec{f}_{ib}^b$ und den Fehlergrößen, die im Zustandsvektor des Kalman-Filters enthalten sind, kann erst nach Definition eines Inertialsensorfehlermodells spezifiziert werden.

Lagefehlerdifferentialgleichungen

Auch die Lagefehler selbst sind einer Dynamik unterworfen, die im Systemmodell des Kalman-Filters erfasst werden muss. Zum Einen führen nicht oder unvollständig kompensierte Drehratensensorbiase zu einer Änderung der Lagefehler mit der Zeit. Zum Anderen wird die Erddrehrate von den Drehratensensoren mitgemessen und muss im Strapdown-Algorithmus rechnerisch kompensiert werden. Fehler bei dieser Kompensation tragen ebenfalls zu einer Änderung des Lagefehlers bei. Die entsprechenden Gleichungen werden im Folgenden hergeleitet.

Mit der zeitlichen Ableitung der Richtungskosinusmatrix nach Gl. (3.110) erhält man

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{\Omega}_{nb}^b = \mathbf{C}_b^n (\mathbf{\Omega}_{ib}^b - \mathbf{\Omega}_{in}^b), \quad (8.24)$$

formuliert mit geschätzten Größen ergibt sich

$$\dot{\hat{\mathbf{C}}}_b^{\hat{n}} = \hat{\mathbf{C}}_b^{\hat{n}} \hat{\mathbf{\Omega}}_{nb}^b = \hat{\mathbf{C}}_b^{\hat{n}} (\hat{\mathbf{\Omega}}_{ib}^b - \hat{\mathbf{\Omega}}_{in}^b). \quad (8.25)$$

Aufgrund der Produktregel erhält man für die zeitliche Ableitung der geschätzten Richtungskosinusmatrix mit Gl. (8.9)

$$\dot{\mathbf{C}}_b^{\hat{n}} = \dot{\mathbf{C}}_n^{\hat{n}} \mathbf{C}_b^n + \mathbf{C}_n^{\hat{n}} \dot{\mathbf{C}}_b^n. \quad (8.26)$$

Einsetzen von Gl. (8.11) ergibt

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}}_b^{\hat{n}} &= (\mathbf{I} + \Psi_n^{\hat{n}})^{\bullet} \mathbf{C}_b^n + (\mathbf{I} + \Psi_n^{\hat{n}}) \dot{\mathbf{C}}_b^n \\ &= \dot{\Psi}_n^{\hat{n}} \mathbf{C}_b^n + (\mathbf{I} + \Psi_n^{\hat{n}}) \dot{\mathbf{C}}_b^n. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_n^{\hat{n}} \mathbf{C}_b^n + (\mathbf{I} + \Psi_n^{\hat{n}}) \dot{\mathbf{C}}_b^n &= \mathbf{C}_b^{\hat{n}} (\hat{\Omega}_{ib}^b - \hat{\Omega}_{in}^b) \\ \dot{\Psi}_n^{\hat{n}} \mathbf{C}_b^n + (\mathbf{I} + \Psi_n^{\hat{n}}) \mathbf{C}_b^n &= (\mathbf{I} + \Psi_n^{\hat{n}}) \mathbf{C}_b^n (\Omega_{ib}^b + \Delta\Omega_{ib}^b - (\Omega_{in}^b + \Delta\Omega_{in}^b)) \\ \dot{\Psi}_n^{\hat{n}} \mathbf{C}_b^n &= (\mathbf{I} + \Psi_n^{\hat{n}}) \mathbf{C}_b^n (\Delta\Omega_{ib}^b - \Delta\Omega_{in}^b) \\ \dot{\Psi}_n^{\hat{n}} (\mathbf{I} - \Psi_n^{\hat{n}}) \mathbf{C}_b^{\hat{n}} &= (\mathbf{I} + \Psi_n^{\hat{n}}) (\mathbf{I} - \Psi_n^{\hat{n}}) \mathbf{C}_b^{\hat{n}} (\Delta\Omega_{ib}^b - \Delta\Omega_{in}^b) \\ \dot{\Psi}_n^{\hat{n}} \mathbf{C}_b^{\hat{n}} &\approx \mathbf{C}_b^{\hat{n}} (\Delta\Omega_{ib}^b - \Delta\Omega_{in}^b) \quad \text{da } \Delta \cdot \Delta \approx 0 \\ \dot{\Psi}_n^{\hat{n}} &= \mathbf{C}_b^{\hat{n}} (\Delta\Omega_{ib}^b - \Delta\Omega_{in}^b) \mathbf{C}_b^{\hat{n},T} \end{aligned} \quad (8.28)$$

Dies lässt sich wie folgt umschreiben:

$$\dot{\vec{\psi}}_n^{\hat{n}} = \mathbf{C}_b^{\hat{n}} (\Delta\vec{\omega}_{ib}^b - \Delta\vec{\omega}_{in}^b) \quad (8.29)$$

Während $\Delta\vec{\omega}_{ib}^b$ erst nach Definition eines Drehratensensorfehlermodells näher spezifiziert werden kann, erhält man für $\Delta\vec{\omega}_{in}^b$:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{\omega}_{in}^b &= \hat{\vec{\omega}}_{in}^b - \vec{\omega}_{in}^b = \mathbf{C}_{\hat{n}}^b \hat{\vec{\omega}}_{in}^n - \mathbf{C}_n^b \vec{\omega}_{in}^n \\ &= \mathbf{C}_{\hat{n}}^b (\vec{\omega}_{in}^n + \Delta\vec{\omega}_{in}^n) - \mathbf{C}_{\hat{n}}^b (\mathbf{I} + \Psi_n^{\hat{n}}) \vec{\omega}_{in}^n \\ &= \mathbf{C}_{\hat{n}}^b (\Delta\vec{\omega}_{in}^n - \Psi_n^{\hat{n}} \vec{\omega}_{in}^n) \end{aligned} \quad (8.30)$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\psi}}_n^{\hat{n}} &= \mathbf{C}_b^{\hat{n}} (\Delta\vec{\omega}_{ib}^b - \mathbf{C}_{\hat{n}}^b (\Delta\vec{\omega}_{in}^n - \Psi_n^{\hat{n}} \vec{\omega}_{in}^n)) \\ &= \Psi_n^{\hat{n}} \vec{\omega}_{in}^n - \Delta\vec{\omega}_{in}^n + \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \Delta\vec{\omega}_{ib}^b \end{aligned} \quad (8.31)$$

und schließlich

$$\dot{\vec{\psi}}_n^{\hat{n}} = -\Omega_{in}^n \vec{\psi}_n^{\hat{n}} - \Delta\vec{\omega}_{in}^n + \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \Delta\vec{\omega}_{ib}^b. \quad (8.32)$$

Der Term $\Delta\vec{\omega}_{in}^n$ kann auf die bereits im vorigen Abschnitt berechneten Größen zurückgeführt werden:

$$\Delta\vec{\omega}_{in}^n = \Delta\vec{\omega}_{ie}^n + \Delta\vec{\omega}_{en}^n \quad (8.33)$$

Sind nach einem Messschritt Lagefehler $\vec{\psi}$ bekannt, so werden diese unmittelbar zur Korrektur der geschätzten Richtungskosinusmatrix herangezogen. Anschließend müssen die aufgrund dieser Korrektur verschwundenen Lagefehler zu $\vec{\psi} = \vec{0}$ gesetzt werden. Damit besteht aber vor einem Propagationsschritt kein Unterschied mehr zwischen den Fehlern der Lagefehler $\Delta\vec{\psi}$ und den totalen Größen $\vec{\psi}$.

Inertialsensorfehlerdifferentialgleichungen

Als Drehratensensorfehlermodell soll angenommen werden, dass sich die gemessene Drehrate $\tilde{\vec{\omega}}_{ib}^b$ aus der Summe der realen Drehrate, einem Bias \vec{b}_ω und einem Rauschterm \vec{n}_ω ergibt:

$$\tilde{\vec{\omega}}_{ib}^b = \vec{\omega}_{ib}^b + \vec{b}_\omega + \vec{n}_\omega, \quad (8.34)$$

Eine Schätzung der Drehrate aus dieser Messung ist durch

$$\hat{\vec{\omega}}_{ib}^b = \tilde{\vec{\omega}}_{ib}^b - \hat{\vec{b}}_\omega \quad (8.35)$$

gegeben. Damit lässt sich nun $\Delta\vec{\omega}_{ib}^b$ wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{\omega}_{ib}^b &= \hat{\vec{\omega}}_{ib}^b - \vec{\omega}_{ib}^b \\ &= \tilde{\vec{\omega}}_{ib}^b - \hat{\vec{b}}_\omega - \vec{\omega}_{ib}^b \\ &= \vec{\omega}_{ib}^b + \vec{b}_\omega + \vec{n}_\omega - \hat{\vec{b}}_\omega - \vec{\omega}_{ib}^b \\ \Delta\vec{\omega}_{ib}^b &= -\Delta\vec{b}_\omega + \vec{n}_\omega \end{aligned} \quad (8.36)$$

Analog dazu erhält man für die Beschleunigungssensoren

$$\Delta\vec{f}_{ib}^b = -\Delta\vec{b}_a + \vec{n}_a. \quad (8.37)$$

Damit sind alle Größen in der Geschwindigkeitsfehlerdifferentialgleichung Gl. (8.15) und der Lagefehlerdifferentialgleichung Gl. (8.32) bestimmt.

Bei der Modellierung der Inertialsensorbiase selbst sind verschiedene Modelle möglich. Handelt es sich um hochwertige Beschleunigungsmesser und hochwertige Drehratensensoren wie Ringlaserkreisel oder Faserkreisel, kann in der Regel die Biasdrift vernachlässigt werden, die Biase können als konstant angenommen werden:

$$\dot{\vec{b}}_a = \vec{0}, \quad \dot{\vec{b}}_\omega = \vec{0} \quad (8.38)$$

Muss eine Biasdrift berücksichtigt werden, bieten sich zur Modellierung Gauß-Markov-Prozesse erster Ordnung an,

$$\dot{\vec{b}}_a = -\frac{1}{\tau_{b_a}} \vec{b}_a + \vec{n}_{b_a} \quad , \quad \dot{\vec{b}}_\omega = -\frac{1}{\tau_{b_\omega}} \vec{b}_\omega + \vec{n}_{b_\omega} \quad (8.39)$$

eine Modellierung als Random-Walk-Prozesse ist ebenfalls möglich:

$$\dot{\vec{b}}_a = \vec{n}_{b_a} \quad , \quad \dot{\vec{b}}_\omega = \vec{n}_{b_\omega} \quad (8.40)$$

Die Vektoren \vec{n}_{b_a} und \vec{n}_{b_ω} bezeichnen hierbei das die Rauschprozesse treibende, weiße Rauschen.

Uhrenfehlerdifferentialgleichungen

Um Pseudorange- und Deltarange-Messungen direkt im Navigationsfilter verarbeiten zu können, muss das Kalman-Filter-Systemmodell um ein Modell des Empfängeruhrenfehlers erweitert werden.

Ein einfaches Empfängeruhrenfehlermodell ist durch

$$\dot{\vec{cT}} = \begin{pmatrix} c\delta t \\ c\delta i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\delta t \\ c\delta i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_{c\delta t} \\ n_{c\delta i} \end{pmatrix} \quad (8.41)$$

gegeben. Der Zustandsvektor \vec{cT} des Uhrenfehlermodells beinhaltet den Uhrenfehler $c\delta t$ und die Uhrenfehlerdrift $c\delta i$, bei dem Vektor $\vec{n}_{cT} = (n_{c\delta t}, n_{c\delta i})^T$ handelt es sich um weißes, normalverteiltes Rauschen.

Eine Alternative zur Erweiterung des Systemmodells um ein Uhrenfehlermodell besteht darin, Differenzen der zum selben Zeitpunkt vorliegenden Pseudorange- und Deltarange-Messungen zu verarbeiten. Da jede Pseudorange- und Deltarange-Messung mit dem selben Uhrenfehler bzw. der selben Uhrenfehlerdrift behaftet ist, werden durch eine Differenzenbildung Uhrenfehler und Uhrenfehlerdrift aus den Gleichungen eliminiert. Ein Vorteil dieser Vorgehensweise besteht darin, dass eine Bestimmung der Uhrenfehlermodellparameter, d.h. der spektralen Leistungsdichte des treibenden Rauschens, nicht notwendig ist. Während ein Uhrenfehlermodell das tatsächliche Verhalten nur näherungsweise beschreibt, werden durch den Verzicht auf ein Uhrenfehlermodell natürlich auch Modellierungsfehler vermieden. Um überhaupt sinnvoll mit einem Uhrenfehlermodell arbeiten zu können, ist es notwendig, dass der Empfänger ein Driften des Uhrenfehlers zulässt und diesen nicht in jedem Zeitschritt korrigiert. Selbst wenn diese Voraussetzung gegeben ist, setzen die meisten Empfänger den Uhrenfehler von Zeit zu Zeit zurück: Genau genommen kann der in den Pseudorange-Messungen enthaltene Uhrenfehler nicht größer werden als die Periodendauer des C/A-Codes, also eine Millisekunde bzw. umgerechnet ungefähr 300 km, da eine größere Laufzeitverschiebung nicht gemessen werden kann. Übersteigt der Fehler der Empfängeruhr die Länge des C/A-Codes, ändern sich einfach die empfängerinternen Pseudorange-Mehrdeutigkeitswerte. Da das auch mit einem großen Sprung in den Pseudorange-Messungen verbunden ist, kann das jedoch mit einer einfachen Heuristik detektiert und entsprechend behandelt werden. Nachteilig bei der Differenzenbildung ist, dass die als Messwerte zu verarbeitenden Differenzen der zum

selben Zeitpunkt vorliegenden Pseudoranges miteinander korreliert sind, da der selbe Pseudorange in mehrere Differenzen eingeht. Gleiches gilt natürlich auch für die Deltaranges. Diese Korrelationen können berücksichtigt werden, indem für eine Verarbeitung im Kalman-Filter alle Messwertdifferenzen zu einem Messvektor zusammengefasst werden und eine entsprechende Kovarianzmatrix \mathbf{R}_k dieses Vektors bestimmt wird, die diese Korrelationen enthält. Eine sequentielle Verarbeitung der einzelnen Messwertdifferenzen ist auch möglich, falls vorher durch eine geeignete Transformation eine Dekorrelation durchgeführt wird.

Die Verarbeitung von Differenzen der zum selben Zeitpunkt vorliegenden Pseudoranges und Deltaranges wird im Folgenden nicht weiter betrachtet, Näheres ist in [38] zu finden. Betrachtungen zu Empfängeruhrenfehlermodellen sind in [18] und [26] enthalten.

Zusammenfassung der Gleichungen

Der Übersichtlichkeit halber sind in Gl. (8.52) und (8.53) die vollständigen Systemmodelle eines Loosely und eines Tightly Coupled Systems in Zustandsraumdarstellung angegeben, die Inertialsensorbiase wurden als Random-Walk-Prozesse modelliert. Die auftretenden Submatrizen können den Gl. (8.42)–(8.49) entnommen werden.

$$\mathbf{F}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{v_{eb,n}^n}{R_{\eta}-h} \\ \frac{v_{eb,e}^n \tan \varphi}{R_n-h} & 0 & \frac{v_{eb,e}^n}{R_e-h} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.42)$$

$$\mathbf{F}_{21} = [\vec{v}_{eb}^n \times] \left(2 \frac{\partial \vec{\omega}_{ie}^n}{\partial \varphi, \lambda, h} + \frac{\partial \vec{\omega}_{en}^n}{\partial \varphi, \lambda, h} \right) \frac{\partial \varphi, \lambda, h}{\partial x_n, x_e, x_d} \quad (8.43)$$

$$\mathbf{F}_{22} = -(2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\Omega}_{en}^n) + [\vec{v}_{eb}^n \times] \frac{\partial \vec{\omega}_{en}^n}{\partial \vec{v}_{eb}^n} \quad (8.44)$$

$$\mathbf{F}_{23} = -[\mathbf{C}_b^{\hat{n}} \vec{f}_{ib}^b \times] \quad (8.45)$$

$$\mathbf{F}_{31} = -\left(\frac{\partial \vec{\omega}_{ie}^n}{\partial \varphi, \lambda, h} + \frac{\partial \vec{\omega}_{en}^n}{\partial \varphi, \lambda, h} \right) \frac{\partial \varphi, \lambda, h}{\partial x_n, x_e, x_d} \quad (8.46)$$

$$\mathbf{F}_{32} = -\frac{\partial \vec{\omega}_{en}^n}{\partial \vec{v}_{eb}^n} \quad (8.47)$$

$$\mathbf{F}_{33} = -\boldsymbol{\Omega}_{in}^n \quad (8.48)$$

$$\mathbf{F}_{66} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.49)$$

Um die Matrix \mathbf{F}_{23} exakt berechnen zu können, müsste die reale specific force, \vec{f}_{ib}^b , bekannt sein; dies ist natürlich nicht der Fall, es steht nur eine Messung dieser Größe zur Verfügung. Analog zu Gl. (8.34) ist der Zusammenhang zwischen gemessener und realer specific force gegeben durch

$$\tilde{\vec{f}}_{ib}^b = \vec{f}_{ib}^b + \vec{b}_a + \vec{n}_a. \quad (8.50)$$

Eine näherungsweise Berechnung der Matrix \mathbf{F}_{23} ist damit unter Verwendung von

$$\vec{f}_{ib}^b \approx \hat{\vec{f}}_{ib}^b = \vec{f}_{ib}^b - \hat{\vec{b}}_a \quad (8.51)$$

möglich.

Loosely Coupled System

$$\begin{pmatrix} \Delta \vec{p} \\ \Delta \vec{v} \\ \Delta \vec{\psi} \\ \Delta \vec{b}_a \\ \Delta \vec{b}_\omega \end{pmatrix}^\bullet = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} & \mathbf{F}_{23} & -\mathbf{C}_b^{\hat{n}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{31} & \mathbf{F}_{32} & \mathbf{F}_{33} & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_b^{\hat{n}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \vec{p} \\ \Delta \vec{v} \\ \Delta \vec{\psi} \\ \Delta \vec{b}_a \\ \Delta \vec{b}_\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_b^{\hat{n}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{C}_b^{\hat{n}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{n}_a \\ \vec{n}_\omega \\ \vec{n}_{b_a} \\ \vec{n}_{b_\omega} \end{pmatrix} \quad (8.52)$$

Tightly Coupled System

$$\begin{pmatrix} \Delta \vec{p} \\ \Delta \vec{v} \\ \Delta \vec{\psi} \\ \Delta \vec{b}_a \\ \Delta \vec{b}_\omega \\ \Delta c\vec{T} \end{pmatrix}^\bullet = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} & \mathbf{F}_{23} & -\mathbf{C}_b^{\hat{n}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{31} & \mathbf{F}_{32} & \mathbf{F}_{33} & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_b^{\hat{n}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \vec{p} \\ \Delta \vec{v} \\ \Delta \vec{\psi} \\ \Delta \vec{b}_a \\ \Delta \vec{b}_\omega \\ \Delta c\vec{T} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_b^{\hat{n}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{C}_b^{\hat{n}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{n}_a \\ \vec{n}_\omega \\ \vec{n}_{b_a} \\ \vec{n}_{b_\omega} \\ \vec{n}_{cT} \end{pmatrix} \quad (8.53)$$

8.2.2 Messmodelle

Die Zusammenhänge zwischen den vom GPS-Empfänger gelieferten Messwerten und dem zu schätzenden Systemzustand sind nichtlinear. Daher muss die zur Berechnung der Kalman-Gain-Matrix und zur Anpassung der Kovarianzmatrix der Schätzfehler im Messschritt benötigte Messmatrix \mathbf{H}_k durch Linearisierung der nichtlinearen Zusammenhänge gewonnen werden. Um diese Linearisierung kompakt und übersichtlich gestalten zu können, werden Regeln zur Berechnung von Ableitungen definiert.

Die Ableitung eines Skalars c nach einem Vektor \vec{x} ist – hier demonstriert für einen Vektor der Dimension zwei – gegeben durch

$$\frac{\partial c}{\partial \vec{x}} = \left(\frac{\partial c}{\partial x_1} \quad \frac{\partial c}{\partial x_2} \right). \quad (8.54)$$

Die Ableitung eines Vektors \vec{x} nach einem Vektor \vec{y} ist gegeben durch

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}. \quad (8.55)$$

Diese Definitionen erlauben auch die konsistente Berechnung verketteter Ableitungen, die Kettenregel lautet hier

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial \vec{y}} &= \frac{\partial c}{\partial \vec{x}} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}} \\ &= \left(\frac{\partial c}{\partial x_1} \quad \frac{\partial c}{\partial x_2} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial c}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial c}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_1}, \frac{\partial c}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial c}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \right). \end{aligned} \quad (8.56)$$

Beschreibt eine nichtlineare Funktion den Zusammenhang zwischen einem Messvektor der Dimension $m \times 1$ und einem Zustandsvektor der Dimension $n \times 1$, liefern diese Definitionen wie gewünscht eine Messmatrix der Dimension $m \times n$. Bei anderen, durchaus üblichen Definitionen von Ableitungen und Kettenregel ist dies nicht der Fall⁴.

Positionsmessung

Das betrachtete Navigationsfilter schätzt Positionsfehler in Koordinaten des Navigationskoordinatensystems. Daher soll für die Herleitung der Messmatrix zunächst angenommen werden, dass die vom GPS-Empfänger gelieferte Positionsmessung ebenfalls im Navigationskoordinatensystem gegeben sei.

⁴Häufig findet man auch folgende Definitionen der Ableitungen von Skalaren bzw. Vektoren nach Vektoren: $\frac{\partial c}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial x_1} \\ \frac{\partial c}{\partial x_2} \end{pmatrix}$, $\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}$. Die Kettenregel lautet mit diesen Definitionen $\frac{\partial c}{\partial \vec{y}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}} \frac{\partial c}{\partial \vec{x}}$.

Ein GPS-Empfänger liefert die Position der GPS-Antenne, diese sei mit \vec{r}_A^n bezeichnet. Das Navigationssystem schätzt die Position des gemeinsamen Ursprungs von körperfestem Koordinatensystem und Navigationskoordinatensystem, die sich von dieser Antennenposition unterscheidet. Diese Position sei mit \vec{r}_U^n bezeichnet. Es wird ferner angenommen, dass die Position der GPS-Antenne im körperfesten Koordinatensystem durch einen bekannten, konstanten Vektor

$$\vec{l}^b = (l_x, l_y, l_z)^T \quad (8.57)$$

beschrieben wird, der von der im Ursprung des körperfesten Koordinatensystems befindlichen IMU zur GPS-Antenne weist. Dieser Vektor lässt sich in Koordinaten des Navigationskoordinatensystems umrechnen:

$$\vec{l}^n = (l_n, l_e, l_d)^T = \mathbf{C}_b^n \vec{l}^b \quad (8.58)$$

Damit erhält man für den Zusammenhang zwischen \vec{r}_A^n und \vec{r}_U^n

$$\vec{r}_A^n = \vec{r}_U^n + \mathbf{C}_b^n \vec{l}^b \quad (8.59)$$

bzw. formuliert mit geschätzten Größen

$$\hat{\vec{r}}_A^n = \hat{\vec{r}}_U^n + \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \vec{l}^b . \quad (8.60)$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta \vec{r}_A^n &= \hat{\vec{r}}_A^n - \vec{r}_A^n \\ &= \hat{\vec{r}}_U^n - \vec{r}_U^n + \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \vec{l}^b - (\mathbf{I} - \Psi_n^{\hat{n}}) \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \vec{l}^b \\ &= \Delta \vec{r}_U^n + \Psi_n^{\hat{n}} \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \vec{l}^b \\ &= \Delta \vec{r}_U^n - \left[\mathbf{C}_b^{\hat{n}} \vec{l}^b \times \right] \vec{\psi}_n^{\hat{n}} . \end{aligned} \quad (8.61)$$

Die Messmatrix $\mathbf{H}_{pos,k}$ des Loosely Coupled Systems ist somit gegeben durch

$$\mathbf{H}_{pos,k} = (\mathbf{H}_{p1} \ \mathbf{H}_{p2} \ \mathbf{H}_{p3} \ \mathbf{H}_{p4} \ \mathbf{H}_{p5}) \quad (8.62)$$

mit

$$\mathbf{H}_{p1} = \mathbf{I} \quad (8.63)$$

$$\mathbf{H}_{p2} = \mathbf{0} \quad (8.64)$$

$$\mathbf{H}_{p3} = -[\hat{\vec{l}}^n \times] \quad (8.65)$$

$$\mathbf{H}_{p4} = \mathbf{0} \quad (8.66)$$

$$\mathbf{H}_{p5} = \mathbf{0} . \quad (8.67)$$

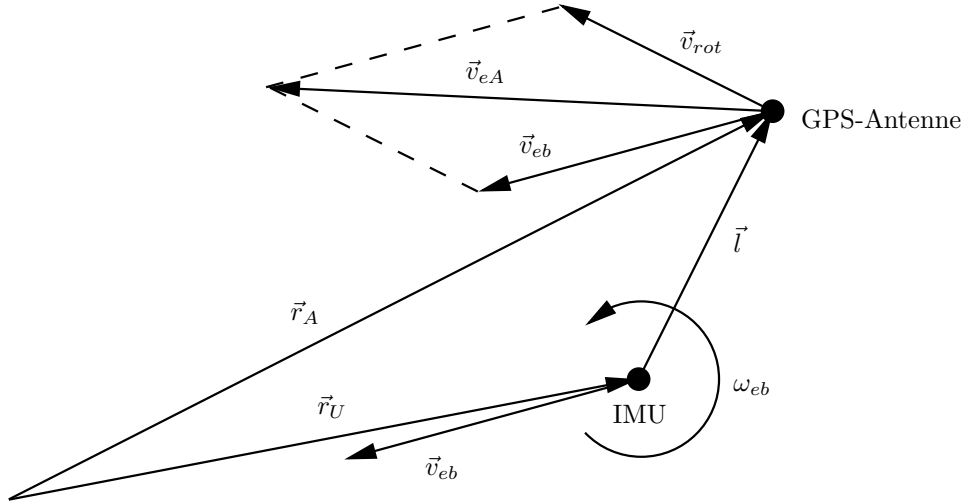


Abbildung 8.1: Unterschiedliche Geschwindigkeiten von GPS-Antenne und IMU.

