

# 3 Inertiale Navigation

Die inertielle Navigation gewann ab Mitte des 20. Jahrhunderts kontinuierlich an Bedeutung. Prinzipiell handelt es sich bei inertialer Navigation um ein Koppelnavigationsverfahren. Bei der Koppelnavigation (engl. dead reckoning) werden fortlaufend die Bewegungsrichtung, die Geschwindigkeit und die seit der letzten Positionsbestimmung vergangene Zeit bestimmt. Die aktuelle Position wird ermittelt, indem anhand dieser Informationen die in dem betrachteten Zeitintervall zurückgelegte Strecke berechnet – in einigen Fällen kann diese auch direkt gemessen werden – und unter Berücksichtigung der Bewegungsrichtung zur letzten bekannten Position hinzu addiert wird. Die Grundidee eines Inertialnavigationssystems (INS) besteht darin, die für eine Koppelnavigation notwendigen Informationen durch Messung von Beschleunigungen und Drehraten zu gewinnen. Prinzipiell werden daher immer jeweils drei orthogonal zueinander angeordnete Drehratensensoren und Beschleunigungssensoren benötigt.

Bei den ersten Systemen wurden die Beschleunigungssensoren auf einer kardanisch gelagerten, stabilisierten Plattform montiert. Die sensitiven Achsen der Beschleunigungssensoren waren dadurch von den Bewegungen des Fahrzeugs<sup>1</sup> entkoppelt und wiesen in Richtung raumfester Achsen wie Norden, Osten und Unten. Anhand der gemessenen Beschleunigungen konnten daher direkt Geschwindigkeitsinkremente in diesen Raumrichtungen bestimmt werden, durch Integration erhielt man Geschwindigkeit und Position. Die Drehratensensoren hatten lediglich die Aufgabe, Lageänderungen der stabilisierten Plattform im Raum z.B. aufgrund von Reibung in den Lagern der kardanischen Aufhängung zu detektieren. Diese unerwünschten Lageänderungen wurden mit Hilfe von Elektromotoren korrigiert. Die hierfür benötigten Drehratensensoren mussten nur Drehungen von Bruchteilen eines Grads pro Stunde messen können, andererseits durften nur minimalste Nullpunktsfehler vorliegen. Die Lage des Fahrzeugs konnte an den Stellungen der Kardanrahmen abgelesen werden.

Mit dem Aufkommen der Ringlaserkreisel (RLG) ab Mitte der sechziger Jahre wurden Strapdown-Systeme technisch realisierbar. Bei einem Strapdown-System kommt eine Inertialsensoreinheit bestehend aus drei Beschleunigungs- und drei Drehratensensoren zum Einsatz, die fest mit dem Fahrzeug verbunden ist. Eine solche Inertialsensoreinheit wird als Inertial Measurement Unit (IMU) bezeichnet<sup>2</sup>. Der Unterschied zu den Plattform-Systemen besteht darin, dass anhand der Drehratensensordaten die Lageänderungen des Fahrzeugs erfasst werden und so durch Integration die Fahrzeuglage berechnet wird. Diese Lageinformationen werden verwendet, um die in körperfesten Achsen gemessenen Beschleunigungen in ein Koordinatensystem mit raumfesten Koor-

---

<sup>1</sup>Der Begriff Fahrzeug kann im Folgenden für ein Schiff, ein Fluggerät, ein Automobil o.Ä. stehen.

<sup>2</sup>Manchmal wird noch zwischen Inertial Sensor Assembly (ISA), d.h. den eigentlichen Inertialsensoren, und Inertial Measurement Unit (IMU), d.h. der Sensorik im Verbindung mit der Elektronik zur Bereitstellung einer Schnittstelle, unterschieden.

dinatenrichtungen, häufig ein Nord-Ost-Unten-Koordinatensystem, umzurechnen. Anschließend werden ebenfalls durch Integration Geschwindigkeit und Position bestimmt.

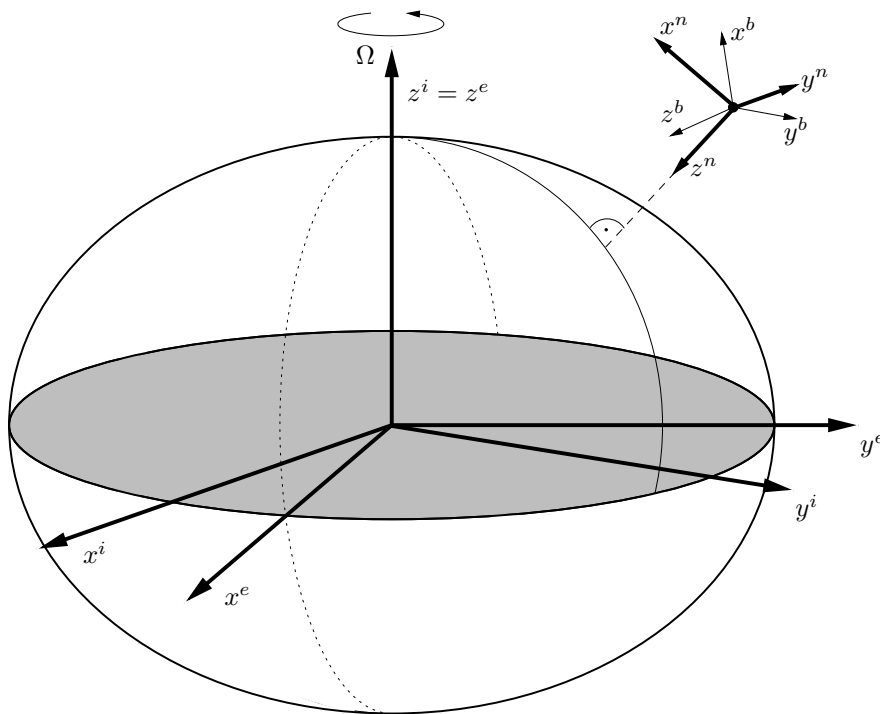
Da anhand der Drehratensensordaten die Drehbewegungen des Fahrzeugs nachvollzogen werden sollen, müssen die Drehratensensoren eines Strapdown-Systems auch Drehungen von mehreren hundert Grad pro Sekunde messen können. Andererseits ist eine wartungsintensive, komplexe Mechanik wie bei den Plattformsystemen nicht mehr nötig, was in der Regel zu Gewichtsvorteilen und einem geringeren Platzbedarf führt.

Die weiteren Abschnitte dieses Kapitels befassen sich mit der Strapdown-Rechnung, also dem mathematischen Hintergrund eines Strapdown-Systems. Plattformsysteme werden nicht betrachtet. Da bei jedem Inertialnavigationssystem die Navigationsinformationen durch Integration unvermeidlich fehlerbehafteter Messwerte gewonnen werden, wachsen die Navigationsfehler mit der Zeit an. Daher werden auch die wesentlichen Fehlercharakteristiken eines INS näher untersucht.

## 3.1 Koordinatensysteme

In der Strapdown-Rechnung werden eine Reihe von Koordinatensystemen benötigt. Zum Beispiel erfassen Inertialsensoren Beschleunigungen und Drehraten bezüglich eines Inertialkoordinatensystems, die Geschwindigkeit des Fahrzeugs wird häufig in den Koordinatenrichtungen Norden, Osten und Unten benötigt. Im Folgenden werden alle benötigten Koordinatensysteme, wie sie in Abb. 3.1 veranschaulicht sind, definiert.

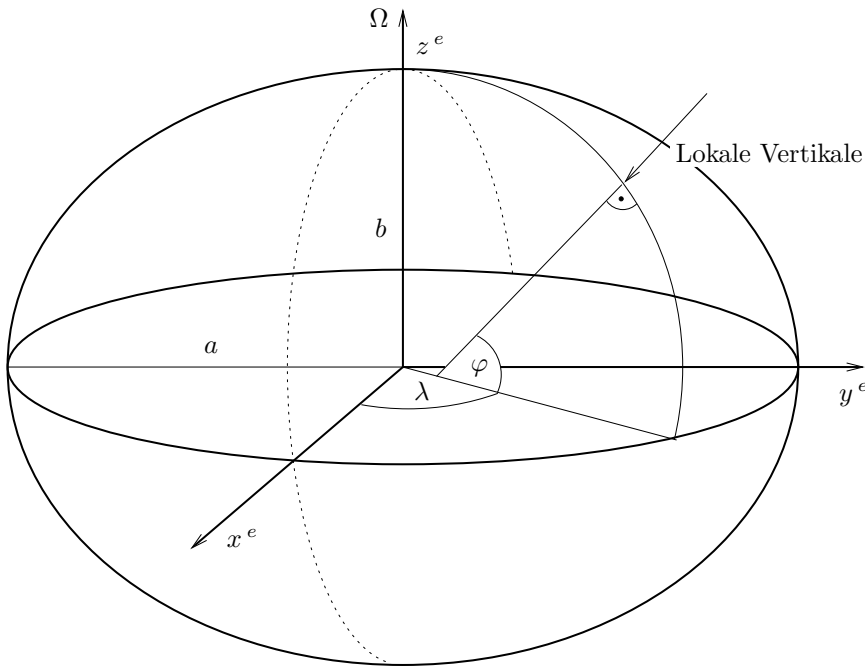
- Die Achsen des **körperfesten Koordinatensystems (b-frame)** sind fest in Bezug zum Fahrzeug und weisen in Fahrzeuglängsrichtung ( $x^b$ ), nach rechts ( $y^b$ ) und nach unten ( $z^b$ ). Der Ursprung befindet sich im Fahrzeug. Sind die sensitiven Achsen der Inertialsensoren exakt orthogonal ausgerichtet, fallen diese mit den Achsen des körperfesten Koordinatensystems zusammen. Die Messwerte einer IMU fallen daher in Koordinaten dieses Koordinatensystems an.
- Der Ursprung des **Inertialkoordinatensystems (i-frame)** befindet sich im Mittelpunkt des Rotationsellipsoids, der die Erdgestalt annähert. Die Koordinatenachsen sind fest in Bezug zu den Fixsternen. Die  $z^i$ -Achse des Inertialkoordinatensystems fällt mit der Rotationsachse der Erde zusammen, die  $x^i$ - und  $y^i$ -Achse liegen in der Äquatorebene. Eine IMU misst Beschleunigungen und Drehraten des körperfesten Koordinatensystems bezüglich des Inertialkoordinatensystems.
- Das **erdfeste Koordinatensystem (e-frame)** besitzt den selben Ursprung wie das Inertialkoordinatensystem. Die Koordinatenachsen sind fest im Bezug zur Erde, wobei die  $z^e$ -Achse mit der  $z^i$ -Achse zusammenfällt. Die  $x^e$ -Achse ist bestimmt durch die Schnittgerade von Äquatorebene und der Ebene des Nullmeridians. Das erdfeste Koordinatensystem rotiert bezüglich des Inertialkoordinatensystems um die  $z^e$ -Achse mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$ . Dieses erdfeste Koordinatensystem wird auch als earth centered, earth fixed (ECEF) Koordinatensystem bezeichnet.



**Abbildung 3.1:** Koordinatensysteme für die erdnahe Navigation.

- Der Ursprung des **Navigationskoordinatensystems (n-frame)** fällt mit dem Ursprung des körperfesten Koordinatensystems zusammen. Die  $x^n$ - und  $y^n$ -Achse weisen in Nord- bzw. Ostrichtung und liegen in der Tangentialebene an den Erdellipsoid. Die  $z^n$ -Achse weist nach unten und ist parallel zur Schwerebeschleunigung, die sich aus der Summe von Gravitation und erdrotationsbedingter Zentripetalbeschleunigung ergibt. Einzelne Komponenten eines Vektors in Koordinaten des Navigationskoordinatensystems werden mit n, e und d (north, east, down) indiziert.

Für die Fahrzeugposition – also die Position des Ursprungs des n-frames und b-frames – ist lediglich eine Angabe bezüglich des erdfesten Koordinatensystems sinnvoll. Diese kann anhand von Breitengrad  $\varphi$ , Längengrad  $\lambda$  und Höhe  $h$  (häufig LLH für latitude, longitude, height) bezüglich des Erdellipsoids oder bezüglich der Achsen des e-frames erfolgen. Um hierbei eine eindeutige Zuordnung zwischen ECEF-Koordinaten und Breitengrad und Höhe zu erhalten, muss ein Erdmodell definiert werden.



**Abbildung 3.2:** Erdellipsoid

### 3.1.1 WGS84-Erdmodell

Die Form der Erde lässt sich in erster Näherung als ein Rotationsellipsoid modellieren. Die Summe aus Zentripetalkraft aufgrund der Erdrotation und Massenanziehungskraft der Erde steht an jedem Punkt des Rotationsellipsoids senkrecht auf der dortigen Tangentialebene, ist also parallel zur lokalen Vertikalen. Anschaulich lässt sich das dadurch erklären, dass diese Kräfte im Laufe der Zeit die Gestalt der Erde geformt haben. Dadurch haben Schwerebeschleunigungsmodelle im Navigationskoordinatensystem eine besonders einfache Darstellung, da lediglich die  $z$ -Komponente der Schwerebeschleunigung von null verschieden ist. Im englischen Sprachgebrauch bezeichnet *gravitation* die Beschleunigung aufgrund der Massenanziehung der Erde, die Summe aus Zentripetalbeschleunigung und Beschleunigung aufgrund der Massenanziehung der Erde wird *gravity* genannt. Im Deutschen entspricht sowohl Gravitation als auch Schwerkraft dem englischen *gravitation*, die Schwerebeschleunigung entspricht dem englischen Ausdruck *gravity*. Ein gängiges, wenn auch nicht besonders genaues Schwerebeschleunigungsmodell

**Tabelle 3.1:** Parameter des Erdmodells WGS84

| Bezeichnung                         | Symbol   | Wert  |
|-------------------------------------|----------|---|
| Große Halbachse des Ellipsoids:     | $a$      | 6378137.0 m   |
| Kleine Halbachse des Ellipsoids:    | $b$      | $a(1 - f) = 6356752.3142$ m                           |
| Abflachung des Ellipsoids:          | $f$      | $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{298.257223563}$             |
| Exzentrizität des Ellipsoids:       | $e$      | $\sqrt{f(2 - f)} = 0.0818191908426$                   |
| Durchschnittlicher Krümmungsradius: | $R_0$    | $\sqrt{R_e R_n}$                                      |
| Nord-Süd-Krümmungsradius            | $R_n$    | $a \frac{1-e^2}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$        |
| Ost-West-Krümmungsradius            | $R_e$    | $\frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}$               |
| Erddrehrate:                        | $\Omega$ | $7.292115 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ |

dell ist gegeben durch<sup>3</sup>

$$\vec{g}_l^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_0 (1 + g_1 \sin^2 \varphi + g_2 \sin^2 2\varphi) \left( \frac{R_0}{R_0 - h} \right)^2 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

mit  $g_0 = 9.780318 \text{ m/s}^2$ ,  $g_1 = 5.3024 \times 10^{-3}$ ,  $g_2 = 5.9 \times 10^{-6}$ . Für hochgenaue Anwendungen müssen die in der Realität auftretenden Abweichungen der Schwerebeschleunigung von der lokalen Vertikalen jedoch berücksichtigt werden.

Die Parameter des Erdellipsoids nach dem 'World Geodetic System of 1984' (WGS84) sind in Tabelle 3.1 angegeben<sup>4</sup>.

Die geographische Breite  $\varphi$  eines Ortes ist der Winkel, unter dem die lokale Vertikale die Äquatorebene schneidet. Aufgrund der Elliptizität der Erde weist die lokale Vertikale und somit auch die Schwerebeschleunigung nicht zum Erdmittelpunkt. Diese Zusammenhänge sind in Abb. 3.2 verdeutlicht.

Die Höhe über dem Erdellipsoid wird im Folgenden stets negativ angegeben. Diese Konvention wird häufig gewählt, da eine Bewegung nach oben weg vom Erdellipsoid in Richtung Weltall in negativer Richtung der vertikalen Achse des Navigationskoordinatensystems erfolgt. Eine weitere, gebräuchliche Höhenangabe anstelle der Höhe über dem Erdellipsoid ist die Höhe über dem Geoid, was vereinfacht gesagt der Höhe über dem Meeresspiegel entspricht. Der Geoid soll im weiteren keine Rolle spielen.

<sup>3</sup>Die Höhe geht hier mit negativem Vorzeichen ein, da die Höhe nach Unten positiv gezählt wird.

<sup>4</sup>Gerüchtweise ist die Jahreszahl 1984 der einzige Parameter, der seitdem nicht geändert wurde.

### 3.1.2 Transformationen

Um LLH-Positionsangaben und ECEF-Positionsangaben ineinander umrechnen zu können, sind entsprechende Transformationsformeln nötig. Diese werden im Folgenden angegeben.

#### LLH → ECEF

Die Umrechnung von Breitengrad, Längengrad und Höhe in ECEF-Koordinaten ist nach [26] gegeben durch

$$N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin(\varphi)^2}} \quad (3.2)$$

$$x = (N - h) \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\lambda) \quad (3.3)$$

$$y = (N - h) \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\lambda) \quad (3.4)$$

$$z = (N \cdot (1 - e^2) - h) \cdot \sin(\varphi) . \quad (3.5)$$

#### ECEF → LLH

Um eine Transformationsvorschrift zu erhalten, die eine Umrechnung von ECEF-Koordinaten in Breitengrad, Längengrad und Höhe erlaubt, müssen prinzipiell nur die Gl. (3.2)–(3.5) nach den gesuchten Größen aufgelöst werden. Aufgrund der Nichtlinearität dieser Gleichungen ist das jedoch durchaus anspruchsvoll. In [52], [65] und [26] findet man folgende Lösung:

$$p = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.6)$$

$$E^2 = a^2 - b^2 \quad (3.7)$$

$$F = 54b^2z^2 \quad (3.8)$$

$$G = p^2 + (1 - e^2)z^2 - e^2E^2 \quad (3.9)$$

$$c = \frac{e^4 F p^2}{G^3} \quad (3.10)$$

$$s = \left(1 + c + \sqrt{c^2 + 2c}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.11)$$

$$P = \frac{F}{3\left(s + \frac{1}{s} + 1\right)^2 G^2} \quad (3.12)$$

$$Q = \sqrt{1 + 2e^4 P} \quad (3.13)$$

$$r_0 = -\frac{Pe^2p}{1+Q} + \sqrt{\frac{1}{2}a^2 \left(1 + \frac{1}{Q}\right) - \frac{P(1-e^2)z^2}{Q(1+Q)} - \frac{1}{2}Pp^2} \quad (3.14)$$

$$U = \sqrt{(p - e^2r_0)^2 + z^2} \quad (3.15)$$

$$V = \sqrt{(p - e^2r_0)^2 + (1 - e^2)z^2} \quad (3.16)$$

$$z_0 = \frac{b^2z}{aV} \quad (3.17)$$

$$e' = e\frac{a}{b} \quad (3.18)$$

$$\varphi = \arctan \frac{z + (e')^2z_0}{p} \quad (3.19)$$

$$\lambda = \arctan 2(y, x) \quad (3.20)$$

$$h = U \left( \frac{b^2}{aV} - 1 \right) \quad (3.21)$$

In [26] wird zusätzlich noch eine wesentlich einfachere Näherungslösung angegeben, die bis zum Low Earth Orbit<sup>5</sup> Gültigkeit besitzt:

$$N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin(\varphi)^2}} \quad (3.22)$$

$$p = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.23)$$

$$\theta = \arctan \left( \frac{za}{pb} \right) \quad (3.24)$$

$$(e')^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \quad (3.25)$$

$$\varphi = \arctan \left( \frac{z + (e')^2b \sin^3 \theta}{p - e^2a \cos^3 \theta} \right) \quad (3.26)$$

$$\lambda = \arctan 2(y, x) \quad (3.27)$$

$$h = \frac{p}{\cos \varphi} - N(\varphi) \quad (3.28)$$

Alternativ zu diesen geschlossenen Transformationsformeln können Breitengrad und Höhe auch iterativ bestimmt werden, dies soll hier jedoch nicht näher betrachtet werden.

Während Positionsangaben wenig Raum für Mehrdeutigkeiten und Unklarheiten lassen, kann das bei anderen Größen wie Geschwindigkeiten oder Drehraten nur durch eine exakte Nomenklatur erreicht werden.

---

<sup>5</sup>Der Low Earth Orbit reicht von ca. 200 km bis 2000 km Höhe.

### 3.1.3 Nomenklatur

Zur eindeutigen Bezeichnung von Geschwindigkeiten  $\vec{v}$ , Beschleunigungen  $\vec{a}$  und Drehraten  $\vec{\omega}$  werden drei Indizes benötigt, die beispielhaft anhand des Geschwindigkeitsvektors

$$\vec{v}_{eb}^n$$

eingeführt werden sollen: Der obere Index gibt an, in Koordinaten welchen Koordinatensystems die Größe gegeben ist. Bei diesem Beispiel steht der obere Index  $n$  für Navigationskoordinatensystem, die so bezeichnete Geschwindigkeit ist also in den Koordinatenrichtungen Norden, Osten und Unten angegeben. Die beiden unteren Indizes geben an, dass es sich um die Geschwindigkeit des körperfesten Koordinatensystems (Index  $b$  für body) bezüglich des erdfesten Koordinatensystems (Index  $e$ ) handelt.

Auf Grundlage dieser Nomenklatur können eine Reihe hilfreicher Rechenregeln angegeben werden. Diese werden hier anhand von konkreten Beispielen eingeführt, diese Rechenregeln gelten jedoch in der selben Art und Weise auch für beliebige andere Koordinatensysteme.

