OPERATORY LINIOWE

1. **<u>WARTOŚCI I WEKTORY WŁASNE OPERATORÓW I MACIERZY</u>.**

1.1. **DEFINICJA** Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K i niech F będzie operatorem liniowym na przestrzeni V. $\lambda \in K$ nazywamy **<u>wartością własną operatora *F*</u>,** jeśli $\ker(F - \lambda I_V) \neq \mathbf{0}$. Jeśli λ jest wartością własną F, to każdy niezerowy wektor z przestrzeni $\ker(F - \lambda I_V)$ nazywamy **<u>wektorem własnym operatora *F*</u>** odpowiadającym wartości własnej λ. Przestrzeń $\ker(F - \lambda I_V)$ oznaczamy $V_\lambda\ (F)$ lub V_λ i nazywamy **<u>podprzestrzenią własną</u>** odpowiadającą λ.

UWAGA. λ jest wartością własną operatora F wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje niezerowy wektor $\mathbf{v} \in V$, taki że $F(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Wektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości λ wtedy i tylko wtedy, gdy $F(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.

Niech $A \in M^n{}_n(K)$. **<u>Wartościami własnymi i wektorami własnymi macierzy A</u>** nazywamy wartości własne i wektory własne operatora L_A. ($L_A\colon M_n(K) \to M_n(K)$; $L_A(X) = AX$.)

1.2. TWIERDZENIE. Niech A będzie macierzą kwadratową nad ciałem K i $\lambda \in$ K. Wtedy λ jest wartością własną macierzy A wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Det}(A - \lambda I) = 0$.

1.3. **TWIERDZENIE.** Niech F będzie operatorem liniowym na przestrzeni V, takim że $A = M_B{}^B(F)$, gdzie B baza V. Wtedy:

i) λ jest wartością własną operatora F wtedy i tylko wtedy, gdy λ jest wartością własną A.

ii) dla dowolnej wartości własnej λ, $v \in V_\lambda(F) \Leftrightarrow M_B(v) \in V_\lambda(A)$.

1.4. **DEFINICJA.** Niech F będzie operatorem liniowym na przestrzeni wektorowej V. Mówimy, że **<u>podprzestrzeń</u>** U przestrzeni V jest **<u>niezmiennicza względem operatora F</u>** , jeśli $F(U) \subseteq U$.

PRZYKŁAD. Podprzestrzenie własne operatora F są podprzestrzeniami niezmienniczymi względem F.

2. **<u>WIELOMIAN CHARAKTERYSTYCZNY MACIERZY I OPERATORÓW</u>**

2.1. **TWIERDZENIE.** Niech $A \in M^n{}_n(K)$. Wtedy $\mathrm{Det}(xI - A)$ jest wielomianem unormowanym stopnia n nad K. Ponadto $\mathrm{Det}(A - xI) = \begin{cases} \mathrm{Det}(xI - A) & \text{gdy } n = 2k \\ -\mathrm{Det}(xI - A) & \text{gdy } n = 2k+1 \end{cases}$.

DEFINICJA. Wielomian $\mathrm{Det}(xI - A)$ nazywamy **<u>wielomianem charakterystycznym macierzy A</u>** i oznaczamy $\chi_A(x)$.

UWAGA. $\lambda \in K$ jest wartością własną macierzy A $\Leftrightarrow$ λ jest pierwiastkiem wielomianu $\chi_A(x)$.

2.2. **LEMAT.** Jeśli A, B $\in M^n{}_n(K)$ są macierzami podobnymi (tzn. istnieje macierz odwracalna N, taka że $B = N^{-1}AN$), to $\chi_A(x) = \chi_B(x)$.

FAKT. Niech B oraz C będą bazami przestrzeni wektorowej *V*. Wtedy jeśli F jest operatorem na *V,* to macierze $M^B{}_B(F)$ oraz $M^C{}_C(F)$ mają jednakowe wielomiany charakterystyczne.

Wielomian charakterystyczny macierzy $M^B{}_B(F)$ nazywamy **wielomianem charakterystycznym operatora F** i oznaczamy $\chi_F(x)$.

3. DIAGONALIZACJA MACIERZY OPERATORA LINIOWEGO.

3.1. TWIERDZENIE. Niech F będzie operatorem liniowym na przestrzeni wektorowej *V* i niech B = ($\mathbf{v}_1$, ...,$\mathbf{v}_n$) będzie bazą *V*. Macierz $M^B{}_B(F)$ jest macierzą diagonalną wtedy i tylko wtedy, gdy B składa się z wektorów własnych operatora F. Dokładniej, $M^B{}_B(F) = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \Leftrightarrow F(v_j) = \lambda_j v_j$ dla j = 1,..., n.

TWIERDZENIE. Niech A, N $\in M_n{}^n(K)$ i niech N będzie macierzą odwracalną. Wtedy następujące warunki są równoważne:

i) $N^{-1}AN = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$,

ii) $AN^{(j)} = \lambda_j N^{(j)}$ dla j = 1, ...,n.

3.2. DEFINICJA. Mówimy, że operator F na *V* jest **diagonalizowalny** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza B przestrzeni *V,* taka że $M^B{}_B(F)$ jest diagonalna. ($\Leftrightarrow$ istnieje baza *V* złożona z wektorów własnych operatora F).

DEFINICJA. Mówimy, że macierz A $\in M_n{}^n(K)$ jest **diagonalizowalna** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz odwracalna N $\in M_n{}^n(K)$, taka że $N^{-1}AN = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. (($\Leftrightarrow$ istnieje baza $M_n(K)$ złożona z wektorów własnych macierzy A).

3.3 TWIERDZENIE. Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.

WNIOSEK. (warunek wystarczający diagonalizowalności operatora F). Jeśli operator F na n wymiarowej przestrzeni wektorowej *V* ma n różnych wartości własnych, to jest diagonalizowalny.

3.4.TWIERDZENIE. Niech F będzie operatorem liniowym na przestrzeni wektorowej *V* nad ciałem *K* i niech $\chi_F(x) = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdot ... \cdot (x-\lambda_k)^{m_k}$, gdzie $\lambda_j \in K$ dla j = 1, ...,k oraz $\lambda_i \neq \lambda_j$ dla $i \neq j$. Wtedy następujące warunki są równoważne:

i) istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych operatora F,

ii) $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$,

iii) $\dim V_{\lambda_j}$ = m_j , dla j = 1, ...,k.

3.5. TWIERDZENIE (Jordana). Niech F będzie operatorem liniowym na przestrzeni V nad ciałem C. Wtedy istnieje baza B przestrzeni V, taka że $M^B_B(F) = \begin{vmatrix} K_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ & \cdot & & & \cdot \\ & & \cdot & & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & K_p \end{vmatrix}$, gdzie każda z klatek K_j jest postaci $K = \begin{vmatrix} \lambda & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & \lambda & & & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 1 & \lambda \end{vmatrix}$, gdzie λ jest wartością własną F.