Wie in Abschnitt 6.4 gezeigt verarbeitet ein error-state-space-Kalman-Filter als Messwert $\Delta \tilde{y}_k$ die Differenz zwischen dem erwarteten Messwert $\hat{\tilde{y}}_k$, der auf der aktuellen Zustandsschätzung basiert, und der eigentlichen Messung \tilde{y}_k . Bei der hier gewählten Formulierung muss diese Differenz in Koordinaten des Navigationskoordinatensystems gegeben sein und die Einheit Meter besitzen. Liefert der GPS-Empfänger eine Positionsmessung in Form von Breitengrad $\tilde{\varphi}$, Längengrad $\tilde{\lambda}$ und Höhe \tilde{h} , so ist $\Delta \tilde{y}_{pos,k}$ durch

$$\Delta \tilde{y}_{pos,k} = \begin{pmatrix} (\hat{\varphi} - \tilde{\varphi}) \cdot (R_n - \hat{h}) \\ (\hat{\lambda} - \tilde{\lambda}) \cdot (R_e - \hat{h}) \cos \hat{\varphi} \\ (\hat{h} - \tilde{h}) \end{pmatrix}_k \quad (8.68)$$

gegeben. Hierbei bezeichnen $\hat{\varphi}$, $\hat{\lambda}$ und \hat{h} die a-priori-Schätzungen von Breitengrad, Längengrad und Höhe.

Geschwindigkeitsmessung

Die Relativposition von GPS-Antenne und IMU muss auch bei Verarbeitung einer GPS-Geschwindigkeitsmessung berücksichtigt werden: Ändert das Fahrzeug seine Lage, haben die damit verbundenen Rotationen zur Folge, dass sich die Geschwindigkeiten von GPS-Antenne und Ursprung des körperfesten Koordinatensystems unter Umständen signifikant unterscheiden, siehe Abb. 8.1.

Die Geschwindigkeit der GPS-Antenne \vec{v}_{eA}^n bezüglich des erdfesten Koordinatensystems ist in Koordinaten des Navigationskoordinatensystems gegeben durch

$$\vec{v}_{eA}^n = \vec{v}_{eb}^n + \mathbf{C}_b^n \left(\vec{\omega}_{eb}^b \times \vec{l}^b \right) \quad . \quad (8.69)$$

Die für die Relativgeschwindigkeit verantwortliche Drehrate $\vec{\omega}_{eb}^b$ lässt sich in die Erddrehrate und die Drehrate des körperfesten Koordinatensystems bezüglich des Inertialkoordinatensystems zerlegen:

$$\vec{\omega}_{eb}^b = -\vec{\omega}_{ie}^b + \vec{\omega}_{ib}^b \quad (8.70)$$

Die Drehbewegungen des Fahrzeugs können je nach Anwendung mit mehreren hundert Grad pro Sekunde stattfinden, während die Erddrehrate nur etwas mehr als fünfzehn Grad pro Stunde beträgt. Diese kann daher bei der Berücksichtigung der Relativgeschwindigkeit von GPS-Antenne und IMU im Kalman-Filter vernachlässigt werden, man erhält

$$\vec{v}_{eA}^n \approx \vec{v}_{eb}^n + \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \vec{l}^b, \quad (8.71)$$

bzw. formuliert mit geschätzten Größen

$$\hat{\vec{v}}_{eA}^n \approx \hat{\vec{v}}_{eb}^n + \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ib}^b \vec{l}^b. \quad (8.72)$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} \Delta \vec{v}_{eA}^n &= \hat{\vec{v}}_{eA}^n - \vec{v}_{eA}^n \\ &= \Delta \vec{v}_{eb}^n + \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ib}^b \vec{l}^b - (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Psi}_n^{\hat{n}}) \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \vec{l}^b \\ &= \Delta \vec{v}_{eb}^n + \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \Delta \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \vec{l}^b + \boldsymbol{\Psi}_n^{\hat{n}} \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \vec{l}^b \\ &= \Delta \vec{v}_{eb}^n - \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \left[\vec{l}^b \times \right] \Delta \vec{\omega}_{ib}^b - \left[\mathbf{C}_b^{\hat{n}} \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \vec{l}^b \times \right] \vec{\psi}_n^{\hat{n}} \\ &\approx \Delta \vec{v}_{eb}^n - \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \left[\vec{l}^b \times \right] \Delta \vec{\omega}_{ib}^b - \left[\mathbf{C}_b^{\hat{n}} \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ib}^b \vec{l}^b \times \right] \vec{\psi}_n^{\hat{n}} \\ &= \Delta \vec{v}_{eb}^n + \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \left[\vec{l}^b \times \right] \Delta \vec{b}_\omega - \left[\mathbf{C}_b^{\hat{n}} \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ib}^b \vec{l}^b \times \right] \vec{\psi}_n^{\hat{n}}. \end{aligned} \quad (8.73)$$

Die in einem Loosely Coupled System für die Verarbeitung einer Geschwindigkeitsmessung benötigte Messmatrix $\mathbf{H}_{velo,k}$ ist daher gegeben durch

$$\mathbf{H}_{velo,k} = (\mathbf{H}_{v1} \ \mathbf{H}_{v2} \ \mathbf{H}_{v3} \ \mathbf{H}_{v4} \ \mathbf{H}_{v5}) \quad (8.74)$$

mit

$$\mathbf{H}_{v1} = \mathbf{0} \quad (8.75)$$

$$\mathbf{H}_{v2} = \mathbf{I} \quad (8.76)$$

$$\mathbf{H}_{v3} = - \left[\mathbf{C}_b^{\hat{n}} \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ib}^b \vec{l}^b \times \right] \quad (8.77)$$

$$\mathbf{H}_{v4} = \mathbf{0} \quad (8.78)$$

$$\mathbf{H}_{v5} = \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \left[\vec{l}^b \times \right]. \quad (8.79)$$

Die als Messwert $\Delta \vec{v}_{eA,k}^n$ verarbeitete Differenz zwischen dem erwarteten Messwert $\hat{\vec{v}}_{eA,k}^n$ und dem vorliegenden Messwert $\tilde{\vec{v}}_{eA,k}^n$ ist gegeben durch

$$\Delta \vec{v}_{eA,k}^n = \hat{\vec{v}}_{eb}^n + \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ib}^b \times \vec{l}^b - \tilde{\vec{v}}_{eA,k}^n. \quad (8.80)$$

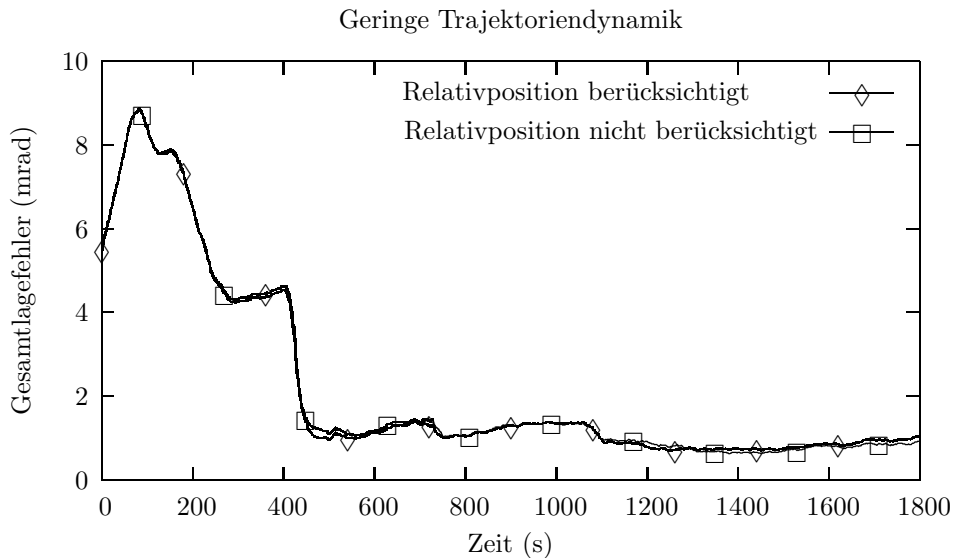


Abbildung 8.2: Gesamtlagefehler bei Berücksichtigung bzw. Vernachlässigung der Relativposition von GPS-Antenne und IMU.

Ob die Relativposition zwischen GPS-Antenne und IMU im Navigationsfilter berücksichtigt werden muss, hängt im Wesentlichen von der Länge des Vektors \vec{l}^b , der Güte der eingesetzten Sensoren und der Trajektoriendynamik ab. Dies wird in Abb. 8.2 und 8.3 illustriert, die den rms-Wert des Gesamtlagefehlers bei zehn Simulationsläufen eines integrierten GPS/INS-Navigationssystems zeigen. Der Gesamtlagefehler wurde hierbei ermittelt, indem in jedem Zeitschritt eine Drehmatrix $(\mathbf{I} + \Psi_{err})$ berechnet wurde, die die Drehung von der geschätzten in die – da es sich um eine Simulation handelt, bekannte – tatsächliche Lage vermittelt. Der gezeigte Gesamtlagefehler ist durch den rms-Wert der drei in der Drehmatrix $(\mathbf{I} + \Psi_{err})$ enthaltenen Winkel gegeben. Desweiteren wurde ein Abstand zwischen GPS-Antenne und IMU von fünf Metern angenommen, es wurden tactical-grade-Inertialsensoren simuliert. Bei den in Abb. 8.2 gezeigten Simulationsergebnissen lag eine geringe Trajektoriendynamik vor, die Winkelgeschwindigkeit von Drehbewegungen blieb auf wenige Grad pro Sekunde beschränkt. Man erkennt, dass sich die Vernachlässigung der Relativposition von GPS-Antenne und IMU nicht negativ auf die Lagegenauigkeit auswirkt. Bei den in Abb. 8.3 gezeigten Simulationsergebnissen erkennt man jedoch massive Unterschiede, hier wurden Drehbewegungen bis fünfzehn Grad pro Sekunde und Beschleunigungen bis zur zweieinhalbfachen Schwerkraft angenommen. Ohne Berücksichtigung der Relativposition verschlechtert sich die Lagegenauigkeit deutlich: Zum Einen wird der Anfangslagefehler durch die ersten Manöver langsamer abgebaut, zum Anderen wird auch mit fortschreitender Simulationsdauer die bei Berücksichtigung der Relativposition resultierende Genauigkeit nicht erreicht. Es ist klar, dass sich durch die Vernachlässigung der Relativposition auch

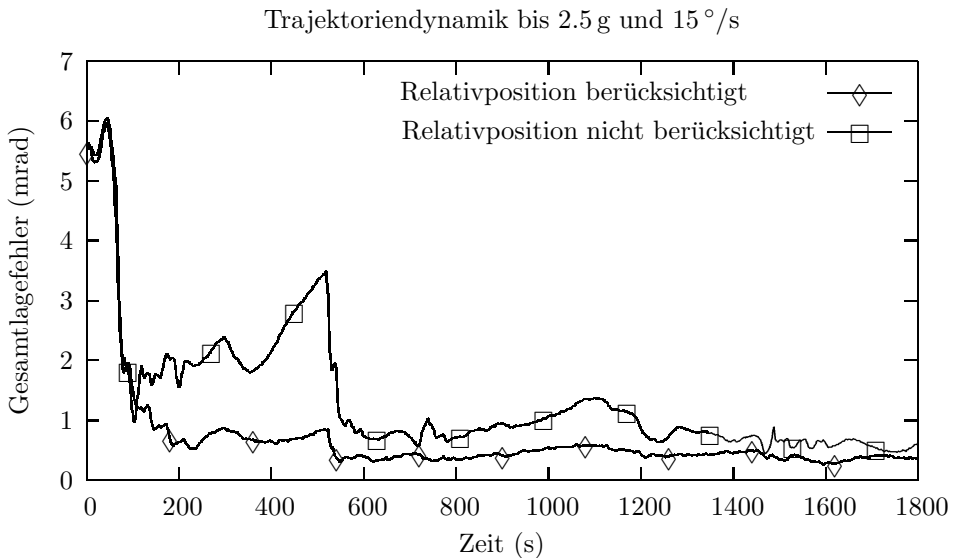


Abbildung 8.3: Gesamtlagefehler bei Berücksichtigung bzw. Vernachlässigung der Relativposition von GPS-Antenne und IMU.

entsprechende Positionsfehler ergeben, die Geschwindigkeit ist durch die während Drehbewegungen vorliegenden systematischen Fehler der Geschwindigkeitsmessung ebenfalls beeinträchtigt. Abschließend fällt auf, dass bei größerer Trajektoriendynamik die Lagefehler schneller abgebaut werden und eine insgesamt größere Lagegenauigkeit erzielt wird. Die Ursache dafür liegt in der Struktur des Systemmodells, dieser Aspekt wird in Abschnitt 10.1 näher betrachtet.

Pseudorange-Messung

In einem Tightly Coupled System werden GPS-Pseudorange- und Deltarange-Messungen verarbeitet. Hierbei bietet sich eine sequentielle Verarbeitung dieser Messwerte an: Jede Messung wird als skalare Einzelmessung verarbeitet, d.h. liegen zu einem Zeitpunkt n Pseudorange-Messungen vor, werden nacheinander n Messschritte durchgeführt. Die Alternative hierzu wäre, aus allen zu einem Zeitpunkt vorliegenden Messwerten einen Messwertvektor aufzubauen und diese Messwerte so in einem einzigen Messschritt zu verarbeiten. Dabei müsste jedoch eine Matrix invertiert werden, deren Dimension durch die Anzahl der vorliegenden Messwerte bestimmt ist, was durchaus kritisch und aufwändig sein kann. Außerdem müsste bei der Implementierung einer solchen Parallelverarbeitung der Messwerte die variierende – da von der Anzahl der Messwerte abhängige – Dimension der Messmatrix beachtet werden, was einen zusätzlichen Programmieraufwand bedeuten würde.

Der Zusammenhang zwischen Pseudorange ρ_i und Position der GPS-Antenne \vec{r}_A^n ist

gegeben durch

$$\rho_i = \sqrt{(\vec{r}_{S,i}^n - \vec{r}_A^n)^T (\vec{r}_{S,i}^n - \vec{r}_A^n)} + c\delta t, \quad (8.81)$$

wobei $\vec{r}_{S,i}^n = (x_{S,i}, y_{S,i}, z_{S,i})^T$ die in das Navigationskoordinatensystem umgerechnete Satellitenposition bezeichnet, $\vec{r}_A^n = (x_A, y_A, z_A)^T$ ist die Position der GPS-Antenne. Die Messmatrix einer Pseudorange-Messung ist durch die Jacobi-Matrix der rechten Seite von Gl. (8.81) gegeben. Bereits in Abschnitt 4.3.1 wurde die Ableitung

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial \vec{r}_A^n} = \frac{-\vec{r}_A^{n,T}}{\sqrt{(x_{S,i} - x_A)^2 + (y_{S,i} - y_A)^2 + (z_{S,i} - z_A)^2}} = -\vec{e}_{S,i}^{n,T} \quad (8.82)$$

ermittelt. Mit Gl. (8.61) erhält man

$$\begin{aligned} \Delta \rho_i &= \frac{\partial \rho_i}{\partial \vec{r}_A^n} \Delta \vec{r}_A^n + \frac{\partial \rho_i}{\partial c\vec{T}} \Delta c\vec{T} \\ &= -\vec{e}_{S,i}^{n,T} \left(\Delta \vec{r}_U^n - [\mathbf{C}_b^{\hat{n}} \vec{l}^b \times] \vec{\psi}_n^{\hat{n}} \right) + \frac{\partial \rho_i}{\partial c\vec{T}} \Delta c\vec{T}, \end{aligned} \quad (8.83)$$

die gesuchte Messmatrix zur Verarbeitung einer Pseudorange-Messung ergibt sich daher zu

$$\mathbf{H}_{\rho,k} = (\mathbf{H}_{\rho1} \ \mathbf{H}_{\rho2} \ \mathbf{H}_{\rho3} \ \mathbf{H}_{\rho4} \ \mathbf{H}_{\rho5} \ \mathbf{H}_{\rho6}) \quad (8.84)$$

mit

$$\mathbf{H}_{\rho1} = -\vec{e}_{S,i}^{n,T} \quad (8.85)$$

$$\mathbf{H}_{\rho2} = \mathbf{0} \quad (8.86)$$

$$\mathbf{H}_{\rho3} = \vec{e}_{S,i}^{n,T} [\hat{\vec{l}}^n \times] \quad (8.87)$$

$$\mathbf{H}_{\rho4} = \mathbf{0} \quad (8.88)$$

$$\mathbf{H}_{\rho5} = \mathbf{0} \quad (8.89)$$

$$\mathbf{H}_{\rho6} = (1 \ 0) \quad (8.90)$$

Die vom Filter verarbeitete Differenz zwischen erwarteter und vorliegender Pseudorange-Messung ist gegeben durch

$$\Delta \rho_i = \sqrt{\left(\vec{r}_{S,i}^n - \hat{\vec{r}}_U^n - \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \vec{l}^b \right)^T \left(\vec{r}_{S,i}^n - \hat{\vec{r}}_U^n - \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \vec{l}^b \right)} + c\delta \hat{t} - \tilde{\rho}_i. \quad (8.91)$$

Deltarange-Messung

Die Messmatrix zur Verarbeitung einer Deltarange-Messung wird auf dem gleichen Wege wie die Messmatrix der Pseudorange-Messung bestimmt. Der Zusammenhang zwischen Deltarange $v_{rel, \vec{e}_{S,i}}$ und der Geschwindigkeit der GPS-Antenne ist gegeben durch

$$v_{rel, \vec{e}_{S,i}} = \vec{e}_{S,i}^{n,T} (\vec{v}_{eS,i}^n - \vec{v}_{eA}^n) + c\delta\dot{t} , \quad (8.92)$$

wobei $\vec{v}_{eS,i}^n$ die ins Navigationskoordinatensystem umgerechnete Satellitengeschwindigkeit bezeichnet.

Mit Gl. (8.73) erhält man

$$\begin{aligned} \Delta v_{rel, \vec{e}_{S,i}} &= \frac{\partial v_{rel, \vec{e}_{S,i}}}{\partial \vec{v}_{eA}^n} \Delta \vec{v}_{eA}^n + \frac{\partial v_{rel, \vec{e}_{S,i}}}{\partial c\vec{T}} \Delta c\vec{T} \\ &= -\vec{e}_{S,i}^{n,T} \left(\Delta \vec{v}_{eA}^n + \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \begin{bmatrix} \vec{l}^b \times \end{bmatrix} \Delta \vec{b}_\omega - \left[\mathbf{C}_b^{\hat{n}} \hat{\mathbf{\Omega}}_{ib}^b \vec{l}^b \times \right] \vec{\psi}_n^{\hat{n}} \right) \\ &\quad + \frac{\partial v_{rel, \vec{e}_{S,i}}}{\partial c\vec{T}} \Delta c\vec{T} , \end{aligned} \quad (8.93)$$

die gesuchte Messmatrix zur Verarbeitung einer Deltarange-Messung ergibt sich daher zu

$$\mathbf{H}_{dr,k} = (\mathbf{H}_{dr1} \ \mathbf{H}_{dr2} \ \mathbf{H}_{dr3} \ \mathbf{H}_{dr4} \ \mathbf{H}_{dr5} \ \mathbf{H}_{dr6}) \quad (8.94)$$

mit

$$\mathbf{H}_{dr1} = \mathbf{0} \quad (8.95)$$

$$\mathbf{H}_{dr2} = -\vec{e}_{S,i}^{n,T} \quad (8.96)$$

$$\mathbf{H}_{dr3} = \vec{e}_{S,i}^{n,T} \cdot \left[\mathbf{C}_b^{\hat{n}} \hat{\mathbf{\Omega}}_{ib}^b \vec{l}^b \times \right] \quad (8.97)$$

$$\mathbf{H}_{dr4} = \mathbf{0} \quad (8.98)$$

$$\mathbf{H}_{dr5} = -\vec{e}_{S,i}^{n,T} \cdot \mathbf{C}_b^{\hat{n}} [\vec{l}^b \times] \quad (8.99)$$

$$\mathbf{H}_{dr6} = (0 \ 1) . \quad (8.100)$$

Die vom Filter verarbeitete Differenz zwischen erwarteter und vorliegender Deltarange-Messung ist gegeben durch

$$\Delta v_{dr} = \vec{e}_{S,i}^{n,T} \left(\vec{v}_{eS,i}^n - \hat{\vec{v}}_{eb}^n - \mathbf{C}_b^{\hat{n}} \hat{\mathbf{\Omega}}_{ib}^b \vec{l}^b \right) + c\delta\hat{t} - \tilde{v}_{rel, \vec{e}_{S,i}} . \quad (8.101)$$

8.2.3 Korrektur der totalen Größen

Nachdem die zu einem Zeitpunkt vorliegenden Messwerte verarbeitet wurden, enthält der Zustandsvektor des Kalman-Filters die geschätzten Fehler der Navigationslösung, der angenommenen Inertialsensorbiase und, im Falle eines Tightly Coupled Systems, des

Uhrenfehlers und der Uhrenfehlerdrift. Die totalen Größen werden daher nach jedem Messschritt mit Hilfe dieser geschätzten Fehler korrigiert.

Die Gleichungen für die Korrektur der Position sind gegeben durch

$$\hat{\varphi}^+ = \hat{\varphi}^- - \frac{\Delta \hat{x}_n^+}{R_n - \hat{h}^-} \quad (8.102)$$

$$\hat{\lambda}^+ = \hat{\lambda}^- - \frac{\Delta \hat{x}_e^+}{(R_e - \hat{h}^-) \cos \hat{\varphi}^-} \quad (8.103)$$

$$\hat{h}^+ = \hat{h}^- - \Delta \hat{x}_d^+, \quad (8.104)$$

die Korrektur der Geschwindigkeit erfolgt gemäß

$$\hat{v}_{eb}^{n,+} = \hat{v}_{eb}^{n,-} - \Delta \hat{v}_{eb}^{n,+}. \quad (8.105)$$

Zur Korrektur der Lage wird aus den geschätzten Lagefehlern ein Korrekturquaternion \mathbf{q}_c berechnet und mit dem a-priori-Lagequaternion multipliziert. Hierbei bietet es sich ebenfalls an, die Reihenentwicklungen der trigonometrischen Funktionen zu verwenden, um eine Division durch Null ausschließen zu können. Diese würde bei $\Delta \hat{\psi} = \vec{0}$ auftreten, falls die Funktion $\text{si}(x)$ einfach als $\text{si}(x) = \sin(x)/x$ implementiert würde. Die Korrektur des Lagequaternions ist somit durch die Gleichungen

$$\vec{\sigma}_c = -\Delta \hat{\psi} \quad (8.106)$$

$$\sigma_c = \sqrt{\vec{\sigma}_c^T \vec{\sigma}_c} \quad (8.107)$$

$$\mathbf{q}_c = \begin{pmatrix} \cos \frac{\sigma_c}{2} \\ \frac{\vec{\sigma}_c}{\sigma_c} \sin \frac{\sigma_c}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{8}\sigma_c^2 + \frac{1}{384}\sigma_c^4 + \frac{1}{46080}\sigma_c^6 + \dots \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{48}\sigma_c^2 + \frac{1}{3840}\sigma_c^4 - \frac{1}{645120}\sigma_c^6 + \dots \end{pmatrix} \quad (8.108)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_b^{n,+} = \mathbf{q}_c \bullet \hat{\mathbf{q}}_b^{n,-} \quad (8.109)$$

gegeben.

Die Korrektur der Inertialsensorbiase, des Uhrenfehlers und der Uhrenfehlerdrift erfolgt gemäß

$$\hat{b}_a^+ = \hat{b}_a^- - \Delta \hat{b}_a^+ \quad (8.110)$$

$$\hat{b}_\omega^+ = \hat{b}_\omega^- - \Delta \hat{b}_\omega^+ \quad (8.111)$$

$$c\delta \hat{t}^+ = c\delta \hat{t}^- - \Delta c\delta \hat{t}^+ \quad (8.112)$$

$$c\delta \hat{t}^+ = c\delta \hat{t}^- - \Delta c\delta \hat{t}^+. \quad (8.113)$$

Nachdem die totalen Größen mit Hilfe der geschätzten Fehler korrigiert wurden, müssen die geschätzten Fehler, d.h. der Zustandsvektor des Kalman-Filters, zu Null gesetzt werden:

$$\Delta \vec{x} = \vec{0} \quad (8.114)$$

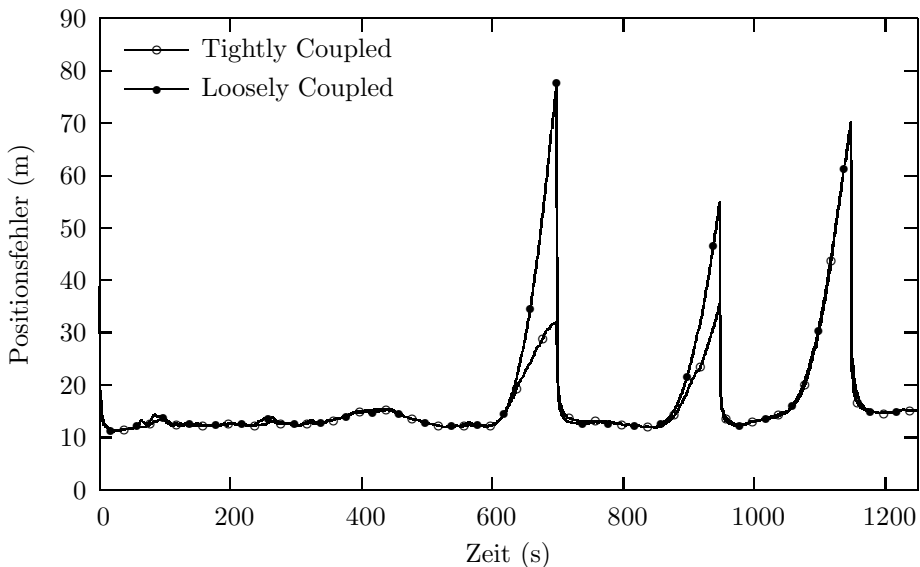


Abbildung 8.4: Mittlere Positionsfehler bei 50 Simulationsläufen.