Für Geschwindigkeiten  $\vec{v}$  gilt

$$\vec{v}_{eb}^n = -\vec{v}_{be}^n, \quad (3.29)$$

ebenso für Drehraten  $\vec{\omega}$ , die auch verkettet werden können:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_{eb}^n &= -\vec{\omega}_{be}^n \\ \vec{\omega}_{eb}^n &= \vec{\omega}_{ei}^n + \vec{\omega}_{ib}^n. \end{aligned}$$

Mit Hilfe einer schiefsymmetrischen Matrix (engl. skew symmetric matrix) kann das Kreuzprodukt zweier Vektoren als Matrix-Vektor-Multiplikation dargestellt werden. Gegeben sind zwei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Dann gilt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \mathbf{A} \vec{b} \quad (3.31)$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Die kreuzproduktbildende Matrix wird mit dem fettgedruckten Großbuchstaben des zugehörigen Vektors bezeichnet. Alternativ sind auch folgende Schreibweisen üblich:

$$\mathbf{A} = [\vec{a} \times] = \text{skew}(\vec{a}) \quad (3.33)$$



Für die kreuzproduktbildenden Matrizen von Drehraten sind die bisher vorgestellten Rechenregeln gültig:

$$\mathbf{\Omega}_{eb}^n = [\vec{\omega}_{eb}^n \times] \quad (3.34)$$

$$\mathbf{\Omega}_{eb}^n = -\mathbf{\Omega}_{be}^n \quad (3.35)$$

$$\mathbf{\Omega}_{eb}^n = \mathbf{\Omega}_{ei}^n + \mathbf{\Omega}_{ib}^n \quad (3.36)$$

Die Umrechnung eines Vektors in ein anderes Koordinatensystem kann mit Hilfe der Richtungskosinusmatrix erfolgen, siehe hierzu auch Abschnitt 3.2.3.

Für die Transformation von Vektoren gilt

$$\vec{\omega}_{ei}^n = \mathbf{C}_b^n \cdot \vec{\omega}_{ei}^b, \quad (3.37)$$

wohingegen kreuzproduktbildende Matrizen von Vektoren wie folgt transformiert werden müssen:

$$\mathbf{\Omega}_{ei}^n = \mathbf{C}_b^n \cdot \mathbf{\Omega}_{ei}^b \cdot \mathbf{C}_n^b \quad (3.38)$$

Dies gilt auch für die Umrechnung beliebiger Matrizen: In Koordinaten des körperfesten Koordinatensystems sei mit einer beliebigen Matrix  $\mathbf{A}^b$  der Zusammenhang

$$\vec{y}^b = \mathbf{A}^b \cdot \vec{x}^b \quad (3.39)$$

gegeben. Durch Einsetzen der Transformationsgleichungen für die Vektoren  $\vec{x}^b, \vec{y}^b$  findet man

$$\mathbf{C}_n^b \vec{y}^n = \mathbf{A}^b \cdot \mathbf{C}_n^b \vec{x}^n \quad (3.40)$$

$$\vec{y}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{A}^b \mathbf{C}_n^b \vec{x}^n. \quad (3.41)$$

Da der Gl. (3.39) entsprechende Zusammenhang in Koordinaten des Navigationskoordinatensystems

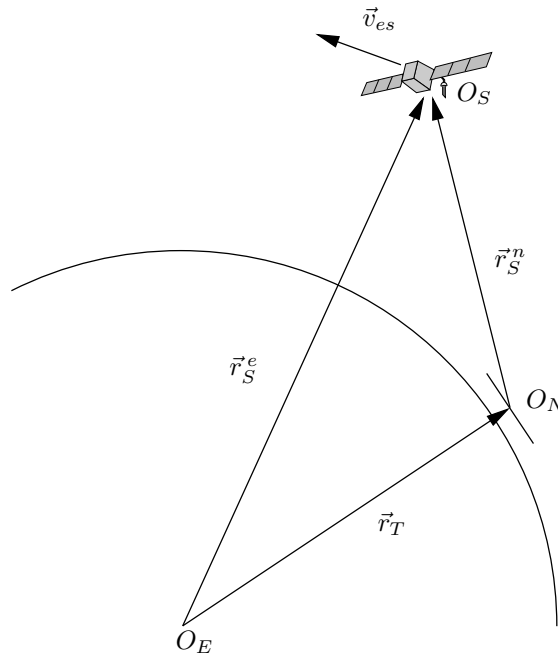
$$\vec{y}^n = \mathbf{A}^n \cdot \vec{x}^n \quad (3.42)$$

lauten muss, findet man durch Koeffizientenvergleich mit Gl. (3.41) für die Transformation der Matrix  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{A}^b \mathbf{C}_n^b. \quad (3.43)$$

Bei der Richtungskosinusmatrix handelt es sich um eine orthonormale Matrix, ihre Inverse ist gleich der Transponierten. Man kann daher schreiben:

$$\mathbf{C}_b^n = \mathbf{C}_n^{b,-1} = \mathbf{C}_n^{b,T} \quad (3.44)$$



**Abbildung 3.3:** Transformation von Vektoren.

Auch eine Verkettung von Richtungskosinusmatrizen, die manchmal auch kurz als Dreh- oder Rotationsmatrizen bezeichnet werden, ist zulässig:

$$\mathbf{C}_b^n = \mathbf{C}_e^n \mathbf{C}_b^e \quad (3.45)$$

$$\mathbf{C}_e^n \mathbf{C}_e^{n,T} = \mathbf{C}_e^n \mathbf{C}_n^e = \mathbf{C}_n^n = \mathbf{I} \quad (3.46)$$

Richtungskosinusmatrizen sind nicht die einzige Möglichkeit, die Lage zweier Koordinatensysteme zueinander zu beschreiben.

## 3.2 Lagedarstellungen

Um einen Vektor von einem Koordinatensystem in ein anderes umrechnen zu können, muss zwischen zwei Fällen unterschieden werden:

1. Es handelt sich um einen Vektor, der vom Ursprung des Koordinatensystems zu einem festen Punkt im Raum weisen soll. Fallen nun die Ursprünge der beiden beteiligten Koordinatensysteme nicht zusammen, ändert sich auch der Fußpunkt des

Vektors. Die Transformation in ein anderes Koordinatensystem kann daher nicht durch eine bloße Rotation erfolgen, vielmehr muss die Translation des Vektorfußpunktes berücksichtigt werden. Ein Beispiel hierfür wäre der Ortsvektor  $\vec{r}_S^e$  zur Position eines Satelliten, der im ECEF-Koordinatensystem vom Erdmittelpunkt  $O_E$  zum Satelliten weist, siehe Abb. 3.3. Im Navigationskoordinatensystem weist der entsprechende Vektor  $\vec{r}_S^n$  nun aber von der Fahrzeugposition, also dem Ursprung des Navigationskoordinatensystems  $O_N$  zum Satelliten, besitzt also einen anderen Fußpunkt, man erhält

$$\vec{r}_S^n = \mathbf{C}_e^n (\vec{r}_S^e - \vec{r}_T^e) . \quad (3.47)$$

Für den Sonderfall, dass zwar ein Ursprungsvektor zu einem festen Punkt im Raum gemeint ist, die Ursprünge der beteiligten Koordinatensysteme jedoch zusammenfallen, gilt  $\vec{r}_T = \vec{0}$  und die Umrechnung erfolgt durch eine reine Rotation. Ein Beispiel hierfür wäre der Ortsvektor zu einem Satelliten, der von Koordinaten des Inertialkoordinatensystems in ECEF-Koordinaten umgerechnet werden soll:

$$\vec{r}_S^e = \mathbf{C}_i^e \vec{r}_S^i \quad (3.48)$$

2. Der Vektor beschreibt eine Richtung im Raum und eine bestimmte Länge. Hier erfolgt die Transformation in ein anderes Koordinatensystem durch eine reine Rotation, auch wenn die Ursprünge der Koordinatensysteme nicht zusammenfallen. Ein Beispiel hierfür wäre der Vektor der Relativgeschwindigkeit von Satellit und Erde  $\vec{v}_{es}^e$ , der von ECEF-Koordinaten ins Navigationskoordinatensystem umgerechnet werden soll:

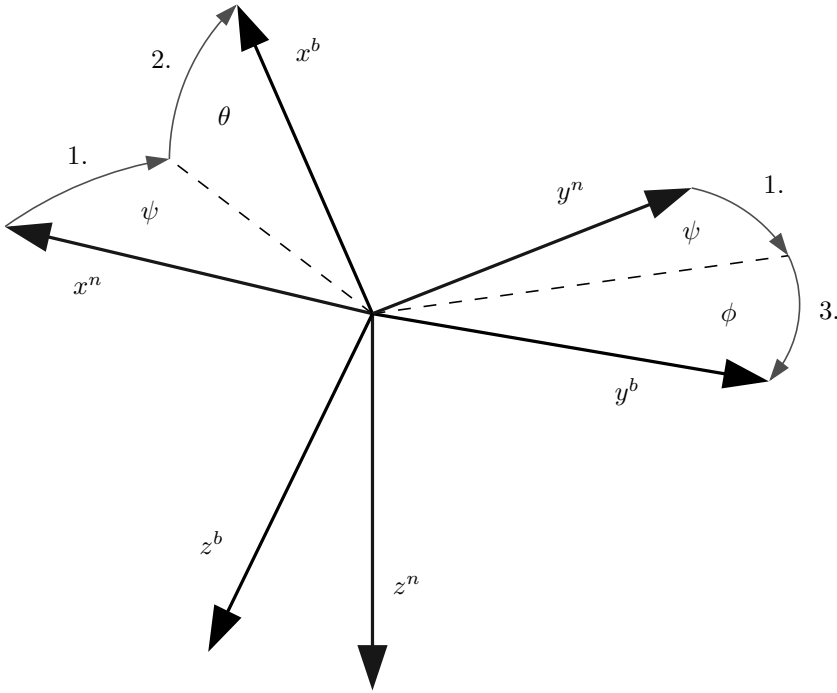
$$\vec{v}_{es}^n = \mathbf{C}_e^n \vec{v}_{es}^e \quad (3.49)$$

Dabei ist es unerheblich, ob das Navigationskoordinatensystem bezüglich des erdfesten Koordinatensystems bewegt ist: Der Geschwindigkeitsvektor wird durch die Rotation nur auf andere Koordinatenachsen bezogen, beschreibt aber auch im Navigationskoordinatensystem noch die Geschwindigkeit des Satelliten bezüglich des erdfesten Koordinatensystems.

Im Folgenden wird die Lage zweier Koordinatensysteme betrachtet. Gemeint ist hierbei, wie das eine Koordinatensystem rotiert werden müsste, um seine Achsen parallel zu den Achsen des anderen Koordinatensystems auszurichten. Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit werden für diese Betrachtungen das Navigationskoordinatensystem und das körperfeste Koordinatensystem gewählt. Die Lage der Koordinatensysteme kann durch Eulerwinkel, eine Richtungskosinusmatrix, einen Orientierungsvektor oder ein Quaternion beschrieben werden.

### 3.2.1 Eulerwinkel

Durch die drei Eulerwinkel roll, pitch und yaw werden drei Drehungen beschrieben, die nacheinander ausgeführt das Navigationskoordinatensystem in das körperfeste Koordinatensystem überführen. Hierbei beschreibt der yaw-Winkel  $\psi$ , der auch als Azimuth



**Abbildung 3.4:** Eulerwinkel.

bezeichnet wird, die erste Drehung um die z-Achse des Navigationskoordinatensystems, also um die lokale Vertikale. Anschließend wird um die neue y-Achse des rotierten Koordinatensystems um den pitch-Winkel  $\theta$  gedreht. In der deutschsprachigen Literatur wird der pitch-Winkel manchmal auch als Nickwinkel bezeichnet. Die letzte Drehung um den roll-Winkel  $\phi$  erfolgt schließlich um die neue x-Achse, die sich nach Drehung um yaw und pitch ergeben hat. Diese drei Drehungen sind in Abb. 3.4 veranschaulicht.

Die Richtungskosinusmatrix  $\mathbf{C}_b^n$  kann als Funktion der Eulerwinkel angegeben werden

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{pmatrix} c\theta c\psi & -c\theta s\psi + s\theta s\theta c\psi & s\theta s\psi + c\theta s\theta c\psi \\ c\theta s\psi & c\theta c\psi + s\theta s\theta s\psi & -s\theta c\psi + c\theta s\theta s\psi \\ -s\theta & s\theta c\theta & c\theta c\theta \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

hierbei bezeichnet  $c x = \cos x$ ,  $s x = \sin x$ . Eine Herleitung dieses Zusammenhangs ist in [117] zu finden.

Umgekehrt können die Eulerwinkel auch als Funktionen der Koeffizienten der Rich-

tungskosinusmatrix dargestellt werden:

$$\phi = \arctan2(c_{32}, c_{33}) \quad (3.51)$$

$$\theta = \arcsin(-c_{31}) \quad (3.52)$$

$$\psi = \arctan2(c_{21}, c_{11}) \quad (3.53)$$

Die zeitliche Änderung der Eulerwinkel aufgrund von Drehraten  $\vec{\omega}_{nb}^b$  wird durch die Differentialgleichungen

$$\dot{\phi} = (\omega_{nb,y}^b \sin \phi + \omega_{nb,z}^b \cos \phi) \tan \theta + \omega_{nb,x}^b \quad (3.54)$$

$$\dot{\theta} = \omega_{nb,y}^b \cos \phi - \omega_{nb,z}^b \sin \phi \quad (3.55)$$

$$\dot{\psi} = (\omega_{nb,y}^b \sin \phi + \omega_{nb,z}^b \cos \phi) / \cos \theta \quad (3.56)$$

beschrieben, eine Herleitung ist ebenfalls in [117] zu finden.

Eulerwinkel sind vor allem aufgrund ihrer Anschaulichkeit attraktiv. Nachteilig ist jedoch, dass bei  $\pm 90$  Grad pitch Singularitäten auftreten: In Gl. (3.56) erfolgt hier eine Division durch Null. Auch die Berechnung von roll und yaw aus Komponenten der Richtungskosinusmatrix anhand von Gl. (3.51) und Gl. (3.53) scheitert. Diese Singularitäten sind wie folgt erklärbar: Der yaw-Winkel beschreibt die Drehung um die lokale Vertikale. Wird anschließend um einen pitch-Winkel von  $\pm 90$  Grad gedreht, ist die durch den roll-Winkel beschriebene Drehung ebenfalls eine Drehung um die lokale Vertikale, die Eulerwinkel sind in diesem Fall daher nicht eindeutig. Diese Mehrdeutigkeit ist die Ursache für die Singularitäten in den Eulerwinkel-Differentialgleichungen. Interessanterweise tritt dieses Problem unvermeidlich auch bei Plattform-Systemen auf und wird als gimbal-lock bezeichnet.

### 3.2.2 Orientierungsvektor und Quaternion

Die Lage zweier Koordinatensysteme kann anhand des Orientierungsvektors  $\vec{\sigma}$  beschrieben werden. Der Orientierungsvektor legt dabei diejenige Achse im Raum fest, um die gedreht werden muss, um mit einer einzigen Drehung die beiden Koordinatensysteme ineinander zu überführen. Die Länge des Orientierungsvektors gibt dabei den Winkel an, um den gedreht werden muss. Dabei gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten: Beschreibt der Orientierungsvektor

$$\vec{\sigma}_1 = (\sigma_{1,x} \ \sigma_{1,y} \ \sigma_{1,z})^T \quad (3.57)$$

mit der Länge  $\sigma_1 = |\vec{\sigma}|$  die Lage zweier Koordinatensysteme, so beschreibt der Orientierungsvektor

$$\vec{\sigma}_2 = -\frac{\vec{\sigma}_1}{\sigma_1} (2\pi - \sigma_1) \quad (3.58)$$

die selbe Situation. Hintergrund hierbei ist, dass man sowohl durch eine Rechtsdrehung um den Winkel  $\sigma_1$  als auch durch eine Linksdrehung um den Winkel  $2\pi - \sigma_1$  die Koordinatensysteme ineinander überführen kann.

Um die Änderung des Orientierungsvektors in Abhängigkeit von Drehraten  $\vec{\omega}_{nb}^b$  zu erfassen, muss die Bortzsche Orientierungsvektordifferentialgleichung

$$\dot{\vec{\sigma}} = \vec{\omega}_{nb}^b + \frac{1}{2}\vec{\sigma} \times \vec{\omega}_{nb}^b + \frac{1}{\sigma^2} \left( 1 - \frac{\sigma \sin(\sigma)}{2(1 - \cos \sigma)} \right) \vec{\sigma} \times (\vec{\sigma} \times \vec{\omega}_{nb}^b) \quad (3.59)$$

gelöst werden. Diese wird in Abschnitt 3.3.1 bei der Entwicklung der Strapdown-Rechnung eine zentrale Rolle spielen. Die Herleitung dieser Gleichung ist vergleichsweise umfangreich, siehe hierzu [16].

Der Orientierungsvektor wird meist vorteilhaft als auf die Länge  $|\mathbf{q}| = 1$  normiertes Quaternion gespeichert:

$$\mathbf{q}_b^n = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\sigma/2) \\ (\sigma_x/\sigma) \sin(\sigma/2) \\ (\sigma_y/\sigma) \sin(\sigma/2) \\ (\sigma_z/\sigma) \sin(\sigma/2) \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

Bildet man die Quaternionen zu den Orientierungsvektoren Gl. (3.57) und (3.58), so findet man

$$\mathbf{q}_2 = -\mathbf{q}_1. \quad (3.61)$$

Die Lage zweier Koordinatensysteme wird also sowohl durch  $\mathbf{q}$  als auch durch  $-\mathbf{q}$  beschrieben, im einen Fall entspricht dies einer Überführung des einen Koordinatensystems in das andere über eine Rechtsdrehung, im anderen Fall über eine Linksdrehung.

Wie bei Richtungskosinusmatrizen ist auch mit Quaternionen eine Verkettung von Drehungen möglich:

$$\mathbf{q}_b^n = \mathbf{q}_e^n \bullet \mathbf{q}_b^e \quad (3.62)$$

Die dafür benötigte Quaternionenmultiplikation lässt sich für zwei Quaternionen  $\mathbf{q}_1(a, b, c, d)$ ,  $\mathbf{q}_2(e, f, g, h)$  als Matrix-Vektor-Multiplikation darstellen:

$$\vec{q}_1 \bullet \vec{q}_2 = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

Die entsprechende inverse Transformation zum Quaternion  $\mathbf{q}_b^n$  erhält man durch Einsetzen des negierten Orientierungsvektors in Gl. (3.60):

$$\mathbf{q}_n^b = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ -c \\ -d \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

Das Quaternion kann auch direkt zur Transformation eines Vektors in ein anderes Koordinatensystem genutzt werden:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vec{x}^n \end{pmatrix} = \mathbf{q}_b^n \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{x}^b \end{pmatrix} \bullet \mathbf{q}_n^b \quad (3.65)$$

Alternativ hierzu kann eine solche Transformation auch realisiert werden, indem zunächst aus dem Quaternion eine Richtungskosinusmatrix berechnet wird und dann der Vektor mit Hilfe dieser Richtungskosinusmatrix umgerechnet wird. Der dafür benötigte Zusammenhang zwischen Quaternion und Richtungskosinusmatrix ist gegeben durch

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{pmatrix} (a^2 + b^2 - c^2 - d^2) & 2(bc - ad) & 2(bd + ac) \\ 2(bc + ad) & (a^2 - b^2 + c^2 - d^2) & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(cd + ab) & (a^2 - b^2 - c^2 + d^2) \end{pmatrix}. \quad (3.66)$$

Umgekehrt ist bei der Berechnung eines Quaternions aus einer Richtungskosinusmatrix zwischen vier verschiedenen Möglichkeiten zu wählen:

### 1. Fall.

$$\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{1 + c_{11} + c_{22} + c_{33}} \quad (3.67)$$

$$a = \zeta \quad (3.68)$$

$$b = \frac{1}{4\zeta} (c_{32} - c_{23}) \quad (3.69)$$

$$c = \frac{1}{4\zeta} (c_{13} - c_{31}) \quad (3.70)$$

$$d = \frac{1}{4\zeta} (c_{21} - c_{12}) \quad (3.71)$$

### 2. Fall.

$$\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{1 + c_{11} - c_{22} - c_{33}} \quad (3.72)$$

$$a = \frac{1}{4\zeta} (c_{32} - c_{23}) \quad (3.73)$$

$$b = \zeta \quad (3.74)$$

$$c = \frac{1}{4\zeta} (c_{21} + c_{12}) \quad (3.75)$$

$$d = \frac{1}{4\zeta} (c_{13} + c_{31}) \quad (3.76)$$

**3. Fall.**

$$\zeta = \frac{1}{2}\sqrt{1 - c_{11} + c_{22} - c_{33}} \quad (3.77)$$

$$a = \frac{1}{4\zeta}(c_{13} - c_{31}) \quad (3.78)$$

$$b = \frac{1}{4\zeta}(c_{21} + c_{12}) \quad (3.79)$$

$$c = \zeta \quad (3.80)$$

$$d = \frac{1}{4\zeta}(c_{32} + c_{23}) \quad (3.81)$$

**4. Fall.**

$$\zeta = \frac{1}{2}\sqrt{1 - c_{11} - c_{22} + c_{33}} \quad (3.82)$$

$$a = \frac{1}{4\zeta}(c_{21} - c_{12}) \quad (3.83)$$

$$b = \frac{1}{4\zeta}(c_{13} + c_{31}) \quad (3.84)$$

$$c = \frac{1}{4\zeta}(c_{32} + c_{23}) \quad (3.85)$$

$$d = \zeta \quad (3.86)$$

Prinzipiell kann jede dieser vier Varianten gewählt werden, solange darauf geachtet wird, dass keine Division durch Null erfolgt und  $\zeta$  reell ist. So erhält man beispielsweise für die Eulerwinkel  $\phi = 180^\circ, \theta = 0^\circ, \psi = 90^\circ$  die Richtungskosinusmatrix

$$\mathbf{C}_b^n(180^\circ, 0^\circ, 90^\circ) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.87)$$

Hierbei würde die Berechnung des Quaternions nach 1. und nach 4. aufgrund einer Division durch Null scheitern. In [111] wird vorgeschlagen, diejenige Variante zu wählen, bei der der Koeffizient  $\zeta$  am größten ist.

