Konstrukcja von Neumanna liczb naturalnych.

Definicja 1 $0 := \emptyset$ - *liczba naturalna zero.*
Jeżeli n jest liczbą naturalną, to następną po niej jest liczba

$$n' := \{n\} \cup n.$$

Istnienie liczb naturalnych gwarantują: Aksjomat zbioru pustego, Aksjomat pary nieuporządkowanej oraz Aksjomat sumy.

Przykład 2 $1 := 0' = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$
$2 := 1' = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$3 := 2' = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Uwaga 1 $n \in n'$ *oraz* $n \subseteq n'$.

Aksjomat nieskończoności. Istnieje zbiór X (tzw. zbiór *induktywny*) taki, że:

1. $\emptyset \in X$,
2. $\forall y \; (y \in X \Rightarrow y \cup \{y\} \in X)$.

Aksjomat nieskończoności gwarantuje istnienie zbioru $\mathbb{N}$ wszystkich liczb naturalnych.
Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ jest najmniejszym (ze względu na inkluzję) zbiorem induktywnym.

Fakt 3 $\forall x \; x \in \mathbb{N} \Rightarrow (x = \emptyset \;\vee\; \exists y \; (y \in \mathbb{N} \wedge y' = x))$.

Twierdzenie 4 (O indukcji matematycznej.)
Dla dowolnego zbioru P, jeśli

- $P \subseteq \mathbb{N}$
- $\emptyset \in P$
- $\forall n \; n \in P \Rightarrow n' \in P$

to $P = \mathbb{N}$.

Fakt 5 *Dla dowolnej liczby naturalnej n i dowolnego zbioru Y:*

$$Y \in n \;\Rightarrow Y \;\subseteq n.$$

Własności liczb naturalnych. Niech $n, m \in \mathbb{N}$. Wtedy

1. $m' = n' \;\Rightarrow\; m = n$
2. $m \subseteq n \;\wedge\; m \neq n \;\Rightarrow\; m \in n$
3. $m \subseteq n \;\vee\; n \subseteq m$

4. $m \in n$ albo $m = n$ albo $n \in m$

Porządek w zbiorze liczb naturalnych. Niech $k, n, m \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$m \leqslant n \overset{def}{\Leftrightarrow} m \subseteq n$$
$$m < n \overset{def}{\Leftrightarrow} m \in n.$$

Własności relacji $\leqslant$ oraz $<$. Niech $k, n, m \in \mathbb{N}$. Wtedy

1. $m < n \;\Rightarrow\; m \leqslant n$
2. $(m \leqslant n \;\wedge\; m \neq n) \;\Rightarrow\; m < n$
3. $m \leqslant n \;\vee\; n \leqslant m$
4. $m < n$ albo $m = n$ albo $n < m$
5. $m = n \;\Leftrightarrow\; (m \leqslant n \;\wedge\; n \leqslant m)$
6. $\sim (n < n)$
7. $k \leqslant m \;\wedge\; m \leqslant n \;\Rightarrow\; k \leqslant n$
8. $k < m \;\wedge\; m \leqslant n \;\Rightarrow\; k < n$
9. $k \leqslant m \;\wedge\; m < n \;\Rightarrow\; k < n$
10. $k < m \;\wedge\; m < n \;\Rightarrow\; k < n$

Działania w zbiorze liczb naturalnych.

Definicja 6 *Funkcję* $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *zdefiniowaną następująco*

$$+(0, m) \overset{ozn}{=} 0 + m := m$$
$$+(n', m) \overset{ozn}{=} n' + m := (n + m)'$$

nazywamy dodawaniem liczb naturalnych.

Definicja 7 *Funkcję* $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *zdefiniowaną następująco*

$$\cdot(0, m) \overset{ozn}{=} 0 \cdot m := 0$$
$$\cdot(n', m) \overset{ozn}{=} n' \cdot m := (n \cdot m) + m$$

nazywamy mnożeniem liczb naturalnych.

Własności działań w zbiorze liczb naturalnych. Niech $k, n, m \in \mathbb{N}$. Wtedy

1. $k + (m + n) = (k + m) + n$
2. $n + 0 = n$
3. $k' + m = k + m'$
4. $k + m = m + k$
5. $k \cdot 1 = k$
6. $k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$
7. $k \cdot (m \cdot n) = (k \cdot m) \cdot n$
8. $k \cdot 0 = 0$
9. $k \cdot m = m \cdot k$
10. $k + n = k + m \;\Rightarrow\; n = m$

Konstrukcja zbioru liczb całkowitych.
Niech $\sim \subseteq \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$ będzie relacją określoną następująco:

$$(p, q) \sim (k, l) \;\Leftrightarrow\; p + l = q + k.$$

$\sim$ jest relacją równoważności.