Würde dieses Rücksetzen des Zustandsvektors versäumt, würden die geschätzten Fehler nach dem nächsten Zeitschritt erneut zur Korrektur der totalen Größen herangezogen, was natürlich algorithmisch nicht korrekt wäre.

8.2.4 Vergleich von Loosely Coupled und Tightly Coupled Systemen

Bereits in den neunziger Jahren wurden die ersten Vergleiche von Loosely Coupled und Tightly Coupled GPS/INS-Systemen veröffentlicht, siehe [83],[82], die Vorteile von Tightly Coupled Systemen aufzeigten. Dennoch wird auch heute noch häufig eine Verarbeitung von GPS-Positions- und Geschwindigkeitsmessungen vorgezogen, meist um den für die Verarbeitung von Pseudoranges und Deltaranges nötigen Entwicklungsaufwand zu umgehen.

Im Folgenden soll die Leistungsfähigkeit der beiden Integrationsansätze anhand von numerischen Simulationen verglichen werden. Um eine realistische Konstellation zu garantieren, wurden die Satellitenbahnen anhand von realen Almanach-Daten simuliert. Es wurde eine Vibrationsumgebung angenommen, wie sie z.B. bei manchen Flugkörpern anzutreffen ist. Diese wirkte sich natürlich negativ auf die Inertialnavigation aus, die basierend auf den Parametern einer typischen tactical-grade-IMU simuliert wurde.

Zunächst wurde ein Szenario betrachtet, bei dem von 600 Sekunden bis 700 Sekunden nach Simulationsbeginn drei Satelliten und von 850 Sekunden bis 950 Sekunden zwei Satelliten sichtbar waren. Von 1050 Sekunden bis 1150 Sekunden lagen nur von

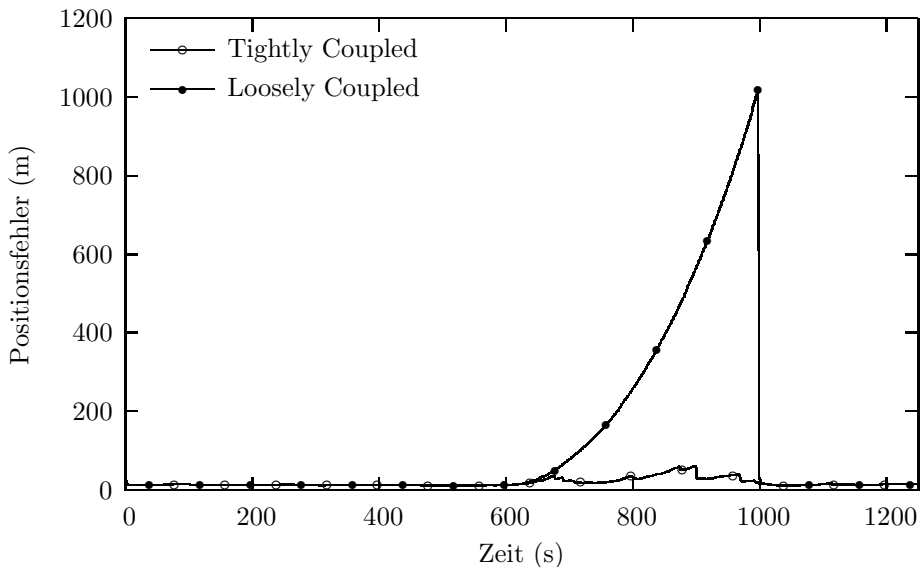


Abbildung 8.5: Mittlere Positionsfehler bei 50 Simulationenläufen. Während unvollständiger Konstellationen zwischen 600 und 1000 Sekunden wurde zu jedem Zeitpunkt nur ein Satellitensignal empfangen, der sichtbare Satellit wechselte jedoch mehrmals.

einem Satelliten Pseudorange- und Deltarange-Messungen vor. Zu allen anderen Zeitpunkten waren vier oder mehr Satelliten verfügbar. Abb. 8.4 zeigt die rms-Werte der während fünfzig Simulationenläufen aufgetretenen Positionsfehler. Bei vier oder mehr sichtbaren Satelliten liefern Loosely Coupled und Tightly Coupled Systeme praktisch identische Ergebnisse⁵. Bei weniger als vier sichtbaren Satelliten wachsen die Navigationsfehler des Loosely Coupled Systems entsprechen der Inertialnavigationsperformance an, das Tightly Coupled System profitiert von der Stützung durch die Pseudorange- und Deltarange-Messungen zu den verbliebenen Satelliten. Bei nur einem sichtbaren Satellit ist hier kein Vorteil mehr zu erkennen, diese Feststellung lässt sich jedoch nicht verallgemeinern. Die Performance des Tightly Coupled Systems hängt bei weniger als vier sichtbaren Satelliten unter anderem von der Güte der Empfängeruhr und von der Satellitenkonstellation ab. Während bei den in Abb. 8.4 gezeigten Simulationsergebnissen bei unvollständigen Konstellationen keine Satellitenwechsel vorlagen, wurde bei den in Abb. 8.5 gezeigten Simulationsergebnissen angenommen, dass in der Zeit von 600 Sekunden bis 1000 Sekunden zwar zu jedem Zeitpunkt nur ein Satellit sichtbar ist, dass der sichtbare Satellit jedoch mehrmals wechselt. Solche oder ähnliche Situationen sind in Stadtgebieten nicht ungewöhnlich, hier schränken Gebäude die Sicht auf die GPS-Satelliten massiv ein. Die Richtung der befahrenen Straße beeinflusst so, welche Satelliten sichtbar sind. Ändert sich z.B. aufgrund eines Abbiegevorganges die Him-

⁵Das setzt voraus, dass ungefilterte Positions- und Geschwindigkeitsmessungen sowie Informationen bezüglich der Güte der Messwerte vom GPS-Empfänger zur Verfügung gestellt werden.

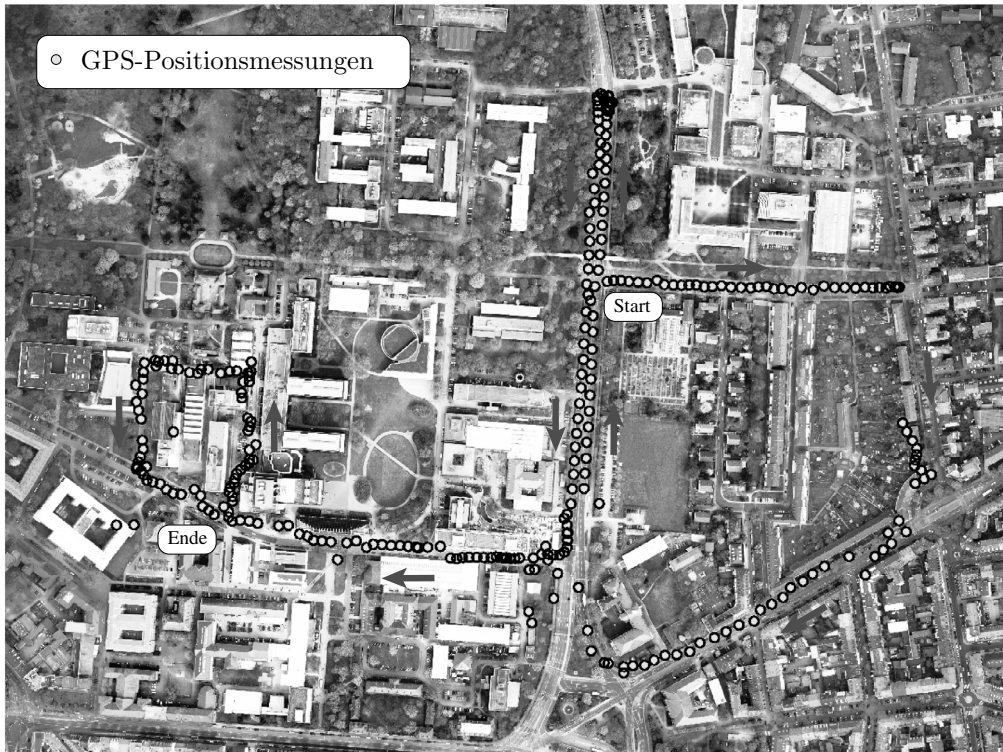


Abbildung 8.6: GPS-Positionsmessungen während der Testfahrt. Kartengrundlage: ©Stadt Karlsruhe, Vermessung, Liegenschaften, Wohnen.

melsrichtung der befahrenen Straße, ändern sich häufig auch die sichtbaren Satelliten: Bisher sichtbare Satelliten werden durch Gebäude verdeckt, bisher verdeckte Satelliten werden sichtbar.

Man erkennt in Abb. 8.5, dass das Tightly Coupled System in einem solchen Szenario noch eine brauchbare Positionsgenauigkeit aufrechterhalten kann, während die Navigationsfehler des Loosely Coupled Systems aufgrund der fehlenden Stützung unbeschränkt anwachsen.

Ein ähnliches Verhalten wie bei den in Abb. 8.4 und Abb. 8.5 gezeigten Positionsfehlern ist auch für die Geschwindigkeits- und Lagefehler zu beobachten.

Die in den numerischen Simulationen beobachteten Eigenschaften von Loosely Coupled und Tightly Coupled Systemen konnten auch experimentell bestätigt werden, die Ergebnisse einer Testfahrt sind in Abb. 8.6 bis Abb. 8.8 dargestellt. Hierbei wurden während der Testfahrt die Daten aller Navigationssensoren aufgezeichnet und anschließend offline mit den verschiedenen Navigationsalgorithmen verarbeitet. Dadurch wurde sichergestellt, dass beide Navigationssystemarchitekturen identische Sensordaten erhal-

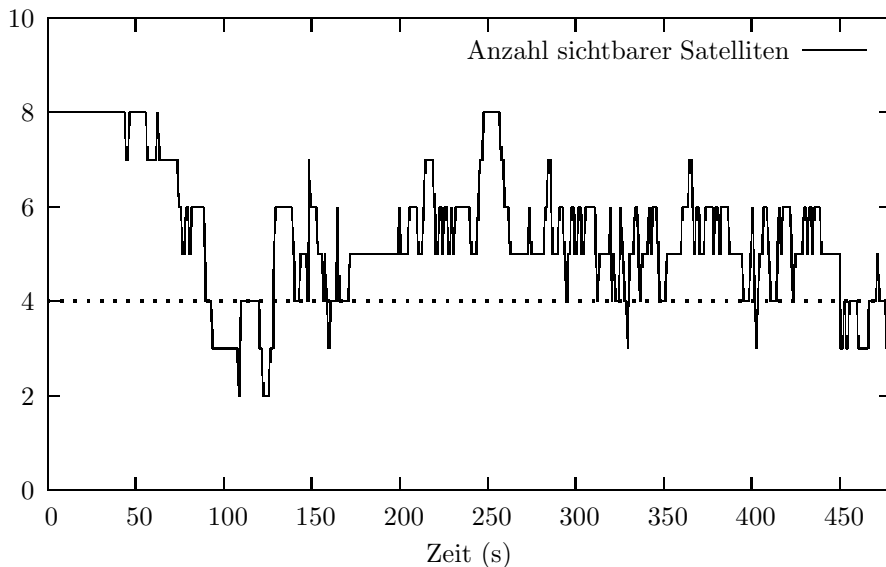


Abbildung 8.7: Anzahl der sichtbaren Satelliten während der Testfahrt.

ten, was die Vergleichbarkeit der Ergebnisse garantiert.

Abb. 8.6 zeigt die vom GPS-Empfänger gelieferten Positionsmessungen. Man erkennt im rechten Teil des Bildes eine große Lücke in den GPS-Positionsmessungen, hier wurden so viele Satelliten durch die umstehenden Gebäude abgeschattet, dass der GPS-Empfänger keine Positions- und Geschwindigkeitsmessungen mehr liefern konnte. Dies wird durch Abb. 8.7 bestätigt, die die Anzahl der verfügbaren Satelliten zeigt: Im Bereich zwischen 80 und 130 Sekunden sank die Anzahl der sichtbaren Satelliten teilweise dauerhaft auf unter vier.

Abb. 8.8 zeigt die Positionslösungen eines Loosely Coupled und eines Tightly Coupled Systems, die durch Fusion der GPS-Daten mit den Daten einer low-cost-MEMS-IMU erzielt wurden. Größtenteils liefern beide Systeme praktisch identische Ergebnisse. In dem angesprochenen Teilstück mit weniger als vier sichtbaren Satelliten wachsen die Positionsfehler des Loosely Coupled Systems jedoch – nicht zuletzt aufgrund der geringen Güte der MEMS-IMU – schnell an, während die Stützung mit den Pseudorange- und Deltarange-Messungen zu den verbleibenden Satelliten bei dem Tightly Coupled System eine gute Positionsgenauigkeit aufrecht erhält.

8.3 Nutzung von Trägerphasenmessungen

Bei Anwendungen, bei denen eine hochgenaue Positionsbestimmung im Vordergrund steht, werden GPS-Trägerphasenmessungen genutzt. Die Messgleichung einer Träger-

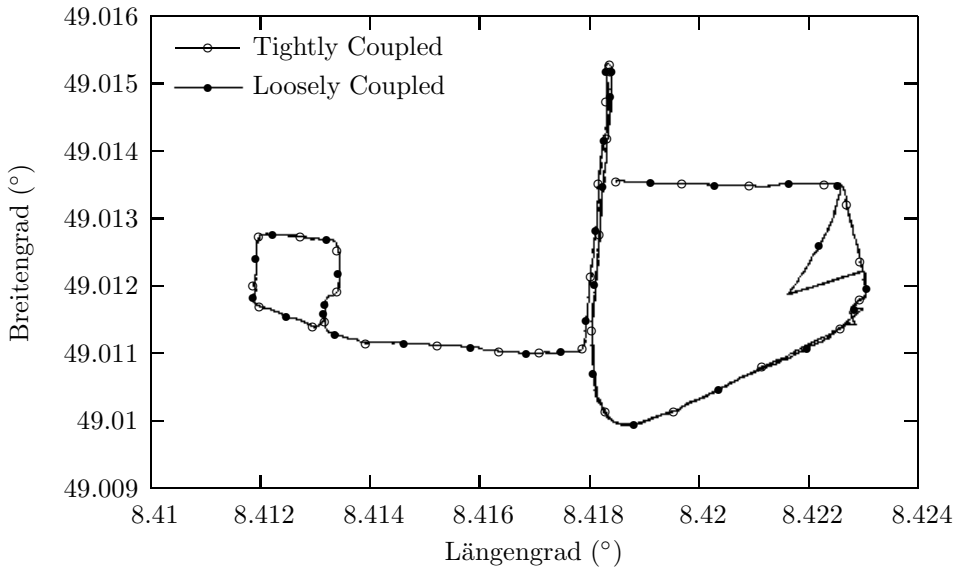


Abbildung 8.8: Positionslösung eines Loosely Coupled und eines Tightly Coupled Systems basierend auf den während einer Testfahrt aufgezeichneten Navigationssensordaten.

phasenmessung kann wie folgt formuliert werden:

$$(\tilde{\varphi}_k + N)\lambda_c = |\vec{r}_{S,k} - \vec{r}_{A,k}| + c\delta t_k + e_{cm,k} + e_{mp,k} + n_k, \quad (8.115)$$

siehe auch Abschnitt 4.3.2. Hierbei bezeichnet $e_{cm,k}$ die Common-Mode-Fehler, $e_{mp,k}$ sind durch Mehrwegeausbreitung verursachte Fehler und n_k ist ein weiterer Rauschterm, der als weiß angenommen werden kann. Während die Common-Mode-Fehler einer Trägerphasenmessung in der gleichen Größenordnung wie bei einer Pseudorange-Messung liegen, können die durch Mehrwegeausbreitung verursachten Fehler ein Viertel der Wellenlänge, beim C/A-Code also ungefähr fünf Zentimeter, nicht übersteigen, siehe [53]. Bei einer Pseudorange-Messung hingegen kann der durch Mehrwegeausbreitung verursachte Fehler leicht mehrere Meter betragen. Das Messrauschen n_k schließlich bewegt sich bei einer Trägerphasenmessung im Millimeterbereich, bei einer Pseudorange-Messung ist selbst bei hochwertigen Empfängern mit einigen Dezimetern zu rechnen. Werden nun die Common-Mode-Fehler mit Hilfe einer DGPS-Basisstation eliminiert, verbleibt je nach Mehrwegeausbreitung bei einer Pseudorange-Messung ein Fehlerbudget von einigen Dezimetern bis wenigen Metern, bei einer Trägerphasenmessung liegt der Restfehler in der Größenordnung einiger Millimeter bis weniger Zentimeter.

Auch wenn die Common-Mode-Fehler mit Hilfe einer DGPS-Basisstation eliminiert werden, verhindert der unbekannte Trägerphasenmehrdeutigkeitswert N , dass von der größeren Präzision der Trägerphasenmessung bei der Positionsbestimmung direkt profitiert werden kann. Die üblichen Ansätze zur Nutzung von Trägerphasenmessungen versuchen

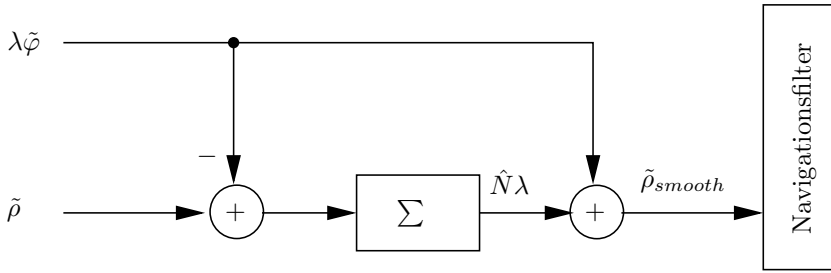


Abbildung 8.9: Carrier Aided Smoothing.

daher, diesen unbekannten Trägerphasenmehrdeutigkeitswert zu schätzen. Der einfachste Ansatz hierzu ist als Carrier Aided Smoothing bekannt.

8.3.1 Carrier Aided Smoothing

Subtrahiert man Gl. (8.115) von der Messgleichung einer Pseudorange-Messung,

$$\tilde{\rho}_k = |\vec{r}_{S,k} - \vec{r}_{A,k}| + c\delta t_k + e_{\rho,k}, \quad (8.116)$$

so ergibt sich

$$\tilde{\rho}_k - \lambda_c \tilde{\varphi}_k = N\lambda_c + e_{\rho,k} - e_{\varphi,k}. \quad (8.117)$$

Anhand der Differenz $\tilde{\rho}_k - \lambda_c \tilde{\varphi}_k$ kann folglich der Trägerphasenmehrdeutigkeitswert geschätzt werden. Um den Einfluss des Rauschens von Pseudorange- und Trägerphasenmessung zu minimieren, werden alle bis zum aktuellen Zeitpunkt vorliegenden Messungen zur Bestimmung des Mehrdeutigkeitswertes herangezogen:

$$\hat{N}_k \lambda_c = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k \tilde{\rho}_l - \lambda_c \tilde{\varphi}_l \quad (8.118)$$

Addiert man den geschätzten Mehrdeutigkeitswert zur aktuellen Trägerphasenmessung, so ergibt sich eine Messgröße

$$\tilde{\rho}_{smooth,k} = \lambda_c \tilde{\varphi}_k + \hat{N}_k \lambda_c = |\vec{r}_{S,k} - \vec{r}_{A,k}| + c\delta t_k + e_{mp,k} + n_k + e_N, \quad (8.119)$$

die analog einer Pseudorange-Messung im Navigationsfilter verarbeitet werden kann.

Nachteilig bei dieser Vorgehensweise ist, dass die Schätzung der Trägerphasenmehrdeutigkeitswerte unabhängig voneinander erfolgt. Die Schätzung des Mehrdeutigkeitswertes eines Satelliten profitiert nicht von anderen, bereits geschätzten Mehrdeutigkeitswerten und der daraus resultierenden Positionsgenauigkeit.

Das Grundprinzip des Carrier Aided Smoothing ist in Abb. 8.9 nochmals schematisch dargestellt, detailliertere Betrachtungen sind in [51] und [18] zu finden.

8.3.2 Festlegung der Trägerphasenmehrdeutigkeitswerte

Die angesprochenen Nachteile des Carrier Aided Smoothing können umgangen werden, wenn die unbekannten Trägerphasenmehrdeutigkeitswerte in das Systemmodell des Navigationsfilters aufgenommen werden. Es ergibt sich ein erweitertes Systemmodell der Form

$$\begin{pmatrix} \Delta \vec{x} \\ \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \\ \vdots \end{pmatrix}^\bullet = \begin{pmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \vec{x} \\ \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \end{pmatrix} \vec{w}, \quad (8.120)$$

das neben der Verarbeitung von Pseudorange-Messungen die direkte Verarbeitung von Trägerphasenmessungen erlaubt. Der Vorteil dieser Vorgehensweise besteht darin, dass z.B. bei Konstellationsänderungen die Schätzung des Mehrdeutigkeitswertes eines neu hinzu gekommenen Satelliten von den bereits geschätzten Mehrdeutigkeitswerten anderer Satelliten profitiert. Nachteilig ist der mit der Erweiterung des Zustandsvektors verbundene, größere Rechenaufwand. In der Regel wird man den Zustandsvektor nur um die Mehrdeutigkeitswerte der gerade sichtbaren Satelliten erweitern, das verursacht jedoch einen größeren Aufwand bei der Implementierung, da die Dimension des Systemmodells variiert, Zustände hinzugefügt und entfernt werden müssen.

Die Trägerphasenmehrdeutigkeitswerte sind ganzzahlige Werte, das Kalman-Filter schätzt jedoch Gleitkommazahlen, man spricht hier auch von Float Ambiguities. Die größtmögliche Positionsgenauigkeit kann nur erreicht werden, wenn die geschätzten Mehrdeutigkeitswerte auf ganze Zahlen festgelegt werden können. Dies ist nur möglich, wenn mit sogenannten Doppeldifferenzen gearbeitet wird. Das bedeutet, dass neben den Differenzen der Messungen von DGPS-Basisstation und dem betreffenden GPS-Empfänger noch zusätzlich Differenzen zwischen den zu einem Zeitpunkt vorliegenden Messungen gebildet werden. Da alle diese Messungen mit dem gleichen Empfängeruhrenfehler behaftet sind, wird auf diese Weise der Empfängeruhrenfehler aus den Gleichungen eliminiert. Dadurch entfällt auch die Notwendigkeit, das Systemmodell um den Empfängeruhrenfehler zu erweitern, andererseits resultieren Kreuzkorrelationen, die bei der Verarbeitung der Doppeldifferenzen im Navigationsfilter beachtet werden müssen. Die eigentliche Festlegung der vom Filter geschätzten Mehrdeutigkeitswerte auf ganzzahlige Werte kann z.B. mit der LAMBDA-Methode erfolgen, die diese Gleitkommenschätzungen sowie die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers des Kalman-Filters als Eingangsgrößen erhält. Details zur LAMBDA-Methode sind in [58] zu finden; Systeme die auf der beschriebenen Vorgehensweise beruhen, werden in [27] und [108] vorgestellt.

Relevanz der DGPS-Korrekturdaten

Selbst wenn nicht versucht wird, die Trägerphasenmehrdeutigkeitswerte auf ganze Zahlen festzulegen, kann auf die Verwendung von Korrekturdaten einer DGPS-Basisstation bei den angesprochenen Verfahren nicht verzichtet werden. Dies soll im Folgenden anhand der Ergebnisse eines Hardware-in-the-Loop-Tests illustriert werden.

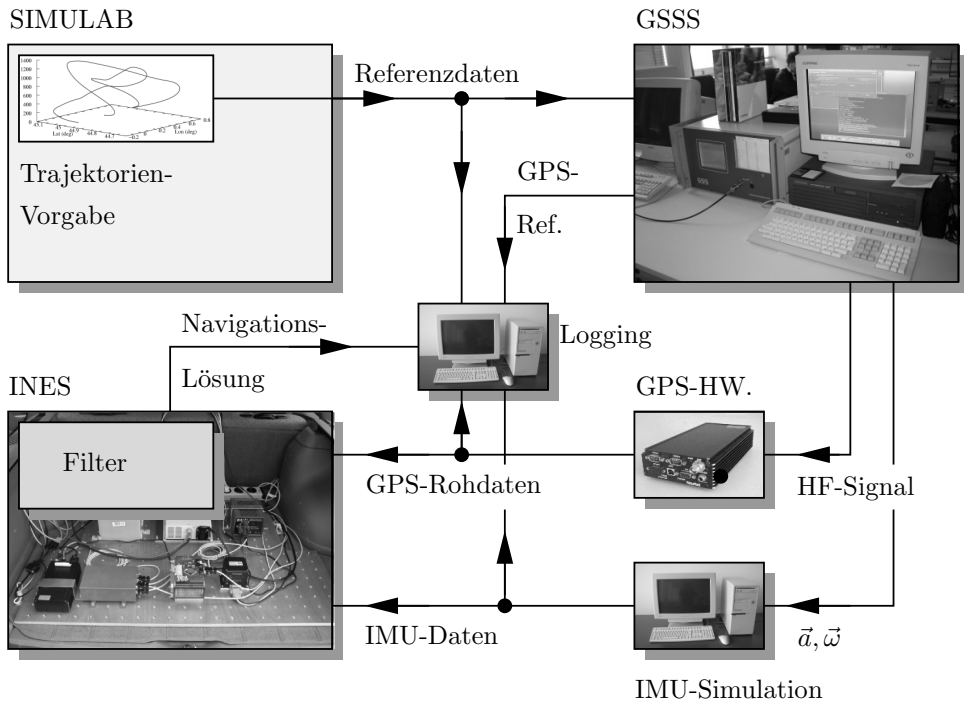


Abbildung 8.10: Vereinfachtes Blockdiagramm des Hardware-in-the-Loop-Testsystems.