Bei der Berechnung des Quaternions aus Eulerwinkeln sind solche Fallunterscheidungen nicht notwendig, der Zusammenhang ist gegeben durch

$$a = \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \quad (3.88)$$

$$b = \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \quad (3.89)$$

$$c = \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \quad (3.90)$$

$$d = \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2}. \quad (3.91)$$



Umgekehrt lassen sich Eulerwinkel aus einem Quaternion am einfachsten berechnen, indem zunächst mit Gl. (3.66) die zum Quaternion gehörende Richtungskosinusmatrix gebildet wird und anschließend die Gl. (3.51)–(3.53) ausgewertet werden.

Die Änderung des Quaternions aufgrund von Drehraten  $\vec{\omega}_{nb}^b$  wird durch eine Differentialgleichung beschrieben, die im Folgenden hergeleitet werden soll. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  sei die Lage der Koordinatensysteme durch das Quaternion  $\mathbf{q}_b^n(0)$  gegeben. Vom Zeitpunkt  $t = 0$  bis zum Zeitpunkt  $t = \tau$  erfolgt eine Rotation, die durch den Orientierungsvektor  $\vec{\sigma} = \vec{\omega}_{nb}^b \tau$  beschrieben wird. Man kann daher schreiben:

$$\mathbf{q}_b^n(\tau) = \mathbf{q}_b^n(0) \bullet \begin{pmatrix} \cos \frac{|\vec{\omega}_{nb}^b| \tau}{2} \\ \frac{\vec{\omega}_{nb}^b}{|\vec{\omega}_{nb}^b|} \sin \frac{|\vec{\omega}_{nb}^b| \tau}{2} \end{pmatrix} \quad (3.92)$$

Die zeitliche Ableitung von Gl. (3.92) ergibt sich zu

$$\dot{\mathbf{q}}_b^n(\tau) = \mathbf{q}_b^n(0) \bullet \begin{pmatrix} -\frac{|\vec{\omega}_{nb}^b|}{2} \sin \frac{|\vec{\omega}_{nb}^b| \tau}{2} \\ \frac{\vec{\omega}_{nb}^b}{2} \cos \frac{|\vec{\omega}_{nb}^b| \tau}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.93)$$

Um zur gesuchten Differentialgleichung zu gelangen, muss der Grenzwert  $\tau \rightarrow 0$  gebildet werden, man erhält

$$\dot{\mathbf{q}}_b^n(0) = \mathbf{q}_b^n(0) \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\vec{\omega}_{nb}^b}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.94)$$

Diese Differentialgleichung kann in die übliche Darstellung der Quaternionendifferentialgleichung umgeschrieben werden:

$$\dot{\mathbf{q}}_b^n = \frac{1}{2} \mathbf{q}_b^n \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\omega}_{nb}^b \end{pmatrix} \quad (3.95)$$

Häufig wird das Quaternion auch mit Hilfe von imaginären Einheiten  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  dargestellt, für die die folgenden Multiplikationsregeln gelten:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = -1 \quad (3.96)$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \quad (3.97)$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \quad (3.98)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \quad (3.99)$$

Mit der Quaternionendarstellung

$$\mathbf{q} = a + \mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d \quad (3.100)$$

und obigen Multiplikationsregeln können dann ebenfalls Quaternionenmultiplikationen und Vektortransformationen durchgeführt werden. Dieser Formalismus wird jedoch im weiteren keine Rolle spielen.

Abschließend soll noch eine wichtige Eigenschaft des Orientierungsvektors hergeleitet werden. Anhand von Gl. (3.66) lässt sich zeigen, dass die Richtungskosinusmatrix einen Eigenvektor

$$\vec{z}_{\mathbf{C}_b^n} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}. \quad (3.101)$$

besitzt. Durch Vergleich mit Gl. (3.60) erkennt man, dass dieser Eigenvektor und der Orientierungsvektor parallel sind. Da der zum Eigenvektor gehörende Eigenwert 1 ist, kann man schreiben:

$$\mathbf{C}_b^n \vec{\sigma} = 1 \cdot \vec{\sigma} \quad (3.102)$$

Es stellt sich also nicht die Frage, in Koordinaten welchen Koordinatensystems der Orientierungsvektor angegeben wird, der Orientierungsvektor besitzt in beiden beteiligten Koordinatensystemen die gleichen Komponenten.

### 3.2.3 Richtungskosinusmatrix

Die Transformation eines Vektors in ein anderes Koordinatensystem mit Hilfe der Richtungskosinusmatrix wurde in den vorherigen Abschnitten bereits eingeführt. Von besonderer Bedeutung ist die Näherung der Richtungskosinusmatrix für kleine Drehungen, diese spielt z.B. bei der Schätzung von Lagefehlern mit einem Kalman-Filter eine zentrale Rolle.

Im Folgenden sollen kleine Drehungen betrachtet werden, so dass für die Drehwinkel die Näherungen

$$\sin \delta \approx \delta \quad (3.103)$$

$$\cos \delta \approx 1 \quad (3.104)$$

$$\delta \cdot \delta \approx 0 \quad (3.105)$$

gerechtfertigt sind.

Für das Quaternion erhält man unter diesen Voraussetzungen aus Gl. (3.60)

$$\mathbf{q}_b^n = \begin{pmatrix} \cos(\sigma/2) \\ (\sigma_x/\sigma) \sin(\sigma/2) \\ (\sigma_y/\sigma) \sin(\sigma/2) \\ (\sigma_z/\sigma) \sin(\sigma/2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_x/2 \\ \sigma_y/2 \\ \sigma_z/2 \end{pmatrix}. \quad (3.106)$$

Berechnet man hierzu die Richtungskosinusmatrix anhand von Gl. (3.66), erhält man mit der Näherung (3.105)

$$\mathbf{C}_b^n \approx \begin{pmatrix} 1 & -\sigma_z & \sigma_y \\ \sigma_z & 1 & -\sigma_x \\ -\sigma_y & \sigma_x & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} + [\vec{\sigma} \times]. \quad (3.107)$$

Für kleine Eulerwinkel  $\phi, \theta, \psi$  erhält man anhand von Gl. (3.50) in analoger Weise

$$\mathbf{C}_b^n \approx \begin{pmatrix} 1 & -\psi & \theta \\ \psi & 1 & -\phi \\ -\theta & \phi & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} + \left[ \begin{pmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} \times \right]. \quad (3.108)$$

In dieser Näherung für kleine Winkel besteht offensichtlich kein Unterschied mehr zwischen den Komponenten des Orientierungsvektors und den Eulerwinkeln.

Auch für die Richtungskosinusmatrix lässt sich eine Differentialgleichung angeben. Hierzu wird wieder davon ausgegangen, dass vom Zeitpunkt  $t = 0$  bis zum Zeitpunkt  $t = \tau$  eine Rotation stattfindet, die sich durch den Orientierungsvektor  $\vec{\sigma} = \vec{\omega}_{nb}^b \tau$  beschreiben lässt. Damit erhält man den Zusammenhang

$$\mathbf{C}_b^n(\tau) = \mathbf{C}_b^n(0) (\mathbf{I} + [\vec{\sigma} \times]) . \quad (3.109)$$

Durch zeitliche Ableitung und bilden des Grenzwertes  $\tau \rightarrow 0$  erhält man die gesuchte Richtungskosinusmatrixdifferentialgleichung

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n [\vec{\omega}_{nb}^b \times] . \quad (3.110)$$

Alternative Herleitungen über den Differenzenquotienten der Richtungskosinusmatrix sind in [117] und [57] zu finden.

## 3.3 Strapdown-Rechnung

Unter einem Strapdown-Algorithmus versteht man eine Rechenvorschrift, die angibt, wie anhand von gemessenen Beschleunigungen und Drehraten aus der Navigationslösung zum vorherigen Zeitschritt die Navigationslösung zum aktuellen Zeitschritt berechnet wird. Die Strapdown-Rechnung lässt sich grob in drei Schritte einteilen: Propagation der Lage durch Integration der Drehraten, Propagation der Geschwindigkeit durch Integration der Beschleunigungen und Propagation der Position durch Integration der Geschwindigkeit. Ein Blockdiagramm eines Strapdown-Algorithmus ist in Abb. 3.5 dargestellt.

Häufig liefern IMUs anstelle von Beschleunigungen und Drehraten Geschwindigkeits- und Winkelinkremente. Da in der hier dargestellten Strapdown-Rechnung Beschleunigungen und Drehraten immer als Produkt mit der Zeitschrittweite auftreten, spielt das für die folgenden Betrachtungen keine Rolle.

### 3.3.1 Lage

Die Änderung der Lage kann durch Lösung der Bortzschen Orientierungsvektordifferentialgleichung 3.59 ermittelt werden<sup>6</sup>. Da eine IMU immer nur zu diskreten Zeitpunkten

<sup>6</sup>Die Quaternionen-Differentialgleichung Gl. (3.95), bei der es sich um eine exakte, d.h. näherungs-freie Gleichung handelt, eignet sich zur Propagation der Lage ebenfalls hervorragend.

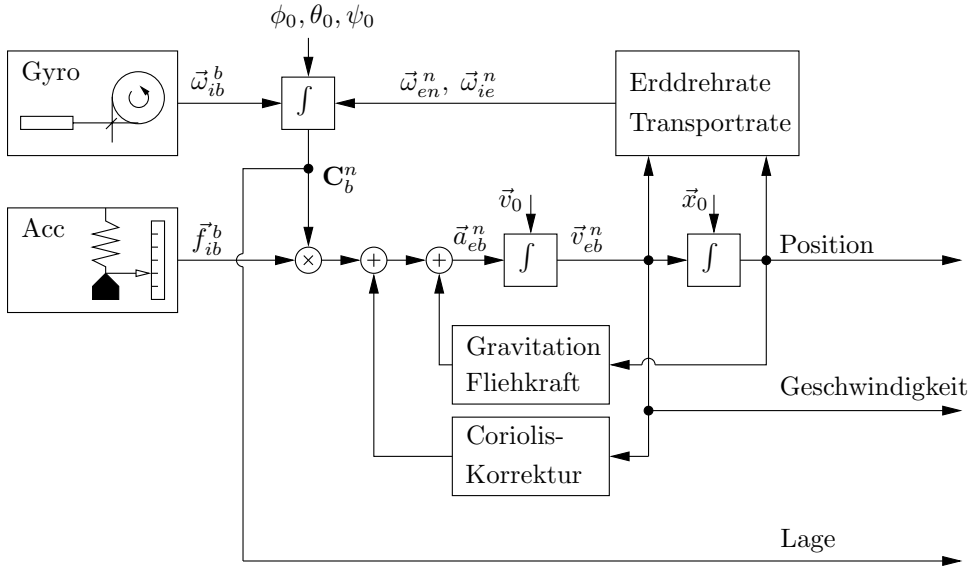


Abbildung 3.5: Strapdown-Algorithmus.

Messwerte liefern kann und eine Lageberechnung immer zeitdiskret in einem Navigationscomputer implementiert werden muss, ist nur eine numerische, näherungsweise Lösung dieser Differentialgleichung möglich. Um hierbei eine Auswertung trigonometrischer Funktionen zu vermeiden, kann der trigonometrische Funktionen enthaltende Term der Orientierungsvektordifferentialgleichung für kleine Drehungen mit Hilfe einer Reihenentwicklung als konstanter Faktor angenähert werden:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sigma^2} \left( 1 - \frac{\sigma \sin(\sigma)}{2(1 - \cos \sigma)} \right) &= \frac{1}{\sigma^2} \left( 1 - \frac{\sigma(\sigma - \frac{1}{3!}\sigma^3 + \dots)}{2(1 - (1 - \frac{1}{2!}\sigma^2 + \frac{1}{4!}\sigma^4 - \dots))} \right) \\
 &\approx \frac{1}{\sigma^2} \left( \frac{2(\frac{1}{2!}\sigma^2 - \frac{1}{4!}\sigma^4) - (\sigma^2 - \frac{1}{3!}\sigma^4)}{2(\frac{1}{2!}\sigma^2 - \frac{1}{4!}\sigma^4)} \right) \\
 &= \frac{1}{\sigma^2} \left( \frac{-\frac{1}{12}\sigma^4 + \frac{1}{6}\sigma^4}{\sigma^2 - \frac{1}{12}\sigma^4} \right) \approx \frac{1}{\sigma^2} \left( \frac{-\frac{1}{12}\sigma^4 + \frac{1}{6}\sigma^4}{\sigma^2} \right) \\
 &= \frac{1}{12}
 \end{aligned} \tag{3.111}$$

Man erhält die vereinfachte Differentialgleichung

$$\dot{\vec{\sigma}} \approx \vec{\omega}_{nb}^b + \frac{1}{2}\vec{\sigma} \times \vec{\omega}_{nb}^b + \frac{1}{12}\vec{\sigma} \times (\vec{\sigma} \times \vec{\omega}_{nb}^b) . \tag{3.112}$$

Es lässt sich leicht überlegen, dass der zweite Kreuzprodukt-Term einen kleineren Beitrag liefert als der erste, so dass dieser zweite Term häufig komplett vernachlässigt wird:

$$\dot{\vec{\sigma}} \approx \vec{\omega}_{nb}^b + \frac{1}{2} \vec{\sigma} \times \vec{\omega}_{nb}^b \quad (3.113)$$

Voraussetzung für diese Vereinfachungen ist, dass die Lageberechnung mit einer ausreichend hohen Update-Rate ausgeführt wird. Dadurch wird sichergestellt, dass die in einem Zeitschritt stattfindenden Drehungen klein sind. Das ist sowieso notwendig, da Drehungen nicht kommutativ sind: Werden Drehungen verkettet, so hängt die finale Orientierung nicht nur von den einzelnen Drehungen, sondern auch von der Reihenfolge der Drehungen ab. Eine IMU kann aber niemals Informationen über die Reihenfolge der in einem Zeitintervall aufgetretenen Drehungen liefern, die zeitliche Abfolge der in dem Zeitintervall aufgetretenen Drehbewegungen kann daher prinzipiell nicht berücksichtigt werden. Je größer die Update-Rate der Lage-Berechnung ist, desto kleiner ist der aus der Nichtkommutativität von Drehungen resultierende Fehler.

Die Lageänderung im Zeitintervall von  $t_{k-1}$  bis  $t_k$  ist anhand von Gl. 3.113 näherungsweise gegeben durch

$$\Delta \vec{\sigma}_k \approx \int_{t_{k-1}}^{t_k} \vec{\omega}_{nb}^b dt + \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left( \int_{t_{k-1}}^t \vec{\omega}_{nb}^b d\tau \right) \times \vec{\omega}_{nb}^b dt. \quad (3.114)$$

Der Kreuzprodukt-Term wird als Coning-Term bezeichnet. Wenn sich die Richtung des Vektors  $\vec{\omega}_{nb}^b$  im betrachteten Zeitintervall nicht ändert, verschwindet dieser Term und man erhält

$$\Delta \vec{\sigma}_k \approx \vec{\omega}_{nb,k}^b \cdot T. \quad (3.115)$$

Ist die Änderung des Orientierungsvektors berechnet, muss das Lagequaternion entsprechend angepasst werden. Hierzu berechnet man ein Quaternion  $\mathbf{r}_k$ , das die im betrachteten Zeitintervall erfolgte Drehbewegung repräsentiert:

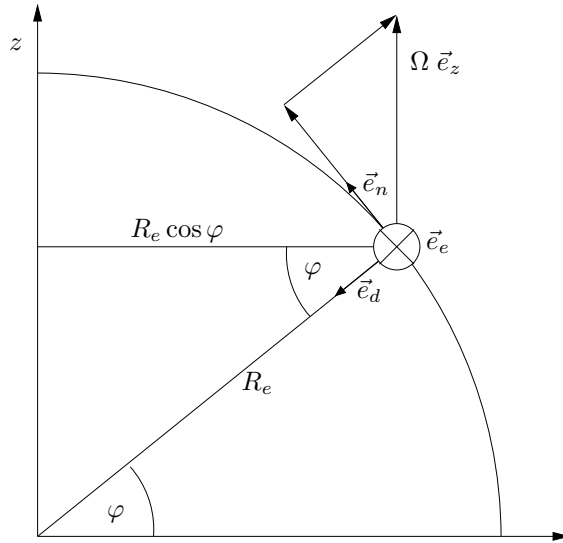
$$\mathbf{r}_k = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Delta \sigma_k}{2} \\ \frac{\Delta \vec{\sigma}_k}{\Delta \sigma_k} \sin \frac{\Delta \sigma_k}{2} \end{pmatrix}, \quad \Delta \sigma_k = |\Delta \vec{\sigma}_k| \quad (3.116)$$

Bei der Implementierung im Navigationscomputer muss darauf geachtet werden, dass beim Aufbau des Quaternions  $\mathbf{r}_k$  für  $\Delta \sigma_k = 0$  keine Division durch Null erfolgt. Dies kann zum Beispiel erreicht werden, indem die Reihenentwicklungen der trigonometrischen Funktionen verwendet werden:

$$\mathbf{r}_k = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2! \cdot 2^2} \Delta \sigma_k^2 + \frac{1}{4! \cdot 2^4} \Delta \sigma_k^4 - \frac{1}{6! \cdot 2^6} \Delta \sigma_k^6 + \dots \\ \Delta \vec{\sigma}_k \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3! \cdot 2^3} \Delta \sigma_k^2 + \frac{1}{5! \cdot 2^5} \Delta \sigma_k^4 - \frac{1}{7! \cdot 2^7} \Delta \sigma_k^6 + \dots \right) \end{pmatrix} \quad (3.117)$$

Das aktuelle Quaternion erhält man schließlich durch

$$\mathbf{q}_{b,k}^n = \mathbf{q}_{b,k-1}^n \mathbf{r}_k. \quad (3.118)$$



**Abbildung 3.6:** Geometrische Zusammenhänge zur Bestimmung von Erddrehrate und Transportrate.

In der gewählten Formulierung der Lageberechnung wird die Drehrate  $\vec{\omega}_{nb}^b$  benötigt. Diese kann aus der von der IMU gelieferten Drehrate  $\vec{\omega}_{ib}^b$  wie folgt berechnet werden:

$$\vec{\omega}_{nb}^b = \vec{\omega}_{ib}^b - \mathbf{C}_b^{n,T} (\vec{\omega}_{ie}^n + \vec{\omega}_{en}^n) \quad (3.119)$$

Die dafür benötigte Drehrate  $\vec{\omega}_{ie}^n$  ist die Erddrehrate in Koordinaten des Navigationskoordinatensystems. Sie hängt nur vom Breitengrad  $\varphi$  ab und ist gegeben durch

$$\vec{\omega}_{ie}^n = \begin{pmatrix} \Omega \cos \varphi \\ 0 \\ -\Omega \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (3.120)$$

siehe Abb. 3.6. Die Drehrate  $\vec{\omega}_{en}^n$  wird als Transportrate bezeichnet. Diese resultiert daraus, dass sich bei einer Bewegung gegenüber der Erde in Nord- oder Ostrichtung aufgrund der Erdkrümmung das Navigationskoordinatensystem drehen muss, damit die Unten-Koordinatenachse immer in Richtung der lokalen Vertikalen weist. Folglich hängt die Transportrate von der Geschwindigkeit des Fahrzeugs ab. Bezeichnet man mit  $\omega_{v_n}$  und  $\omega_{v_e}$  die Drehraten aufgrund von Geschwindigkeitskomponenten in Nord-

und Ostrichtung, findet man mit Abb. 3.6 die Transportrate zu

$$\vec{\omega}_{en}^n = \begin{pmatrix} \omega_{v_e} \cos \varphi \\ \omega_{v_n} \\ -\omega_{v_e} \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_e}{(R_e - h) \cos \varphi} \cos \varphi \\ \omega_{v_n} \\ -\frac{v_e}{(R_e - h) \cos \varphi} \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_{eb,e}^n}{R_e - h} \\ -\frac{v_{eb,n}^n}{R_e - h} \\ -\frac{v_{eb,e}^n \tan \varphi}{R_e - h} \end{pmatrix}. \quad (3.121)$$

Alternativ zur hier beschriebenen Formulierung können Algorithmen zur Lageberechnung auch mit der Drehrate  $\vec{\omega}_{ib}^b$  formuliert werden, der Einfluss von Erddrehrate und Transportrate wird dann an anderer Stelle, meist mit einer deutlich geringeren Update-Rate, berücksichtigt.