Definicja 8 *Zbiorem liczb całkowitych nazywamy zbiór ilorazowy relacji $\sim$:*

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N}/_{\sim}.$$

Przykład 9 *Niech $n \in \mathbb{N}$.*
$[(0,0)]_\sim = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + 0 = y + 0\} = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{N}\}$
$[(n,0)]_\sim = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + 0 = y + n\} = \{(y + n, y) \mid y \in \mathbb{N}\}$
$[(0,n)]_\sim = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + n = y + 0\} = \{(x, x + n) \mid x \in \mathbb{N}\}$

Działania w zbiorze liczb całkowitych. Niech $(p, q), (k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\text{Dodawanie}: &\quad [(p,q)]_\sim \oplus [(k,l)]_\sim := [(p + k, q + l)]_\sim \\
\text{Mnożenie}: &\quad [(p,q)]_\sim \odot [(k,l)]_\sim := [(pk + ql, qk + pl)]_\sim \\
\text{Odejmowanie}: &\quad [(p,q)]_\sim \ominus [(k,l)]_\sim := [(p + l, q + k)]_\sim
\end{aligned}$$

Twierdzenie 10 *Działania dodawania, mnożenia oraz odejmowania zdefiniowane w zbiorze liczb całkowitych są dobrze określone (tzn. klasy będące wynikiem działań nie zależą od wyboru reprezentantów).*

Dowód (dla działania dodawania i mnożenia):
Dowód poprawności definicji polega na wykazaniu, że wynik działania nie zależy od wyboru reprezentantów klas na których wykonujemy działanie. Dla dodawania oznacza to, że jeśli $[(p,q)]_\sim = [(s,t)]_\sim$ i $[(k,l)]_\sim = [(a,b)]_\sim$ to $[(p,q)]_\sim \oplus [(k,l)]_\sim = [(s,t)]_\sim \oplus [(a,b)]_\sim$.
Równoważnie, jeśli $(p,q) \sim (s,t)$ i $(k,l) \sim (a,b)$ to $(p+k, q+l) \sim (s+a, t+b)$.
Z definicji relacji założenie jest równoważne warunkowi: $p+t = s+q$ i $k+b = a+l$. Dodając stronami otrzymujemy $p+k+t+b = q+l+s+a$, co oznacza, że $(p+k, q+l) \sim (s+a, t+b)$.
Podobnie, aby udowodnić poprawność definicji mnożenia wystarczy wykazać, że jeśli $(p,q) \sim (s,t)$ i $(k,l) \sim (a,b)$ to $(pk+ql, qk+pl) \sim (sa+tb, sb+at)$.
Z definicji relacji założenie jest równoważne warunkowi: $p+t = s+q$ i $k+b = a+l$. Mnożymy pierwsze równanie przez k, drugie przez s, następnie pierwsze zapisane w odwrotnej kolejności mnożymy przez l a drugie (również w odwróconej kolejności) przez t. Dodając wszystkie cztery równania stronami otrzymujemy:
$pk+tk+sk+sb+ta+tl+sl+ql = sk+kq+sa+sl+tk+tb+pl+lt$. Po zredukowaniu mamy $pk+ql+sb+at = sa+tb+qk+pl$, co po skorzystaniu z definicji relacji $\sim$ kończy dowód.

Uwaga 2 *Dla dowolnych* $p, q \in \mathbb{N}$,
$[(p,q)]_\sim \oplus [(q,p)]_\sim = [(p+q, q+p)]_\sim = [(0,0)]_\sim$.
W szczególności, $[(p,0)]_\sim \oplus [(0,p)]_\sim = [(0,0)]_\sim$.

Własności działań w zbiorze liczb całkowitych. Niech $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Wtedy

1. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$
2. $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$
3. $x \oplus y = y \oplus x$
4. $x \odot y = y \odot x$
5. $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$

Porządek w zbiorze liczb całkowitych. Niech $k, n, p, q \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$[(p,q)]_\sim \preceq [(k,n)]_\sim \;\Leftrightarrow\; p+n \leqslant q+k.$$

Uwaga 3 *Zbiór* $(\mathbb{Z}, \preceq)$ *jest uporządkowany liniowo. Ponadto, dla* $n \in \mathbb{N}$

$$[(0,0)]_\sim \preceq [(n,0)]_\sim$$
$$[(0,n)]_\sim \preceq [(0,0)]_\sim$$

Funkcja $i : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto [(n,0)]_\sim$ jest naturalnym włożeniem zbioru liczb naturalnych w zbiór liczb całkowitych. Dla $n, m \in \mathbb{N}$

$$i(n+m) = i(n) \oplus i(m)$$
$$i(n \cdot m) = i(n) \odot i(m)$$
$$i(n) \preceq i(m) \;\Leftrightarrow\; n \leqslant m$$