Hierzu wurde das in Abb. 8.10 schematisch dargestellte HIL-Testsystem verwendet. Dieses System erlaubt es, beliebige Fahrzeugtrajektorien vorzugeben, die einem GPS Space Segment Simulator (GSSS) zur Verfügung gestellt werden. Dieser Space Segment Simulator erzeugt die HF-Signale, die ein GPS-Empfänger in diesem Szenario von der GPS-Antenne erhalten würde. Die Messungen des GPS-Empfängers wiederum werden an einen Navigationscomputer weiter gegeben. Gleichzeitig werden anhand der Trajektorieninformationen unter Verwendung entsprechender Inertialsensormodelle realistische IMU-Daten erzeugt, die ebenfalls dem Navigationscomputer zur Verfügung gestellt werden. Dieser errechnet in Echtzeit eine Navigationslösung, die mit der vorgegebenen Trajektorie verglichen wird. Dadurch können die Fehler der Navigationslösung explizit berechnet werden, was bei einer Testfahrt oder einem Testflug aufgrund der fehlenden Referenz nicht möglich ist. Ein weiterer Vorteil eines HIL-Tests ist dessen Wiederholbarkeit, so können z.B. die Auswirkungen algorithmischer Änderungen im Navigationssystem unter definierten Bedingungen analysiert werden. Darüber hinaus erlaubt die synthetische Generierung der Inertialsensordaten, die in der Applikation erwartete Vibrationsumgebung nachzubilden. Die Verwendung eines rea-

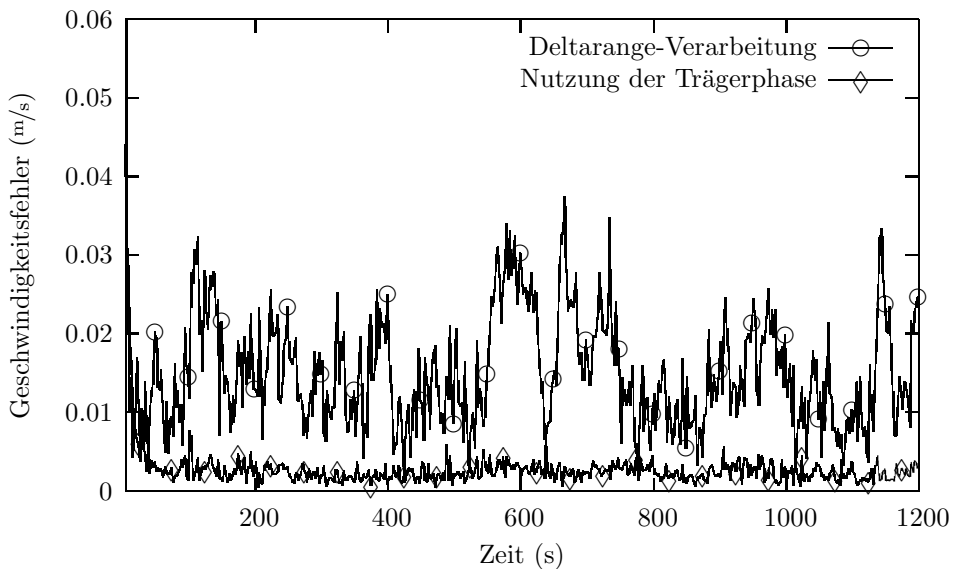


Abbildung 8.11: Geschwindigkeitsfehler bei Deltarange-Verarbeitung und bei Schätzung der Trägerphasenmehrdeutigkeitswerte, mit Simulation von DGPS-Korrekturdaten.

len GPS-Empfängers ist jedoch von entscheidender Bedeutung, da sich das Verhalten verschiedener GPS-Empfänger unter Umständen deutlich unterscheidet. Beispiele hierfür sind die Re-Akquisition nach Abschattungen von Satelliten oder das Tracking bei größerer Trajektorien­dynamik. Diese Eigenschaften des Empfängers werden von den Empfängerherstellern in der Regel nicht beschrieben.

Mit diesem HIL-Testsystem wurde ein Tightly Coupled GPS/INS-System, das Pseudorange- und Deltarange-Messungen verarbeitet, mit einem System, das Pseudorange- und Trägerphasenmessungen verarbeitet, verglichen. Zur Verarbeitung der Trägerphasenmessungen wurde der Zustandsvektor des Navigationsfilters wie im vorigen Abschnitt beschrieben um die Trägerphasenmehrdeutigkeitswerte erweitert. Abb. 8.11 zeigt exemplarisch die Geschwindigkeitsgenauigkeit, die mit diesen beiden Verfahren bei vorhandenen DGPS-Korrekturdaten erzielt werden kann. Die DGPS-Korrekturdaten wurden dabei simuliert, indem die Fehlermodelle des Space Segment Simulators für Ionosphäre und Ephemeriden abgeschaltet wurden. Offensichtlich führt die Nutzung der Trägerphase zu einer deutlichen Steigerung der – bei dem eingesetzten, hochwertigen Empfänger ohnehin schon beeindruckenden – Geschwindigkeitsgenauigkeit. Die hier nicht gezeigte Positions­lösung ist ebenfalls deutlich rauschärmer. Fehlen jedoch die DGPS-Korrekturdaten, erhält man die in Abb. 8.12 dargestellten Ergebnisse. Das angesprochene Verfahren zur Nutzung der Trägerphase liefert hier schlechtere Ergebnisse als die Stützung mit Deltarange-Messungen.

Im Folgenden soll daher ein Verfahren vorgestellt werden, mit dem auch ohne Korrek-

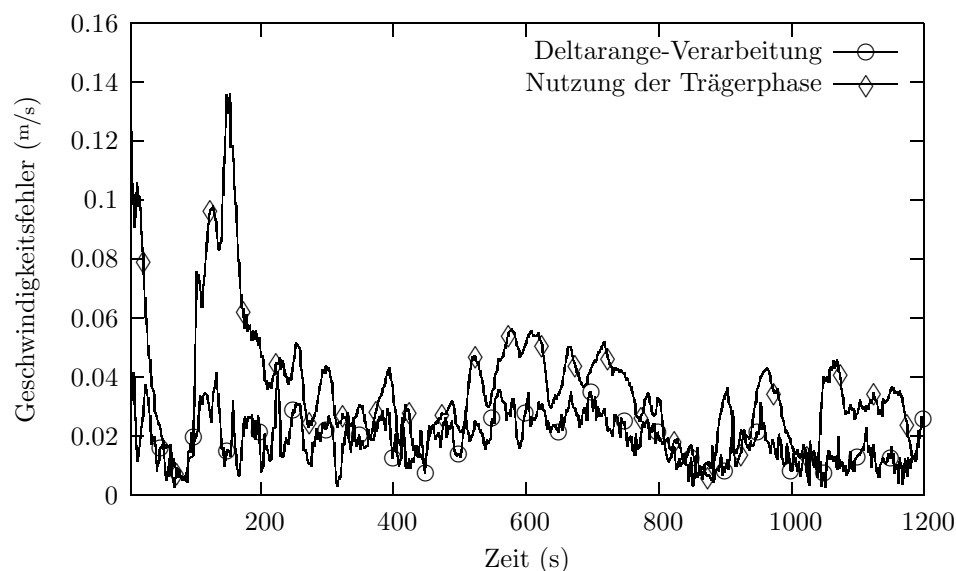


Abbildung 8.12: Geschwindigkeitsfehler bei Deltarange-Verarbeitung und bei Schätzung der Trägerphasenmehrdeutigkeitswerte, ohne DGPS-Korrekturdaten.

turdaten einer DGPS-Basisstation die Trägerphasenmessungen nutzbringend eingesetzt werden können.

8.3.3 Zeitlich differenzierte Trägerphasenmessungen

Bei den mit Hilfe von DGPS-Korrekturdaten eliminierbaren Common-Mode-Fehlern handelt es sich im Wesentlichen um atmosphärische Fehler und Ephemeridenfehler. Diese Fehler können daher als langsam veränderlich angesehen werden, d.h. man kann davon ausgehen, dass bei zwei aufeinanderfolgenden Trägerphasenmessungen diese Fehlerterme nahezu identisch sind. Daher können durch die Bildung zeitlicher Differenzen der Trägerphasenmessungen diese Fehler fast vollständig beseitigt werden. Eine einzelne Trägerphasenmessung stellt eine – mit einem aufgrund der Trägerphasenmehrdeutigkeit unbekannten Offset behaftete – Messung des Abstandes zwischen GPS-Antenne und Satellit dar. Die zeitliche Differenz zweier aufeinanderfolgender Trägerphasenmessungen ist dagegen ein Maß für die Abstandsänderung zwischen GPS-Antenne und Satellit in dem betrachteten Zeitintervall, typischerweise eine Sekunde. Diese Differenz kann daher als Geschwindigkeitsmessung interpretiert werden. Neben der Eliminierung der Common-Mode-Fehler ist ein weiterer Vorteil der Differenzenbildung, dass die konstanten Trägerphasenmehrdeutigkeitswerte aus den Gleichungen verschwinden.

Zeitliche Differenzen von Trägerphasenmessungen werden in Form von Dreifachdifferenzen bei einer Reihe von Anwendungen eingesetzt. Bei Dreifachdifferenzen ist die erste Differenzenbildung die Korrektur der Trägerphasenmessungen mit DGPS-

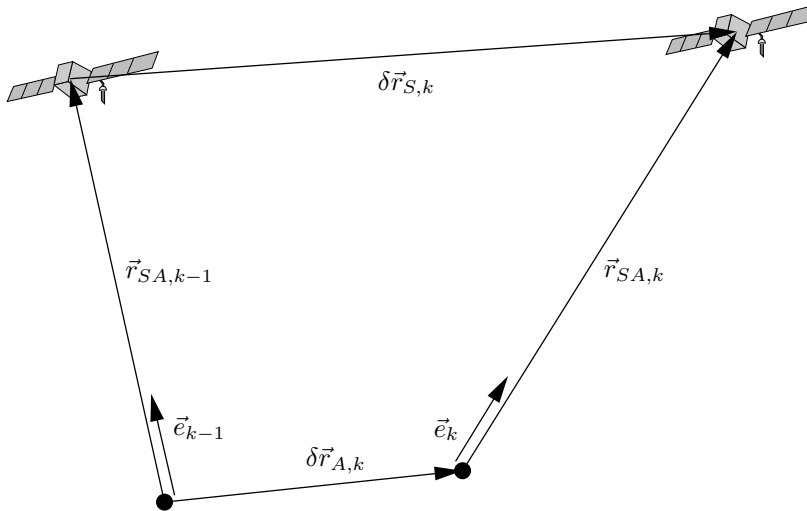


Abbildung 8.13: Geometrie zeitlicher Differenzen von Trägerphasenmessungen.

Korrekturdaten, die zweite Differenz wird zwischen Trägerphasenmessungen zu verschiedenen Satelliten zur Elimination des Empfängeruhrenfehlers gebildet und die dritte Differenzenbildung ist die zwischen den so gewonnenen, aufeinanderfolgenden Doppel-differenzen. Dreifachdifferenzen werden häufig zur Detektion von Cycle Slips eingesetzt, aber auch die Lagebestimmung mit Mehrantennenempfängern ist möglich [95]. In [45] und [122] werden bei mindestens sieben sichtbaren Satelliten verschiedene Verfahren zur Positionsbestimmung anhand dieser Messwerte vorgeschlagen. Hierbei müssen vor einer ersten Positionsbestimmung Änderungen der Satellitengeometrie abgewartet werden. In [79] wird vorgeschlagen, diese Phase durch die Integration eines LEO⁶-Satelliten zu verkürzen. Bei den meisten der angesprochenen Anwendungen steht die Schätzung des als Baseline bezeichneten Vektors zwischen DGPS-Basisstation und GPS-Empfänger im Vordergrund.

In [28] und [121] wird jedoch ein Verfahren vorgeschlagen, bei dem mit DGPS-Korrekturdaten korrigierte Trägerphasenmessungen hauptsächlich zur Steigerung der Geschwindigkeitsgenauigkeit des Navigationssystems eingesetzt werden. Im Folgenden soll aufgezeigt werden, dass sich dieser Ansatz auch bei fehlenden DGPS-Korrekturen einsetzen lässt.

Bestimmung der Messgleichung

Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Trägerphasenmessungen zum selben Satelli-

⁶Low Earth Orbit.

ten ergibt sich mit Gl. (8.115) zu

$$(\tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}_{k-1})\lambda_c = |\vec{r}_{SA,k}| - |\vec{r}_{SA,k-1}| + c\delta t_k - c\delta t_{k-1} + n'_k. \quad (8.121)$$

Hierbei bezeichnen t_{k-1} und t_k die Gültigkeitszeitpunkte der beiden Messungen, deren zeitlicher Abstand $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ o.B.d.A. zu einer Sekunde angenommen werden kann. Der Term n'_k bezeichnet den nicht durch die Differenzenbildung eliminierten Restfehler. Für die Differenz der Abstände $|\vec{r}_{SA,k}|$ und $|\vec{r}_{SA,k-1}|$ zwischen GPS-Antenne und Satellit erhält man mit Abb. 8.13

$$\begin{aligned} |\vec{r}_{SA,k}| - |\vec{r}_{SA,k-1}| &= \vec{e}_k^T \vec{r}_{SA,k} - \vec{e}_{k-1}^T \vec{r}_{SA,k-1} \\ &\approx \vec{e}_k^T (\vec{r}_{SA,k} - \vec{r}_{SA,k-1}) = \vec{e}_k^T (\delta \vec{r}_{S,k} - \delta \vec{r}_{A,k}). \end{aligned} \quad (8.122)$$

Bei $\delta \vec{r}_{S,k}$ und $\vec{r}_{A,k}$ handelt es sich um die Änderung der Satellitenposition bzw. der Antennenposition im betrachteten Zeitintervall, durch Einsetzen in Gl. (8.121) erhält man

$$(\tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}_{k-1})\lambda_c - \vec{e}_k^T \delta \vec{r}_{S,k} = -\vec{e}_k^T \delta \vec{r}_{A,k} + c\delta t_k - c\delta t_{k-1} + n'_k. \quad (8.123)$$

Die Änderung der Antennenposition setzt sich aus zwei Komponenten zusammen, der Änderung der Position des Navigationskoordinatensystems $\delta \vec{r}_{N,k}$ und der Änderung des Vektors vom Ursprung des Navigationskoordinatensystems zur Antenne. Formuliert in Koordinaten des Navigationskoordinatensystems ergibt sich

$$\delta \vec{r}_{A,k}^n = \delta \vec{r}_{N,k}^n + (\mathbf{C}_{b,k}^n - \mathbf{C}_{b,k-1}^n) \vec{l}^b \quad (8.124)$$

Der Vektor $\delta \vec{r}_{N,k}^n$ kann als Integral der Geschwindigkeit formuliert werden, ebenso kann die Differenz der Uhrenfehler zu den Zeitpunkten t_k und t_{k-1} als Integral der Uhrenfehlerdrift dargestellt werden. Insgesamt erhält man so

$$\begin{aligned} (\tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}_{k-1})\lambda_c - \vec{e}_k^T \delta \vec{r}_{S,k}^n &= -\vec{e}_k^T \left(\delta \vec{r}_{N,k}^n + (\mathbf{C}_{b,k}^n - \mathbf{C}_{b,k-1}^n) \vec{l}^b \right) \\ &\quad + c\delta t_k - c\delta t_{k-1} + n'_k \\ &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} -\vec{e}_k^T \vec{v}_{eb}^n + c\delta i \, dt \\ &\quad - \vec{e}_k^T (\mathbf{C}_{b,k}^n - \mathbf{C}_{b,k-1}^n) \vec{l}^b + n'_k. \end{aligned} \quad (8.125)$$

Nun soll der Term, der aus der Differenz der Richtungskosinusmatrizen zu den Zeitpunkten t_{k-1} und t_k und der Relativposition von GPS-Antenne und Ursprung des

körperfesten Koordinatensystems besteht, umgeschrieben werden. Mit Gl. (8.12) erhält man

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}_{b,k}^n - \mathbf{C}_{b,k-1}^n) \vec{l}^b &= \left((\mathbf{I} - \mathbf{\Psi}_{n,k}^{\hat{n}}) \hat{\mathbf{C}}_{b,k}^n - (\mathbf{I} - \mathbf{\Psi}_{n,k-1}^{\hat{n}}) \hat{\mathbf{C}}_{b,k-1}^n \right) \vec{l}^b \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{\Psi}_{n,k}^{\hat{n}}) \hat{\vec{l}}_k^n - (\mathbf{I} - \mathbf{\Psi}_{n,k-1}^{\hat{n}}) \hat{\vec{l}}_{k-1}^n . \end{aligned} \quad (8.126)$$

Erweitern von Gl. (8.126) führt auf

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}_{b,k}^n - \mathbf{C}_{b,k-1}^n) \vec{l}^b &= (\mathbf{I} - \mathbf{\Psi}_{n,k}^{\hat{n}}) \hat{\vec{l}}_k^n - (\mathbf{I} - \mathbf{\Psi}_{n,k-1}^{\hat{n}}) \hat{\vec{l}}_{k-1}^n \\ &\quad - (\mathbf{I} - \mathbf{\Psi}_{n,k}^{\hat{n}}) \hat{\vec{l}}_{k-1}^n + (\mathbf{I} - \mathbf{\Psi}_{n,k}^{\hat{n}}) \hat{\vec{l}}_{k-1}^n \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{\Psi}_{n,k}^{\hat{n}}) (\hat{\vec{l}}_k^n - \hat{\vec{l}}_{k-1}^n) - (\mathbf{\Psi}_{n,k}^{\hat{n}} - \mathbf{\Psi}_{n,k-1}^{\hat{n}}) \hat{\vec{l}}_{k-1}^n \end{aligned} \quad (8.127)$$

Interpretiert man die Differenz der kreuzproduktbildenden Matrix der Lagefehler als Differenzenquotient, kann diese durch die zeitliche Ableitung ersetzt werden:

$$(\mathbf{C}_{b,k}^n - \mathbf{C}_{b,k-1}^n) \vec{l}^b = (\mathbf{I} - \mathbf{\Psi}_{n,k}^{\hat{n}}) (\hat{\vec{l}}_k^n - \hat{\vec{l}}_{k-1}^n) - \Delta t \cdot \dot{\mathbf{\Psi}}_{n,k}^{\hat{n}} \hat{\vec{l}}_{k-1}^n . \quad (8.128)$$

Bei diesen Betrachtungen können die Erddrehrate und die Transportrate vernachlässigt werden, so dass man als Lagefehlerdifferentialgleichung

$$\dot{\vec{\psi}}_n^{\hat{n}} \approx \hat{\mathbf{C}}_b^n \Delta \vec{\omega}_{ib}^b \quad (8.129)$$

erhält; Einsetzen führt auf

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}_{b,k}^n - \mathbf{C}_{b,k-1}^n) \vec{l}^b &= (\hat{\vec{l}}_k^n - \hat{\vec{l}}_{k-1}^n) - \vec{\psi}_{n,k}^{\hat{n}} \times (\hat{\vec{l}}_k^n - \hat{\vec{l}}_{k-1}^n) - \Delta t \cdot \dot{\vec{\psi}}_{n,k}^{\hat{n}} \times \hat{\vec{l}}_{k-1}^n \\ &= \delta \hat{\vec{l}}_k^n - \vec{\psi}_{n,k}^{\hat{n}} \times \delta \hat{\vec{l}}_k^n - \Delta t \cdot \hat{\mathbf{C}}_b^n \Delta \vec{\omega}_{ib}^b \times \hat{\vec{l}}_{k-1}^n \\ &= \delta \hat{\vec{l}}_k^n + \delta \hat{\vec{l}}_k^n \times \vec{\psi}_{n,k}^{\hat{n}} + \Delta t [\hat{\vec{l}}_{k-1}^n \times] \hat{\mathbf{C}}_b^n \Delta \vec{\omega}_{ib}^b . \end{aligned} \quad (8.130)$$

Die Messgleichung der Differenz aufeinanderfolgender Trägerphasenmessungen ist daher gegeben durch

$$\begin{aligned} (\tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}_{k-1}) \lambda_c - \vec{e}_k^T \left(\delta \vec{r}_{S,k}^n - \delta \hat{\vec{l}}_k^n \right) &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} -\vec{e}_k^T \vec{v}_{eb}^n + c \delta t \, dt \\ &\quad - \vec{e}_k^T \left(\delta \hat{\vec{l}}_k^n \times \vec{\psi}_{n,k}^{\hat{n}} + \Delta t [\hat{\vec{l}}_{k-1}^n \times] \hat{\mathbf{C}}_b^n \Delta \vec{\omega}_{ib}^b \right) + n'_k . \end{aligned} \quad (8.131)$$

Der in dieser Messgleichung auftretende Integralterm enthält jedoch Größen, die vom Navigationsfilter geschätzt werden sollen; damit liegt diese Messgleichung nicht in der

üblichen Form eines Kalman-Filter-Messmodells Gl. (6.3) vor, bei der der Zusammenhang zwischen Messgrößen und zu schätzenden Größen durch Multiplikation mit einer Messmatrix \mathbf{H}_k vermittelt wird. Die Behandlung einer solchen Messgleichung mit Integralterm im Rahmen des Kalman-Filter-Formalismus wird daher im folgenden Abschnitt näher betrachtet.

Verarbeitung im Kalman-Filter

Prinzipiell könnte zur Verarbeitung der Trägerphasendifferenzen ein Delayed State Kalman-Filter verwendet werden, wie er in [18] beschrieben wird. Hier soll jedoch ein anderes Verfahren zum Einsatz kommen, das bei Vergleichen geringfügig bessere Ergebnisse lieferte, sich aber vor allem als numerisch robuster erwiesen hat, siehe [124].

Definiert man in Anlehnung an den Zustandsvektor des Tightly Coupled Systems einen Zustandsvektor $\vec{x}(t)$, der jeweils drei Zustände für Position, Geschwindigkeit, Lage, Beschleunigungsmesserbias und Drehratensensorbias enthält sowie Uhrenfehler und Uhrenfehlerdrift beinhaltet, lässt sich der Integralterm in Gl. (8.131) mit

$$\mathbf{H}'_k = \left(\vec{0}^T, -\vec{e}_k^T, \vec{0}^T, \vec{0}^T, \vec{0}^T, 0, 1 \right) \quad (8.132)$$

umschreiben zu

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} -\vec{e}_k^T \vec{v}_{eb}^n + c\delta t \, dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{H}'_k \vec{x}(t) \, dt \quad . \quad (8.133)$$

Der zeitkontinuierliche Zustandsvektor $\vec{x}(t)$ kann mit Hilfe geeigneter Transitionsmatrizen in Beziehung zum Zustandsvektor \vec{x}_k zum Zeitpunkt t_k gesetzt werden, es gilt

$$\vec{x}(t) = \Phi_{t, t_{k-1}} \Phi_{t_{k-1}, t_k} \vec{x}_k \quad . \quad (8.134)$$

Der Zustandsvektor \vec{x}_k und die Transitionsmatrix Φ_{t_{k-1}, t_k} sind keine Funktionen der Zeit, setzt man Gl. (8.134) in Gl. (8.133) ein, können diese Größen daher außerhalb des Integrals gestellt werden:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{H}'_k \vec{x}(t) \, dt = \mathbf{H}'_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi_{t, t_{k-1}} \, dt \cdot \Phi_{t_{k-1}, t_k} \vec{x}_k \quad (8.135)$$

Dadurch wurde der Integralterm auf die bei einem Kalman-Filter-Messmodell übliche Form gebracht, insgesamt erhält man

$$(\tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}_{k-1})\lambda_c - \vec{e}_k^T \left(\delta \vec{r}_{S,k}^n - \hat{\delta l}_k^n \right) = \mathbf{H}_k \vec{x}_k + n'_k \quad (8.136)$$

mit

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{H}'_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi_{t, t_{k-1}} dt \cdot \Phi_{t_{k-1}, t_k} + \left(\vec{0}^T, \vec{0}^T, -\vec{e}_k^T [\hat{\vec{l}}_k^n \times], \vec{0}^T, -\vec{e}_k^T \Delta t \cdot [\hat{\vec{l}}_{k-1}^n \times] \hat{\mathbf{C}}_{b,k}^n, 0, 0 \right) \quad (8.137)$$

Innerhalb des Zeitintervalls zwischen zwei Trägerphasenmessungen werden mehrere Propagationsschritte des Kalman-Filters stattfinden. Anhand der dabei anfallenden Matrizen können die für den Aufbau der Messmatrix Gl. (8.137) benötigten Transitionsmatrizen sukzessive aufgebaut werden. Das in einem Propagationsschritt überbrückte Zeitintervall sei mit δt bezeichnet. Die Transitionsmatrix, die zur Propagation der Kovarianzmatrix der Zustandsschätzung vom Zeitpunkt $(i-1)\delta t + t_{k-1}$ bis zum Zeitpunkt $i\delta t + t_{k-1}$ benötigt wird, ist durch

$$\Phi_{i\delta t + t_{k-1}, (i-1)\delta t + t_{k-1}} = \mathbf{I} + \mathbf{F}\delta t \quad (8.138)$$

gegeben, wobei \mathbf{F} die für dieses Zeitintervall gültige Systemmatrix bezeichnet. Die Propagation rückwärts in der Zeit wird in diesem Intervall folglich durch die Matrix

$$\Phi_{(i-1)\delta t + t_{k-1}, i\delta t + t_{k-1}} = \mathbf{I} - \mathbf{F}\delta t \quad (8.139)$$

vermittelt. Damit kann ausgehend von der Einheitsmatrix zum Zeitpunkt t_{k-1} die in der Messmatrix benötigte Transitionsmatrix Φ_{t_{k-1}, t_k} Stück für Stück aufgebaut werden:

$$\Phi_{t_{k-1}, i\delta t + t_{k-1}} = \Phi_{t_{k-1}, (i-1)\delta t + t_{k-1}} \Phi_{(i-1)\delta t + t_{k-1}, i\delta t + t_{k-1}} \quad (8.140)$$

Das Zeitintegral der Transitionsmatrix $\Phi_{t, t_{k-1}}$ erhält man ausgehend von der Nullmatrix zum Zeitpunkt t_{k-1} mit

$$\int_{t_{k-1}}^{i\delta t + t_{k-1}} \Phi_{t, t_{k-1}} dt = \int_{t_{k-1}}^{(i-1)\delta t + t_{k-1}} \Phi_{t, t_{k-1}} dt + \delta t \cdot \Phi_{i\delta t + t_{k-1}, (i-1)\delta t + t_{k-1}} \quad (8.141)$$

Damit verteilt sich der zum Aufbau der Messmatrix benötigte Rechenaufwand gleichmäßig über das Zeitintervall zwischen den zwei Trägerphasenmessungen, was sicherlich ein Vorteil ist. Im Gegensatz zu anderen Verfahren bleibt bei dieser Vorgehensweise außerdem eine Diagonalgestalt der Kovarianzmatrix des Messrauschens, sofern sie vorlag, erhalten. Damit wird für eine aus numerischen Gründen erstrebenswerte, sequentielle Verarbeitung der Trägerphasendifferenzen keine vorherige Dekorrelation benötigt. Ein weiterer Vorteil des Verfahrens besteht darin, dass die prinzipielle Struktur des Navigationsfilters unverändert bleibt. Es wird lediglich anstelle der Deltarange-Verarbeitung ein anderer Messschritt eingeführt.