Abschließend soll noch der Fall betrachtet werden, dass sich in Gl. (3.114) die Richtung des Vektors  $\vec{\omega}_{nb}^b$  im betrachteten Zeitintervall ändert und der Coning-Term einen signifikanten Beitrag zur Änderung des Orientierungsvektors liefert. Hier ist ein besonderes Bewegungsmuster hervorzuheben, Coning Motion, das z.B. aufgrund von Vibrationen vorliegen kann. Als Coning Motion werden Drehbewegungen bezeichnet, bei denen phasenverschobene, oszillatorische Drehbewegungen um zwei orthogonale Achsen vorliegen. Prinzipiell kann einem beschleunigten Anwachsen von Lagefehlern mit der Zeit bei Coning Motion aufgrund der Nichtkommutativität von Drehungen nur durch eine hohe Datenrate der IMU begegnet werden. In der Praxis kann der Fall auftreten, dass die IMU zwar eine ausreichend hohe Datenrate aufweist, die Rechenlast durch eine vollständige Neuberechnung der Lage mit dieser hohen Datenrate jedoch vermieden werden muss. Dies kann mit Coning-Kompensationsalgorithmen erreicht werden, deren Grundidee im Folgenden skizziert werden soll.

### Coning-Kompensation

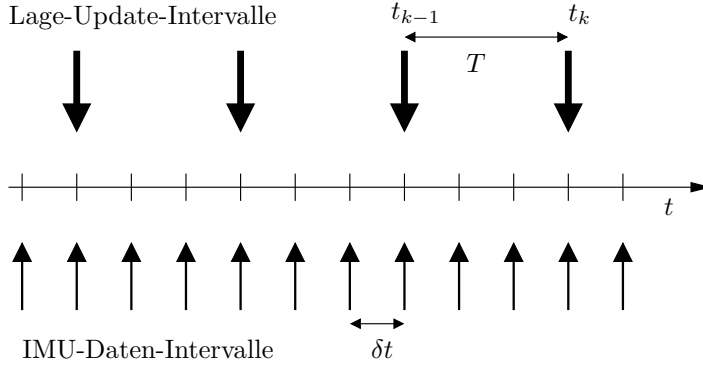
Ziel eines Coning-Kompensationsalgorithmus ist, den Coning-Term mit den zwischen zwei Lage-Updates zur Verfügung stehenden Messdaten bestmöglich zu approximieren. Lage-Updates sollen nach wie vor im Zeitabstand  $T = t_k - t_{k-1}$  erfolgen, IMU-Daten stehen im Zeitabstand  $\delta t$  zur Verfügung, siehe Abb. 3.7.

Zur Herleitung eines Coning-Kompensationsalgorithmus wird Coning Motion gemäß

$$\vec{\omega}_{nb}^b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi f \beta \cos(2\pi f t) \\ 2\pi f \beta \sin(2\pi f t) \end{pmatrix} \quad (3.122)$$

betrachtet. Da die Drehrate  $\vec{\omega}_{nb}^b(t)$  in diesem Fall analytisch gegeben ist, kann der Coning-Term

$$\Delta \vec{\sigma}_c = \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left( \int_{t_{k-1}}^t \vec{\omega}_{nb}^b dt \right) \times \vec{\omega}_{nb}^b dt \quad (3.123)$$



**Abbildung 3.7:** IMU-Daten- und Lage-Update-Intervalle.

exakt berechnet werden. Man erhält

$$\begin{aligned}
 \Delta \vec{\sigma}_c &= \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \begin{pmatrix} 0 \\ \beta(\sin(2\pi ft) - \sin(2\pi ft_{k-1})) \\ -\beta(\cos(2\pi ft) - \cos(2\pi ft_{k-1})) \end{pmatrix} \times \vec{\omega}_{nb}^b(t) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \begin{pmatrix} 2\pi f \beta^2 (1 - \cos(2\pi f(t - t_{k-1}))) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
 \Delta \vec{\sigma}_c &= \pi f \beta^2 [T - \frac{1}{2\pi f} \sin(2\pi fT)] \vec{e}_x .
 \end{aligned} \tag{3.124}$$

Dieser Coning-Term soll mit Hilfe der IMU-Daten approximiert werden. Innerhalb eines Lage-Update-Intervalls sollen  $N$  IMU-Daten-Intervalle vorliegen, die Änderung des Orientierungsvektors innerhalb des IMU-Daten-Intervalls  $i$  ist mit  $\delta \vec{\sigma}_i$  bezeichnet. Eine Approximation des Coning-Terms aus Gl. (3.123) lässt sich dann allgemein in der Form

$$\Delta \hat{\vec{\sigma}}_c = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N k_{ij} \delta \vec{\sigma}_i \times \delta \vec{\sigma}_j \tag{3.125}$$

darstellen. Diese Approximation kann vereinfacht werden. Nach durchaus umfangreicher Rechnung, siehe hierzu auch [54], findet man

$$\delta \vec{\sigma}_i \times \delta \vec{\sigma}_j = \beta^2 [2 \sin((j-i)\lambda) - \sin((j-i+1)\lambda) - \sin((j-i-1)\lambda)] \vec{e}_x . \tag{3.126}$$

Hierbei wurde  $\lambda = 2\pi f \delta t$  gesetzt. Da in diesem Kreuzprodukt nur Terme mit der Differenz  $j-i$  auftreten, ist nur die zeitliche Differenz von  $\delta \vec{\sigma}_i$  und  $\delta \vec{\sigma}_j$  relevant, nicht



jedoch der absolute Zeitpunkt innerhalb des Lage-Update-Intervalls. Damit vereinfacht sich Gl. (3.125) zu

$$\Delta \hat{\vec{\sigma}}_c = \left( \sum_{i=1}^{N-1} k_i \delta \vec{\sigma}_i \right) \times \delta \vec{\sigma}_N . \quad (3.127)$$

Die Koeffizienten  $k_i$  werden bestimmt, indem man die Reihenentwicklung des analytisch berechneten Coning-Terms (3.124) mit der Reihenentwicklung der Approximation (3.127) vergleicht.

Beispielhaft soll der Fall betrachtet werden, dass innerhalb eines Lage-Update-Intervalls drei IMU-Daten-Intervalle vorliegen:

$$\Delta \hat{\vec{\sigma}}_c = [k_1 \delta \vec{\sigma}_1 + k_2 \delta \vec{\sigma}_2] \times \delta \vec{\sigma}_3 \quad (3.128)$$

Mit Gl. (3.126) erhält man so

$$\Delta \hat{\vec{\sigma}}_c = k_1 \beta^2 [2 \sin(2\lambda) - \sin(\lambda) - \sin(3\lambda)] \vec{e}_x + k_2 \beta^2 [2 \sin(\lambda) - \sin(2\lambda)] \vec{e}_x . \quad (3.129)$$

Ersetzt man die Sinus-Funktionen durch ihre Reihenentwicklung,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} , \quad (3.130)$$

so ergibt sich nach Zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\vec{\sigma}}_c = \beta^2 \left[ k_1 \left( 2\lambda^3 - \frac{3}{2}\lambda^5 + \frac{161}{420}\lambda^7 - \dots \right) \right. \\ \left. + k_2 \left( \lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda^5 + \frac{63}{2520}\lambda^7 - \dots \right) \right] \vec{e}_x \end{aligned} \quad (3.131)$$

Ebenfalls durch Einsetzen der Reihenentwicklung der Sinus-Funktion in den exakten Coning-Term (3.124) erhält man mit  $2\pi fT = 3\lambda$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{\sigma}_c &= \pi f \beta^2 \left[ T - \frac{1}{2\pi f} \left( 2\pi fT - \frac{(2\pi fT)^3}{3!} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(2\pi fT)^5}{5!} - \frac{(2\pi fT)^7}{7!} + \dots \right) \right] \vec{e}_x \\ &= \frac{\beta^2}{2} \left[ \frac{(3\lambda)^3}{3!} - \frac{(3\lambda)^5}{5!} + \frac{(3\lambda)^7}{7!} - \dots \right] . \end{aligned} \quad (3.132)$$

Vergleicht man nun in (3.131) und (3.132) die Terme der dritten und fünften Potenzen von  $\lambda$ , so ergeben sich zwei Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten  $k_1$  und  $k_2$ ,

$$2k_1\lambda^3 + k_2\lambda^3 \stackrel{!}{=} \frac{(3\lambda)^3}{2 \cdot 3!} \quad (3.133)$$

$$-k_1\frac{3}{2}\lambda^5 - k_2\frac{1}{4}\lambda^5 \stackrel{!}{=} \frac{(3\lambda)^5}{2 \cdot 5!}, \quad (3.134)$$

man erhält schließlich

$$k_1 = \frac{9}{20}, \quad k_2 = \frac{27}{20}. \quad (3.135)$$

Der Coning-Term lässt sich also für den Fall, dass drei IMU-Daten-Intervalle pro Lage-Update-Intervall vorliegen, anhand von

$$\Delta \hat{\vec{\sigma}}_c = \left[ \frac{9}{20} \delta \vec{\sigma}_1 + \frac{27}{20} \delta \vec{\sigma}_2 \right] \times \delta \vec{\sigma}_3 \quad (3.136)$$

approximieren, wobei  $\delta \vec{\sigma}_i$  das Orientierungsvektorkrement des  $i$ -ten IMU-Daten-Intervalls bezeichnet.

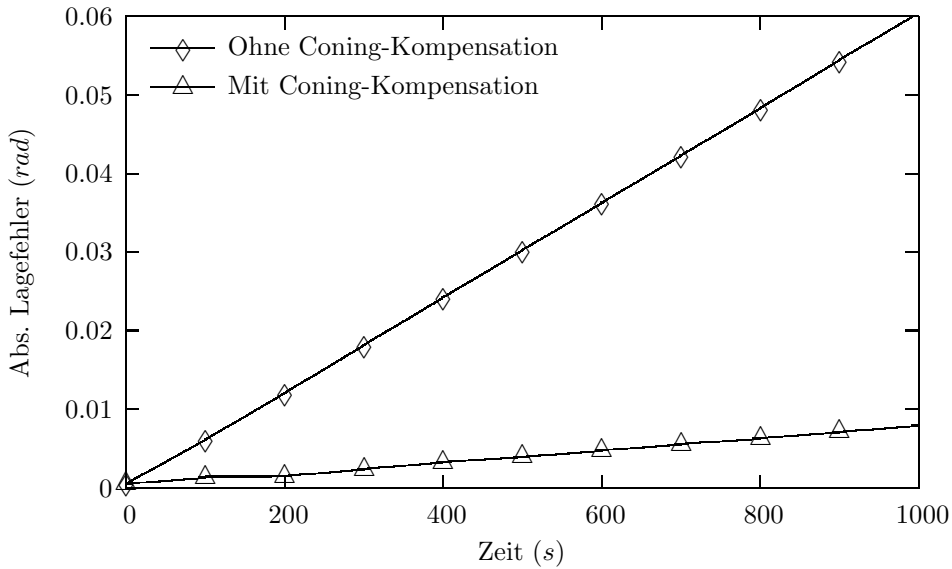
Der Nutzen eines solchen Coning-Kompensationsalgorithmus wird in Abb. 3.8 verdeutlicht. In diesem Beispiel wurde eine IMU-Datenrate von 1000 Hz angenommen, es lag Coning Motion mit einer Frequenz von  $f = 50$  Hz und  $\beta = 0.1^\circ$  vor. Abb. 3.8 zeigt nun die Lagefehler, die sich ergeben, wenn alle drei IMU-Daten-Intervalle eine Neuberechnung der Lage erfolgt. Im einen Fall wurde hierbei der Coning-Term vernachlässigt, im anderen Fall anhand von Gl. (3.136) approximiert. Als Referenz wurde die Lage verwendet, die sich bei einer Neuberechnung der Lage mit der vollen IMU-Datenrate ergibt, als Lagefehler wurde der rms-Wert der Eulerwinkel-Abweichungen angesetzt. Man erkennt, dass auch bei Verwendung des Coning-Kompensationsalgorithmus ein Anwachsen der Lagefehler mit der Zeit stattfindet, die Lagefehler wachsen jedoch ohne Verwendung eines solchen Algorithmus deutlich schneller an.

### 3.3.2 Geschwindigkeit

Die Formulierung der Strapdown-Rechnung in Koordinaten des Navigationskoordinatensystems hat Vorteile: Die Koordinatenrichtungen Norden, Osten und Unten sind intuitiv leicht zu fassen, außerdem resultieren vergleichsweise einfache Schwerebeschleunigungsmodelle. Andererseits handelt es sich beim Navigationssystem um kein Inertialsystem, so dass bei der Integration von Beschleunigungen Coriolis-Beschleunigung und Schwerebeschleunigung berücksichtigt werden müssen, um auf Geschwindigkeitsänderungen des Fahrzeugs schließen zu können. Daher soll zunächst die Differentialgleichung hergeleitet werden, die den Zusammenhang zwischen Beschleunigung und Geschwindigkeit im Navigationskoordinatensystem beschreibt.

Im Inertialkoordinatensystem gilt

$$\dot{\vec{v}}_{ib}^i = \vec{a}_{ib}^i = \vec{f}_{ib}^i + \vec{g}^i. \quad (3.137)$$



**Abbildung 3.8:** Coning-Kompensation.

Hierbei bezeichnen  $\vec{v}_{ib}^i$  und  $\vec{a}_{ib}^i$  die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Fahrzeugs bezüglich des Inertialkoordinatensystems,  $\vec{f}_{ib}^i$  ist die sog. specific force angegeben in Koordinaten des Inertialkoordinatensystems und  $\vec{g}^i$  ist die Beschleunigung aufgrund der Massenanziehung der Erde.

Die specific force in körperfesten Koordinaten,

$$\vec{f}_{ib}^b = \vec{a}_{ib}^b - \vec{g}^b, \quad (3.138)$$

ist gerade diejenige Größe, die von den Beschleunigungsmessern der IMU gemessen wird. Um auf die Beschleunigung des Fahrzeugs schließen zu können, muss die in den Messungen der Beschleunigungsmesser enthaltene, mitgemessene Beschleunigung aufgrund der Massenanziehung der Erde kompensiert werden.

Mit  $\vec{r}$  wird der Vektor vom Ursprung des Inertialkoordinatensystems zum Ursprung des Navigationskoordinatensystems bezeichnet. Diesen kann man vom Inertialkoordinatensystem ins erdfeste Koordinatensystem umrechnen:

$$\vec{r}^e = \mathbf{C}_i^e \vec{r}^i \quad (3.139)$$

Durch Differentiation nach der Zeit erhält man

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}^e &= \dot{\mathbf{C}}_i^e \vec{r}^i + \mathbf{C}_i^e \dot{\vec{r}}^i \\ \dot{\vec{r}}^e &= \mathbf{C}_i^e \left( \boldsymbol{\Omega}_{ei}^i \vec{r}^i + \dot{\vec{r}}^i \right) \\ \vec{v}_{eb}^e &= \mathbf{C}_i^e \left( \boldsymbol{\Omega}_{ei}^i \vec{r}^i + \vec{v}_{ib}^i \right). \end{aligned} \quad (3.140)$$

Hierbei wurde die Richtungskosinusmatrixdifferentialgleichung eingesetzt, siehe Gl. (3.110),  $\Omega_{ei}^i$  ist die kreuzproduktbildende Matrix der negativen Erddrehrate.

Multiplikation von links mit  $\mathbf{C}_e^n$  liefert

$$\begin{aligned}\vec{v}_{eb}^n &= \mathbf{C}_e^n \mathbf{C}_i^e (\Omega_{ei}^i \vec{r}^i + \vec{v}_{ib}^i) \\ \vec{v}_{eb}^n &= \mathbf{C}_i^n (\Omega_{ei}^i \vec{r}^i + \vec{v}_{ib}^i) .\end{aligned}\quad (3.141)$$

Diesen Zusammenhang kann man nach  $\vec{v}_{ib}^i$  auflösen,

$$\vec{v}_{ib}^i = \mathbf{C}_n^i \vec{v}_{eb}^n - \Omega_{ei}^i \vec{r}^i , \quad (3.142)$$

Differentiation nach der Zeit liefert

$$\begin{aligned}\dot{\vec{v}}_{ib}^i &= \mathbf{C}_n^i \left( \Omega_{in}^n \vec{v}_{eb}^n + \dot{\vec{v}}_{eb}^n \right) - \dot{\Omega}_{ei}^i \vec{r}^i - \Omega_{ei}^i \dot{\vec{r}}^i \\ \dot{\vec{v}}_{ib}^i &= \mathbf{C}_n^i \left( \Omega_{in}^n \vec{v}_{eb}^n + \dot{\vec{v}}_{eb}^n \right) + \dot{\Omega}_{ie}^i \vec{r}^i + \Omega_{ie}^i \dot{\vec{r}}^i .\end{aligned}\quad (3.143)$$

Durch Vergleich von Gl. (3.137) mit Gl. (3.143) findet man

$$\mathbf{C}_n^i \left( \Omega_{in}^n \vec{v}_{eb}^n + \dot{\vec{v}}_{eb}^n \right) + \dot{\Omega}_{ie}^i \vec{r}^i + \Omega_{ie}^i \dot{\vec{r}}^i = \vec{f}_{ib}^i + \vec{g}^i \quad (3.144)$$

und schließlich durch Multiplikation mit  $\mathbf{C}_i^n$

$$\Omega_{in}^n \vec{v}_{eb}^n + \dot{\vec{v}}_{eb}^n + \mathbf{C}_i^n \dot{\Omega}_{ie}^i \vec{r}^i + \mathbf{C}_i^n \Omega_{ie}^i \dot{\vec{r}}^i = \vec{f}_{ib}^n + \vec{g}^n . \quad (3.145)$$

Da  $\mathbf{C}_n^i \mathbf{C}_i^n = \mathbf{I}$  gilt, kann man dieses Matrizenprodukt einfügen, um die kreuzproduktbildenden Matrizen der Drehrate und ihrer Ableitung ins Navigationskoordinatensystem umzurechnen:

$$\begin{aligned}\Omega_{in}^n \vec{v}_{eb}^n + \dot{\vec{v}}_{eb}^n + \mathbf{C}_i^n \dot{\Omega}_{ie}^i \mathbf{C}_n^i \mathbf{C}_i^n \vec{r}^i + \mathbf{C}_i^n \Omega_{ie}^i \mathbf{C}_n^i \mathbf{C}_i^n \vec{v}_{ib}^i &= \vec{f}_{ib}^n + \vec{g}^n \\ \Omega_{in}^n \vec{v}_{eb}^n + \dot{\vec{v}}_{eb}^n + \dot{\Omega}_{ie}^i \mathbf{C}_i^n \vec{r}^i + \Omega_{ie}^i \mathbf{C}_i^n \vec{v}_{ib}^i &= \vec{f}_{ib}^n + \vec{g}^n\end{aligned}\quad (3.146)$$

Durch Einsetzen von (3.142) erhält man

$$\Omega_{in}^n \vec{v}_{eb}^n + \dot{\vec{v}}_{eb}^n + \dot{\Omega}_{ie}^i \vec{r}^i + \Omega_{ie}^i \mathbf{C}_i^n (\mathbf{C}_n^i \vec{v}_{eb}^n - \Omega_{ei}^i \vec{r}^i) = \vec{f}_{ib}^n + \vec{g}^n . \quad (3.147)$$

Auflösen nach  $\dot{\vec{v}}_{eb}^n$  liefert schließlich

$$\begin{aligned}\dot{\vec{v}}_{eb}^n &= \vec{f}_{ib}^n - \Omega_{in}^n \vec{v}_{eb}^n - \dot{\Omega}_{ie}^i \vec{r}^i - \Omega_{ie}^i \mathbf{C}_i^n (\mathbf{C}_n^i \vec{v}_{eb}^n - \Omega_{ei}^i \vec{r}^i) + \vec{g}^n \\ \dot{\vec{v}}_{eb}^n &= \vec{f}_{ib}^n - \Omega_{in}^n \vec{v}_{eb}^n - \dot{\Omega}_{ie}^i \vec{r}^i - \Omega_{ie}^i \vec{v}_{eb}^n + \Omega_{ie}^i \mathbf{C}_i^n \Omega_{ei}^i \vec{r}^i + \vec{g}^n .\end{aligned}\quad (3.148)$$

Dieser Ausdruck lässt sich durch erneutes Einfügen von  $\mathbf{C}_n^i \mathbf{C}_i^n$  und Zusammenfassen weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{v}}_{eb}^n &= \vec{f}_{ib}^n - \Omega_{in}^n \vec{v}_{eb}^n - \dot{\Omega}_{ie}^n \vec{r}^n - \Omega_{ie}^n \vec{v}_{eb}^n + \Omega_{ie}^n \mathbf{C}_i^n \Omega_{ei}^i \mathbf{C}_n^i \mathbf{C}_i^n \vec{r}^i + \vec{g}^n \\
 \dot{\vec{v}}_{eb}^n &= \vec{f}_{ib}^n - \Omega_{in}^n \vec{v}_{eb}^n - \dot{\Omega}_{ie}^n \vec{r}^n - \Omega_{ie}^n \vec{v}_{eb}^n + \Omega_{ie}^n \Omega_{ei}^n \mathbf{C}_i^n \vec{r}^i + \vec{g}^n \\
 \dot{\vec{v}}_{eb}^n &= \vec{f}_{ib}^n - \Omega_{in}^n \vec{v}_{eb}^n - \dot{\Omega}_{ie}^n \vec{r}^n - \Omega_{ie}^n \vec{v}_{eb}^n - \Omega_{ie}^n \Omega_{ie}^n \vec{r}^n + \vec{g}^n \\
 \dot{\vec{v}}_{eb}^n &= \vec{f}_{ib}^n - (\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n) \vec{v}_{eb}^n - \dot{\Omega}_{ie}^n \vec{r}^n - \Omega_{ie}^n \vec{v}_{eb}^n - \Omega_{ie}^n \Omega_{ie}^n \vec{r}^n + \vec{g}^n \\
 \dot{\vec{v}}_{eb}^n &= \vec{f}_{ib}^n - (2\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n) \vec{v}_{eb}^n - \dot{\Omega}_{ie}^n \vec{r}^n - \Omega_{ie}^n \Omega_{ie}^n \vec{r}^n + \vec{g}^n \quad (3.149)
 \end{aligned}$$

