

02.10.2019

prof. dr hab. inż. Zbigniew Lonc

zblonc@mini.pw.edu.pl

pokój 558, konsultacje 12.15-13.00

http://pages.mini.pw.edu.pl/~loncz/www

username:student

pass:elitmxy

32 punkty na ćwiczeniach zwalnia z części egzaminu

1. Rachunek zdań

(a) zdanie - wyrażenie któremu można przypisać jednoznacznie wartość prawdy lub fałszu

(b) zdania:

i. Paryż jest we Francji

ii. $-1 > 0$

(c) nie zdania:

i. Niebieski to ładny kolor

(d) Zmienne zdaniowe - p, q, r, s zazwyczaj - pod nie podstawiamy zdania

(e) X - zbiór zmiennych zdaniowych

(f) Ze zdań prostych budujemy zdania złożone za pomocą operatorów (spójników) logicznych

i. Negacja, zaprzeczenie, $\neg p$ - nieprawda że p , nie p (\neg / \sim)

ii. Alternatywa $p \vee q$ (p lub q)

iii. Koniunkcja $p \wedge q$ (p i q)

iv. Implikacja $p \implies q$ (jeśli p to q)

v. Równoważność $p \iff q$ (p jest równoważne q)

(g) Budujemy "język legalnych" formuł rachunku zdań (syntaktyka)

i. Def. Zbiór formuł rachunku zdań jest to najmniejszy zbiór Z taki, że

A. Każda zmienna zdaniowa należy do Z

B. Jeśli $\alpha, \beta \in Z$ to $\neg \alpha, \alpha \vee \beta, \alpha \wedge \beta, \alpha \implies \beta, \alpha \iff \beta \in Z$

ii. Konwencja:

A. Dla uproszczenia formuł przyjmujemy priorytet wykonywania operacji

\neg , potem \wedge / \vee , potem \implies / \iff

A. $((\neg q) \wedge p) \implies p \iff (p \vee q)$ sprowadza się do $(\neg q \wedge p \implies p) \iff p \vee q$

iii. X - zbiór zmiennych zdaniowych

A. Def. Wartościowanie jest to funkcja $V: X \rightarrow \{0, 1\}$ (prawda, fałsz) - przypisuje zmiennym zdaniowym wartości logiczne

p	$\neg p$
-----	----------

B.	<table><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	0	0	1
1	0				
0	1				

	p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \implies q$	$p \iff q$
	0	0	0	0	1	1
C.	1	0	1	0	0	0
	0	1	1	0	1	0
	1	1	1	1	1	1

iv. Rozszerzamy wartościowanie na zbiór Z formuł rachunku zdań

A. $\alpha, \beta \in Z$

B. $V: X \rightarrow \{0, 1\}$

C. $V(\neg \alpha) = \neg V(\alpha)$

D. $V(\alpha \vee \beta) = V(\alpha) \vee V(\beta)$

E. $V(\alpha \wedge \beta) = V(\alpha) \wedge V(\beta)$

F. $V(\alpha \implies \beta) = V(\alpha) \implies V(\beta)$

G. $V(\alpha \iff \beta) = V(\alpha) \iff V(\beta)$

H. Przykład: $X = \{p, q\}$, $V(p) = 1$, $V(q) = 0$

$V((\neg q \wedge p) \implies p) \iff p \vee q = 1$

(h) def. Tautologia rachunku zdań jest to formuła prawdziwa dla każdego wartościowania zmiennych zdaniowych

- i. $p \vee \neg p$ prawo wyłączonego środka
- ii. $\neg(p \wedge \neg p)$ prawo sprzeczności
- iii. $p \vee p \iff p$
- iv. $p \wedge p \iff p$ idempotentność alternatywy i koniunkcji
- v. $p \iff \neg(\neg p)$ podwójna negacja
- vi. $(p \vee q) \wedge r \iff (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
- vii. $(p \wedge q) \vee r \iff (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ prawo rozdzielności \wedge
- viii. $(p \vee q) \vee r \iff p \vee (q \vee r)$
- ix. $(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r)$ łączność \wedge
- x. $(p \implies q) \wedge (q \implies r) \implies (p \implies r)$ przechodność implikacji
- xi. $(p \implies q) \iff (\neg p \vee q)$ eliminacja implikacji
- xii. $(p \iff q) \iff (p \implies q) \wedge (q \implies p)$ eliminacja równoważności
- xiii. $\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$
- xiv. $\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$ prawa de Morgana \wedge
- xv. $\neg(p \implies q) \iff p \wedge \neg q$ negacja implikacji
- xvi. $(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p)$ kontrapozycja
- xvii. $p \implies (\neg p \implies q)$

A.

p	q	$\neg p \implies q$	$p \implies (\neg p \implies q)$
0	0	0	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

B. Przypuszcmy że przy pewnym wartościowaniu formuła jest fałszywa. Wtedy p musi być prawdziwe, a następnik fałszywy. Jeśli p jest prawdziwe, to następnik też jest prawdziwy, więc implikacja musi wartościować się do prawdy.

(i) Podejście aksjomatyczne do rachunku zdań

- i. Def. Aksjomat - formuła rachunku zdań ($\in Z$) o której przyjmujemy, że jest prawdziwa
- ii. Def. Dowód formalny formuły $\beta \in Z$ jest to ciąg formuł $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in Z$ taki, że
 - A. $\alpha_n = \beta$
 - B. dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ α_i jest aksjomatem, lub istnieją $j, k \in 1, 2, \dots, i-1$ takie że $j < k$ oraz $\alpha_k = (\alpha_j \implies \alpha_i)$
- iii. Def. Formułę nazywamy twierdzeniem rachunku zdań jeśli istnieje jej dowód formalny
- iv. Aksjomaty rachunku zdań (przykładowo) ($A, B, C \in Z$) (nie trzeba pamiętać)
 - A. $(A \implies (B \implies A))$
 - B. $(A \implies (B \implies C)) \implies ((A \implies B) \implies (A \implies C))$
 - C. $(\neg A \implies B) \implies ((\neg A \implies \neg B) \implies A)$
- v. Twierdzenie o pełności
 - A. Formuła rachunku zdań jest twierdzeniem \iff jest tautologią
- vi. Przykład dowodu formalnego formuły $\alpha \implies \alpha$ ($A = \alpha, B = \beta, C = \alpha$):
 - A. $\alpha_1 = (\alpha \implies (\beta \implies \alpha) \implies \alpha)$ - aksjomat 1
 - B. $\alpha_2 = (\alpha \implies (\beta \implies \alpha)) \implies ((\alpha \implies \beta) \implies (\alpha \implies \alpha))$ - aksjomat 2
 - C. α_3

(j) Tw. Każda formuła F zapisana w języku rachunku zdań sprowadza się do postaci dysjunktywno koniunktywnej (DNF). Czyli dla każdej F istnieje F' w DNF tak, że $F \iff F'$

- i. DNF to drzewkowo alternatywy na samej górze, poziom niżej koniunkcja, dwa poziomy niżej zmienna lub jej negacja