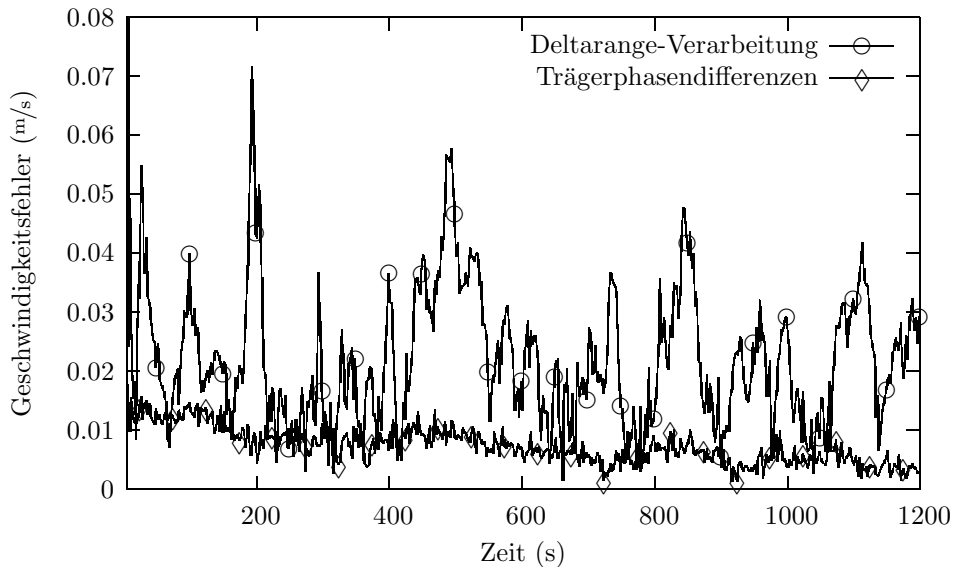


Abbildung 8.14: Geschwindigkeitsfehler bei Deltarange-Verarbeitung und bei Verarbeitung zeitlicher Differenzen von Trägerphasenmessungen.

Ergebnisse

Ein Vergleich zwischen einem Tightly Coupled System mit Pseudorange- und Deltarange-Stützung und dem vorgestellten Verfahren zur Nutzung von Trägerphasenmessungen ohne Verwendung von DGPS-Korrekturen ist in Abb. 8.14 und Abb. 8.15 zu sehen. Hierzu wurde erneut das HIL-Testsystem eingesetzt.

Man erkennt, dass durch die Verarbeitung der Trägerphasendifferenzen eine deutliche Steigerung der Geschwindigkeitsgenauigkeit erreicht wird, die bei Stützung mit Pseudoranges und Deltaranges nicht erreicht werden kann. Ohne die Differenzenbildung hatte die Stützung mit Trägerphasenmessungen zu einer Verschlechterung der Ergebnisse geführt, siehe Abb. 8.12. In Abb. 8.15 sind die zugehörigen Gesamtlagefehler dargestellt. Offensichtlich profitiert die Lagegenauigkeit massiv von der gesteigerten Genauigkeit der Stützinformatoren. Die größeren Lagefehler in den ersten dreihundert Sekunden des HIL-Tests wurden durch den Yaw-Winkel verursacht, hier lag keine Trajektorien-dynamik vor, was die Unbeobachtbarkeit des Yaw-Winkels zur Folge hat. Mit einsetzender Dynamik wird der Yaw-Winkel-Fehler rasch abgebaut.

Abschließend sind in Abb. 8.16 die Ergebnisse eines statischen Tests dargestellt. Hierbei wurde im Freien mit realen Satellitensignalen gearbeitet, da dynamisch keine Referenz zur Verfügung steht, blieb die Position der GPS-Antenne während des gesamten Zeitraumes unverändert. In Abb. 8.16 sind die bei Stützung mit Deltarange-Messungen und mit Trägerphasendifferenzen erzielten Höheninformationen zu sehen, offensichtlich ist die Positionslösung bei Verwendung von Trägerphasendifferenzen deutlich rauschärmer.

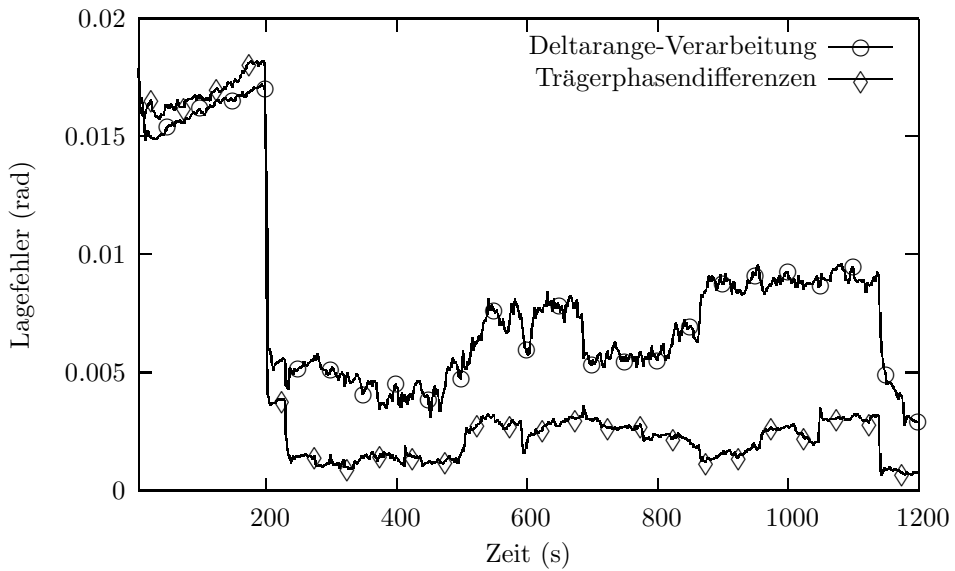


Abbildung 8.15: Lagefehler bei Deltarange-Verarbeitung und bei Verarbeitung zeitlicher Differenzen von Trägerphasenmessungen.

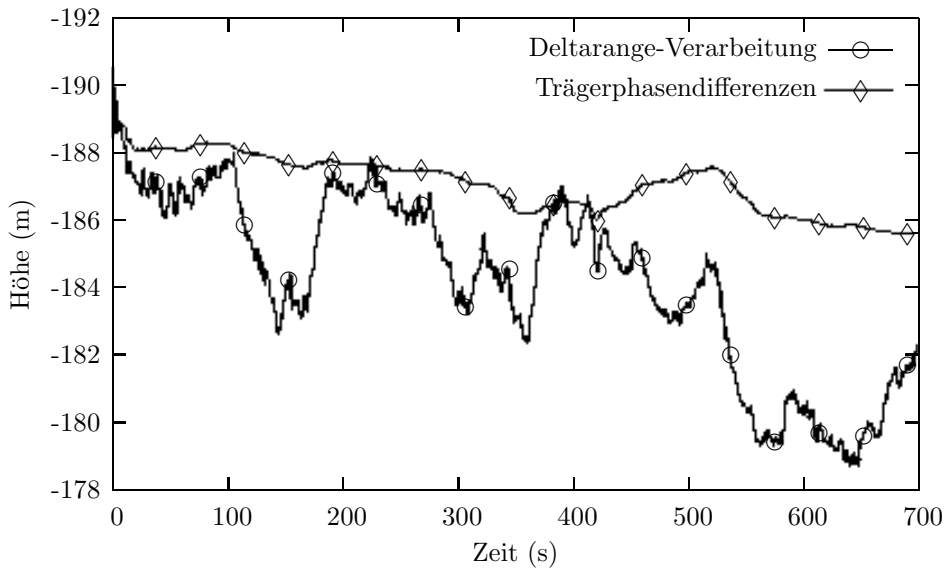


Abbildung 8.16: Höheninformationen bei Deltarange-Verarbeitung und bei Verarbeitung zeitlicher Differenzen von Trägerphasenmessungen.

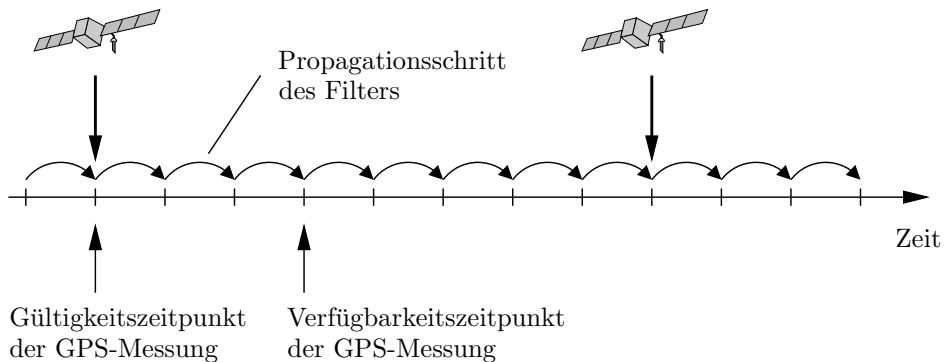


Abbildung 8.17: Gültigkeits- und Verfügbarkeitszeitpunkt von GPS-Messungen.

Dies bestätigt die Ergebnisse der HIL-Tests. Die zu erkennende, langfristige Drift der Positionslösung geht im Wesentlichen auf atmosphärische Störungen und Ephemeridenfehler zurück und kann ohne Verwendung von DGPS-Korrekturdaten natürlich nicht verhindert werden.

8.4 Verzögerte Verfügbarkeit von Messwerten

Das dem Messschritt eines Kalman-Filters zugrundeliegende Messmodell Gl. (6.3) beschreibt mathematisch den Zusammenhang zwischen Zustandsvektor und Messwerten. Hierbei wird davon ausgegangen, dass Systemzustand und Messwert zum selben Zeitpunkt betrachtet werden können. In der Realität wird eine Messung, die zu einem bestimmten Zeitpunkt gültig ist, immer erst zu einem späteren Zeitpunkt zur Verfügung stehen. Diese verzögerte Verfügbarkeit kann durch eine sensorinterne Signalverarbeitung oder durch die zur Übertragung der Informationen zum Navigationscomputer benötigte Zeit verursacht sein.

In einem GPS/INS-System kann der Unterschied zwischen Gültigkeitszeitpunkt und Verfügbarkeitszeitpunkt bei den Inertialsensoren vernachlässigt werden, bei dem GPS-Empfänger in der Regel jedoch nicht. Die Verzögerung der Messwerte eines GPS-Empfängers kann leicht hundert Millisekunden übersteigen, so dass innerhalb des Verzögerungszeitraumes mehrere Propagationsschritte des Filters stattfinden, siehe Abb. 8.17. Die Zustandsschätzung und die zugehörige Kovarianzmatrix ändern sich also innerhalb des Verzögerungszeitraumes. Wird die Verzögerung ignoriert, d.h. werden die GPS-Messwerte so verarbeitet als wären sie aktuell, so resultieren bei signifikanter Trajektorien-dynamik unmodellerte, systematische Messfehler, die zu einer deutlichen Verschlechterung des Filterergebnisses führen können.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Verzögerung der GPS-Messungen zu berücksich-

tigen. Eine einfache Möglichkeit würde darin bestehen, den ganzen Filteralgorithmus mit einer entsprechenden Verzögerung gegenüber der Realität ablaufen zu lassen. Dadurch steht bei Verfügbarkeit der GPS-Messung die passende Zustandsschätzung und Kovarianzmatrix des Filters zur Verfügung. Geht man davon aus, dass die Zustandsschätzung des Navigationssystems häufig als Eingangsgröße z.B. eines Flugreglers dient, ist die bei dieser Vorgehensweise resultierende Verzögerung der Zustandsschätzung nicht tolerierbar.

Eine andere theoretische Möglichkeit besteht in der Erweiterung des Systemmodells des Filters. Hierzu wird angenommen, dass das Systemmodell in der üblichen Form

$$\vec{x}_k = \Phi_{k,k-1} \vec{x}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} \vec{u}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1} \vec{w}_{k-1} \quad (8.142)$$

gegeben ist. Zur eindeutigen Bezeichnung eines Messwertes

$$\tilde{y}_k^{k-n}$$

werden zwei Indizes verwendet, der obere Index $k-n$ kennzeichnet den Gültigkeitszeitpunkt des Messwertes, der untere Index gibt den Verfügbarkeitszeitpunkt an. Damit erhält man als Messmodell

$$\tilde{y}_k^{k-n} = \mathbf{H}_{k-n} \vec{x}_{k-n} + \vec{v}_{k-n} . \quad (8.143)$$

Bildet man ein erweitertes Systemmodell, das neben dem aktuellen Systemzustand auch noch die Zustandsschätzungen zu den Zeitpunkten $k-1$ bis $k-n$ enthält,

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_k \\ \vec{x}_{k-1} \\ \vdots \\ \vec{x}_{k-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{k,k-1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_{k-1} \\ \vec{x}_{k-2} \\ \vdots \\ \vec{x}_{k-n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{k-1} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \vec{u}_{k-1} + \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{k-1} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \vec{w}_{k-1} \quad (8.144)$$

so kann mit dem Messmodell

$$\tilde{y}_k^{k-n} = (\mathbf{0} \dots \mathbf{0} \mathbf{H}_{k-n}) \begin{pmatrix} \vec{x}_k \\ \vec{x}_{k-1} \\ \vdots \\ \vec{x}_{k-n} \end{pmatrix} + \vec{v}_{k-n} \quad (8.145)$$

der vorliegende Messwert \tilde{y}_k^{k-n} korrekt in Beziehung zu Komponenten des Zustandsvektors gesetzt werden. Diese Vorgehensweise kann jedoch nur als eine theoretische Lösung

des Problems der verzögerten Messwertverfügbarkeit gesehen werden; der mit der Erweiterung des Zustandsvektors verbundene Rechenaufwand verhindert eine sinnvolle, praktische Umsetzung dieses Ansatzes.

Im Folgenden soll daher eine andere Möglichkeit zur Lösung des Problems aufgezeigt werden, die sich an [78] orientiert. Hierbei handelt es sich zwar nur um ein suboptimales Verfahren, dafür ist jedoch die praktische Einsetzbarkeit gegeben. Die Grundidee dieses Ansatzes besteht darin, einen extrapolierten Messwert \tilde{y}_k^{k*} zu berechnen, der auf das gleiche Residuum führt das aufgetreten wäre, wenn der betreffende Messwert zum Gültigkeitszeitpunkt auch tatsächlich hätte verarbeitet werden können. Letzteres Residuum ist gegeben durch

$$\epsilon_{k-n} = \tilde{y}_k^{k-n} - \mathbf{H}_{k-n} \hat{\vec{x}}_{k-n}^- , \quad (8.146)$$

für das bei der Verarbeitung des extrapolierten Messwertes auftretende Residuum erhält man

$$\epsilon_k^* = \tilde{y}_k^{k*} - \mathbf{H}_k \hat{\vec{x}}_k^- . \quad (8.147)$$

Gleichsetzen und Auflösen nach dem extrapolierten Messwert liefert

$$\begin{aligned} \tilde{y}_k^{k*} - \mathbf{H}_k \hat{\vec{x}}_k^- &= \tilde{y}_k^{k-n} - \mathbf{H}_{k-n} \hat{\vec{x}}_{k-n}^- \\ \tilde{y}_k^{k*} &= \tilde{y}_k^{k-n} + \mathbf{H}_k \hat{\vec{x}}_k^- - \mathbf{H}_{k-n} \hat{\vec{x}}_{k-n}^- . \end{aligned} \quad (8.148)$$

Mit dem Messmodell Gl. (8.143) ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{y}_k^{k*} &= \mathbf{H}_{k-n} \vec{x}_{k-n} + \vec{v}_{k-n} + \mathbf{H}_k \hat{\vec{x}}_k^- - \mathbf{H}_{k-n} \hat{\vec{x}}_{k-n}^- \\ &= -\mathbf{H}_{k-n} (\hat{\vec{x}}_{k-n}^- - \vec{x}_{k-n}) + \mathbf{H}_k (\hat{\vec{x}}_k^- - \vec{x}_k) + \mathbf{H}_k \vec{x}_k + \vec{v}_{k-n} \\ &= \mathbf{H}_k \vec{x}_k + \mathbf{H}_k \delta \vec{x}_k^- - \mathbf{H}_{k-n} \delta \vec{x}_{k-n}^- + \vec{v}_{k-n} \end{aligned} \quad (8.149)$$

Damit liegt formal ein gewöhnliches Kalman-Filter-Messmodell vor,

$$\tilde{y}_k^{k*} = \mathbf{H}_k \vec{x}_k + \vec{v}_k^* , \quad (8.150)$$

das Messrauschen des extrapolierten Messwertes ist gegeben durch

$$\vec{v}_k^* = \mathbf{H}_k \delta \vec{x}_k^- - \mathbf{H}_{k-n} \delta \vec{x}_{k-n}^- + \vec{v}_{k-n} . \quad (8.151)$$

Da in dieses Messrauschen aber die Zustandsvektoren zu den Zeitpunkt k und $k-n$ eingehen, sind Messrauschen und Zustandsvektor korreliert. Um den extrapolierten Messwert \tilde{y}_k^{k*} verarbeiten zu können, müssen modifizierte Kalman-Filter-Gleichungen hergeleitet werden, die eine Berücksichtigung dieser Korrelationen erlauben. Eine mögliche Vorgehensweise hierzu ist die allgemeine Berechnung der a-posteriori-Kovarianzmatrix des Schätzfehlers und die anschließende Minimierung deren Spur.

Die Anpassung des Zustandsvektors im Messschritt lässt sich mit einer noch unbekannten Gewichtungsmatrix \mathbf{K}_k^* wie folgt formulieren:

$$\hat{\vec{x}}_k^+ = \hat{\vec{x}}_k^- - \mathbf{K}_k^* \left(\mathbf{H}_k \hat{\vec{x}}_k^- - \tilde{y}_k^{k*} \right) \quad (8.152)$$

Einsetzen des Messmodells Gl. (8.150) und Erweitern mit dem Zustandsvektor führt auf

$$\begin{aligned} \hat{\vec{x}}_k^+ &= \hat{\vec{x}}_k^- - \vec{x}_k - \mathbf{K}_k^* \left(\mathbf{H}_k \hat{\vec{x}}_k^- - (\mathbf{H}_k \hat{\vec{x}}_k + \vec{v}_k^*) \right) \\ \delta \vec{x}_k^+ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^* \mathbf{H}_k) \delta \vec{x}_k^- + \mathbf{K}_k^* \vec{v}_k^* . \end{aligned} \quad (8.153)$$

Damit erhält man für die a-posteriori-Kovarianzmatrix

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^+ &= E[\delta \vec{x}_k^+ \delta \vec{x}_k^{+,T}] \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^* \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^* \mathbf{H}_k)^T + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^* \mathbf{H}_k) E[\delta \vec{x}_k^- \vec{v}_k^{*,T}] \mathbf{K}_k^{*,T} \\ &\quad + \mathbf{K}_k^* E[\vec{v}_k^* \delta \vec{x}_k^{-,T}] (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^* \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k^* E[\vec{v}_k^* \vec{v}_k^{*,T}] \mathbf{K}_k^{*,T} . \end{aligned} \quad (8.154)$$

Bevor die Spur von \mathbf{P}_k^+ minimiert werden kann, müssen alle in Gl. (8.154) auftretenden Erwartungswerte berechnet werden. Für den ersten Erwartungswert erhält man

$$\begin{aligned} E[\delta \vec{x}_k^- \vec{v}_k^{*,T}] &= E[\delta \vec{x}_k^- (\mathbf{H}_k \delta \vec{x}_k^- - \mathbf{H}_{k-n} \delta \vec{x}_{k-n}^- + \vec{v}_{k-n})^T] \\ &= \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T - E[\delta \vec{x}_k^- \delta \vec{x}_{k-n}^{-,T}] \mathbf{H}_{k-n}^T + E[\delta \vec{x}_k^- \vec{v}_{k-n}^T] \end{aligned} \quad (8.155)$$

Der letzte Erwartungswert verschwindet, da das Messrauschen \vec{v}_{k-n} nicht mit dem Schätzfehler zum Zeitpunkt k korreliert sein kann, schließlich ist der betreffende Messwert noch nicht verarbeitet worden. Setzt man

$$\mathbf{C}_{k,k-n} = E[\delta \vec{x}_k^- \delta \vec{x}_{k-n}^{-,T}] , \quad (8.156)$$

so ergibt sich

$$E[\vec{v}_k^* \delta \vec{x}_k^{-,T}] = E[\delta \vec{x}_k^- \vec{v}_k^{*,T}]^T = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- - \mathbf{H}_{k-n} \mathbf{C}_{k,k-n}^T . \quad (8.157)$$

Mit diesen Ergebnissen kann der letzte Erwartungswert in Gl. (8.154) wie folgt formuliert werden:

$$\begin{aligned} E[\vec{v}_k^* \vec{v}_k^{*,T}] &= E[(\mathbf{H}_k \delta \vec{x}_k^- - \mathbf{H}_{k-n} \delta \vec{x}_{k-n}^- + \vec{v}_{k-n}) \\ &\quad \cdot (\mathbf{H}_k \delta \vec{x}_k^- - \mathbf{H}_{k-n} \delta \vec{x}_{k-n}^- + \vec{v}_{k-n})^T] \\ &= \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_{k,k-n} \mathbf{H}_{k-n}^T - \mathbf{H}_{k-n} \mathbf{C}_{k,k-n}^T \mathbf{H}_k^T \\ &\quad + \mathbf{H}_{k-n} \mathbf{P}_{k-n}^- \mathbf{H}_{k-n}^T + \mathbf{R}_{k-n} \end{aligned} \quad (8.158)$$

Was nun noch bleibt ist die Berechnung des Erwartungswertes Gl. (8.156), hierfür muss der Propagationsschritt des Filters betrachtet werden. Während die zeitliche Propagation des Systemzustandes durch Gl. (8.142) beschrieben wird, ist die Propagation der Zustandsschätzung gegeben durch

$$\hat{\vec{x}}_k^- = \Phi_{k-1} \hat{\vec{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{B}_{k-1} \vec{u}_{k-1} . \quad (8.159)$$

Subtrahiert man Gl. (8.142) von Gl. (8.159), erhält man die Änderung des Schätzfehlers im Propagationsschritt:

$$\delta \vec{x}_k^- = \Phi_{k-1} \delta \vec{x}_{k-1}^+ - \mathbf{G}_{k-1} \vec{w}_{k-1} \quad (8.160)$$

Im Allgemeinen können in dem Zeitraum zwischen Gültigkeit und Verfügbarkeit der Messung weitere Messwerte anderer Sensoren anfallen. Es soll angenommen werden, dass bei diesen zusätzlichen Messungen keine verzögerte Verfügbarkeit beachtet werden muss. Die Änderung des Schätzfehlers bei Verarbeitung dieser gewöhnlichen, unmittelbar verfügbaren Messung ist in Analogie zu Gl. (8.153) gegeben durch

$$\delta \vec{x}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \delta \vec{x}_k^- + \mathbf{K}_k \vec{v}_k^\# , \quad (8.161)$$

deren Messrauschen ist zur Unterscheidung von dem Messrauschen der verzögert verfügbaren Messung durch ein hochgestelltes Gatter $()^\#$ gekennzeichnet. Mit Gl. (8.161) ist es nun möglich, eine Beziehung zwischen den Schätzfehlern $\delta \vec{x}_k^-$ und $\delta \vec{x}_{k-n}^-$ herzustellen. Durch sukzessives Einsetzen von Gl. (8.160) und Gl. (8.161) erhält man

$$\begin{aligned} \delta \vec{x}_k^- &= \Phi_{k-1} \delta \vec{x}_{k-1}^+ - \mathbf{G}_{k-1} \vec{w}_{k-1} \\ &= \Phi_{k-1} \left((\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k-1} \mathbf{H}_{k-1}) \delta \vec{x}_{k-1}^- + \mathbf{K}_{k-1} \vec{v}_{k-1}^\# \right) - \mathbf{G}_{k-1} \vec{w}_{k-1} \\ &= \Phi_{k-1} \left((\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k-1} \mathbf{H}_{k-1}) (\Phi_{k-2} \delta \vec{x}_{k-2}^+ - \mathbf{G}_{k-2} \vec{w}_{k-2}) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{K}_{k-1} \vec{v}_{k-1}^\# \right) - \mathbf{G}_{k-1} \vec{w}_{k-1} \\ &= \Phi_{k-1} \left((\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k-1} \mathbf{H}_{k-1}) \left(\Phi_{k-2} \left((\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k-2} \mathbf{H}_{k-2}) \delta \vec{x}_{k-2}^- \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathbf{K}_{k-2} \vec{v}_{k-2}^\# \right) - \mathbf{G}_{k-2} \vec{w}_{k-2} \right) + \mathbf{K}_{k-1} \vec{v}_{k-1}^\# \left. \right) - \mathbf{G}_{k-1} \vec{w}_{k-1} \\ &= \Phi_{k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k-1} \mathbf{H}_{k-1}) \Phi_{k-2} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k-2} \mathbf{H}_{k-2}) \cdot \dots \\ &\quad \cdot \Phi_{k-n} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k-n} \mathbf{H}_{k-n}) \delta \vec{x}_{k-n}^- \\ &\quad + \vec{f}_1(\vec{v}_{k-1}^\#, \dots, \vec{v}_{k-n}^\#) + \vec{f}_2(\vec{w}_{k-1}, \dots, \vec{w}_{k-n}) \\ &= \left(\prod_{i=1}^n \Phi_{k-i} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k-i} \mathbf{H}_{k-i}) \right) \delta \vec{x}_{k-n}^- \\ &\quad + \vec{f}_1(\vec{v}_{k-1}^\#, \dots, \vec{v}_{k-n}^\#) + \vec{f}_2(\vec{w}_{k-1}, \dots, \vec{w}_{k-n}) \end{aligned} \quad (8.162)$$