Bei  $\dot{\Omega}_{ie}^n \vec{r}^n$  handelt es sich um die Euler-Beschleunigung. Da die Erddrehrate als näherungsweise konstant angenommen werden kann, verschwindet dieser Term. Durch Übergang zur Darstellung ohne kreuzproduktbildende Matrizen und Zusammenfassen von Beschleunigung durch Massenanziehung und Zentrifugalbeschleunigung ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{v}}_{eb}^n &= \vec{f}_{ib}^n - (2\vec{\omega}_{ie}^n + \vec{\omega}_{en}^n) \times \vec{v}_{eb}^n + \vec{g}^n - \vec{\omega}_{ie}^n \times (\vec{\omega}_{ie}^n \times \vec{r}^n) \\
 \dot{\vec{v}}_{eb}^n &= \vec{f}_{ib}^n - (2\vec{\omega}_{ie}^n + \vec{\omega}_{en}^n) \times \vec{v}_{eb}^n + \vec{g}_l^n. \quad (3.150)
 \end{aligned}$$

Eine IMU misst die specific force  $\vec{f}_{ib}^b$ , so dass die gesuchte Differentialgleichung durch

$$\dot{\vec{v}}_{eb}^n = \mathbf{C}_b^n \vec{f}_{ib}^b - (2\vec{\omega}_{ie}^n + \vec{\omega}_{en}^n) \times \vec{v}_{eb}^n + \vec{g}_l^n \quad (3.151)$$

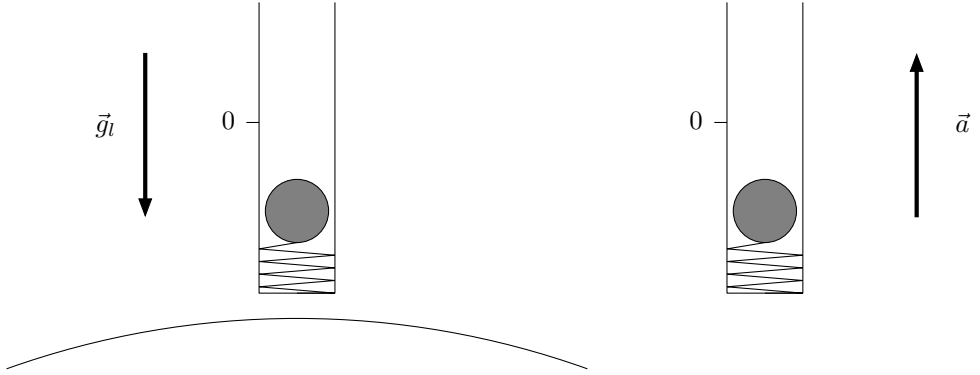
gegeben ist.

Bei der Kompensation der Schwerebeschleunigung fällt auf, dass diese addiert und nicht, wie man zunächst vermuten könnte, durch Subtraktion aus der gemessenen Beschleunigung herausgerechnet wird. Wie man anhand von Abb. 3.9 erkennt, misst eine IMU die Schwerebeschleunigung als eine scheinbare Beschleunigung nach oben, also entgegen der Koordinatenrichtung Unten. Die gemessene Schwerebeschleunigung ist demnach  $(0, 0, -g_l^n)^T$  und wird daher durch Addition von  $(0, 0, g_l^n)^T$  kompensiert.

Um die Geschwindigkeit des Fahrzeugs in der Zeit zu propagieren, wird die rechte Seite von Gl. (3.151) numerisch integriert. Während der Kreuzprodukt-Term und die Schwerebeschleunigung in der Regel als konstant im betrachteten Zeitintervall angenommen werden können, muss der Term  $\mathbf{C}_b^n \vec{a}_{ib}^b$  näher betrachtet werden. Problematisch hierbei ist, dass zur exakten Integration die Richtungskosinusmatrix als Funktion der Zeit bekannt sein müsste, diese aber von der Lageberechnung nur zu diskreten Zeitpunkten bestimmt werden kann. Die Herleitung einer geeigneten Approximation wird im Folgenden skizziert.

Es lässt sich durch Differentiation verifizieren, dass die Lösung der Richtungskosinusmatrixdifferentialgleichung (3.110) durch

$$\mathbf{C}_b^n(t) = \mathbf{C}_{b,k-1}^n \cdot e^{\int_{t_{k-1}}^t \Omega_{nb}^b d\tau} \quad (3.152)$$



**Abbildung 3.9:** Links: B.-Messer in Ruhe, im Schwerfeld der Erde. Rechts: B.-Messer nach oben beschleunigt, kein Schwerfeld.

gegeben ist. Zunächst werden die Größen  $\vec{\sigma}(t)$  und  $\delta\vec{v}$  gemäß

$$\delta\vec{\sigma}(t) = \int_{t_{k-1}}^t \vec{\omega}_{nb}^b dt \approx \vec{\omega}_{nb}^b (t - t_{k-1}) \quad (3.153)$$

$$\delta\vec{v} = \int_{t_{k-1}}^t \vec{f}_{ib}^b dt \approx \vec{f}_{ib}^b (t - t_{k-1}) \quad (3.154)$$

eingeführt, dies führt sofort auf die Zusammenhänge

$$\delta\vec{\sigma}(t_k) = \Delta\vec{\sigma}_k \quad (3.155)$$

$$\delta\dot{\vec{\sigma}}(t) = \vec{\omega}_{nb}^b \quad (3.156)$$

$$\delta\dot{\vec{v}} = \vec{f}_{ib}^b. \quad (3.157)$$

Mit Gl. (3.152) erhält man so

$$\begin{aligned} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{C}_b^n(t) \cdot \vec{f}_{ib}^b dt &= \mathbf{C}_{b,k-1}^n \cdot \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{\int_{t_{k-1}}^t \mathbf{\Omega}_{nb}^b d\tau} \cdot \vec{f}_{ib}^b dt \\ &\approx \mathbf{C}_{b,k-1}^n \cdot \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left( \mathbf{I} + \mathbf{\Omega}_{nb}^b (t - t_{k-1}) \right) \cdot \vec{f}_{ib}^b dt \\ &= \mathbf{C}_{b,k-1}^n \cdot \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left( \vec{f}_{ib}^b + \delta\vec{\sigma}(t) \times \vec{f}_{ib}^b \right) dt \end{aligned} \quad (3.158)$$

Um den Integranden Gl. (3.154) geeignet zerlegen zu können, sind einige Zwischenüberlegungen notwendig. Es gilt

$$\frac{d}{dt}(\delta\vec{\sigma} \times \delta\vec{v}) = \delta\dot{\vec{\sigma}} \times \delta\vec{v} + \delta\vec{\sigma} \times \delta\dot{\vec{v}} = -\delta\vec{v} \times \delta\dot{\vec{\sigma}} + \delta\vec{\sigma} \times \delta\dot{\vec{v}}, \quad (3.159)$$

Umstellen liefert

$$\delta\vec{\sigma} \times \delta\dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(\delta\vec{\sigma} \times \delta\vec{v}) + \delta\vec{v} \times \delta\dot{\vec{\sigma}}. \quad (3.160)$$

Desweiteren kann man schreiben

$$\delta\vec{\sigma} \times \delta\dot{\vec{v}} = \frac{1}{2}\delta\vec{\sigma} \times \delta\dot{\vec{v}} + \frac{1}{2}\delta\vec{\sigma} \times \delta\dot{\vec{v}}. \quad (3.161)$$

Setzt man nun Gl. (3.160) für einen der beiden Terme auf der rechten Seite von Gl. (3.161) ein, erhält man

$$\begin{aligned} \delta\vec{\sigma} \times \delta\dot{\vec{v}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}(\delta\vec{\sigma} \times \delta\vec{v}) + \delta\vec{v} \times \delta\dot{\vec{\sigma}}\right) + \frac{1}{2}\delta\vec{\sigma} \times \delta\dot{\vec{v}} \\ \delta\vec{\sigma} \times \vec{f}_{ib}^b &= \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}(\delta\vec{\sigma} \times \delta\vec{v})\right) + \frac{1}{2}\delta\vec{v} \times \vec{\omega}_{nb}^b + \frac{1}{2}\delta\vec{\sigma} \times \vec{f}_{ib}^b. \end{aligned} \quad (3.162)$$

Durch Substitution von Gl. (3.162) in Gl. (3.158) erhält man

$$\begin{aligned} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{C}_b^n(t) \cdot \vec{f}_{ib}^b dt &= \mathbf{C}_{b,k-1}^n \cdot \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[ \vec{f}_{ib}^b + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}(\delta\vec{\sigma} \times \delta\vec{v})\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\delta\vec{v} \times \vec{\omega}_{nb}^b + \frac{1}{2}\delta\vec{\sigma} \times \vec{f}_{ib}^b \right] dt \end{aligned} \quad (3.163)$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
\int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{C}_b^n(t) \cdot \vec{f}_{ib}^b dt &= \mathbf{C}_{b,k-1}^n \left[ \int_{t_{k-1}}^{t_k} \vec{f}_{ib}^b dt + \frac{1}{2} \Delta \vec{\sigma}_k \times \int_{t_{k-1}}^{t_k} \vec{f}_{ib}^b dt \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left( \delta \vec{\sigma} \times \vec{f}_{ib}^b - \vec{\omega}_{nb}^b \times \delta \vec{v} \right) dt \right] \\
&= \mathbf{C}_{b,k-1}^n \left[ \int_{t_{k-1}}^{t_k} \vec{f}_{ib}^b dt + \frac{1}{2} \Delta \vec{\sigma}_k \times \int_{t_{k-1}}^{t_k} \vec{f}_{ib}^b dt \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left( \int_{t_{k-1}}^t \vec{\omega}_{nb}^b d\tau \times \vec{f}_{ib}^b - \vec{\omega}_{nb}^b \times \int_{t_{k-1}}^t \vec{f}_{ib}^b d\tau \right) dt \right], \tag{3.164}
\end{aligned}$$

siehe hierzu auch [107]. Der zweite Summand in der eckigen Klammer wird als Rotationsterm bezeichnet, der letzte Summand ist der Sculling-Term. Der Sculling-Term verschwindet, wenn im betrachteten Zeitintervall konstante Drehraten und Beschleunigungen vorliegen. Andererseits kann insbesondere bei Sculling Motion dieser Term einen signifikanten Beitrag liefern. Unter Sculling Motion versteht man das Vorliegen rotatorischer und translatorischer Oszillationen bezüglich zweier orthogonaler Achsen. Für den Fall, dass die IMU in der Lage ist mit einer ausreichenden Datenrate Messwerte zur Verfügung zu stellen, die Berechnung einer neuen Fahrzeuggeschwindigkeit aber mit einer niedrigeren Taktrate erfolgen muss, sollten – analog zur Coning-Kompensation – Sculling-Kompensationsalgorithmen verwendet werden.

### Sculling-Kompensation

Zur Herleitung eines Sculling-Kompensationsalgorithmus wird wieder angenommen, dass IMU-Daten im Zeitabstand  $\delta t$  zur Verfügung stehen, Geschwindigkeits-Updates finden im Zeitabstand  $T = t_k - t_{k-1}$  statt. Das Bewegungsmuster Sculling Motion sei durch

$$\vec{a}_{ib}^b = \begin{pmatrix} 0 \\ A \sin(2\pi f t) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{\omega}_{nb}^b = \begin{pmatrix} 2\pi f \beta \cos(2\pi f t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.165}$$

gegeben. Anhand von Gl. (3.158) erkennt man, dass der Sculling-Kompensationsalgorithmus den Term

$$\Delta \vec{v}_{s+r} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \delta \vec{\sigma}(t) \times \vec{a}_{ib}^b dt \tag{3.166}$$

bestmöglich approximieren muss.



Als analytische, exakte Lösung findet man durch Einsetzen von (3.165):

$$\begin{aligned}\Delta \vec{v}_{s+r} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left( \int_{t_{k-1}}^t \vec{\omega}_{nb}^b dt \right) \times \vec{a}_{ib}^b dt \\ &= A\beta \left[ \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sin^2(2\pi f t) dt - \sin(2\pi f t_{k-1}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sin(2\pi f t) dt \right] \vec{e}_z \quad (3.167)\end{aligned}$$

Nach einiger Rechnung, siehe hierzu auch [55], erhält man als Mittelwert dieses Ausdrucks

$$\overline{\Delta \vec{v}_{s+r}} = \frac{A\beta}{4\pi f} [2\pi f T - \sin(2\pi f T)] \vec{e}_z. \quad (3.168)$$

Für die Approximation des Sculling- und Rotationsterms ersetzt man die Integrale der Rotations- und Sculling-Terme in Gl. (3.164) durch Summen und erhält so

$$\Delta \hat{\vec{v}}_{s+r} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \delta \vec{\sigma}_i \times \delta \vec{v}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N k_{ij} [\delta \vec{\sigma}_i \times \delta \vec{v}_j + \delta \vec{v}_i \times \delta \vec{\sigma}_j], \quad (3.169)$$

wobei der Faktor  $\frac{1}{2}$  den Koeffizienten  $k_{ij}$  zugeschlagen wurde. Erneut nach aufwändiger Rechnung erhält man mit  $\lambda = 2\pi f \delta t$  als Mittelwert der auftretenden Kreuzprodukte

$$\overline{\delta \vec{\sigma}_i \times \delta \vec{v}_{i+j}} = \overline{\delta \vec{v}_i \times \delta \vec{\sigma}_{i+j}} \quad (3.170)$$

$$= \left( \frac{A\beta}{4\pi f} \right) [2\sin(j\lambda) - \sin((j+1)\lambda) - \sin((j-1)\lambda)] \vec{e}_z. \quad (3.171)$$

Zusammen mit  $\overline{\delta \vec{\sigma}_i \times \delta \vec{v}_i} = 0$  lässt sich Gl. (3.169) daher vereinfachen zu

$$\overline{\Delta \hat{\vec{v}}_{s+r}} = \left[ \sum_{i=1}^{N-1} k_i \delta \vec{\sigma}_i \right] \times \delta \vec{v}_N + \left[ \sum_{i=1}^{N-1} k_i \delta \vec{v}_i \right] \times \delta \vec{\sigma}_N. \quad (3.172)$$

Die Koeffizienten  $k_i$  werden genau wie bei der Herleitung des Coning-Kompensationsalgorithmus bestimmt, indem die Reihenentwicklung der exakten Lösung Gl. (3.168) mit der Reihenentwicklung der Approximation Gl. (3.172) verglichen wird.

Auch hier soll exemplarisch der Fall betrachtet werden, dass innerhalb eines Geschwindigkeits-Update-Intervalls drei IMU-Daten-Intervalle vorliegen. Damit erhält man aus Gl. (3.172)

$$\begin{aligned}\overline{\Delta \hat{\vec{v}}_{s+r}} &= \frac{A\beta}{4\pi f} \left[ 2k_1 \left( 2\lambda^3 - \frac{3\lambda^5}{2} + \frac{161\lambda^7}{420} - \dots \right) \right. \\ &\quad \left. + 2k_2 \left( \lambda^3 - \frac{\lambda^5}{4} + \frac{63\lambda^7}{2520} - \dots \right) \right], \quad (3.173)\end{aligned}$$

aus Gl. (3.168) folgt mit  $2\pi fT = 3\lambda$

$$\overline{\Delta \vec{v}_{s+r}} = \frac{A\beta}{4\pi f} \left[ \frac{(3\lambda)^3}{6} - \frac{(3\lambda)^5}{120} + \frac{(3\lambda)^7}{5040} - \dots \right] \vec{e}_z. \quad (3.174)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man schließlich

$$k_1 = \frac{9}{20}, \quad k_2 = \frac{27}{20}, \quad (3.175)$$

die identischen Koeffizienten wie bei dem Coning-Kompensationsalgorithmus. Für eine ausführliche Diskussion dieser Tatsache sei auf [55] verwiesen.

Sculling- und Rotationsterm lassen sich also für den Fall, dass drei IMU-Daten-Intervalle pro Geschwindigkeits-Update-Intervall vorliegen, anhand von

$$\overline{\Delta \vec{v}_{s+r}} = \left( \frac{9}{20} \delta \vec{\sigma}_1 + \frac{27}{20} \delta \vec{\sigma}_2 \right) \times \delta \vec{v}_N + \left( \frac{9}{20} \delta \vec{v}_1 + \frac{27}{20} \delta \vec{v}_2 \right) \times \delta \vec{\sigma}_N \quad (3.176)$$

approximieren. Hierbei bezeichnet  $\delta \vec{\sigma}_i$  wiederum das Orientierungsvektorkrement des  $i$ -ten IMU-Daten-Intervalls,  $\delta \vec{v}_i$  ist das Integral über  $\vec{a}_{ib}^b$  in diesem IMU-Daten-Intervall. Neben der beschriebenen Vorgehensweise existieren noch eine Vielzahl weiterer Ansätze zur Approximation des Integrals (3.166), siehe z.B. [107].

Abschließend soll der Nutzen des Sculling-Kompensationsalgorithmus Gl. (3.176) verdeutlicht werden. Hierzu wurde bei einer IMU-Datenrate von 1000 Hz die Frequenz der Sculling Motion zu  $f = 50$  Hz angenommen, ferner wurden  $\beta = 0.1^\circ$  und  $A = 9.81 \text{ m/s}^2$  gewählt. Abb. 3.10 zeigt den rms-Wert des Geschwindigkeitsfehlers gegenüber einer Neuberechnung der Geschwindigkeit mit jedem IMU-Daten-Intervall, einmal bei Verwendung des Kompensationsterms Gl. (3.176), einmal bei Berücksichtigung des Rotationsterms, aber Vernachlässigung des Sculling-Terms. Man erkennt, dass die Vernachlässigung des Sculling-Terms zu einem beschleunigten Anwachsen der Geschwindigkeitsfehler führt.

### 3.3.3 Position

Zur Propagation der Position müssen die Differentialgleichungen

$$\dot{\varphi} = \frac{v_{eb,n}^n}{R_n(\varphi) - h} \quad (3.177)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{v_{eb,e}^n}{(R_e(\varphi) - h) \cos \varphi} \quad (3.178)$$

$$\dot{h} = v_{eb,d}^n \quad (3.179)$$

numerisch gelöst werden. Die Krümmungsradien der Erde in Nord- und Ostrichtung,  $R_n$  und  $R_e$ , variieren nur sehr langsam mit der Änderung des Breitengrades. Daher kann deren Berechnung mit einer deutlich niedrigeren Update-Rate erfolgen als die restliche Strapdown-Rechnung.

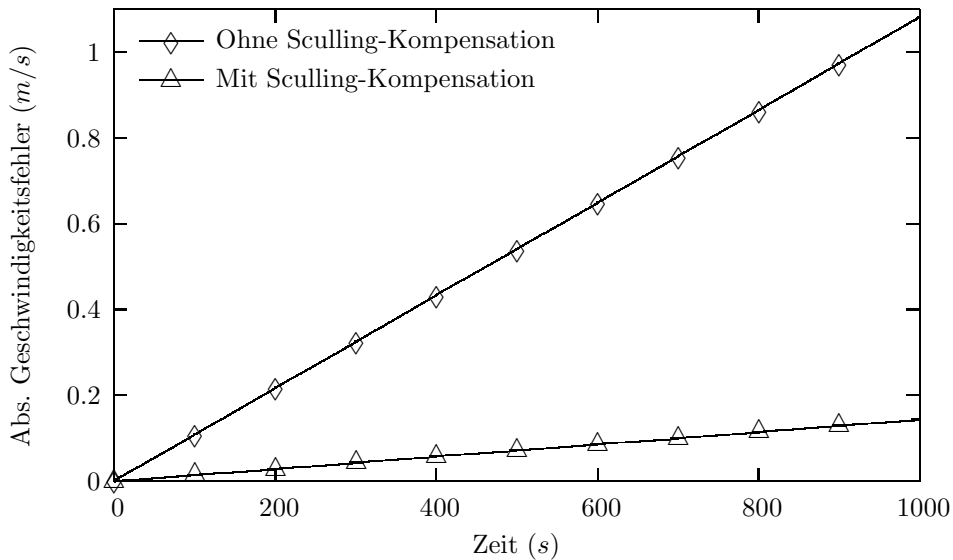


Abbildung 3.10: Numerische Lösung.

