

## 1. Przypomnienie co to macierz schodkowa

2. Twierdzenie: Każda macierz  $A \in M_m^n(K)$  jest równoważna z macierzą w postaci schodkowej (potrzebne operacje a,b) oraz z macierzą w postaci schodkowej zredukowanej (a,b,c)

(a)  $r_i \leftrightarrow r_j$

(b)  $r_i + ar_j$

(c)  $a \neq 0 : ar_i$

(d) Wniosek - Każdy niesprzeczny układ równań ma rozwiązanie

(e) Dowód:

i. Dla macierzy zerowej - OK - na przykład  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

ii. Indukcja:  $A \neq 0$

Jeden wiersz - od razu postać schodkowa

$ZJ - A$  ma  $m$  wierszy, jest niezerowa, jest w postaci schodkowej

: Możemy zrobić algorytm, dla którego jeśli  $A_m$  jest w postaci schodkowej to otrzymamy z  $A_{m+1}$  postać schodkową. Zerujemy odpowiednie kolumny ostatniego wiersza używając wierszy z  $A_m$ . Jeśli jakaś kolumna nie dała się wyzerować to wstawiamy wiersz w odpowiednie miejsce. Jak mamy schodkową to łatwo można zrobić schodkową zredukowaną z c. Mamy schodki. Koniec dowodu.

3. Definicja: Wielomianem zmiennej  $x$  o współczynnikach w  $K$  nazywamy wyrażenie  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $a_0, \dots, a_n \in K$

(a) Każdy wielomian  $f$  wyraża funkcję  $f : K \rightarrow K$ ,  $s \mapsto a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n$ .  $f$  nazywamy funkcją wielomianową.

i. Pierwiastkiem wielomianu nazywamy  $s \in K : f(s) = 0$

ii.  $K = \mathbb{R} \vee \mathbb{C} \vee \mathbb{Q}$

(b) Przykład:  $K = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

i.  $|\{f : f : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2\}| = 4$ . W  $\mathbb{Z}_2$ , różne wielomiany oznaczają tę samą funkcję, na przykład  $x^2 + x + 1$  oraz  $x^3 + x + 1$

ii. Ciało w którym każdy wielomian  $n$ -tego stopnia ma  $n$  pierwiastków, to ciało algebraicznie domknięte.

(c) Zasadnicze twierdzenie algebry: Ciało liczb zespolonych jest ciałem algebraicznie domkniętym. To znaczy, że każdy wielomian o  $n$  współczynnikach w tym ciele ma  $n$  pierwiastków.  $\mathbb{R}$  nie jest algebraicznie domknięte

4.  $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow K, (i, j) \mapsto A(i, j) \text{ czyli } (a_{ij}) \text{ (i - wiersz, j - kolumna)}$

(a)  $r_i(A) = [a_{i1}, \dots, a_{in}]$ ,  $c^j(A) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$

(b)  $A_{(2,3)}^{(3,5,7)}$  bierze trzecią, piątą i siódmą kolumnę, z tylko drugim i trzecim rzędem.

(c)  $0_m^n = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$

(d) Macierz kwadratowa -  $m = n$

(e)  $\begin{bmatrix} x & & \\ & x & \\ & & x \end{bmatrix}$  - główna przekątna

(f) Jeśli poniżej głównej przekątnej same zera - górna trójkątna, na odwrót - dolna trójkątna, jeśli na górze i na dole same zera - diagonalna, jeśli dodatkowo na głównej przekątnej same jedynki - macierz jednostkowa

(g) Macierze możemy dodać, jeśli ich wymiary się zgadzają:  $(A+B)(i, j) = A(i, j) + B(i, j)$

(h)  $-A : (-A)(i, j) = -(A)(i, j)$

$$(i) \quad A \in M_m^n, B \in M_m^1 : \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \in M_m^1$$

$$i. \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(j) \quad A \in M_m^n, B \in M_n^k : A \cdot B \in M_m^k$$

$$i. \quad c^i(A \cdot B) = A \cdot c^i(B)$$

$$ii. \quad \text{więc } (A \cdot B)(i, j) := \sum_{s=1}^n A(i, s) \cdot B(s, j) = r_i(A)c^j(B)$$

$$iii. \quad r_i(AB) = r_i(A)B$$