Das Messrauschen $\vec{v}_{k-1}^\#, \dots, \vec{v}_{k-n}^\#$ der unmittelbar verfügbaren Messungen und das Systemrauschen $\vec{w}_{k-1}, \dots, \vec{w}_{k-n}$ sind nicht korreliert mit dem Schätzfehler $\delta \vec{x}_{k-n}^-$, so dass die Erwartungswerte $E \left[f_1(\dots) \delta \vec{x}_{k-n}^{-,T} \right]$ und $E \left[f_2(\dots) \delta \vec{x}_{k-n}^{-,T} \right]$ verschwinden. Damit ergibt sich der Erwartungswert Gl. (8.156) zu

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{k,k-n} &= E \left[\delta \vec{x}_k^- \delta \vec{x}_{k-n}^{-,T} \right] = \left(\prod_{i=1}^n \Phi_{k-i} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k-i} \mathbf{H}_{k-i}) \right) E \left[\delta \vec{x}_{k-n}^- \delta \vec{x}_{k-n}^{-,T} \right] \\ &= \left(\prod_{i=1}^n \Phi_{k-i} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k-i} \mathbf{H}_{k-i}) \right) \mathbf{P}_{k-n}^- , \end{aligned} \quad (8.163)$$

für die a-posteriori-Kovarianzmatrix erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^+ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^* \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^* \mathbf{H}_k)^T \\ &\quad + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^* \mathbf{H}_k) (\mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T - \mathbf{C}_{k,k-n} \mathbf{H}_{k-n}^T) \mathbf{K}_k^{*,T} \\ &\quad + \mathbf{K}_k^* (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- - \mathbf{H}_{k-n} \mathbf{C}_{k,k-n}^T) (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^* \mathbf{H}_k)^T \\ &\quad + \mathbf{K}_k^* (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T - \mathbf{H}_k \mathbf{C}_{k,k-n} \mathbf{H}_{k-n}^T - \mathbf{H}_{k-n} \mathbf{C}_{k,k-n}^T \mathbf{H}_k^T \\ &\quad \quad + \mathbf{H}_{k-n} \mathbf{P}_{k-n}^- \mathbf{H}_{k-n}^T + \mathbf{R}_{k-n}) \mathbf{K}_k^{*,T} \\ &= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{C}_{k,k-n} \mathbf{H}_{k-n}^T \mathbf{K}_k^{*,T} - \mathbf{K}_k^* \mathbf{H}_{k-n} \mathbf{C}_{k,k-n}^T \\ &\quad + \mathbf{K}_k^* \mathbf{H}_{k-n} \mathbf{P}_{k-n}^- \mathbf{H}_{k-n}^T \mathbf{K}_k^{*,T} + \mathbf{K}_k^* \mathbf{R}_{k-n} \mathbf{K}_k^{*,T} . \end{aligned} \quad (8.164)$$

Die gesuchte Gewichtungsmatrix erhält man durch Nullsetzen der Ableitung der Spur der Kovarianzmatrix nach der Gewichtungsmatrix, man erhält

$$\frac{d \text{Spur}(\mathbf{P}_k^+)}{d \mathbf{K}_k^*} = -2 \mathbf{C}_{k,k-n} \mathbf{H}_{k-n}^T + 2 \mathbf{K}_k^* \mathbf{H}_{k-n} \mathbf{P}_{k-n}^- \mathbf{H}_{k-n}^T + 2 \mathbf{K}_k^* \mathbf{R}_{k-n} \quad (8.165)$$

und damit

$$\mathbf{K}_k^* = \mathbf{C}_{k,k-n} \mathbf{H}_{k-n}^T (\mathbf{H}_{k-n} \mathbf{P}_{k-n}^- \mathbf{H}_{k-n}^T + \mathbf{R}_{k-n})^{-1} . \quad (8.166)$$

Abschließend soll die aufgezeigte Vorgehensweise zur Verarbeitung eines verzögert verfügbaren Messwertes nochmals zusammengefasst werden:

Im Zeitraum zwischen Gültigkeit, Zeitpunkt $k-n$, und Verfügbarkeit, Zeitpunkt k , der verzögerten Messung werden unmittelbar anfallende Messwerte wie gewöhnlich verarbeitet und auch die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers anhand der üblichen Gleichungen propagiert. Parallel dazu wird jedoch die Matrix $\mathbf{C}_{k,k-n}$ aufgebaut:

$$\mathbf{C}_{k,k-n} = \left(\prod_{i=1}^n \Phi_{k-i} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k-i} \mathbf{H}_{k-i}) \right) \mathbf{P}_{k-n}^- \quad (8.167)$$

Liegt der verzögerte Messwert nun vor, wird eine Gewichtungsmatrix \mathbf{K}_k^* berechnet:

$$\mathbf{K}_k^* = \mathbf{C}_{k,k-n} \mathbf{H}_{k-n}^T (\mathbf{H}_{k-n} \mathbf{P}_{k-n}^- \mathbf{H}_{k-n}^T + \mathbf{R}_{k-n})^{-1} \quad (8.168)$$

Durch Einsetzen von Gl. (8.148) in Gl. (8.152) erkennt man, dass die explizite Berechnung eines extrapolierten Messwertes nicht notwendig ist, vielmehr kann man schreiben

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- - \mathbf{K}_k^* \left(\mathbf{H}_{k-n} \hat{x}_{k-n}^- - \tilde{y}_k^{k-n} \right). \quad (8.169)$$

Es genügt also, einfach die Innovation basierend auf der zum Gültigkeitszeitpunkt der Messung vorliegenden Zustandsschätzung zu berechnen. Die abschließende Anpassung der Kovarianzmatrix des Schätzfehlers erfolgt gemäß

$$\mathbf{P}_k^+ = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k^* \mathbf{H}_{k-n} \mathbf{C}_{k,k-n}^T. \quad (8.170)$$

Die hier beschriebene Vorgehensweise ist suboptimal in dem Sinne, dass die verzögerte Verfügbarkeit eines Messwertes prinzipiell einen Einfluss hat: Wäre der Messwert zum Gültigkeitszeitpunkt verfügbar gewesen, hätte seine Verarbeitung zu einer Änderung der Kovarianzmatrix des Schätzfehlers geführt, so dass anschließend die unmittelbar verfügbaren Messwerte mit einer anderen Gewichtung verarbeitet worden wären. Diese Vorgehensweise ist jedoch der optimale Ansatz zur Verarbeitung des extrapolierten Messwertes bzw. der Innovation, die auf der zum Gültigkeitszeitpunkt vorliegenden Zustandsschätzung beruht. Wenn die Änderung des Schätzfehlers im Zeitraum zwischen Gültigkeit und Verfügbarkeit des Messwertes vernachlässigt werden kann – was sicherlich bei einem Großteil der Anwendungen gegeben ist – so kann man näherungsweise

$$\mathbf{C}_{k,k-n} \approx \mathbf{P}_k^- \approx \mathbf{P}_{k-n}^- \quad (8.171)$$

setzen. Das bedeutet, dass die einzige Änderung gegenüber der Verarbeitung eines gewöhnlichen, unmittelbar verfügbaren Messwertes in der veränderten Berechnung der Innovation in Gl. (8.169) besteht, was praktisch keinen Mehraufwand bedeutet.

Natürlich sind auch Applikationen denkbar, bei denen der Gültigkeitszeitpunkt der Messung im voraus nicht bekannt ist. In diesem Fall kann eine einfache Berücksichtigung der Messwertverzögerung bei Eintreffen des Messwertes durch Umformulierung der Messgleichung mit Hilfe der Transitionsmatrix $\Phi_{k-n,k} = \Phi_{k,k-n}^{-1}$ erfolgen, die die Propagation des Systemzustandes vom Zeitschritt k zum Zeitschritt $k-n$ beschreibt:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_k^{k-n} &= \mathbf{H}_{k-n} \vec{x}_{k-n} + \vec{v}_{k-n} \\ &= \mathbf{H}_{k-n} \Phi_{k,k-n}^{-1} \vec{x}_k + \vec{v}_{k-n} \end{aligned} \quad (8.172)$$

Die neue Messmatrix ist durch $\mathbf{H}_{k-n} \Phi_{k,k-n}^{-1}$ gegeben, es können nun die üblichen Kalman-Filter-Gleichungen verwendet werden. Dieses Verfahren berücksichtigt die verzögerte Verfügbarkeit des Messwertes nur näherungsweise, da der Einfluss des Systemrauschens nicht exakt erfasst wird. Für das Anwendungsgebiet GPS/INS-Integration

dürfte das unproblematisch sein. Mit etwas Mehraufwand kann je nach Szenario dieser Einfluss aber auch exakt oder zumindest näherungsweise erfasst werden, hierzu sind in der Target-Tracking-Literatur unter dem Stichwort out-of-sequence measurements (OOSM) eine Reihe von Verfahren zu finden.

8.5 Integrity Monitoring

In praktisch jedem Integrierten Navigationssystem ist irgendeine Form von Integrity Monitoring realisiert. Darunter versteht man Algorithmen, die die Konsistenz des Filteralgorithmus sicherstellen sollen, indem z.B. fehlerhafte Messwerte abgelehnt werden. Ein verbreitetes Verfahren ist, die Differenz zwischen vorliegendem Messwert \tilde{y}_k und Messwertvorhersage $\mathbf{H}_k \tilde{x}_k^-$, sprich die Innovation, zu betrachten. Die Kovarianz der Innovation ist $\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k$; ist die Innovation größer als z.B. die dreifache Standardabweichung, sollte der Messwert unter Umständen abgelehnt werden. Dabei muss jedoch darauf geachtet werden, dass es zu keiner Entkopplung des Filters von der Realität kommt: Werden Messwerte abgelehnt, können je nach Szenario die Navigationsfehler mit der Zeit anwachsen, die Innovationen werden daher ebenfalls größer ausfallen. Wird dieses Anwachsen der Navigationsfehler nicht exakt in der \mathbf{P} -Matrix abgebildet, kann das zum Ablehnen von weiteren Messwerten führen, die keineswegs fehlerhaft waren.

In den meisten GPS-Empfängern werden Vorkehrungen getroffen, um zumindest möglichst wenige fehlerhafte Messungen an den Benutzer weiterzugeben, man spricht hier von Receiver Autonomous Integrity Monitoring (RAIM). Die bekanntesten Vertreter hierbei sind die Range-Comparison-Methode, die Least-Square-Methode und die Parity-Space-Methode⁷. Diese drei Methoden sind als äquivalent anzusehen, siehe [17], daher soll hier nur die einfachste beschrieben werden: Bei der Range-Comparison-Methode wird zunächst aus vier Pseudoranges die User-Position berechnet. Basierend auf dieser Position können die Pseudoranges zu weiteren Satelliten vorhergesagt und mit den tatsächlich gemessenen Pseudoranges verglichen werden. Fallen nun eine oder mehrere dieser Differenzen zwischen Vorhersage und Messung größer aus als die aufgrund des Messrauschens erwartete Ungenauigkeit, liegen mit großer Wahrscheinlichkeit fehlerhafte Messungen vor⁸. Um einen solchen Fehlerfall erklären zu können, müssen mindestens fünf Pseudoranges vorliegen. Bei mindestens sechs Pseudoranges kann durch Bildung geeigneter Permutationen eine einzelne fehlerhafte Messung identifiziert werden, bei sieben Pseudoranges sind zwei fehlerhafte Messungen identifizierbar.

Ein anderer Integrity-Monitoring-Ansatz wird in [96] beschrieben: Hier wird ein IMM verwendet, dessen elementare Filter durch Tightly Coupled GPS/INS-Filter gegeben sind, deren Zustandsvektor um jeweils einen Pseudorange-Bias, jeweils für einen anderen Satelliten, erweitert wurde. Bei dieser Vorgehensweise kann schon bei nur fünf Satelliten ein fehlerhafter Satellit nicht nur erkannt, sondern auch identifiziert werden –

⁷Für eine Implementierung bietet sich die Parity-Space-Methode an, da zur Identifikation einer fehlerhaften Messung nicht verschiedene Permutationen untersucht werden müssen wie z.B. bei der Range-Comparison-Methode.

⁸Gerade in städtischen Gebieten kann aufgrund der Abschattung von Satelliten ein so schlechtes GDOP auftreten, dass auch ohne fehlerhafte Messungen eine mit unakzeptabel großen Fehlern behaftete Positionsbestimmung resultiert.

natürlich ist der Rechenzeitbedarf bei diesem Verfahren, das zur Gruppe der Aircraft-Autonomous-Integrity-Monitoring-Verfahren (AAIM) zählt, beträchtlich.

8.6 Sigma-Point-Kalman-Filter

Momentan werden zur Fusion der Daten von GPS-Empfänger und Inertialsensoren fast ausschließlich erweiterte oder linearisierte Kalman-Filter eingesetzt, ihre prinzipielle Eignung für diese Aufgabe ist seit Jahrzehnten unumstritten. Dennoch liegt bei diesem Schätzproblem ein nichtlineares Systemmodell und zumindest im Falle eines Tightly Coupled Systems auch ein nichtlineares Messmodell vor. Wie in Abschnitt 6.4.3 ausgeführt approximiert ein Sigma-Point-Kalman-Filter bei nichtlinearen Transformationen die Kovarianz und den Mittelwert einer Zufallsvariable genauer als ein erweitertes Kalman-Filter. In der Literatur werden daher auch eine Reihe von Anwendungen beschrieben, bei denen mit einem Sigma-Point-Kalman-Filter bessere Ergebnisse erzielt werden konnten als mit einem erweiterten Kalman-Filter, dazu zählen z.B. die Zielverfolgung mittels Radar [129] und das Trainieren neuronaler Netze [118]. Im Folgenden soll untersucht werden, ob auch auf dem Gebiet der GPS/INS-Integration eine Steigerung von Genauigkeit, Zuverlässigkeit und Integrität des Navigationssystems erreicht werden kann, indem anstelle eines erweiterten Kalman-Filters ein Sigma-Point-Kalman-Filter eingesetzt wird.

8.6.1 Nichtlinearität eines Schätzproblems

Einen Unterschied in den Filterergebnissen von Sigma-Point-Kalman-Filter und erweitertem Kalman-Filter kann es nur geben, wenn die Terme höherer Ordnung, die von einem Sigma-Point-Kalman-Filter noch erfasst werden, bei den betreffenden Transformationen einen signifikanten Beitrag zu Mittelwert und Kovarianz liefern. Auf den ersten Blick überraschend sind dafür die nichtlinearen Gleichungen des System- und Messmodells nur von sekundärer Bedeutung, wesentlich entscheidender für die 'Nichtlinearität' des Schätzproblems sind die gewählte Zeitschrittweite und die Unsicherheit der Zustandsschätzung. Diese Zusammenhänge sollen anhand eines einfachen Beispiels illustriert werden.

Hierzu wird die zweidimensionale Bewegung eines Fahrzeugs in einer Ebene betrachtet. Das Fahrzeug soll sich mit einer konstanten, bekannten Geschwindigkeit v_{abs} in Fahrzeuginnenrichtung bewegen. Der Systemzustand lässt sich mit drei Zustandsvariablen beschreiben, der Fahrzeugposition in x - und y -Richtung und dem Yaw-Winkel $\vec{\psi}$, der die Bewegungsrichtung angibt. Das nichtlineare Systemmodell ist somit durch die Gleichungen

$$\dot{x} = -v_{abs} \sin \psi \quad (8.173)$$

$$\dot{y} = v_{abs} \cos \psi \quad (8.174)$$

$$\dot{\psi} = \omega \quad (8.175)$$

gegeben, ω ist die Drehrate der Drehung um die Fahrzeughochachse. Wird diese ebenfalls

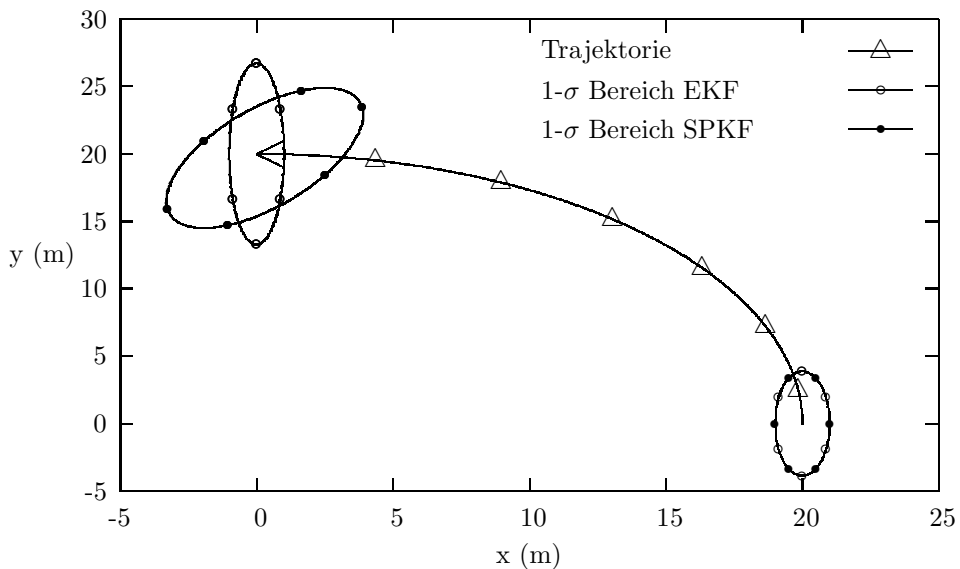


Abbildung 8.18: Propagation der Kovarianz mit EKF und SPKF, Standardabweichung Yaw zu Beginn zehn Grad, ein Zeitschritt.

als konstant angenommen, kann sehr leicht eine analytische Lösung des Differentialgleichungssystems (8.173)–(8.175) bestimmt werden. Anhand dieses Beispiels soll analysiert werden, wie die Kovarianz der Fahrzeugposition während einer neunzig Grad Kreisbogenfahrt von einem erweiterten Kalman-Filter und von einem Sigma-Point-Kalman-Filter propagiert wird.

Abb. 8.18 zeigt die initialen 1-Sigma-Kovarianzellipsen der beiden Filter, die Standardabweichung der Positionsunsicherheit in Fahrzeuginnenrichtung wurde zu 3.9 m, in Fahrzeugquerrichtung zu 1.0 m gewählt. Die initiale Standardabweichung des Yaw-Winkels wurde zu zehn Grad angenommen, der gesamte Kreisbogen wird in einem einzigen Zeitschritt durchfahren. Abb. 8.18 zeigt zusätzlich die propagierten Kovarianzellipsen nach der Kreisbogenfahrt an den von den Filtern bestimmten Positionen, die analytisch berechnete Trajektorie ist ebenfalls eingezeichnet. Offensichtlich unterscheiden sich die propagierten Kovarianzellipsen deutlich. Bestimmt man die korrekte Kovarianzellipse z.B. durch ein Monte-Carlo-Sampling, stellt man fest, dass der Sigma-Point-Kalman-Filter ein sehr gutes Ergebnis liefert, die Kovarianzellipse des erweiterten Kalman-Filters spiegelt die tatsächliche Unsicherheit der propagierten Position massiv fehlerhaft wieder, in Fahrzeugquerrichtung wird eine zu große Unsicherheit, in Fahrzeuginnenrichtung eine zu kleine Unsicherheit berechnet. Dadurch würden Positionsmessungen, die die Position in Fahrzeuginnenrichtung korrigieren könnten zu gering gewichtet, was bis zur Divergenz des Filters führen könnte. Die bei der Kovarianz-Ellipse des Sigma-Point-Kalman-Filters vorliegende Verdrehung lässt sich auch anschaulich erklären: Denkt man sich die Trajektorie aufgrund der Winkelunsicherheit um einige Grad in die eine oder

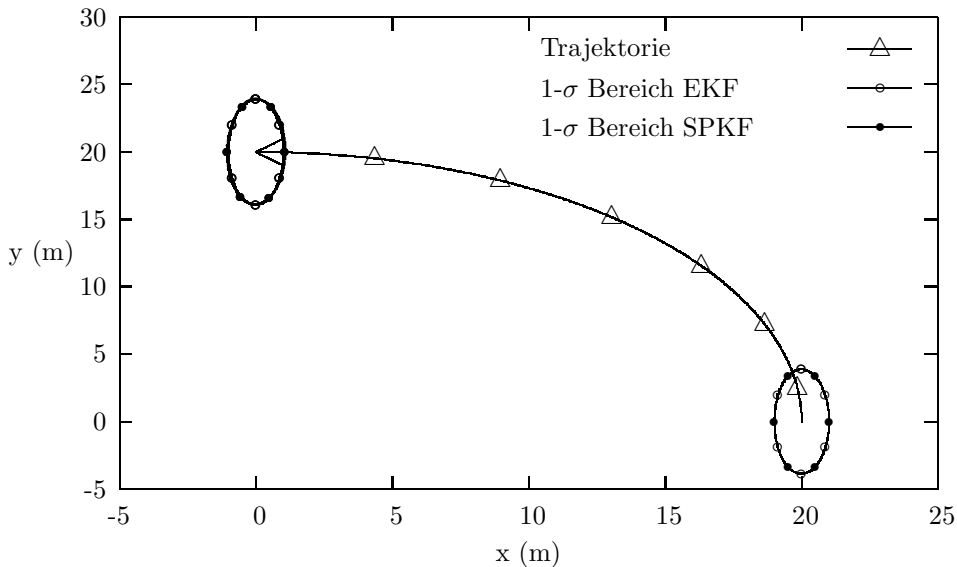


Abbildung 8.19: Propagation der Kovarianz mit EKF und SPKF, Standardabweichung Yaw zu Beginn ein Grad, ein Zeitschritt.

in die andere Richtung verdreht, so kommt der Endpunkt der Trajektorie in der Nähe des Schnittpunktes der großen Halbachse mit dem Ellipsenrand zu liegen.

In dem betrachteten Szenario spielen die vom erweiterten Kalman-Filter nicht erfassten Terme offensichtlich eine wichtige Rolle, ihre Vernachlässigung führt zu massiven Fehlern. Das ändert sich, wenn anstelle einer initialen Winkelunsicherheit von zehn Grad eine Winkelunsicherheit von einem Grad angenommen wird, die restlichen Parameter der Simulation bleiben unverändert. Für dieses Szenario erhält man die in Abb. 8.19 dargestellten Ergebnisse. Aufgrund der geringeren Anfangsunsicherheit des Winkels, die maßgeblich in die Terme höherer Ordnung eingeht, können diese ohne weiteres vernachlässigt werden. Das Sigma-Point-Kalman-Filter und das erweiterte Kalman-Filter liefern nahezu identische Ergebnisse.

Ähnliche Ergebnisse erhält man auch für die große Anfangswinkelunsicherheit von zehn Grad, wenn man eine geringere Zeitschrittweite wählt. Wird der Kreisbogen z.B. in dreißig Zeitschritten durchfahren, erhält man die in Abb. 8.20 dargestellten Ergebnisse. Die durch die große Winkelunsicherheit verursachte Verdrehung der Kovarianzellipse, die in Abb. 8.18 nur vom Sigma-Point-Kalman-Filter erfasst werden konnte, ist auch beim erweiterten Kalman-Filter feststellbar.

Dieses einfache Beispiel illustriert eindrucksvoll, dass bei dem selben Schätzproblem verglichen mit einem Sigma-Point-Kalman-Filter ein erweitertes Kalman-Filter gleichwertige, aber auch deutlich schlechtere Ergebnisse liefern kann. Ob unterschiedliche Ergebnisse resultieren, hängt in erster Linie von der Zeitschrittweite und der Kovarianz

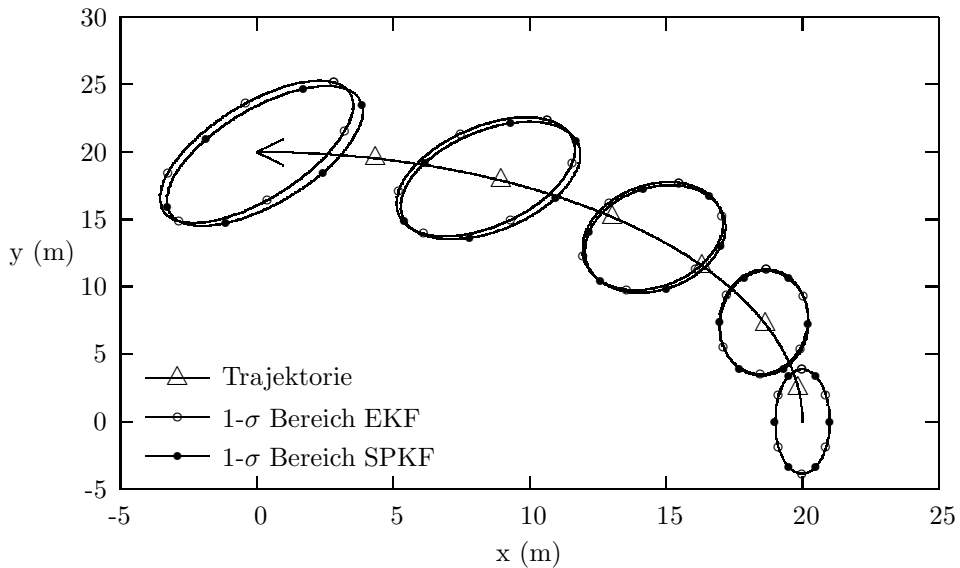


Abbildung 8.20: Propagation der Kovarianz mit EKF und SPKF, Standardabweichung Yaw zu Beginn zehn Grad, dreißig Zeitschritte.

der Zustandsschätzung ab.