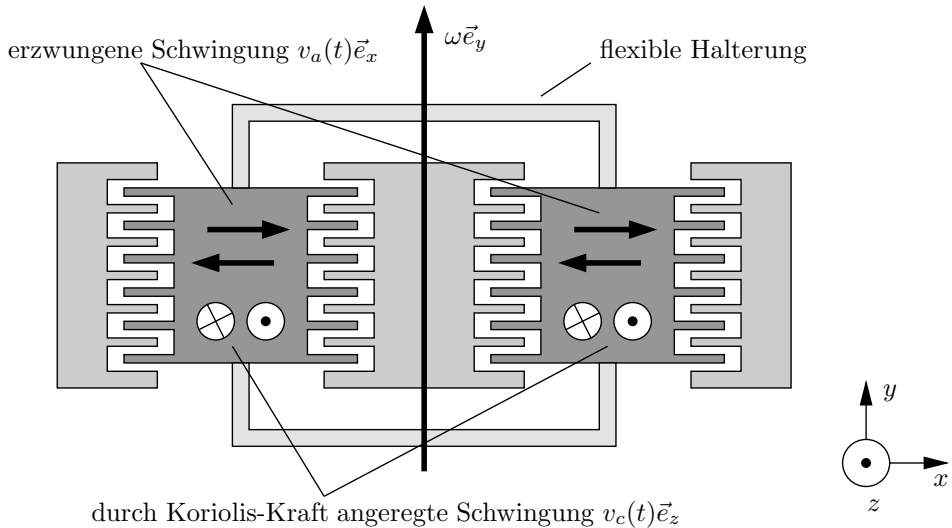
## 3.4 Fehlercharakteristik eines Inertialnavigationssystems

Inertiale Navigation ist ein kurzzeitgenaues Navigationsverfahren, d.h. ohne geeignete Gegenmaßnahmen wachsen die Navigationsfehler mit der Zeit an. Ursache dafür sind – neben numerischen Fehlern und den in den vorherigen Abschnitten angesprochenen Problemen aufgrund der endlichen Abtastrate der Inertialsensoren – Initialisierungsfehler und Messfehler der Sensoren. Ein Strapdown-Algorithmus propagiert eine Navigationslösung, damit muss zu Beginn der Strapdown-Rechnung folglich eine initiale Navigationslösung bekannt sein. Die Fehler dieser initialen Navigationslösung werden natürlich ebenfalls propagiert. Fehlerhaft gemessene Drehraten bzw. Winkelinkremente führen direkt zu Lagefehlern, fehlerhaft gemessene Beschleunigungen bzw. Geschwindigkeitsinkremente führen direkt zu Geschwindigkeitsfehlern, die ebenso propagiert werden.

In den folgenden Abschnitten soll daher zunächst ein Überblick über Inertialsensoren und deren Fehler vermittelt werden, bevor die Auswirkungen von Mess- und Initialisierungsfehlern auf ein Inertialnavigationssystem diskutiert werden.

### 3.4.1 Drehratensensoren

Drehratensensoren werden auch als Kreisel oder Gyroskope bezeichnet. Zu den gängigsten Drehratensensoren zählen MEMS-Kreisel, Faserkreisel (FOG) und Ringlaserkreisel (RLG). Daneben existieren noch eine Vielzahl weiterer Ansätze zur Messung von



**Abbildung 3.11:** Koordinatensysteme für die erdnahe Navigation.

Drehraten, z.B. der mechanische Wendekreisel oder das dynamically tuned gyroscope, die hier nicht betrachtet werden sollen. Eine umfassende Beschreibung einer Vielzahl von Drehratensensoren ist in [117] zu finden.

### MEMS-Kreisel

MEMS-Kreisel<sup>7</sup> zählen zu den kostengünstigsten Drehratensensoren. Dafür weisen sie in der Regel auch eine geringere Güte auf als z.B. Faserkreisel. Der Begriff MEMS-Kreisel ist als Oberbegriff zu verstehen, es gibt verschiedene Ansätze und Realisierungen. Exemplarisch soll hier lediglich ein Sensortyp beschrieben werden, der die Coriolis-Kraft ausnutzt.

Eine Prinzipskizze dieses Sensors ist Abb. 3.11 zu sehen. Durch elektrostatische Anregung werden zwei flache Probmassen zu gegenphasigen Schwingungen in  $x$ -Richtung gezwungen. Liegt nun eine Drehrate  $\omega\vec{e}_y$  vor, so resultiert aufgrund der Coriolis-Kraft eine Beschleunigung

$$\vec{a}_c = 2\omega\vec{e}_y \times v_a(t)\vec{e}_x = -2v_a(t)\omega\vec{e}_z, \quad (3.180)$$

die ein Schwingen der Massen in  $z$ -Richtung verursacht. Die damit verbundene Auslenkung kann kapazitiv gemessen werden und ist ein Maß für die Drehrate  $\omega$ . Detailliertere Betrachtungen zu MEMS-Kreiseln sind z.B. in [72],[10] zu finden.

<sup>7</sup>MEMS = micro electro-mechanical system

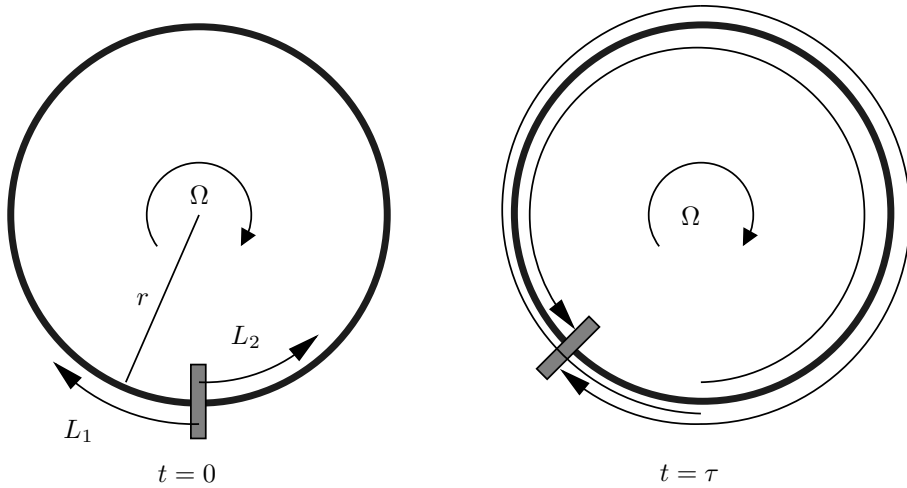


Abbildung 3.12: Sagnac-Effekt.

### Faserkreisel

Faserkreisel basieren auf dem Sagnac-Effekt, der anhand von Abb. 3.12 beschrieben werden soll. Eine Glasfaser sei zu einem Ring gebogen, an der Verbindungsstelle soll es die Möglichkeit geben, Laserstrahlen sowohl aus- als auch einzukoppeln. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  beginnt ein Laserstrahl im Uhrzeigersinn, ein anderer im Gegenuhrzeigersinn die Glasfaser zu durchlaufen. Während des Durchlaufs wird die Anordnung mit der Drehrate  $\Omega$  gedreht, so dass sich zu einem späteren Zeitpunkt  $t = \tau$  der Auskoppelpunkt weitergedreht hat. Die Laserstrahlen  $L_1$  und  $L_2$  müssen daher die Strecken

$$L_1 = 2\pi r + r\Omega t_1, \quad L_2 = 2\pi r - r\Omega t_2 \quad (3.181)$$

zurücklegen, wofür sie die Zeiten

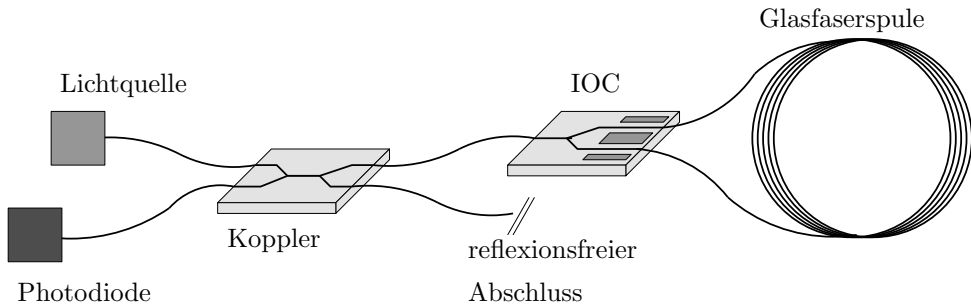
$$t_1 = \frac{L_1}{u_1}, \quad t_2 = \frac{L_2}{u_2} \quad (3.182)$$

benötigen. Hierbei bezeichnen  $u_1$  und  $u_2$  die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Laserstrahlen im und entgegen dem Uhrzeigersinn. Diese können mit dem relativistischen Geschwindigkeitsadditionsgesetz

$$v_{a+b} = \frac{v_a + v_b}{1 + \frac{v_a v_b}{c^2}} \quad (3.183)$$

berechnet werden. Gegenüber einem nichtrotierenden Bezugssystem hat jeder Punkt der Glasfaser die Geschwindigkeit  $v_a = r\omega$ , die Ausbreitungsgeschwindigkeit in einer ruhenden Glasfaser ist  $v_b = \frac{c}{n}$ , wobei  $n$  die Brechzahl der Glasfaser ist. Damit erhält man

$$u_1 = \frac{\frac{c}{n} + r\Omega}{1 + \frac{\frac{c}{n} \cdot r\Omega}{c^2}}, \quad u_2 = \frac{\frac{c}{n} - r\Omega}{1 - \frac{\frac{c}{n} \cdot r\Omega}{c^2}}. \quad (3.184)$$



**Abbildung 3.13:** Aufbau eines aktiven Faserkreisels.

Mit den Wellenzahlen  $k_1 = \frac{\omega}{u_1}$  und  $k_2 = \frac{\omega}{u_2}$  erhält man für die Phasenverschiebung der beiden Laserstrahlen:

$$\Delta\phi = k_1 L_1 - k_2 L_2 = \dots \approx 4\pi r^2 \omega \Omega \frac{1}{c^2 - r^2 \Omega^2} \approx \frac{4\pi r^2 \omega \Omega}{c^2} \quad (3.185)$$

Mit der Spulenlänge  $L_s = 2\pi r$ , der Wellenlänge  $\lambda = \frac{c}{f}$  und  $\omega = 2\pi f$  folgt

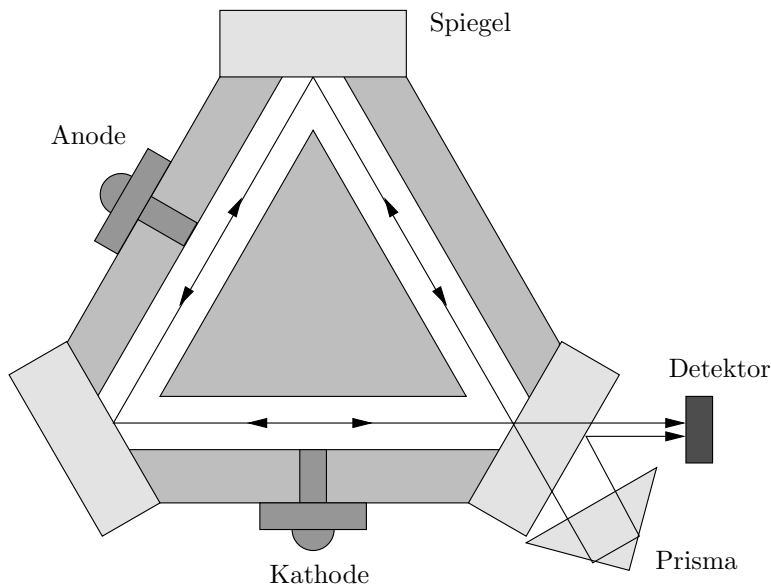
$$\Omega = \frac{\lambda c}{4\pi L_s r} \Delta\phi. \quad (3.186)$$

Die Drehrate  $\Omega$  verursacht also eine Phasenverschiebung zwischen den gegensinnig umlaufenden Laserstrahlen, die von der Brechzahl  $n$  der Glasfaser unabhängig ist. Dieser Sachverhalt wird als Sagnac-Effekt bezeichnet. Der Sagnac-Effekt ist ein relativistischer Effekt: Verwendet man anstelle des Geschwindigkeitsadditionsgesetzes der speziellen Relativitätstheorie Gl. 3.183 das Geschwindigkeitsadditionsgesetz der klassischen Physik  $v_{a+b} = v_a + v_b$ , wäre die in der Realität vorhandene Phasenverschiebung nicht vorhergesagt worden.

Bei der technischen Nutzung des Sagnac-Effektes im Faserkreisel unterscheidet man zwischen aktiven und passiven Faserkreisen, beim aktiven Faserkreisel wird noch zusätzlich zwischen open- und closed-loop-Betrieb unterschieden. Prinzipiell wird die Phasenverschiebung der Laserstrahlen ermittelt, indem sie nach dem Auskoppeln aus der Glasfaserspule zur Interferenz gebracht werden. Tatsächlich gemessen wird die Intensität  $I$  des Interferenzergebnisses, es gilt

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\phi, \quad (3.187)$$

wobei  $I_1$  und  $I_2$  die Intensitäten der einzelnen Laserstrahlen bezeichnen. Wird die Anordnung nicht gedreht, wäre ohne weitere Maßnahmen der Lichtweg für beide Laserstrahlen identisch, es käme zu konstruktiver Interferenz, die Intensität am Detektor wäre maximal. Das ist nicht wünschenswert, da in diesem Fall die Empfindlichkeit am geringsten ist – die Steigung der Cosinus-Funktion ist an dieser Stelle Null – und nicht



**Abbildung 3.14:** Aufbau eines Ringlaserkreisels.

zwischen Rechts- und Linksdrehung unterschieden werden könnte: Beides wäre lediglich mit einer Abnahme der Intensität verbunden.

Bei einem passiven FOG wird beim Auskoppeln der Laserstrahlen aufgrund des verwendeten Kopplers eine zusätzliche Phasenverschiebung von  $60^\circ$  erzielt. Bei einem aktiven FOG erhält man eine zusätzliche Phasenverschiebung durch Modulation mit einem integrierten optischen Chip. Der prinzipielle Aufbau eines aktiven FOGs ist in Abb. 3.13 zu sehen. Während im open-loop-Betrieb die aufgrund des Sagnac-Effektes resultierende Phasenverschiebung gemessen wird, wird im closed-loop-Betrieb die Modulation so angepasst, dass diese Phasenverschiebung aufgrund des Sagnac-Effektes gerade kompensiert wird. Umfassende Beschreibungen sind in [80], [110] zu finden.

### Ringlaser-Kreisels

Auch der Ringlaser-Kreisels basiert auf dem Sagnac-Effekt. Der benötigte geschlossene Lichtweg wird hier jedoch durch drei<sup>8</sup> geeignet angeordnete Spiegel hergestellt, siehe Abb. 3.14. In dem Lichtweg befindet sich ein Helium-Neon-Gasgemisch, das als Lasermedium dient. Durch geeignetes Pumpen bilden sich ein im und ein entgegen dem Uhrzeigersinn umlaufender Laserstrahl aus. Hierbei handelt es sich um stehende Wellen, deren Frequenz mit von der Länge des Lichtweges abhängt. Befindet sich die Anordnung in Ruhe, ist der Lichtweg für beide Laserstrahlen identisch, beide Laserstrahlen haben somit die selbe Frequenz. Wird die Anordnung in Rotation versetzt, verlängert

<sup>8</sup>Prinzipiell können natürlich auch mehr als drei Spiegel eingesetzt werden.

sich der Lichtweg für den einen und verkürzt sich der Lichtweg für den anderen Laserstrahl. Ein längerer Lichtweg bedeutet aber, dass sich die Wellenlänge vergrößern und somit die Frequenz verringern muss, damit nach wie vor eine stehende Welle vorliegt. Die beiden Laserstrahlen haben nun unterschiedliche Frequenzen, die Frequenzdifferenz hängt von der Drehrate ab. Um diese Frequenzdifferenz zu detektieren, ist einer der Spiegel halbdurchlässig ausgeführt, so dass die Laserstrahlen ausgekoppelt und zur Interferenz gebracht werden können. Im Detektor ergibt sich ein Interferenzmuster, das mit zwei Photodioden ausgewertet wird: Bei identischer Frequenz der Laserstrahlen ist das Interferenzmuster ortsfest, bei unterschiedlicher Frequenz beginnen die Interferenzstreifen zu wandern, die Richtung in der sich die Interferenzstreifen bewegen hängt von der Drehrichtung der Anordnung ab. Die Frequenz, mit der die Maxima des Interferenzmusters an den Photodioden vorbeistreichen hängt von der Drehrate ab und wird als Beat-Frequenz bezeichnet. Zwei Photodioden sind nötig, um die Bewegungsrichtung der Interferenzstreifen und damit die Drehrichtung erkennen zu können.

Eine Schwierigkeit bei diesem Messprinzip stellt der Lock-in-Effekt dar. Darunter versteht man, dass sich die Frequenz der Laserstrahlen erst ab einer bestimmten Mindestdrehrate ändert, kleinere Drehraten können nicht gemessen werden. Dieses Problem wird meist durch einen mechanischen Dither gelöst, d.h. die Anordnung wird mechanisch in oszillatorische Rotationsbewegungen versetzt, um so außerhalb des Lock-in-Bereichs zu arbeiten.

Ringlaser-Kreisel sind die hochwertigsten der hier beschriebenen Drehratensensoren, eine detaillierte Betrachtung dieses Sensortyps ist in [11] zu finden.

### 3.4.2 Beschleunigungsmesser

Beschleunigungsmesser verfügen in der Regel über eine oder mehrere Probemassen, die unter dem Einfluss der zu messenden Beschleunigung ausgelenkt werden. Bei einem open-loop-Beschleunigungsmesser wird diese Auslenkung direkt gemessen, während im closed-loop-Betrieb die Probemasse in ihre Ruhelage zurückgestellt und die dafür benötigten Stellgrößen ermittelt werden. Im Folgenden werden der Pendel-Beschleunigungsmesser und der vibrating-beam-Beschleunigungsmesser näher beschrieben.

#### Pendel-Beschleunigungsmesser

Bei Pendel-Beschleunigungsmessern kommen häufig Techniken aus der Chip-Herstellung zum Einsatz, die elastisch aufgehängte Probemasse wird sehr exakt aus einem Silizium-Wafer ausgeätzt und auf Ober- und Unterseite metallisiert. Damit kann eine Doppel-Kondensator-Struktur aufgebaut werden, wie sie in Abb. 3.15 dargestellt ist. Im open-loop-Betrieb wird die beschleunigungsbedingte Auslenkung der Probemasse kapazitiv gemessen. Diese Vorgehensweise hat den Nachteil, dass der Zusammenhang zwischen Krafteinwirkung und Auslenkung der Probemasse bestenfalls für sehr kleine Auslenkungen linear ist. Dieses Problem wird im closed-loop-Betrieb umgangen, bei dem die Probemasse in ihrer Ruhelage gehalten wird. In der Ruhelage besitzen beide Kondensatoren die gleiche Kapazität  $C_1 = C_2$ , so dass man mit

$$Q_1 = C_1 U_1, \quad Q_2 = C_2 U_2 \quad (3.188)$$



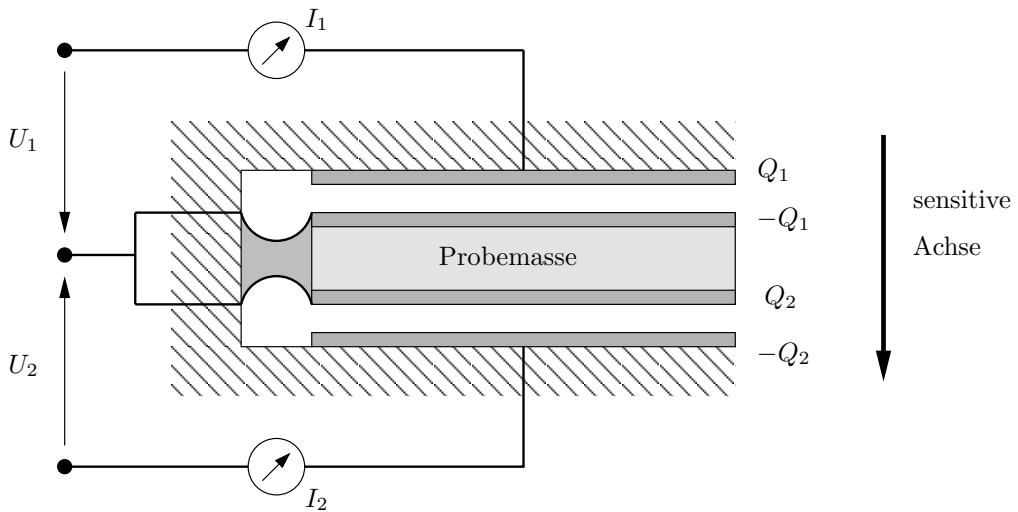


Abbildung 3.15: Aufbau eines Pendel-Beschleunigungsmessers.

als Ruhelagebedingung

$$\frac{Q_1}{U_1} \stackrel{!}{=} \frac{Q_2}{U_2} \quad (3.189)$$

erhält. Wird die Probemassee durch eine einwirkende Beschleunigung  $a$  ausgelenkt, ändern sich die Kapazitäten und damit die Spannungen  $U_1$  und  $U_2$ , die gemessen werden. Um die Ruhelagebedingung Gl. (3.189) wieder zu erfüllen, werden gezielt Ladungen  $\Delta q = I \Delta t$  auf die Kondensatorplatten aufgebracht: Bei unterschiedlichen Ladungen  $Q_1$  und  $Q_2$  wird eine elektrostatische Kraft

$$F = \frac{Q_1^2}{2\epsilon_0 A} - \frac{Q_2^2}{2\epsilon_0 A} \quad (3.190)$$

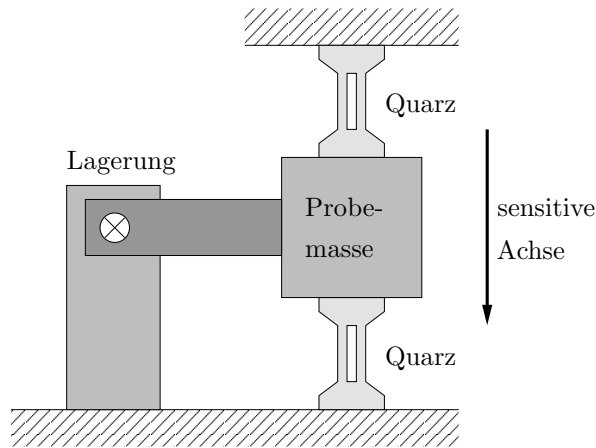
auf die Probemassee ausgeübt,  $A$  bezeichnet die Kondensatorfläche,  $\epsilon_0$  ist die Dielektrizitätskonstante. Diese elektrostatische Kraft kompensiert gerade die einwirkende Beschleunigung. Durch Einsetzen von

$$Q_1 = Q + \Delta q, \quad Q_2 = Q - \Delta q \quad (3.191)$$

erhält man mit  $F = ma$  den gesuchten Zusammenhang zwischen aufgebrachter Ladung  $\Delta q$  und Beschleunigung  $a$ :

$$a = \frac{4\Delta q Q}{2m\epsilon_0 A} \quad (3.192)$$

Hierbei bezeichnet  $m$  die Masse der Probemassee. Prinzipiell ist davon auszugehen, dass bei einem Pendel-Beschleunigungsmesser im closed-loop-Betrieb bessere Ergebnisse erzielt werden können als im open-loop-Betrieb.