Dzięki temu możemy utożsamiać liczbę całkowitą $[(n,0)]_\sim = i(n)$ z odpowiadającą jej liczbą naturalną n oraz liczbę $-n := [(0,n)]_\sim$ z liczbą przeciwną do $[(n,0)]_\sim$.
Przy takich oznaczeniach

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Konstrukcja zbioru liczb wymiernych.
Niech $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ i niech $\varrho \subseteq (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)$ będzie relacją określoną następująco:

$$(p,q)\varrho(k,l) \ \Leftrightarrow \ pl = qk.$$

ϱ jest relacją równoważności.

Definicja 11 *Zbiorem liczb wymiernych nazywamy zbiór ilorazowy relacji ϱ:*

$$\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\varrho.$$

Klasę pary $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ będziemy oznaczać jako ułamek $\frac{p}{q} := [(p,q)]_\varrho$.

Przykład 12 *Niech $p \in \mathbb{Z}$.*
$\frac{0}{1} = [(0,1)]_\varrho = \{(k,l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid k \cdot 1 = l \cdot 0\} = \{(0,l) \mid l \in \mathbb{Z}^*\}$
$\frac{1}{1} = [(1,1)]_\varrho = \{(k,l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid k \cdot 1 = l \cdot 1\} = \{(k,k) \mid k \in \mathbb{Z}^*\}$
$\frac{p}{1} = [(p,1)]_\varrho = \{(k,l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid k \cdot 1 = p \cdot l\} = \{(pl,l) \mid l \in \mathbb{Z}^*\}$

Działania w zbiorze liczb wymiernych. Niech $p,k \in \mathbb{Z}$, $q,l \in \mathbb{Z}^*$:

$$\begin{aligned}
\text{Dodawanie :}\quad & \frac{p}{q} \oplus \frac{k}{l} := \frac{pl+kq}{ql} \\
\text{Odejmowanie :}\quad & \frac{p}{q} \ominus \frac{k}{l} := \frac{pl-kq}{ql} \\
\text{Mnożenie :}\quad & \frac{p}{q} \odot \frac{k}{l} := \frac{pk}{ql} \\
\text{Dzielenie :}\quad & \frac{p}{q} \oslash \frac{k}{l} := \frac{pl}{kq}, \text{ dla } \frac{k}{l} \neq \frac{0}{1}
\end{aligned}$$

Twierdzenie 13 *Działania dodawania, mnożenia, odejmowania oraz dzielenia zdefiniowane w zbiorze liczb wymiernych są dobrze określone (tzn. klasy będące wynikiem działań nie zależą od wyboru reprezentantów).*

Uwaga 4 *Dla $p \in \mathbb{Z}$ i $q \in \mathbb{Z}^*$*

$$\frac{p}{1} \oslash \frac{q}{1} = \frac{p \cdot 1}{q \cdot 1} = \frac{p \cdot 1}{1 \cdot q} = \frac{p}{1} \odot \frac{1}{q} = \frac{p}{q}.$$

Porządek w zbiorze liczb wymiernych. Niech $p,k \in \mathbb{Z}$, $q,l \in \mathbb{Z}^*$. Wtedy

$$\frac{p}{q} \preceq \frac{k}{l} \ \Leftrightarrow \ pl \leqslant kq \ \wedge \ q,l > 0.$$

Funkcja $j : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $k \mapsto [(k,1)]_\varrho = \frac{k}{1}$ jest naturalnym włożeniem zbioru liczb całkowitych w zbiór liczb wymiernych. Dla $k, l \in \mathbb{Z}$

$$j(k+l) = j(k) \oplus j(l)$$
$$j(k \cdot l) = j(k) \odot j(l)$$
$$k \leqslant l \;\Rightarrow\; j(k) \preceq j(l)$$

Dzięki temu możemy utożsamiać liczbę wymierną $\frac{k}{1} = [(k,1)]_\varrho = j(k)$ z odpowiadającą jej liczbą całkowitą k oraz liczbę $l^{-1} := \frac{1}{l}$, dla $l \in \mathbb{Z}^*$, z liczbą odwrotną do $\frac{l}{1}$. Przy takich oznaczeniach

$$\mathbb{Q} := \{pq^{-1} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*\}.$$

Twierdzenie 14 *Relacja $\preceq$ jest gęstym porządkiem liniowym zbioru $\mathbb{Q}$.*