8.6.2 Simulationsergebnisse

In diesem Abschnitt werden zwei Tightly Coupled GPS/INS-Systeme, basierend auf einem linearisierten Kalman-Filter und einem Sigma-Point-Kalman-Filter, in numerischen Simulationen verglichen. Grundlage beider Filter sind die nichtlinearen Gleichungen der Inertialnavigation. Bei dem Sigma-Point-Kalman-Filter wurde eine total-state-space-Formulierung gewählt, um die unvermeidlichen Linearisierungsfehler bei der Bestimmung eines Fehlersystemmodells zu vermeiden. Bei dem linearisierten Kalman-Filter konnte mit Eulerwinkelfehlern gearbeitet werden, da diese als klein angenommen werden können und die bei neunzig Grad Pitch auftretenden Singularitäten und Mehrdeutigkeiten somit keine Rolle spielen, siehe Abschnitt 8.2.1. Die absoluten Lagewinkel hingegen können nicht als klein angenommen werden, daher wurden in den Zustandsvektor des Sigma-Point-Kalman-Filters anstelle von drei Winkeln die vier Komponenten des Lage-Quaternions aufgenommen.

In den numerischen Simulationen wurden Inertialsensoren unterschiedlicher Güte betrachtet, von low-cost-MEMS bis FOG. Die gewählten Sensorparameter sind in Tab. 8.1 angegeben. Damit wird eine große Bandbreite von Anwendungen abgedeckt, von Flugkörpernavigation bis Micro-Aerial-Vehicles (MAV).

Die GPS-Pseudorange- und Deltarange-Messungen wurden ebenfalls synthetisch er-

Tabelle 8.1: Parameter der in den numerischen Simulationen angenommenen Inertialsensoren.

	Low-Cost MEMS IMU	MEMS IMU	FOG IMU
B.-Messer const. Bias	10 mg	5 mg	5 mg
B.-Messer Bias Drift*	0.2 mg, 1000 s	1.0 mg, 3600 s	0.0
B.-Messer random walk	0.4 mg/ $\sqrt{\text{Hz}}$	0.4 mg/ $\sqrt{\text{Hz}}$	0.05 mg/ $\sqrt{\text{Hz}}$
B.-Messer Skalenfaktorf.	0.5%	0.5%	200ppm
B.-Messer Misalignment	3.5 mrad	3.5 mrad	0.5 mrad
Gyroscope const. Bias	360 °/h	75 °/h	5 °/h
Gyroscope Bias Drift*	72 °/h, 1000 s	3 °/h, 3600 s	0.0
Gyroscope Random Walk	3.5 °/ $\sqrt{\text{h}}$	0.3 °/ $\sqrt{\text{h}}$	0.1 °/ $\sqrt{\text{h}}$
Gyroscope Skalenfaktorf.	0.5%	0.5%	100ppm
Gyroscope Misalignment	3.5 mrad	3.5 mrad	0.5 mrad
Update-Rate	100 Hz	100 Hz	200 Hz

* Parameter eines Gauss-Markov-Prozesses erster Ordnung.

zeugt, wobei ein C/A-Code-Empfänger angenommen wurde. Als Messfehler wurden Ionosphärenfehler, Troposphärenfehler, Ephemeridenfehler, Fehler durch Mehrwegeausbreitung und Empfängerrauschen simuliert. Die dafür benötigten Fehlermodelle wurden [101] entnommen und anhand von realen Messdaten validiert. Für das Empfänger-Uhrenfehlermodell wurden typische Werte verwendet, wie sie in [18] angegeben sind. Die Satellitenkonstellation wurde anhand realer Almanach-Daten simuliert. Als Anfangspositionsfehler wurden 30 m angenommen, die Geschwindigkeitsfehler betrugen 1 m/s, die Lagefehler wurden für Roll und Pitch zu 35 mrad, für Yaw zu 85 mrad gewählt. Diese Anfangsfehler sind jeweils als Standardabweichungen zu verstehen, d.h. die tatsächlichen Anfangsfehler wurden vor jedem Simulationslauf mit einem Zufallszahlengenerator bestimmt.

Zuerst wurden Simulationen mit einer guten Satellitenverfügbarkeit durchgeführt, die Ergebnisse für eine low-cost-MEMS-IMU und eine FOG-IMU sind in Abb. 8.21 bis 8.23 und Abb. 8.24 bis 8.26 dargestellt. Offensichtlich liefern das linearisierte Kalman-Filter und das Sigma-Point-Kalman-Filter nahezu identische Ergebnisse, lediglich in der ersten Phase der Simulation scheinen die Geschwindigkeits- und Lageschätzungen bei dem auf einer FOG-IMU basierenden System bei Verwendung eines Sigma-Point-Kalman-Filters geringfügig schneller zu konvergieren.

Der wesentliche Vorteil eines Tightly Coupled Systems gegenüber einem Loosely Coupled System besteht in der Fähigkeit, bei weniger als vier sichtbaren Satelliten eine – wenn auch eingeschränkte – Stützung der Inertialnavigation realisieren zu können. Um das Verhalten der Filter in einem solchen Szenario beurteilen zu können wurden Simulationen durchgeführt, bei denen in der Zeit von 150 Sekunden bis 300 Sekunden nur drei Satelliten, von 300 Sekunden bis 350 Sekunden nur zwei Satelliten, von 450 Sekunden bis 500 Sekunden nur ein Satellit und schließlich von 650 Sekunden bis 700 Sekunden kein Satellit sichtbar war. Außerhalb dieser Zeiträume standen sechs bis sieben Satelliten zur Verfügung. Die Positions-, Geschwindigkeits- und Lagefehler in diesem Szenario bei Verwendung einer low-cost-MEMS-IMU sind in Abb. 8.27 bis 8.29 dargestellt. Wie

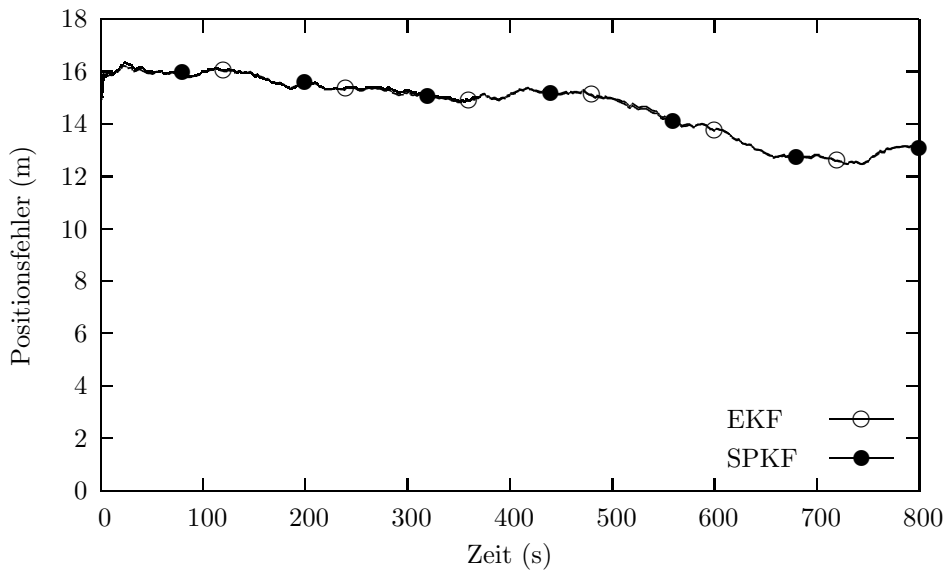


Abbildung 8.21: RMS-Werte der Positionsfehler gemittelt über 25 Simulationsläufe, gute Satellitenverfügbarkeit, low-cost-MEMS-IMU.

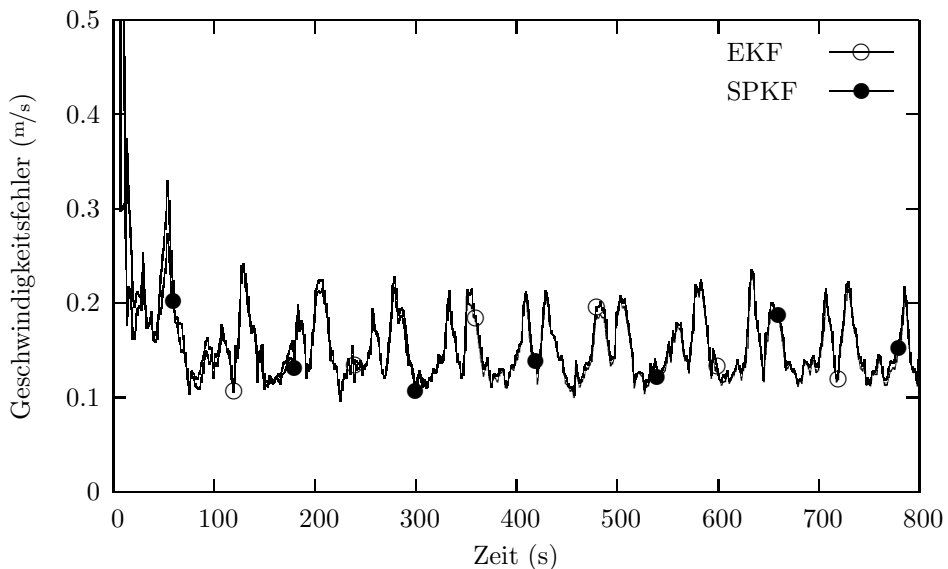


Abbildung 8.22: RMS-Werte der Geschwindigkeitsfehler gemittelt über 25 Simulationsläufe, gute Satellitenverfügbarkeit, low-cost-MEMS-IMU.

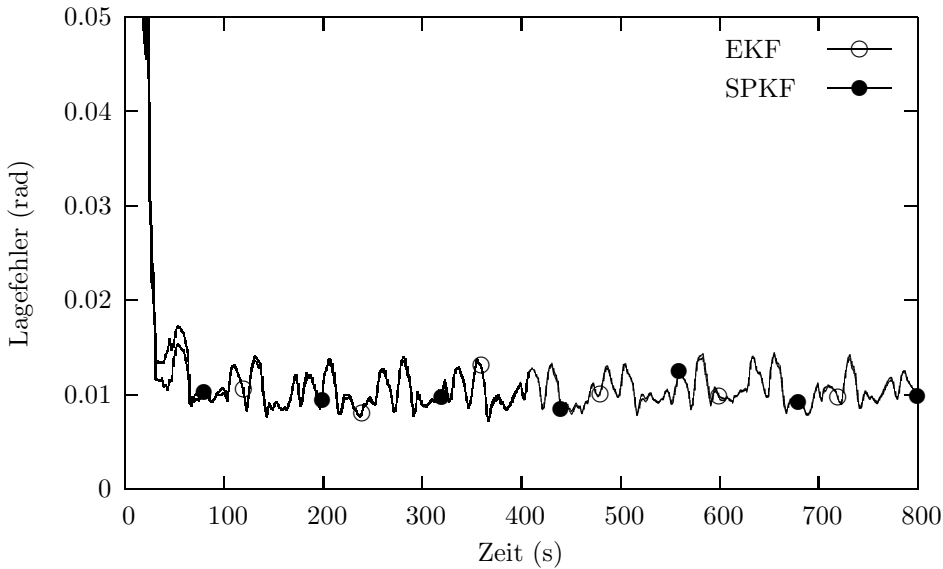


Abbildung 8.23: RMS-Werte der Lagefehler gemittelt über 25 Simulationsläufe, gute Satellitenverfügbarkeit, low-cost-MEMS-IMU.

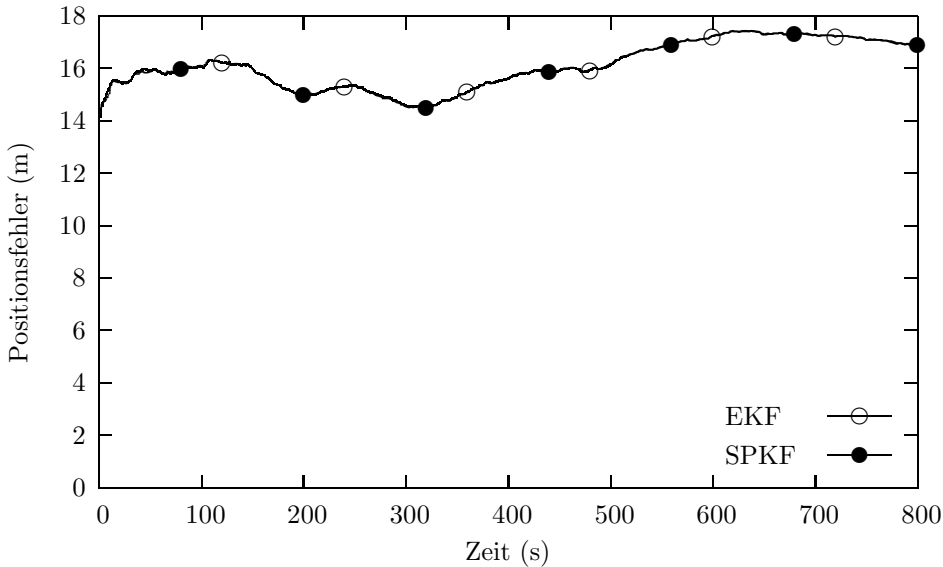


Abbildung 8.24: RMS-Werte der Positionsfehler gemittelt über 25 Simulationsläufe, gute Satellitenverfügbarkeit, low-cost-MEMS-IMU.

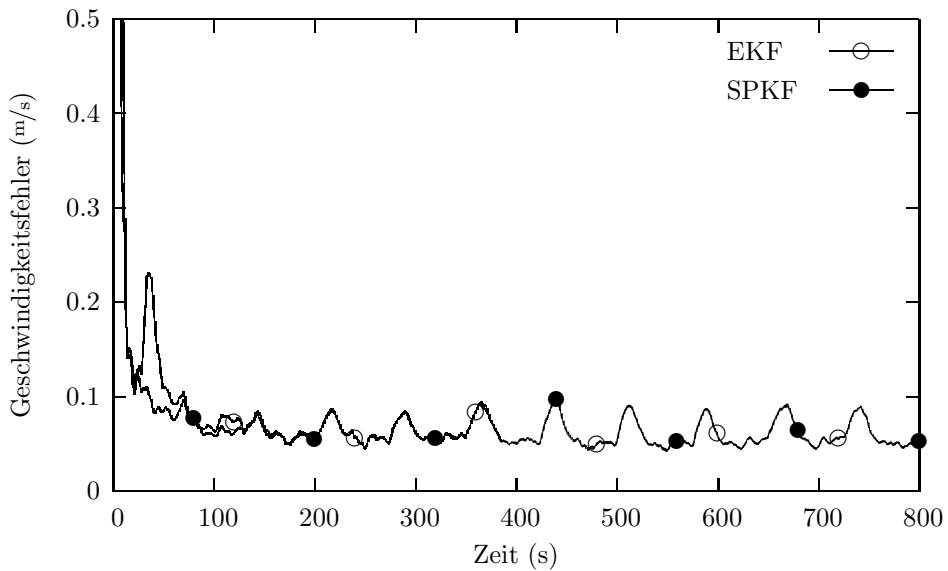


Abbildung 8.25: RMS-Werte der Geschwindigkeitsfehler gemittelt über 25 Simulationsläufe, gute Satellitenverfügbarkeit, low-cost-MEMS-IMU.

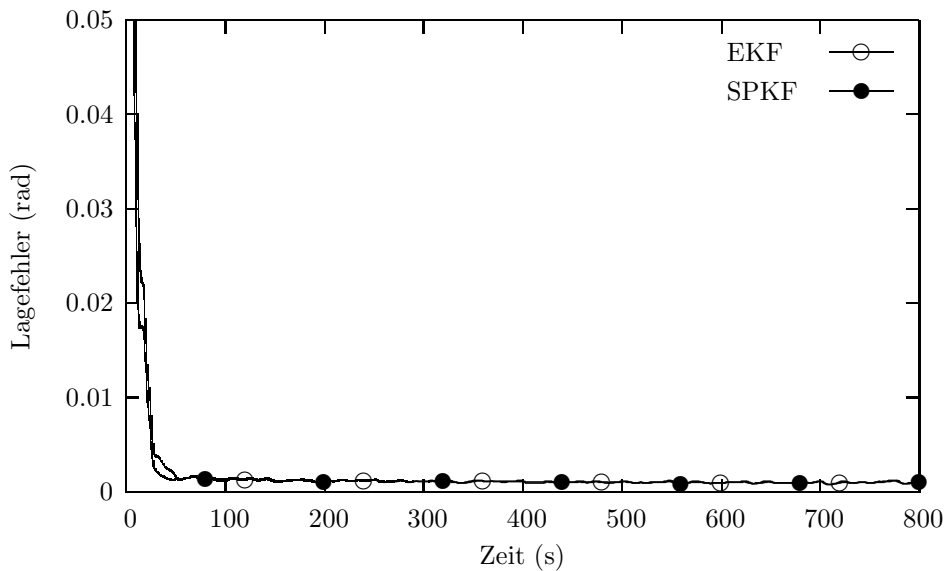


Abbildung 8.26: RMS-Werte der Lagefehler gemittelt über 25 Simulationsläufe, gute Satellitenverfügbarkeit, low-cost-MEMS-IMU.

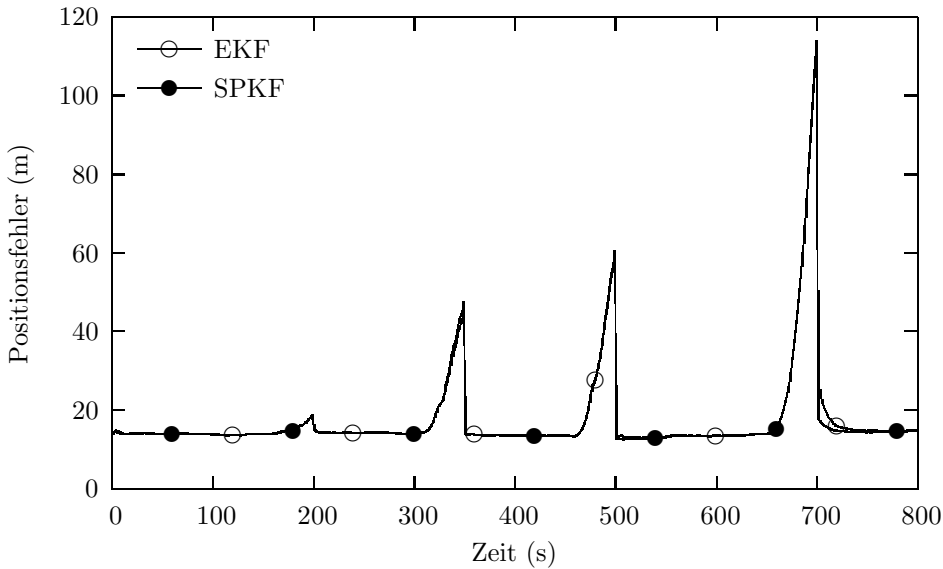


Abbildung 8.27: RMS-Werte der Positionsfehler gemittelt über 25 Simulationsläufe, eingeschränkte Satellitenverfügbarkeit, low-cost-MEMS-IMU.

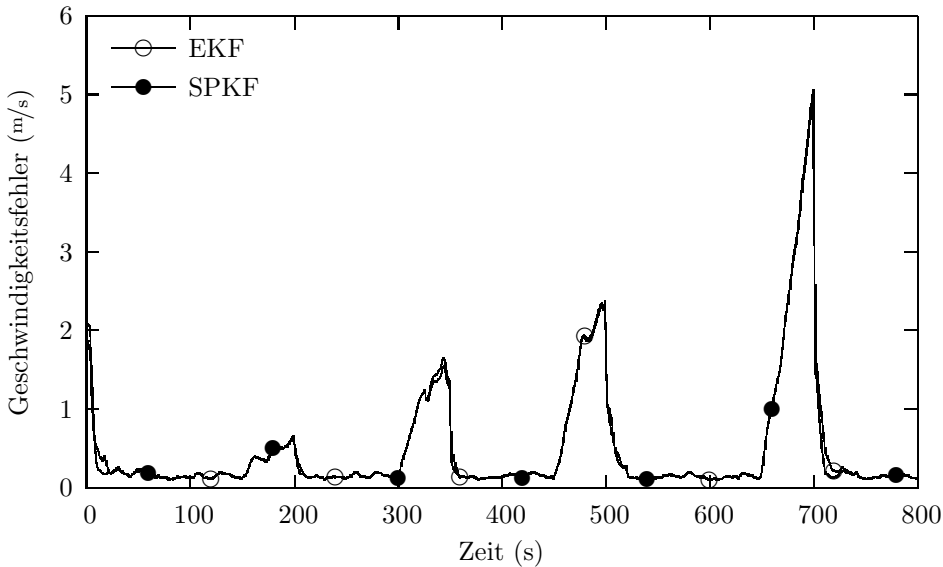


Abbildung 8.28: RMS-Werte der Geschwindigkeitsfehler gemittelt über 25 Simulationsläufe, eingeschränkte Satellitenverfügbarkeit, low-cost-MEMS-IMU.

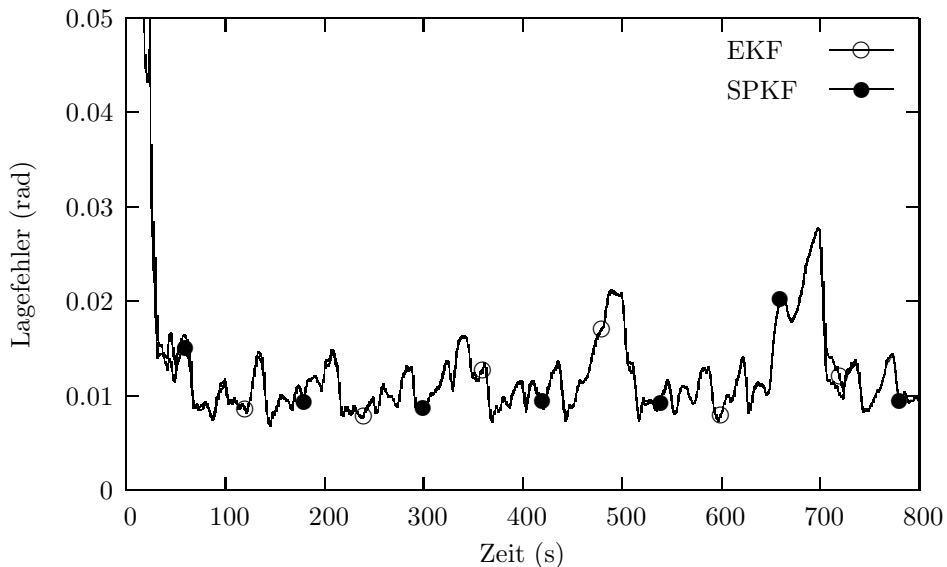


Abbildung 8.29: RMS-Werte der Lagefehler gemittelt über 25 Simulationsläufe, eingeschränkte Satellitenverfügbarkeit, low-cost-MEMS-IMU.

erwartet wachsen die Navigationsfehler bei reduzierter Satellitenverfügbarkeit zwar mit der Zeit an, das jedoch deutlich langsamer als in dem letzten Zeitintervall, in dem keinerlei Satelliten sichtbar waren. Das relativ schnelle Anwachsen der Navigationsfehler ist auf die geringe Güte der MEMS-IMU zurückzuführen. Wie bei den Simulationen mit vollständigen Satellitenkonstellationen liefern hier das linearisierte Kalman-Filter und das Sigma-Point-Kalman-Filter praktisch identische Ergebnisse.

Diese Simulationsergebnisse konnten anhand realer Sensordaten verifiziert werden. Dazu wurden die in einer Testfahrt aufgezeichneten Daten herangezogen, die bereits in Abschnitt 8.2.4 beim Vergleich von Loosely und Tightly Coupled Systemen verwendet wurden. Die Positionslösungen beider Filter sind in Abb. 8.30 dargestellt, diese sind praktisch identisch. Gleiches gilt für die Geschwindigkeits-, Lage- und Bias-Schätzungen, auf deren Darstellung hier verzichtet wurde.