**Abbildung 3.16:** Aufbau eines Vibrating-Beam-Beschleunigungsmessers.

### Vibrating-Beam-Beschleunigungsmesser

Die Schwingungsfrequenz eines Quarzes ändert sich – vergleichbar mit einer Gitarrensaiten – unter Zug- oder Druckbelastung. Bei einem vibrating-beam-Beschleunigungsmesser werden nun zwei Quarze so angeordnet, dass einer der Quarze bei Einwirkung einer Beschleunigung von einer Probemasse gestaucht und der andere Quarz gedehnt wird. Es kann wie in Abb. 3.16 eine Probemasse zum Einsatz kommen, häufig besitzt aber jeder Quarz seine eigene Probemasse. Während im beschleunigungsfreien Fall beide Quarze mit der identischen Resonanzfrequenz schwingen, erhöht bzw. verringert sich die Schwingungsfrequenz der Quarze bei Einwirkung einer Beschleunigung. Die Beschleunigung wird anhand der Schwebungsfrequenz<sup>9</sup> bestimmt, die sehr genau gemessen werden kann. Details zu diesem Sensortyp können [81] entnommen werden.

## 3.4.3 Generische Inertialsensorfehlermodelle

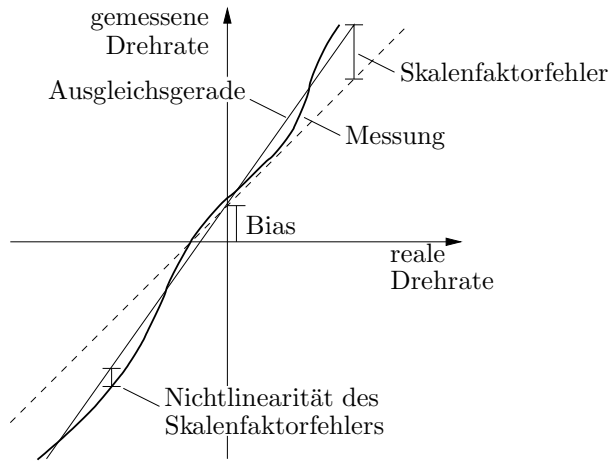
### Drehratensensoren

Die Messung von Drehraten und Beschleunigungen bzw. Winkel- und Geschwindigkeitsinkrementen ist immer mit Fehlern behaftet. Ein generisches Fehlermodell einer Drehratensensor-Triade ist gegeben durch

$$\tilde{\vec{\omega}}_{ib}^b = \mathbf{M}_{Gyro} \cdot \vec{\omega}_{ib}^b + \vec{b}_{\omega} + \vec{n}_{\omega} . \quad (3.193)$$

Die gemessene Drehrate ist mit  $\tilde{\vec{\omega}}_{ib}^b$  bezeichnet,  $\vec{\omega}_{ib}^b$  ist die reale Drehrate. Idealerweise sind die sensitiven Achsen der drei Sensoren exakt orthogonal zueinander ausgerichtet.

<sup>9</sup>Bei der Überlagerung zweier Schwingungen mit unterschiedlichen Frequenzen tritt eine Schwebung auf, deren Frequenz gerade der Frequenzdifferenz der beiden Schwingungen entspricht.



**Abbildung 3.17:** Bias, Skalenfaktorfehler und Nichtlinearität des Skalenfaktorfehlers.

Die in der Realität vorliegende Missweisung der Sensorachsen kann über die Nebendiagonalelemente der Misalignment-Matrix

$$\mathbf{M}_{Gyro} = \begin{pmatrix} s_x & \delta_{zx} & -\delta_{yx} \\ -\delta_{zy} & s_y & \delta_{xy} \\ \delta_{yz} & -\delta_{xz} & s_z \end{pmatrix} \quad (3.194)$$

beschrieben werden. Meist wird das Misalignment nach dem Zusammenbau vermessen und innerhalb der IMU rechnerisch kompensiert, so dass diese Nebendiagonalelemente als der nach dieser Kompensation verbleibende Fehler zu verstehen sind. Die Hauptdiagonale der Misalignmentmatrix enthält die Skalenfaktoren der Sensoren. Die Abweichung dieser Skalenfaktoren von dem Idealwert eins sind die Skalenfaktorfehler, die in ppm<sup>10</sup> angegeben werden. Diese Skalenfaktorfehler bestehen aus einem konstanten Anteil und einem drehratenabhängigen Anteil, der Skalenfaktorfehlernichtlinearität, für die häufig eine quadratische Abhängigkeit von der Drehrate angenommen wird.

Im Term  $\vec{b}_\omega$  sind die Biase, d.h. die Nullpunktsfehler der Sensoren zusammengefasst. Diese werden je nach Güte der Sensoren in Grad pro Stunde oder Grad pro Sekunde angegeben. Üblicherweise unterscheidet man einen konstanten Anteil, der sich zwar von Einschalten zu Einschalten verändern kann, während des Betriebs aber konstant bleibt, und einen zeitveränderlichen Anteil, der als Bias-Drift, Bias-Stabilität oder Bias-Variation bezeichnet wird. Letzterer wird meistens stochastisch als Gauss-Markov-Prozess erster Ordnung beschrieben. Ursache für zeitliche Änderungen des Bias können z.B. Temperatureinflüsse sein. Schließlich weisen Drehratensensoren häufig Biase auf, die als Funktion der einwirkenden Beschleunigung –  $g$ -abhängiger Bias – und als Funktion des Quadrates der einwirkenden Beschleunigung –  $g^2$ -abhängiger Bias – beschrieben werden können.

<sup>10</sup>ppm bedeutet parts-per-million, also  $1e-6$ .

**Tabelle 3.2:** Einheitenumrechnungen Drehratensensorrauschen

| $\frac{(^{\circ})}{\sqrt{\text{h}}}$ | $\frac{^{\circ}/\text{h}}{\sqrt{\text{Hz}}}$ | $\frac{\text{rad/s}}{\sqrt{\text{Hz}}} \triangleq \frac{\text{rad}}{\sqrt{\text{s}}}$ |
|--------------------------------------|--|---|
| 1                                    | 60   | 2.909e-4  |
| 0.0167                               | 1  | 4.848e-6  |
| 3437.7                               | 206264.8                                     | 1   |

**Tabelle 3.3:** Ungefähre Größenordnungen von Drehratensensorfehlern

| Fehler                  | RLG                             | FOG                            | MEMS  |
|-------------------------|---------------------------------|--------------------------------|---|
| $g$ -unabhängiger Bias: | 0.001 – 10 $^{\circ}/\text{h}$  | 0.1 – 50 $^{\circ}/\text{h}$   | 5 $^{\circ}/\text{h}$ – 5 $^{\circ}/\text{s}$ |
| $g$ -abhängiger Bias:   | 0 $^{\circ}/\text{h}/g$         | < 1 $^{\circ}/\text{h}/g$      | 1 $^{\circ}/\text{h}/g$                       |
| $g^2$ -abhängiger Bias: | 0 $^{\circ}/\text{h}/g^2$       | < 0.1 $^{\circ}/\text{h}/g^2$  | 0.3 $^{\circ}/\text{h}/g^2$                   |
| Skalenfaktorfehler:     | 5 ppm                           | > 100 ppm                      | > 400 ppm                                     |
| Angle Random Walk:      | 0.01 $^{\circ}/\sqrt{\text{h}}$ | 0.1 $^{\circ}/\sqrt{\text{h}}$ | 1 $^{\circ}/\sqrt{\text{h}}$                  |

Bias, Skalenfaktorfehler und Skalenfaktorfehlernichtlinearität sind in Abb. 3.17 veranschaulicht.

Der Term  $n_{\omega}$  beschreibt das sensorinherente Rauschen, das als weiß, normalverteilt und mittelwertfrei angenommen wird. Zur Quantifizierung wird die spektrale Leistungsdichte oder deren Wurzel angegeben, da bei integrierenden Sensoren die Varianz im Zeitdiskreten von der Abtastzeit abhängt: Ergibt sich der zeitdiskrete Drehratenmesswert  $\omega_k$  aus der realen Drehrate  $\omega(t)$  gemäß

$$\omega_k = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\omega(\tau) + n_{\omega}(\tau)) d\tau, \quad (3.195)$$

so findet man für den die Messung verfälschende Rauschterm  $n_{\omega k}$

$$n_{\omega, k} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} n_{\omega}(\tau) d\tau. \quad (3.196)$$

Hierbei bezeichnet  $n_{\omega}(\tau)$  das weiße Rauschen<sup>11</sup> im Zeitkontinuierlichen, es gilt

$$E[n_{\omega}(\tau_1)n_{\omega}(\tau_2)] = R \cdot \delta(\tau_1 - \tau_2). \quad (3.197)$$

<sup>11</sup>Weißes Rauschen kann im Zeitkontinuierlichen in der Realität nicht existieren, ist als theoretisches Konzept aber dennoch sinnvoll. Im Zeitdiskreten existiert weißes Rauschen, siehe auch Abschnitt 5.2.1.

Die Varianz  $R_k$  von  $n_{\omega,k}$  ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 R_k = E[n_{\omega,k}^2] &= E \left[ \frac{1}{\Delta t^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} n_{\omega}(\tau_1) n_{\omega}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right] \\
 &= \frac{1}{\Delta t^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} R \cdot \delta(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
 &= \frac{1}{\Delta t^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} R d\tau_2 = \frac{R}{\Delta t} .
 \end{aligned} \tag{3.198}$$

Die spektrale Leistungsdichte  $R$  besitzt hier die Einheit  $(\text{rad/s})^2/\text{Hz}$ , typischerweise wird deren Wurzel in der Einheit  $\text{rad}/\sqrt{\text{s}}$  oder  $\text{deg}/\sqrt{\text{s}} = \frac{180}{\pi \cdot 60} \text{rad}/\sqrt{\text{s}}$  angegeben und als angle random walk bezeichnet.

Die Bedeutung dieser Angabe kann wie folgt verdeutlicht werden: Es sei  $\mu_k$  weißes Rauschen mit der Standardabweichung  $\sigma_{\mu} = 1$ , ein Drehratenrauschen  $n_{\omega,k}$  mit Varianz  $R_k$  ist dann durch

$$n_{\omega,k} = \sqrt{R_k} \cdot \mu_k = \sqrt{\frac{R}{\Delta t}} \cdot \mu_k \tag{3.199}$$

gegeben, die zugehörigen Winkelinkremente sind

$$\Delta\theta_k = n_{\omega,k} \Delta t = \sqrt{R \cdot \Delta t} \cdot \mu_k . \tag{3.200}$$

Die Varianz eines solchen Winkelinkrements ist

$$\sigma_{\Delta\theta}^2 = R \cdot \Delta t \cdot \sigma_{\mu}^2 = R \cdot \Delta t . \tag{3.201}$$

Werden über einen Zeitraum  $T = m\Delta t$  zur Berechnung eines Winkels  $m$  dieser Winkelinkremente aufsummiert, erhält man den aufgrund des Rauschens aufgetretenen Winkelfehler  $\theta_e$ . Die Varianz dieses Winkelfehlers ergibt sich durch Summation der Winkelinkrementvarianzen:

$$\sigma_{\theta_e}^2 = m \cdot \sigma_{\Delta\theta}^2 = m \cdot \Delta t \cdot R = T \cdot R \tag{3.202}$$

Die Standardabweichung des durch Rauschen verursachten Winkelfehlers ist folglich

$$\sigma_{\theta_e} = \sqrt{T} \cdot \sqrt{R} . \tag{3.203}$$

Die Angabe des Drehratensensorrauschens als Wurzel aus einer spektralen Leistungsdichte ermöglicht also, schnell auf den in einem bestimmten Zeitraum aufgrund des Rauschens zu erwartenden Winkelfehler zu schließen: Dessen Standardabweichung erhält man – unabhängig von der Abtastzeit – durch Multiplikation der Wurzel der spektralen Leistungsdichte mit der Wurzel des betrachteten Zeitraums. Ein angle random

**Tabelle 3.4:** Einheitenumrechnungen Beschleunigungsmesserrauschen

| $\text{m/s}/\sqrt{\text{h}}$ | $\text{mg}/\sqrt{\text{Hz}}$ | $\text{m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}} \triangleq \text{m/s}/\sqrt{\text{s}}$ |
|------------------------------|------------------------------|---|
| 1                            | 1.703                        | 0.0167  |
| 0.588                        | 1                            | 9.807e-3  |
| 60                           | 101.97                       | 1   |

walk von  $1^\circ/\sqrt{\text{h}}$  lässt also in einer Stunde einen rauschbedingten Winkelfehler mit einer Standardabweichung von  $1^\circ$  erwarten.

Tab. 3.2 listet die Umrechnungen zwischen den gängigen Einheiten auf, in denen Inertialsensorrauschen angegeben wird.

Die typischen Größenordnungen der beschriebenen Drehratensensorfehler für FOG, RLG und MEMS-Gyro sind in Tab. 3.3 angegeben. Diese Zahlenwerte sind als ungefähre Richtwerte zu verstehen; gerade bei den High-End-MEMS-Gyros ist aufgrund der umfangreichen Anstrengungen auf diesem Gebiet in der Zukunft mit einer Steigerung der Güte zu rechnen, so dass Nullpunktsfehler von weniger als einem Grad pro Stunde erreicht werden könnten, während momentan die in der Tabelle angegebenen fünf Grad pro Stunde von den meisten Sensoren nicht erreicht werden.

### Beschleunigungsmesser

Im Prinzip treten bei einer Beschleunigungsmesser-Triade die gleichen Messfehler auf wie bei einer Drehratensensor-Triade, so dass auch hier ein Inertialsensorfehlermodell der Form

$$\tilde{\vec{f}}_{ib}^b = \mathbf{M}_{Acc} \cdot \vec{f}_{ib}^b + \vec{b}_a + \vec{n}_a \quad (3.204)$$

gewählt werden kann.

Beschleunigungsmesserbiase werden in  $\text{mg} = 1\text{e-}3g$  angegeben, wobei die Gravitation zu  $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$  definiert wird. Beschleunigungsmesserbiase können einen als rectification error bezeichneten Anteil aufweisen, der von den einwirkenden Vibrationen abhängt<sup>12</sup>. Das kann insbesondere dann zu Problemen führen, wenn dieser Bias im Rahmen der Datenfusionsalgorithmik des Navigationssystems geschätzt wird: Ändert sich die Vibrationsumgebung, z.B. wenn in einem Transfer-Alignment-Szenario, siehe Abschnitt 9, auf die Alignment-Phase die Freiflug-Phase folgt, sind die in der Alignment-Phase geschätzten Biase unter Umständen nicht mehr gültig.

Das Beschleunigungsmesserrauschen wird über die Wurzel der spektralen Leistungsdichte beschrieben und als velocity random walk bezeichnet, die Bedeutung ist dabei analog zum angle random walk. Die Umrechnungen zwischen gängigen Einheiten sind in Tab. 3.4 angegeben.

<sup>12</sup>Ein solcher rectification error kann auch bei Drehratensensoren vorliegen.

**Tabelle 3.5:** Ungefähre Größenordnungen von Beschleunigungsmessernfehlern

| Fehler                | Vibrating Beam       | Pendel               |
|-----------------------|----------------------|----------------------|
| Konstanter Bias:      | 0.1 – 1 mg           | 0.1 – 10 mg          |
| Biasstabilität:       | 0.1 mg               | 1 mg                 |
| Skalenfaktorfehler:   | 100 ppm              | 1000 ppm             |
| Velocity Random Walk: | 0.01 m/s/ $\sqrt{h}$ | 0.04 m/s/ $\sqrt{h}$ |

Eine Übersicht über typische Größenordnungen von Beschleunigungsmessernfehlern ist in Tab. 3.5 zu finden.

Neben den bisher beschriebenen Sensorfehlern resultieren bei einer Beschleunigungsmesser-Triade zusätzliche Messfehler, wenn die Positionen der Sensoren nicht berücksichtigt werden. Die Achsen der Inertialsensoren definieren die Koordinatenrichtungen des körperfesten Koordinatensystems, aufgrund ihrer physikalischen Ausdehnung kann sich aber nicht mehr als ein Beschleunigungssensor im Ursprung dieses Koordinatensystems befinden. Wenn das körperfeste Koordinatensystem rotiert, messen die Beschleunigungssensoren daher noch Anteile der Zentripetalbeschleunigung in Richtung ihrer sensitiven Achsen:

$$\vec{a}_{zentr.}^b = \begin{pmatrix} (\vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{r}_x^b) \vec{e}_x \\ (\vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{r}_y^b) \vec{e}_y \\ (\vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{\omega}_{ib}^b \times \vec{r}_z^b) \vec{e}_z \end{pmatrix} \quad (3.205)$$

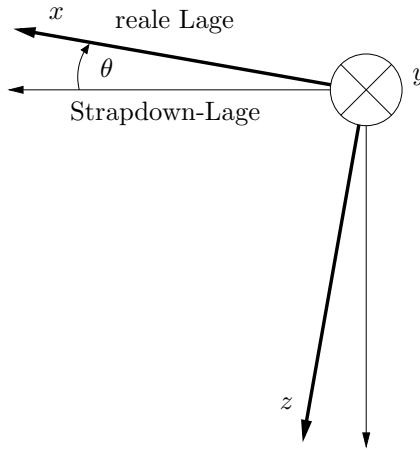
Hierbei bezeichnen  $\vec{r}_{x,y,z}^b$  die Positionen der Beschleunigungsmesser im körperfesten Koordinatensystem. Ob eine rechnerische Kompensation dieses als size effect bezeichneten Sachverhalts sinnvoll ist, hängt von der Güte der Sensoren und der Trajektorien-dynamik ab.

### 3.4.4 Kurzzeitcharakteristik

Die Fehlerdifferentialgleichungen, die die zeitliche Propagation von Fehlern der Navigationslösung eines Inertialnavigationssystems beschreiben sind von besonderem Interesse, da sie in einem integrierten Navigationssystem die Grundlage des error-state-space-Kalman-Filter-Systemmodells darstellen. Diese werden in Abschnitt 8.2.1 hergeleitet. Im Folgenden sollen anstelle einer detaillierten mathematischen Beschreibung einige grundlegende Mechanismen der Fehlerfortpflanzung in einem Inertialnavigationssystem beschrieben werden.

#### Lagefehler

Zur Verdeutlichung der Auswirkung von Lagefehlern wird die in Abb. 3.18 dargestellte Situation betrachtet: Das Fahrzeug befinde sich in Ruhe, so dass die Beschleunigungsmesser lediglich die Schwerkraft  $g$  messen. Der tatsächlich vorhandene Rollwinkel sei Null, der tatsächliche Pitch-Winkel sei  $\theta$ . In diesem Szenario messen drei



**Abbildung 3.18:** Auswirkung von Lagefehlern.

ideale Beschleunigungssensoren

$$\tilde{f}_{ib}^b = \begin{pmatrix} g \sin \theta \\ 0 \\ -g \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.206)$$

Die Lageinformationen der Navigationslösung seien fehlerhaft, der Pitch-Winkel wurde zu Null berechnet. Bevor die gemessenen Beschleunigungen integriert werden um auf Geschwindigkeitsänderungen zu schließen, muss die Schwerebeschleunigung aus den Messdaten herausgerechnet werden. Aufgrund der fehlerhaften Lageinformation wird davon ausgegangen, dass der  $z$ -Beschleunigungsmesser die volle Schwerebeschleunigung gemessen hat, wohingegen keine Einkopplung in die  $x$ - und  $y$ -Beschleunigungsmesser vorliegt. Damit ermittelt der strapdown-Algorithmus für den Fall, dass der Lagefehler klein ist, d.h.  $\sin \theta \approx \theta$  und  $\cos \theta \approx 1$  gilt, die trajektorienbedingte Beschleunigung zu

$$\vec{a}_{ib}^b = \tilde{f}_{ib}^b + \vec{g}_l^b = \begin{pmatrix} g \sin \theta \\ 0 \\ g(1 - \cos \theta) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} g\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.207)$$

Daraus kann geschlossen werden, dass kleine Lagefehler zunächst im Wesentlichen zu Geschwindigkeits- und Positionsfehlern in den Horizontalkanälen führen, während der Vertikalkanal weniger betroffen ist. Da die fehlerhafte Beschleunigungskomponente zur Berechnung der Geschwindigkeit einmal und zur Berechnung der Position zweimal integriert wird, wachsen bedingt durch Lagefehler Geschwindigkeitsfehler proportional mit der Zeit, Positionsfehler quadratisch mit der Zeit an.



