Zbiory częściowo uporządkowane

1. Def: Relację $R \subseteq X \times X$ $(X \neq \emptyset)$ nazywamy **relacją częściowego porządku** ,jeśli R jest zwrotna, przechodnia i antysymetryczna.

2. **Zbiór częściowo uporządkowany** jest to para (X, R) gdzie X jest niepustym zbiorem a $R \subseteq X^2$ jest relacją częściowego porządku
   Przykłady:

   (a) $(\mathbb{R}, \leq), (P(X), \subseteq)$ dla niepustego X

   (b) $(\mathbb{N}, |)$ $a|b$ - a jest podzielne przez b

   (c) $(\mathbb{R}^X, \preceq)$ - $\mathbb{R}^X = \{f : f : X \to \mathbb{R}\}, f \preceq g \iff \forall_{x \in X} f(x) \leq g(x)$

   (d) $(\mathbb{R}^2, \preceq)$ - $\forall_{x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}} (x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2$

   (e) $(P, \preceq)$ - zbiór częściowo uporządkowany
   Definiujemy relację $\prec \subseteq P \times P$ i $\prec_{\bullet} \subseteq P \times P$ następująco
   $x \prec y \iff x \preceq y \wedge x \neq y$
   $x \prec_{\bullet} y \iff x \prec y \wedge \neg(\exists_{z \in P} x \prec z \prec y)$
   Jeśli $x \prec_{\bullet} y$ to mówimy, że **x jest poprzednikiem y**, oraz **y jest następnikiem x**
   Na przykład $(\mathbb{N}, \leq), n \in \mathbb{N}, n <_{\bullet} n + 1$

3. Def: **Diagramem Hassego** zbioru częsciowo uporządkowanego $(P, \preceq)$ nazywamy graf, którego wierzchołakmi są elementy zbioru P. Jeśli dla $x, y \in P$ zachodzi $x \prec y$, to x rysujemy niżej niż y. Ponadto dwa wierzchołki $x, y \in P$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy $x <_{\bullet} y$