Relacje

1. X, Y - zbiory
   Def: **Relacją dwuargumentową** nazywamy podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$
   Zamiast $< x, y > \in R$ piszemy $x\,R\,y$

2. Def: $R \subseteq X \times Y$
   Zbiór $D_R = \{x \in X : \exists_{y \in Y} < x, y > \in R\}$ nazywammy dziedziną relacji R
   Na przykład $R = \{< x, y > \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ to koło

3. Jeśli $X = Y$, to mówimy, że relacja $R \subseteq X^2$ jest **określona** na zbiorze X

4. Relacja R jest **pusta** jeśli jest zbiorem pustym
   pełna, jeśli $R = X \times Y$

5. Def: Relacja **odwrotna** do relacji $R \subseteq X \times Y$ to relacja $R^{-1} = \{< y, x > \in Y \times X :< x, y > \in R\}$

6. Def: **Złożeniem** relacji $R \subseteq X \times Y$ oraz relacji $S \subseteq Y \times Z$ nazywamy relację $S \circ R = \{< x, z > \in X \times Z : \exists_{y \in Y} < x, y > \in \mathbb{R} \wedge < y, z > \in S\}$

7. Def:
   (a) R jest **zwrotna**, jeśli $\forall_{x \in X} x\,R\,x$
   (b) R jest **symetryczna**, jeśli $\forall_{x,y \in X} x\,R\,y \implies y\,R\,x$
   (c) R jest **przechodnia**, jeśli $\forall_{x,y,z, \in X}(x\,R\,y \wedge y\,R\,z) \implies x\,R\,z$
   (d) R jest **antysymetryczna**, jeśli $\forall_{x,y \in X}(x\,R\,y \wedge y\,R\,x) \implies x = y$
   (e) R jest **przeciwzwrotna**, jeśli $\forall_{x \in X} \neg(x\,R\,x)$
   (f) R jest **przeciwsymetryczna**, jeśli $\forall_{x,y \in X} x\,R\,y \implies \neg(y\,R\,x)$
   (g) R jest **spójna**, jeśli $\forall_{x,y \in X} x\,R\,y \wedge y\,R\,x \vee x = y$

8. Def: Relację $R \subseteq X^2$nazywamy relację **równoważności** jeśli R jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, na przykład
   Relacja równości
   Relacja równoległości
   Relacja pełna $R = X^2$dla dowolnego zbioru x
   Relacja $\equiv_n$ - przystawanie modulo
   Relacja $R \subseteq \mathbb{R}^2$, $x\,R\,y \iff \exists_{q \in \mathbb{Q}} x + q = y$
   Relacja dla par wektorów R taka że $< a, b > R < c, d >$ gdy $b - a = d - c$
   Relacja $\iff$, relacja $a\,R\,b := a \implies b \wedge b \implies a$

9. Def: Niech $\sim \subseteq X \times X$ będzie relacją równoważności i $a \in X$
   Zbiór $[a]_\sim = \{x \in X : x \sim a\}$ nazywamy klasą **abstrakcji (równoważności)** dla elementu a
   Element a nazywamy reprezentantem klasy abstrakcji $[a]_\sim$

10. Własności klas abstrakcji
    (a) $\forall_{a \in X} a \in [a]_\sim$
    (b) $\forall_{a,b \in X} b \in [a]_\sim \implies a \in [b]_\sim$
    (c) $\forall_{a,b \in X} [a]_\sim = [b]_\sim \iff a \sim b$
    (d) $\forall_{a,b \in X}([a]_\sim = [b]_\sim) \vee [a]_\sim \cap [b]_\sim = \emptyset$
    (e) $\bigcup_{a \in X} [a]_\sim = X$

11. **Podziałem zbioru** X nazywamy rodzinę $\{A_i : i \in I\}$ taką, że
    $\forall_{i \in I} A_i \neq \emptyset$
    $\forall_{i,j \in I}(i \neq j \implies A_j \cap A_i = \emptyset)$
    $\bigcup_{i \in I} A_i = X$
    (a) Wniosek : Rodzina klas abstrakcji relacji równoważności $\sim \subseteq X^2$ jest podziałem x

12. Def: $\sim$- relacja równoważności na X
    Zbiór klas abstrakcji relacji $\sim$ nazywamy **zbiorem ilorazowym** i oznaczamy $X_{/\sim}$

13. Twierdzenie: Niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie podziałem zbioru X. Wtedy istineje relacja równoważności $\sim$ na X taka, że $X_{/\sim} = \{A_i : i \in I\}$