### Inertialsensorbiase

Es ist unmittelbar einsichtig, dass Beschleunigungsmesserbiase zu einem Anwachsen der Geschwindigkeitsfehler proportional mit der Zeit und zu einem Anwachsen der Positionsfehler quadratisch mit der Zeit führen.

Da gemessene Drehraten zur Propagation der Lage einmal integriert werden müssen, führen Drehratensensorbiase in erster Näherung zu einem Anwachsen der Lagefehler proportional mit der Zeit:

$$\begin{pmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\theta \\ \Delta\psi \end{pmatrix} = \vec{b}_\omega \cdot t \quad (3.208)$$

Mit den Überlegungen des vorherigen Abschnitts erhält man dadurch einen Fehler

$$\Delta\vec{g}_l^n \approx g_l^n \begin{pmatrix} \Delta\theta \\ -\Delta\phi \\ 0 \end{pmatrix} = g_l^n \begin{pmatrix} b_{\omega,y} \\ -b_{\omega,z} \\ 0 \end{pmatrix} t \quad (3.209)$$

bei der Kompensation der Schwerebeschleunigung, was letztendlich zu einem Anwachsen der Positionsfehler gemäß

$$\Delta\vec{r}_{b_\omega} = \frac{1}{6} g_l^n \begin{pmatrix} b_{\omega,y} \\ -b_{\omega,z} \\ 0 \end{pmatrix} t^3 \quad (3.210)$$

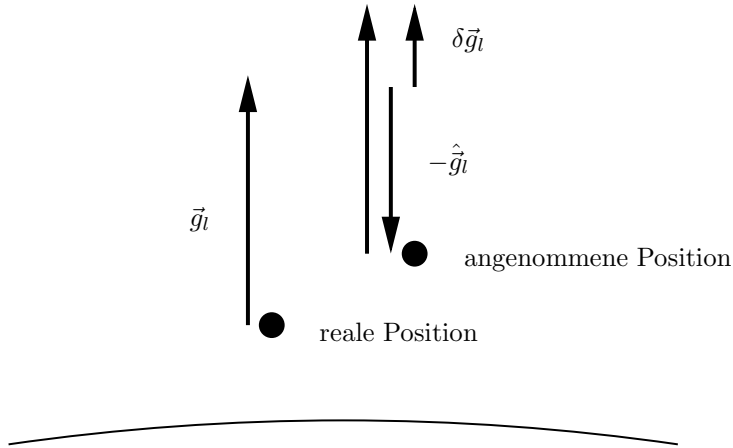
führt.

### 3.4.5 Langzeitcharakteristik

Während für kürzere Zeiträume die Überlegungen des vorherigen Abschnittes sicherlich eine qualitative Gültigkeit haben, sind bei der Betrachtung größerer Zeiträume zusätzlich andere Mechanismen relevant.

#### Instabilität des Höhenkanals

Zunächst soll der Höhenkanal eines Inertialnavigationssystems betrachtet werden. Zur Kompensation der von den Beschleunigungsmessern mitgemessenen Schwerebeschleunigung  $\vec{g}_l$  wird eine geschätzte Schwerebeschleunigung  $\hat{\vec{g}}_l$  einem entsprechenden Modell entnommen. Die Schwerebeschleunigung nimmt mit zunehmender Höhe ab. Wird nun aufgrund der Navigationslösung fälschlicherweise z.B. eine zu große Höhe über dem Erdellipsoid angenommen, wird eine zu geringe Schwerebeschleunigung angenommen und daher nur ein Teil der Schwerebeschleunigung kompensiert, siehe Abb. 3.19. Es verbleibt



**Abbildung 3.19:** Instabilität des Höhenkanals.

eine unkompenzierte Beschleunigung  $\delta \vec{g}_l$  nach oben, die im Strapdown-Algorithmus integriert wird und so den Höhenfehler weiter vergrößert. Bei einer zu gering angenommenen Höhe verbleibt eine Beschleunigungskomponente nach Unten, die auch diesen Höhenfehler weiter vergrößert.

Die Auswirkung eines Anfangshöhenfehlers von zehn Metern – ohne weitere Fehlerquellen, d.h. bei Verwendung idealer Sensoren und ansonsten perfekter Initialisierung – ist in Abb. 3.20 dargestellt.

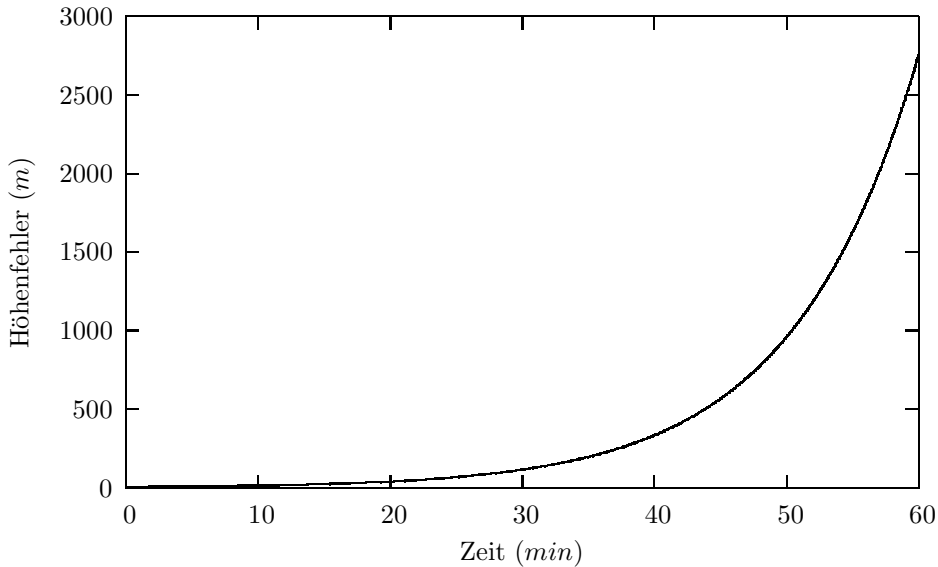
Diese Instabilität des Höhenkanals ist die Ursache dafür, dass ein Inertialnavigationssystem, das längere Zeit autonom navigieren soll, praktisch immer über einen Baro-Altimeter verfügt.

### Schuler-Oszillationen

Wird der Höhenkanal z.B. durch Verwendung eines Baro-Altimeters stabilisiert, so weisen die Horizontalkanäle eine gewisse Stabilität auf: Da die Erde gekrümmt ist, stimmt bei einem horizontalen Positionsfehler  $\Delta \vec{r}$  die angenommene Richtung der Schwerkraftbeschleunigung nicht mit deren tatsächlicher Richtung überein, siehe Abb. 3.21. Dadurch wird im Strapdown-Algorithmus die Schwerkraftbeschleunigung nicht vollständig kompensiert, ein Anteil der Schwerkraftbeschleunigung wird als Beschleunigung des Fahrzeugs interpretiert. Diese Beschleunigungskomponente  $\Delta \vec{a}$  ist gerade so gerichtet, dass sie dem vorliegenden Positionsfehler entgegenwirkt.

Anhand von Abb. 3.21 erhält man näherungsweise

$$\frac{\Delta r}{R} = -\frac{\Delta a}{g_l} \quad (3.211)$$



**Abbildung 3.20:** Instabilität des Höhenkanals.

und damit

$$\Delta \ddot{r} + \frac{g_l}{R} \Delta r = 0 . \quad (3.212)$$

Gl. (3.212) ist die Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators mit einer Periodendauer von ungefähr 84 Minuten. Die aus dem beschriebenen Mechanismus resultierenden Oszillationen der Positions- und Geschwindigkeitsfehler werden als Schuler-Oszillationen bezeichnet.

## 3.5 Initialisierung

Vor Beginn der Strapdown-Rechnung muss eine initiale Navigationslösung bestimmt werden. Im Folgenden soll angenommen werden, dass sich das Fahrzeug dabei in Ruhe befindet und die Anfangsposition bekannt ist. In diesem Szenario muss lediglich die Gewinnung der benötigten Lageinformationen betrachtet werden.

Zunächst wird ein horizontiertes Koordinatensystem mit dem Index  $h$  definiert, dessen x- und y-Achse in die Richtungen der Projektionen der x- und y-Achsen des körperfesten Koordinatensystems auf die lokale Horizontale weisen. Die Achsen des horizontalen Koordinatensystems liegen damit in der gleichen Ebene wie die Nord- und Ost-Achse des Navigationskoordinatensystems, die Lage dieser beiden Koordinatensysteme wird über den Yaw-Winkel  $\psi$  beschrieben. Die Lage von horizontaltem und körperfestem Koordinatensystem ist durch den Rollwinkel  $\phi$  und den Pitchwinkel  $\theta$  bestimmt.

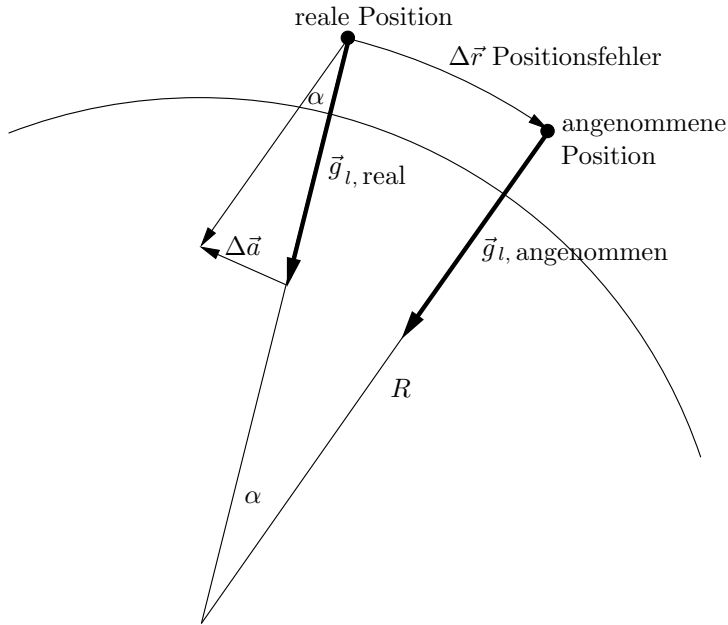


Abbildung 3.21: Entstehung der Schuler-Oszillationen.

### Roll- und Pitchwinkel

Die Beschleunigungsmesser messen die Schwerebeschleunigung zu

$$\vec{f}_{ib}^b = \mathbf{C}_b^{h,T} \vec{f}_{ib}^h = \mathbf{C}_b^{h,T} (0, 0, -g_l)^T, \quad (3.213)$$

wobei man  $\mathbf{C}_b^h$  durch Einsetzen von  $\psi = 0$  in Gl. (3.50) erhält. Ausmultiplizieren liefert

$$\vec{f}_{ib}^b = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta g_l \\ -\sin \phi \cos \theta g_l \\ -\cos \phi \cos \theta g_l \end{pmatrix}, \quad (3.214)$$

so dass Roll- und Pitchwinkel gemäß

$$\theta = \arcsin \left( \frac{f_x}{g_l} \right), \quad \phi = \arctan \left( \frac{f_y}{f_z} \right) \quad (3.215)$$

berechnet werden können. Alternativ kann man den Rollwinkel auch anhand von

$$\phi = \arcsin \left( \frac{-f_y}{g_l \cos \theta} \right) \quad (3.216)$$

berechnen.

Bezeichnet man die Fehler der gemessenen specific force mit  $\delta f_x$ ,  $\delta f_y$  und  $\delta f_z$ , so erhält man für die Fehler der berechneten Winkel näherungsweise

$$\delta\phi = \frac{-\delta f_y}{g_l}, \quad \delta\theta = \frac{\delta f_x}{g_l}. \quad (3.217)$$

Ein Beschleunigungsmesserbias von 1 mg verursacht bei dieser Vorgehensweise also einen Lagefehler von 1 mrad.

### Nordsuche

Der Yaw-Winkel  $\psi$  kann bei ausreichend genauen Drehratensensoren durch Messung der Erddrehrate bestimmt werden. Dieser Vorgang wird als Nordsuche bezeichnet. Die Projektion der Erddrehrate in die lokale Horizontalebene sei mit  $\Omega_{hor}$  bezeichnet, es gilt  $\Omega_{hor} = \Omega \cos \varphi$ . Mit Gl. (3.120) und Abb. 3.22 erhält man die Horizontalkomponenten der Erddrehrate in Koordinaten des horizontierten Koordinatensystems zu

$$\omega_{ib,x}^h = \Omega \cos \varphi \cos \psi \quad (3.218)$$

$$\omega_{ib,y}^h = -\Omega \cos \varphi \sin \psi. \quad (3.219)$$

Im allgemeinen Fall  $\phi \neq 0$  und  $\theta \neq 0$  müssen diese Größen aus den gemessenen Drehraten ermittelt werden:

$$\omega_{ib,x}^h = \omega_{ib,x}^b \cos \theta + \omega_{ib,y}^b \sin \phi \sin \theta + \omega_{ib,z}^b \cos \phi \sin \theta \quad (3.220)$$

$$\omega_{ib,y}^h = \omega_{ib,y}^b \cos \phi - \omega_{ib,z}^b \sin \phi \quad (3.221)$$

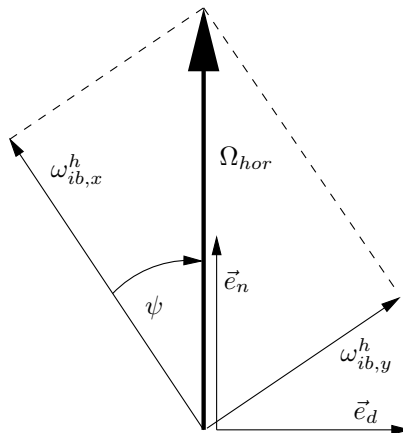
Ausgehend von Gl. (3.218)–(3.219) berechnet sich der Yaw-Winkel wie folgt:

$$\psi = \arctan2(-\omega_{ib,y}^h, \omega_{ib,x}^h) \quad (3.222)$$

Ist der Yaw-Winkel bestimmt, könnte aus Gl. (3.218) oder (3.219) sogar noch der ungefähre Breitengrad berechnet werden.

Sind die aufgrund der nicht exakt bekannten Roll- und Pitchwinkel resultierenden Fehler bei der Berechnung der horizontierten Drehraten Gl. (3.220)–(3.221) vernachlässigbar, dann beeinflussen im Wesentlichen drei Faktoren die Genauigkeit der Nordsuche:

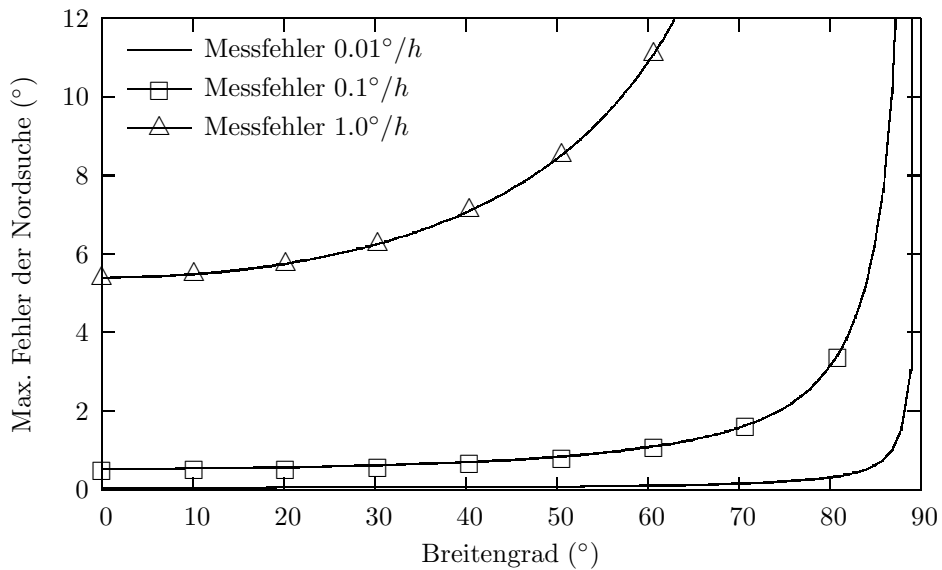
1. **Messfehler.** Fehlerhafte Messungen der Drehrate  $\vec{\omega}_{ib}^h$  führen direkt zu Yaw-Winkel-Fehlern. Daher werden meist über einen längeren Zeitraum gemittelte Drehraten verwendet, um den Einfluss des Sensorrauschens zu minimieren. Der Einfluss der Drehratensensorbiase kann nicht verringert werden.



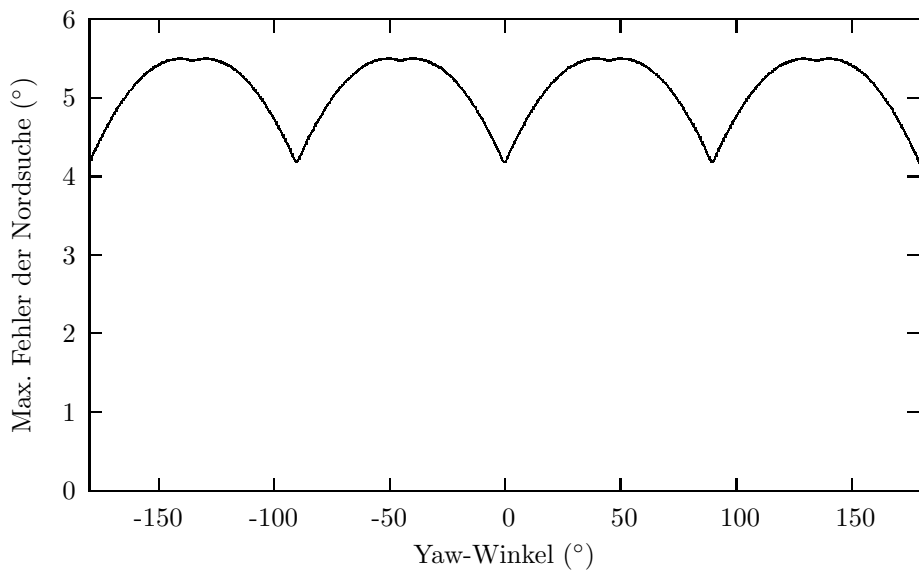
**Abbildung 3.22:** Prinzip der Nordsuche.

2. **Breitengrad.** Je weiter man sich vom Äquator entfernt, desto geringer ist der horizontale Anteil der Erddrehrate, folglich wirken sich Messfehler umso stärker aus. Dieser Zusammenhang ist in Abb. 3.23 verdeutlicht, dort sind für verschiedene Größenordnungen der Messfehler von  $\vec{\omega}_{ib}^h$  die maximal bei der Nordsuche resultierenden Yaw-Winkelfehler über dem Breitengrad aufgetragen. An den Polen ist eine Nordsuche natürlich unmöglich.
3. **Yaw-Winkel.** Der Yaw-Winkel wird über die nichtlineare Arcus-Tangens-Funktion aus den gemessenen Drehraten bestimmt. Aufgrund dieser Nichtlinearität resultiert eine unterschiedliche, vom Yaw-Winkel abhängige Empfindlichkeit der Nordsuche gegenüber Messfehlern. Dies ist in Abb. 3.24 verdeutlicht, hier ist für Messfehler der Größenordnung  $1^\circ/\text{h}$  am 45. Breitengrad der bei einer Nordsuche resultierende Yaw-Winkel-Fehler über dem Yaw-Winkel aufgetragen.

Um eine Nordsuche durchführen zu können, werden hochwertige Drehratensensoren benötigt. Für kostengünstige MEMS-Sensoren scheidet diese Möglichkeit der Yaw-Winkel-Bestimmung daher aus. Alternativ zu einer Nordsuche kann in diesem Fall häufig ein Magnetometer verwendet werden, oder es besteht die Möglichkeit den Yaw-Winkel z.B. anhand von GPS-Geschwindigkeitsmessungen zu initialisieren. Letzteres ist bei vielen Landfahrzeugen oder Flächenflüglern der Fall, solange sich diese im Wesentlichen in einer in körperfesten Koordinaten bekannten Richtung bewegen – meist in Fahrzeuglängsrichtung, d.h. in Richtung der x-Achse des körperfesten Koordinatensystems. Die Bewegungsrichtung in Navigationskoordinaten ist aufgrund des vom GPS-Empfänger gelieferten Geschwindigkeitsvektors bekannt. Betrachtet man nun die Horizontalkomponente des Geschwindigkeitsvektors, so kann aus dessen Repräsentation in körperfesten Koordinaten und in Navigationskoordinaten auf den Yaw-Winkel geschlossen werden.



**Abbildung 3.23:** Breitengradabhängigkeit der Nordsuche.



**Abbildung 3.24:** Yaw-Winkel abhängige Empfindlichkeit der Nordsuche.