Aus diesen Ergebnissen kann geschlossen werden, dass für realistische Szenarien durch Einsatz eines Sigma-Point-Kalman-Filters nicht mit einer Verbesserung der Navigationsergebnisse zu rechnen ist. Dass es dennoch prinzipielle Unterschiede zwischen den beiden Filtertypen gibt, zeigt sich, wenn z.B. unrealistisch große Anfangspositionsfehler angenommen werden. Diese Situation ist am Beispiel eines auf einer MEMS-IMU basierenden Systems in Abb. 8.31 dargestellt. Man erkennt, dass das erweiterte Kalman-Filter deutlich langsamer konvergiert und auch nach längerer Zeit noch nicht die Genauigkeit des Sigma-Point-Kalman-Filters erreicht. Die Ursache hierfür ist jedoch nicht darin zu sehen, dass ein linearisiertes oder erweitertes Kalman-Filter in diesem Szenario grund-

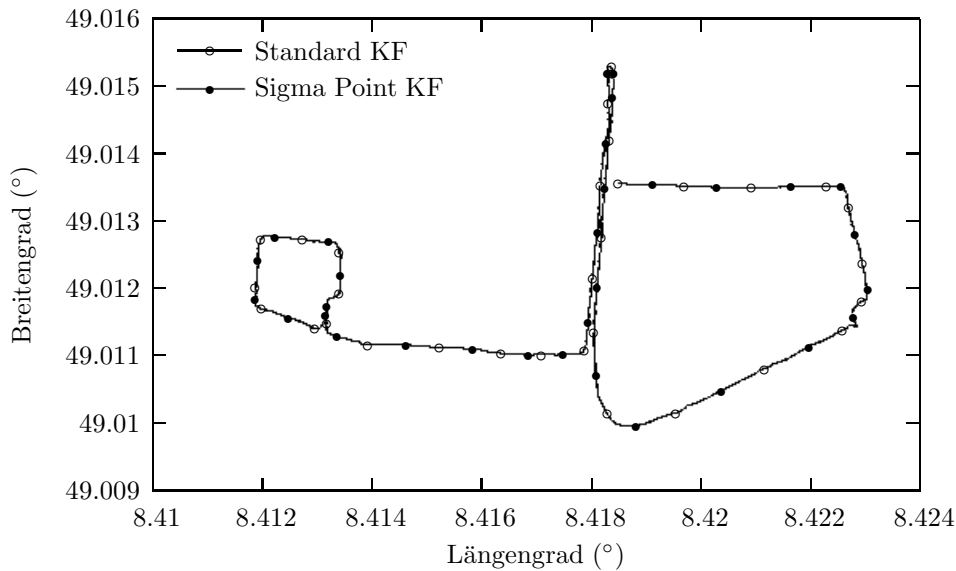


Abbildung 8.30: Positionslösung eines linearisierten und eines Sigma-Point-Kalman-Filters bei Verarbeitung realer Sensordaten.

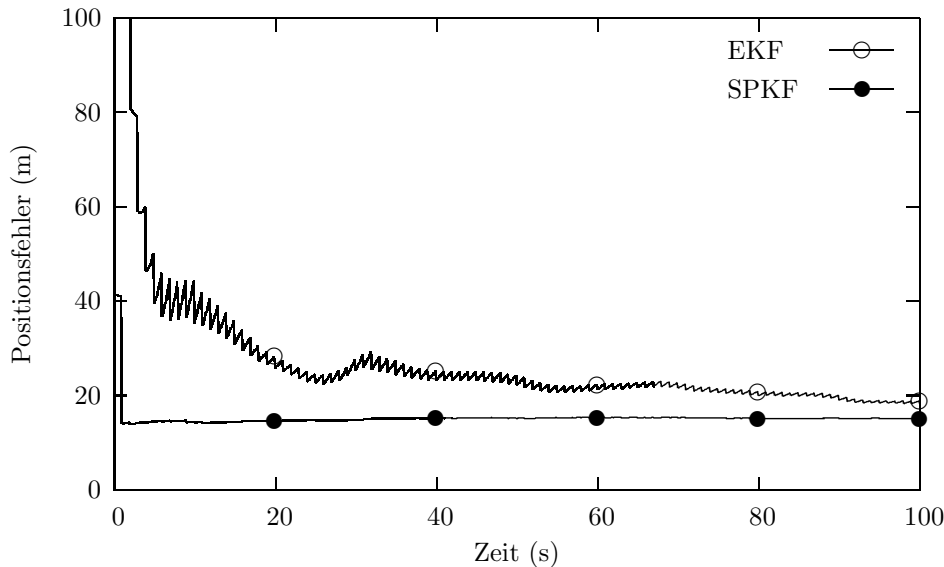


Abbildung 8.31: RMS-Werte der Positionsfehler gemittelt über 25 Simulationläufe bei unrealistisch großen Anfangspositionsfehlern von 30 km, gute Satellitenverfügbarkeit, MEMS-IMU.

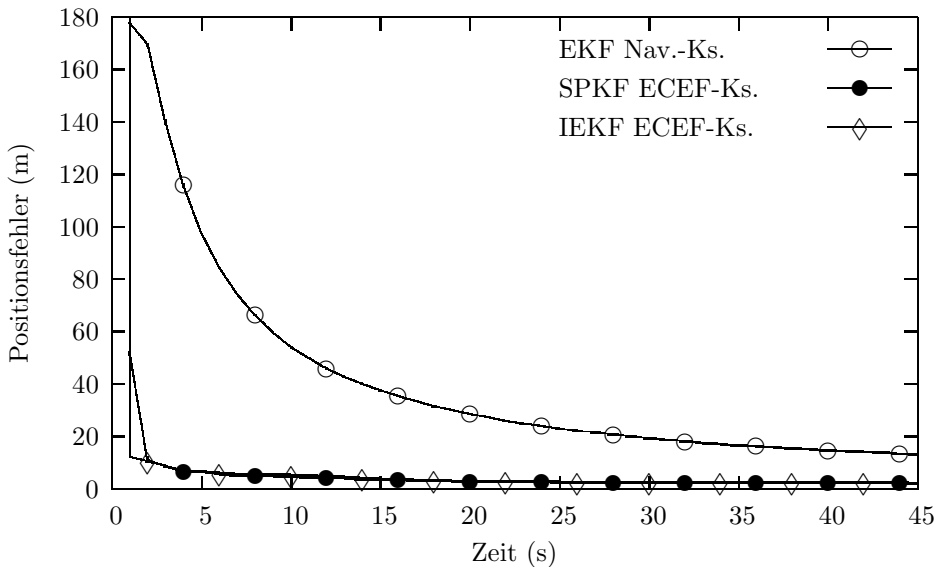


Abbildung 8.32: RMS-Werte der Positionsfehler bei einer Positionsbestimmung anhand von Pseudoranges, 100 Simulationenläufe, Anfangspositionsfehler 60 km, gute Satellitenverfügbarkeit

sätzlich schlechter geeignet ist – lediglich die getroffenen Designentscheidungen sind hier ungeeignet. Dazu zählt vor allem die Wahl einer Mechanisierung in Koordinaten des Navigationskoordinatensystems; ist die Position massiv fehlerhaft, so ergeben sich bei der Umrechnung der Satellitenpositionen in das Navigationskoordinatensystem zusätzliche Fehler. Abhilfe könnte hier eine Mechanisierung in Koordinaten des erdfesten Koordinatensystems schaffen. Dies wird in Abb. 8.32 illustriert, die Simulationsergebnisse einer Positionsbestimmung anhand von Pseudorange-Messungen zeigt. Die Anfangspositionsfehler betrugen 60 km.

Verglichen werden ein Sigma-Point-Kalman-Filter, das die Position im erdfesten Koordinatensystem bestimmt, ein erweitertes Kalman-Filter, das in Navigationskoordinaten arbeitet und ein sogenanntes iteriertes erweitertes Kalman-Filter, das ebenfalls die Position im erdfesten Koordinatensystem schätzt. Ein iteriertes Kalman-Filter ist dadurch gekennzeichnet, dass im Messschritt zunächst wie gewöhnlich die Gewichtungsmatrix \mathbf{K}_k berechnet und anhand der vorliegenden Messwerte die Zustandsschätzung angepasst wird. Anschließend erfolgt aber nicht die Anpassung der Kovarianzmatrix des Schätzfehlers, stattdessen wird um die verbesserte Zustandsschätzung erneut linearisiert, eine verbesserte Messmatrix und eine verbesserte Gewichtungsmatrix bestimmt und damit eine neue, verbesserte Zustandsschätzung ermittelt. Dieser Vorgang wird einige Male wiederholt, bevor am Ende schließlich die Anpassung der Kovarianzmatrix des Schätzfehlers den Messschritt abschließt. Betrachtet man die Simulationsergebnisse in Abb. 8.32, so erkennt man, dass auch hier die großen Anfangspositionsfehler bei einem error-state-space-Kalman-Filter in Navigationskoordinaten zu einer sehr langsamen

Konvergenz und bleibenden Abweichungen führen. Das Sigma-Point-Kalman-Filter hingegen kommt mit diesem Szenario sehr gut zurecht. Interessanterweise zeigt das iterierte Kalman-Filter eine noch schnellere Konvergenz als das Sigma-Point-Kalman-Filter. Ebenso relevant wie die Unsicherheit der Zustandsschätzung und die Zeitschrittweite ist also die Wahl einer geeigneten Filter Implementierung. Der Entwurf eines Sigma-Point-Kalman-Filters erfordert hierbei sicherlich weniger Erfahrung, was ein Vorteil ist. Mit einem an das erwartete Szenario angepassten Kalman-Filter hingegen kann in vielen Fällen mit deutlich weniger Rechenzeit die gleiche Genauigkeit und Integrität, d.h. Übereinstimmung zwischen der Kovarianzmatrix der Schätzfehler des Filters und den tatsächlich vorliegenden Schätzfehlern, erzielt werden.

Es gibt jedoch auch Anwendungsfälle, bei denen ein Sigma-Point-Kalman-Filter deutlich bessere Ergebnisse liefert als ein erweitertes oder linearisiertes Kalman-Filter, ein Beispiel hierfür ist die Objektverfolgung mittels Radar.

8.6.3 Theoretischer Vergleich mit Objektverfolgung

Die Messgleichung einer Radar-Abstandsmessung ist gegeben durch

$$\tilde{y}_r = h(x, y, z, v_r) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + v_r = r + v_r, \quad (8.176)$$

wobei $(x, y, z)^T$ den Vektor bezeichnet, der vom Radar zum Ziel weist. Diese Gleichung ist, abgesehen von dem linear eingehenden Uhrenfehler, identisch zu einer Pseudorange-Messgleichung. Mehrere Autoren berichten bei der Objektverfolgung mittels Radar von besseren Ergebnissen beim Einsatz eines Sigma-Point-Kalman-Filters anstelle eines erweiterten Kalman-Filters, während in den vorigen Abschnitten gezeigt wurde, dass bei GPS/INS-Systemen nicht mit einer Leistungssteigerung zu rechnen ist. Die Ursache hierfür ist, dass sich bei einem Objektverfolgungsszenario die Nichtlinearität der Messgleichung und die Unsicherheiten der Zustandsschätzung in einem Bereich bewegen können, in dem die Terme höherer Ordnung, die von einem erweiterten Kalman-Filter nicht erfasst werden, eine Rolle spielen – es muss also eine ähnliche Situation vorliegen wie bei der im vorigen Abschnitt beschriebenen GPS/INS-Integration mit unrealistisch großen Anfangspositionsfehlern, siehe Abb. 8.31. Diese Vermutung soll im Folgenden durch die explizite Berechnung des Terms zweiter Ordnung für in beiden Anwendungsbereichen typische Zahlenwerte bestätigt werden.

Für die Messgleichung (8.176) ergibt sich der Term zweiter Ordnung, siehe Abschnitt 6.4.3, zu

$$\begin{aligned} \left(\frac{\nabla^T \mathbf{P} \nabla}{2!} \right) h(\vec{x}) &= \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{P} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} h(\vec{x}) \\ &= \frac{1}{2} P_{11} \frac{\partial^2 h(\vec{x})}{\partial x^2} + \frac{1}{2} P_{22} \frac{\partial^2 h(\vec{x})}{\partial y^2} + \frac{1}{2} P_{33} \frac{\partial^2 h(\vec{x})}{\partial z^2} \\ &\quad + P_{12} \frac{\partial^2 h(\vec{x})}{\partial x \partial y} + P_{23} \frac{\partial^2 h(\vec{x})}{\partial y \partial z} + P_{13} \frac{\partial^2 h(\vec{x})}{\partial x \partial z}. \end{aligned} \quad (8.177)$$

Für die darin auftretenden Ableitungen erhält man

$$\frac{\partial^2 h(\vec{x})}{\partial x^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 h(\vec{x})}{\partial y^2} = \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 h(\vec{x})}{\partial z^2} = \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}, \quad (8.178)$$

$$\frac{\partial^2 h(\vec{x})}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 h(\vec{x})}{\partial y \partial z} = -\frac{yz}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 h(\vec{x})}{\partial x \partial z} = -\frac{xz}{r^3}. \quad (8.179)$$

Bei jedem dieser Terme steht der Abstand bzw. die dritte Potenz des Abstandes im Nenner. Bei einer Pseudorange-Messung ist das der Abstand zwischen GPS-Antenne und Satellit, dieser beträgt ungefähr 20 000 km. Der Abstand zwischen Radar und Ziel ist bei der Objektverfolgung natürlich wesentlich kleiner. Gleichzeitig erkennt man an der Gestalt dieser Ableitungen, dass die Terme vierter oder sechster Ordnung deutlich kleiner sein müssen als der hier betrachtete Term zweiter Ordnung.

Setzt man als einen typischen Abstandsvektor zwischen GPS-Antenne und Satellit

$$\vec{x} = (7.0e6 \text{ m } 9.4e6 \text{ m } 1.7e7 \text{ m}) \quad (8.180)$$

an, so erhält man bei einer Positionsunsicherheit von zehn Metern,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 100 \text{ m}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 100 \text{ m}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \text{ m}^2 \end{pmatrix}, \quad (8.181)$$

als Zahlenwert des Terms zweiter Ordnung

$$\left(\frac{\nabla^T \mathbf{P} \nabla}{2!} \right) h(\vec{x}) = 5.9 \times 10^{-6} \text{ m}. \quad (8.182)$$

Bei der Objektverfolgung ist der Abstand zwischen Radar und Zielobjekt typischerweise kleiner als zweihundert Kilometer, die Positionsunsicherheit ist in Richtung des Zielobjektes sehr viel kleiner als senkrecht dazu. Setzt man hier nun als Zahlenwerte beispielsweise

$$\vec{x} = (7.0e4 \text{ m } 0 \text{ m } 0 \text{ m}) \quad (8.183)$$

und

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 100 \text{ m}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4.0e5 \text{ m}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4.0e5 \text{ m}^2 \end{pmatrix}, \quad (8.184)$$

so ergibt sich für den Term zweiter Ordnung

$$\left(\frac{\nabla^T \mathbf{P} \nabla}{2!} \right) h(\vec{x}) = 5.7 \text{ m}. \quad (8.185)$$

Als Genauigkeit einer Radar-Abstandsmessung können zwei Meter angenommen werden. Der Fehler, der bei der Vernachlässigung des Terms zweiter Ordnung resultiert, ist also deutlich größer als die Messunsicherheit. Bei der GPS-Pseudorange-Messung liegt die Messgenauigkeit selbst bei Verwendung von DGPS-Korrekturen im Bereich einiger Dezimeter, der hier bei der Vernachlässigung des Terms zweiter Ordnung resultierende Fehler von einigen Mikrometern ist also vollkommen irrelevant. Diese Überlegungen bestätigen daher die Ergebnisse der numerischen Simulationen aus Abschnitt 8.6.2.

Auch bei der Objektverfolgung mittels Radar können Szenarien auftreten, in denen ein erweitertes Kalman-Filter eine vergleichbare Genauigkeit erreicht wie ein Sigma-Point-Kalman-Filter, das trifft vor allem bei einer guten Winkelauflösung des Radars zu⁹. Als interessante Alternative zum Einsatz eines Sigma-Point-Kalman-Filters bei allen Szenarien ist der BLUE-Filter zu nennen, BLUE steht für 'best linear unbiased estimator'. Eine Beschreibung dieses Filtertyps ist z.B. in [132] zu finden.

8.7 Fixed-Interval Smoother

Unter der Voraussetzung, dass die benötigte Rechenleistung zur Verfügung gestellt werden kann, sind die bisher vorgestellten Algorithmen in der Lage, in Echtzeit eine Navigationslösung zu liefern. Ist Echtzeitfähigkeit kein Kriterium, kann anstelle eines Filters ein fixed-interval Smoother¹⁰ eingesetzt werden. Hierzu werden alle Navigationssensordaten aufgezeichnet und anschließend off-line prozessiert. Dabei kann, verglichen mit der Echtzeit-Lösung eines Filters, eine unter Umständen deutliche Genauigkeitssteigerung erzielt werden.

8.7.1 Gleichungen des RTS-Smoother

Prinzipiell werden drei Arten von Smoothern unterschieden, fixed-lag, fixed-point und fixed-interval Smoother.

Die Zustandsschätzung eines Filters zum Zeitpunkt k basiert auf allen bis zum Zeitpunkt k vorhandenen Messwerten:

$$\hat{x}_k^+ = E \left[\vec{x}_k | \tilde{y}_k, \tilde{y}_{k-1}, \dots, \tilde{y}_0 \right] \quad (8.186)$$

Ein fixed-lag Smoother hingegen betrachtet zur Berechnung des Schätzwertes zum Zeitpunkt k alle Messwerte bis zum Zeitpunkt $k+m$, der Schätzwert des fixed-lag Smoothers kann daher formuliert werden als

$$\hat{x}_{s,k} = E \left[\vec{x}_k | \tilde{y}_{k+m}, \tilde{y}_{k+m-1}, \dots, \tilde{y}_0 \right] . \quad (8.187)$$

Dieser Typ Smoother kann so implementiert werden, dass Schätzwerte beinahe in Echtzeit, eben mit m Zeitschritten Verzögerung, zur Verfügung stehen.

⁹Neben der diskutierten Abstandsmessung liegen bei der Objektverfolgung mittels Radar auch noch nichtlineare Winkelmessungen vor.

¹⁰Smoother werden auch als Glättungsfilter bezeichnet.

Ein fixed-point Smoother hat das Ziel, zu einem festen Zeitpunkt j einen Schätzwert zu liefern, der dann bei Eintreffen weiterer Messwerte ständig verbessert wird. Dieser Schätzwert ist gegeben durch

$$\hat{\vec{x}}_{s,j} = E \left[\vec{x}_j | \tilde{y}_k, \tilde{y}_{k-1}, \dots, \tilde{y}_0 \right], \quad k > j. \quad (8.188)$$

Ein fixed-interval Smoother schließlich liefert den Schätzwert

$$\hat{\vec{x}}_{s,k} = E \left[\vec{x}_k | \tilde{y}_N, \tilde{y}_{N-1}, \dots, \tilde{y}_0 \right], \quad (8.189)$$

wobei N die Anzahl aller jemals zur Verfügung stehenden Messwerte ist. Die Genauigkeitssteigerung gegenüber einem Filter resultiert daraus, dass auch die nach dem Zeitpunkt k zur Verfügung stehenden Messwerte Informationen bezüglich des Systemzustandes zum Zeitpunkt k enthalten; diese Informationen werden vom Smoother genutzt, bei einem Filter bleiben sie aufgrund der geforderten Echtzeitfähigkeit zwangsweise unberücksichtigt.

Ein fixed-interval Smoother kann auf unterschiedliche Weisen realisiert werden, am häufigsten kommt wohl der Rauch-Tung-Striebel-Smoother (RTS-Smoother)[102] zum Einsatz. Eine ausführliche Herleitung ist in [114] zu finden, hier soll nur kurz die Vorgehensweise beschrieben werden: Es sollen Zustandsschätzungen des linearen Systems Gl. (6.1) ermittelt werden, das Messmodell ist durch Gl. (6.3) gegeben. Zunächst werden nun alle aufgezeichneten Messwerte mit einem herkömmlichen Kalman-Filter, Gl. (6.17)–(6.19), (6.24), (6.26) verarbeitet:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \\ \hat{\vec{x}}_k^+ &= \hat{\vec{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\tilde{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\vec{x}}_k^-) \\ \mathbf{P}_k^+ &= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- \\ \hat{\vec{x}}_{k+1}^- &= \Phi_k \hat{\vec{x}}_k^+ + \mathbf{B}_k \vec{u}_k \\ \mathbf{P}_{k+1}^- &= \Phi_k \mathbf{P}_k^+ \Phi_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{G}_k^T \end{aligned}$$

Dabei werden in jedem Zeitschritt die a-posteriori- und a-priori-Schätzwerte, $\hat{\vec{x}}_k^+$ und $\hat{\vec{x}}_k^-$, sowie die zugehörigen Kovarianzmatrizen, \mathbf{P}_k^+ und \mathbf{P}_k^- , gespeichert. Anschließend wird rückwärts in der Zeit, beginnend mit dem vorletzten Zeitschritt, die Zustandsschätzung des Smoothers, $\hat{\vec{x}}_{s,k}$, anhand folgender Gleichungen berechnet:

$$\mathbf{K}_{s,k} = \mathbf{P}_k^+ \Phi_k^T (\mathbf{P}_{k+1}^-)^{-1} \quad (8.190)$$

$$\hat{\vec{x}}_{s,k} = \hat{\vec{x}}_k^+ + \mathbf{K}_{s,k} (\hat{\vec{x}}_{s,k+1} - \hat{\vec{x}}_{k+1}^-), \quad k = N-1, N-2, \dots, 1, 0 \quad (8.191)$$

Die Initialisierung erfolgt bei $k = N$ gemäß

$$\hat{\vec{x}}_{s,N} = \hat{\vec{x}}_N^+ \quad (8.192)$$

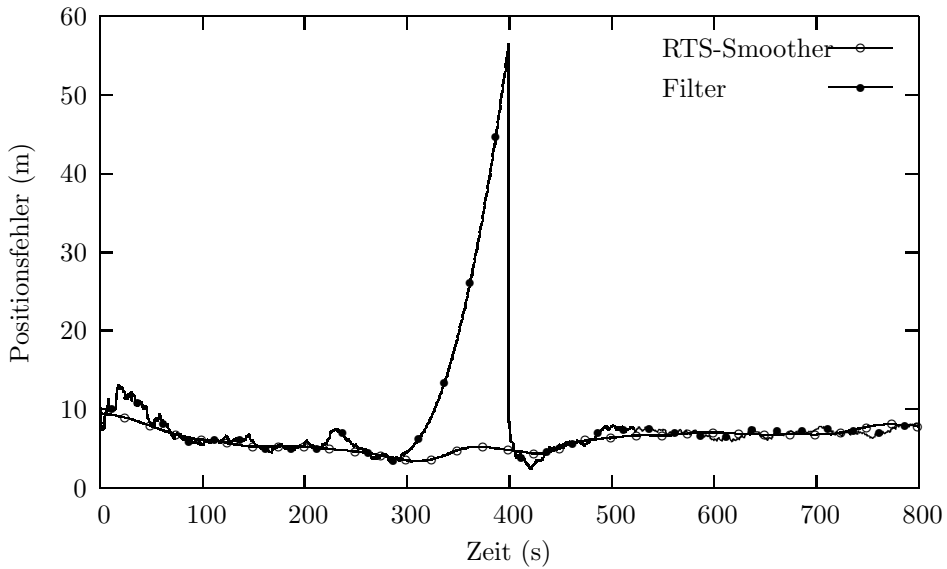


Abbildung 8.33: Positionsfehler der online-Lösung eines Filters und der durch post-processing ermittelten Lösung eines RTS-Smoother.

Die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers des Smoothers wird für den Ablauf des Algorithmus nicht benötigt; sie kann ebenfalls rückwärts in der Zeit anhand von

$$\mathbf{P}_{s,k} = \mathbf{P}_k^+ + \mathbf{K}_{s,k} (\mathbf{P}_{s,k} - \mathbf{P}_{k+1}^-) \mathbf{K}_{s,k}^T, \quad k = N-1, N-2, \dots, 1, 0 \quad (8.193)$$

berechnet werden, die Initialisierung erfolgt ebenfalls bei $k = N$ mit

$$\mathbf{P}_{s,N} = \mathbf{P}_N^+. \quad (8.194)$$

Der RTS-Smoother kann analog der beim EKF angewandten Vorgehensweise auf nichtlineare System- und Messmodelle erweitert werden, auch eine error-state-space-Formulierung ist möglich. Diese Aspekte sollen hier jedoch nicht weiter betrachtet werden.

8.7.2 Simulationsergebnisse

Die Verwendung eines RTS-Smoother bei der Prozessierung von aufgezeichneten Navigationssensordaten bringt Vorteile mit sich: Bei einem integrierten GPS/INS-System dauert es in der Regel einige Minuten, bis die Schätzung der Beschleunigungsmesser- und Drehratensensorbiase konvergiert ist. Unter der Voraussetzung, dass diese Biase zeitlich konstant sind, kann ein Smoother auch in dieser Phase eine Navigationslösung

basierend auf einer bereits konvergierten Bias-Schätzung liefern, was sich in der Regel positiv auf die Lagegenauigkeit auswirkt. Von besonderem Vorteil ist der Einsatz eines Smoothers bei GPS-Ausfällen. Ohne die Verfügbarkeit von GPS-Messungen wachsen bei Verwendung eines Filters die Navigationsfehler entsprechend der Inertialnavigationsperformance an; stehen nach einem GPS-Ausfall wieder GPS-Messungen zur Verfügung, erkennt man, wie die Navigationsfehler angewachsen sind – ein Smoother kann aufgrund dieser Information eine genauere Navigationslösung für den Zeitraum des GPS-Ausfalls berechnen. Dieser Mechanismus wird in Abb. 8.33 illustriert. Hierzu wurden GPS- und Inertialsensordaten simuliert, wobei zwischen 300 und 400 Sekunden ein vollständiger GPS-Ausfall angenommen wurde. Abb. 8.33 zeigt die Positionsfehler, die sich bei Verwendung eines Filters und eines RTS-Smoother ergeben. Ein Anwachsen der Positionsfehler während des GPS-Ausfalls ist bei dem RTS-Smoother praktisch noch nicht feststellbar, während bei der Echtzeitlösung des Filters ein deutlicher Anstieg der Positionsfehler zu verzeichnen ist. Bei längeren GPS-Ausfällen würden natürlich auch bei dem RTS-Smoother die Navigationsfehler merklich anwachsen, wobei die größten Fehler in der Mitte des Ausfallsintervalls zu erwarten sind.

Ergebnisse einer Testfahrt, die das Simulationsergebnis Abb. 8.33 bestätigen, sind in [91] zu finden. Dort wurde auch gezeigt, dass bei Verarbeitung von Trägerphasenmesswerten durch Einsatz eines Smoothers ein größerer Prozentsatz der ganzzahligen Trägerphasenmehrdeutigkeitswerte gefunden werden kann.