

1. :

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$$

$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3$$

$$6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 5$$

2. :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 2 \\ 6 & 9 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$x_1 + \frac{3}{2}x_2 + 2x_4 = 0$$

$$x_3 - 2x_4 = 1$$

: Rozwiązanie = $\{(-\frac{3}{2}x_2 - 2x_4, x_2, 1 + 2x_4, x_4) : x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$ 3. Zbiór K zawierający co najmniej dwa elementy nazywamy ciałem, jeśli

(a) $K \times K \rightarrow K \quad (x, y) \rightarrow x \oplus y$

(b) $K \times K \rightarrow K \quad (x, y) \rightarrow x \odot y$

(c) Wybierane są dwa elementy K - element zerowy oznaczamy 0, element jedynkowy 1i. Spełnione są następujące warunki dla każdych $a, b, c \in K$

A. $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ - łączność

B. $a \oplus b = b \oplus a$ - przemienność

C. $0 \oplus a = a$ - element neutralny

D. $\forall a \in K \exists p \in K a \oplus p = 0$ - istnienie elementu przeciwnego

E. $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$ - łączność

F. $a \odot b = b \odot a$ - przemienność

G. $1 \odot a = a$ - element neutralny

H. $\forall a \in K \setminus \{0\} \exists p \in K a \odot p = 1$ - istnienie elementu odwrotny

I. $(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)$

(d) Przykłady - $K = \mathbb{R} \quad (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1), (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$

$$\begin{array}{ccccc} & +_2 & 0 & 1 & \\ \text{i. } \{Z_2, +_2, \cdot_2, 0, 1\} - & 0 & 0 & 1 & \text{(xor) oraz} \\ & 1 & 1 & 0 & \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & \cdot_2 & 0 & 1 & \\ & 0 & 0 & 0 & \text{(koniunkcja)} \\ & 1 & 0 & 1 & \end{array}$$

(e) Def. K ciało. Podzbiór $L \subset K$ nazywamy podciałem K jeśli dla dowolnych $a, b \in L$

i. $a + b \in L, a \cdot b \in L, -a \in L, a^{-1} \in L$

ii. Przykład: $Z_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$

A. tzn $a +_n b := (a + b) \% n$

B. $a \cdot_n b := (a \cdot b) \% n$

C. Dla na przykład Z_6 nie zawsze spełniona jest odwracalnośćiii. Kiedy $(Z_n, +_n, \cdot_n, 0, 1)$ jest ciałem?iv. Kiedy $\forall k \in Z_n k \in Z_n$ ma element odwrotny?4. Def. Macierzą $m \times n$ (o m wierszach i n kolumnach) o wyrazach ze zbioru X nazywamy

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, a_{ij} \in X, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

(b) Formalnie: $A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow X, (i, j) \mapsto a_{ij} = A(i, j)$

5. $M_n^m(x)$ - zbiór wszystkich macierzy $m \times n$ o wspólnym X

$$(a) \quad U : \begin{array}{c} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \quad - \text{ macierz współczynników układu } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

6. Def. $A \in M_n^m(K)$ Operacjami elementarnymi macierzy A nazywamy

- (a) Dodanie do wiersza innego przemnożonego przez $a \in K$ ($r_i + ar_j$)
- (b) $r_i \leftrightarrow r_j$
- (c) ar_i , $a \neq 0$

7. Formalna definicja - jak się macierz ułoży w takie jakby schodki to jest postać schodkowa

(a) Mówimy, że macierz $A \in M_n^m(K)$ jest w postaci schodkowej, jeśli:

- i. Każdy wiersz zerowy w A znajduje się poniżej każdego wiersza niezerowego
- ii. Dla każdego $i > 1$ pierwszy od lewej $\neq 0$ wyraz w i -tym wierszu znajduje się w kolumnie na prawo od pierwszego $\neq 0$ wyrazu $i - 1$ wiersza
- iii. Macierz jest w **zredukowanej** postaci schodkowej, jeśli jest w postaci schodkowej i w każdym niezerowym $\neq 0$ wierszu pierwszy $\neq 0$ wyraz to 1, i jest on jedynym różnym od zera wyrazem w swojej kolumnie

8. Niech K ciało. Każda $\neq 0$ macierz $A \in M_n^m(K)$ jest równoważna (A jest równoważne B , $A \approx B$ jeśli z A możemy otrzymać B za pomocą skończonej liczby operacji elementarnych) macierzą w postaci schodkowej i z macierzą w postaci schodkowo zredukowanej.

(a) Z tego wynika, że każdy układ równań o współczynnikach w K ma rozwiązanie