

0 CAŁKA RIEMANNA

1. $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ - funkcja ograniczona

$\Pi_n = (x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_{kn}^{(n)})$ - ciąg podziałów odcinka $< a, b >$ mówimy, że ten ciąg jest normalny, jeśli $\delta(\Pi_n) := \max_{i \in 1, \dots, kn} (x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) \rightarrow 0$

$\omega_n = (\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_{kn}^{(n)})$ - ciąg wartościowań, tzn $\xi_i^{(n)} \in < x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)} >$

- (a) Def. Jeśli istnieje $\sigma \in \mathbb{R}$ taka, że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $\{\Pi_n\}$ i dowolnego ciągu wartościowań $\{\omega_n\}$ mamy

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k f(\xi_i^{(n)}) \cdot (x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = \sigma$, (lewa strona równania - suma całkowa Riemanna) to wtedy mówimy, że f jest całkowalna w sensie Riemanna na $< a, b >$. W przypadku całkowalności σ nazywamy całką Riemanna funkcji f na $< a, b >$ i oznaczamy $\int_a^b f(x) dx$

2. Twierdzenie 0.5 (Podstawowy wzór rachunku całkowego). Jeśli $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i F to dowolna funkcja pierwotna f , to (całka Riemanna) $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$ (całka oznaczona)

3. Własności całki Riemanna

- (a) Def: Jeśli $-\infty < a < b < \infty$, to $\int_a^a f(x) dx = 0$ i $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

- (b) Własność 0.2: Jeśli $f, g : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ są całkowalne w sensie Riemanna na $< a, b >$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, to $\alpha f + \beta g$ też jest całkowalna w sensie Riemanna na $< a, b >$ i

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

- (c) Własność 0.4: Jeśli $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $< a, b >$ i $\forall x \in < a, b > f(x) \geq 0$, to $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

- (d) Własność 0.5: Jeśli $f, g : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ są całkowalne w sensie Riemanna i $\forall x \in < a, b > f(x) \leq g(x)$, to

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$\text{D: Z założenia mamy } \forall x \in < a, b > g(x) - f(x) \geq 0 \implies \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0 \implies \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0 \iff \int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$$

- (e) Własność 0.6: Jeśli $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $< a, b >$, to $|f|$ też jest całkowalna w sensie Riemanna na $< a, b >$ i

$$|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

- (f) Własność 0.7: Jeśli $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $< a, b >$ i $M = \sup_{x \in < a, b >} f(x)$, to $\int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

$$\text{D: } \forall x \in < a, b > f(x) \leq M \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = M \int_a^b 1 dx = M(b-a)$$

- (g) Własność 0.8: Jeśli $g : < a, b > \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$ jest klasy C^1 (ciągła pierwsza pochodna) i $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to

$$\int_a^b f(x) dx \cdot g'(x) dx = \begin{cases} t = g(x) \\ dt = g'(x) dx \\ a \rightarrow g(a) = \alpha \\ b \rightarrow g(b) = \beta \end{cases} = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$$

D: Niech F będzie funkcją pierwotną f , tzn $\forall x \in Y F'(x) = f(x)$. Używając podstawowego wzoru rachunku całkowego, otrzymujemy

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = F(\alpha) - F(\beta)$, (*) ponadto $(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$, co oznacza, że $F(g(x))$ to funkcja pierwotna $f(g(x))g'(x)$. Z podstawowego wzoru rachunku całkowego otrzymujemy $\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(b)) - F(g(a)) = F(\beta) - F(\alpha)$. Z tego i z (*) otrzymujemy tezę

- (h) Własność 0.9: (całkowanie przez części): Jeśli $f, g : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ są klasy C^1 , to $\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$ gdzie $[f(x)g'(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$

D: Wzór ten wynika ze wzoru na pochodną iloczynu. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ więc $[f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx$ skąd $\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$

- (i) Własność 0.10: (twierdzenie o wartości średniej rachunku całkowego).

Jeśli $f, g : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe i g jest nieujemna lub niedodatnia, to $\exists \xi \in < a, b > \int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$

Dowód: (na ćwiczeniach)

Wniosek: $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ - funkcja ciągła $\xrightarrow{g(x) \equiv 1} \exists \xi \in < a, b > \int_a^b f(x) dx = f(\xi) \int_a^b 1 dx \implies \exists \xi \in < a, b > f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$

1 CAŁKI NIEWŁAŚCIWE

1. Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju: $\int_a^\infty f(x)dx$, $\int_{-\infty}^b f(x)dx$, $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$

(a) Def: Jeśli $f : < a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $< a, \beta >$ dla każdego $\beta > a$ i istnieje granica $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_a^\beta f(x)dx$, to granicę tą nazywamy całką niewłaściwą pierwszego rodzaju i oznaczamy $\int_a^\infty f(x)dx$.

$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_a^\beta f(x)dx$. Ponadto jeśli powyższa granica istnieje i jest skończona, to całkę niewłaściwą nazywamy zbieżną; w pozostałych przypadkach nazywamy ją rozbieżną.

(b) Całkę $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ definiujemy analogicznie, tzn $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_\alpha^b f(x)dx$ jeśli tylko $f : (-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $< \alpha, b >$ dla dowolnego $\alpha < b$ i powyższa granica istnieje.

(c) Def.: Jeśli $f : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $< \alpha, \beta >$ dla wszystkich $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ i istnieje $c \in \mathbb{R}$ takie, że istnieje granica $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_\alpha^c f(x)dx$ oraz $\int_c^\beta f(x)dx$, to $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$ o ile wyrażenie po prawej stronie ma sens, tzn nie otrzymujemy $[\infty - \infty]$ lub $[-\infty + \infty]$. Ponadto o ile te granice istnieją i są skończone, to całkę nazywamy zbieżną; w pozostałych przypadkach - rozbieżną.

Uwaga: Jeśli w powyższej definicji wstawimy $-\alpha = \beta \stackrel{\text{ozn}}{=} T$, to po prawej stronie otrzymamy $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^c f(x)dx + \lim_{T \rightarrow \infty} \int_c^T f(x)dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(x)dx$ - tzn wartość główna całki, to NIE to samo co $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$

Przykład: $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^3 dx}{x^4+2} = \int_{-\infty}^0 \frac{x^3 dx}{x^4+2} + \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{x^4+2} = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_\alpha^0 \frac{x^3 dx}{x^4+2} + \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^\beta \frac{x^3 dx}{x^4+2} =$ (kilka prostych kroków) $= [-\infty + \infty]$ całka rozbieżna

wartość główna całki $= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{x^3 dx}{x^4+2} dx =$ (znowu) $= 0$

2. Całki niewłaściwe drugiego rodzaju:

$f : < a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

Def: Jeśli $f : < a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $< a, \beta >$ dla każdej $a < \beta < b$ i istnieje granica $\lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta f(x)dx$, to granicę tą nazywamy całką niewłaściwą drugiego rodzaju i oznaczamy $\int_a^b f(x)dx$: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta f(x)dx$

Dla $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definiujemy analogicznie $\int_a^b f(x)dx : \int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_\alpha^b f(x)dx$ jeśli f jest całkowalna w sensie Riemanna na $< \alpha, b >$ dla każdej $a < \alpha < b$ i granica istnieje