02.10.2019
prof. dr hab. inż. Zbigniew Lonc
zblonc@mini.pw.edu.pl
pokój 558, konsultacje 12.15-13.00
http://pages.mini.pw.edu.pl/~loncz/www
username:student
pass:elitmxy
32 punkty na ćwiczeniach zwalnia z części egzaminu

1. Rachunek zdań
   (a) zdanie - wyrażenie któremu można przypisać jednoznacznie wartość prawdy lub fałszu
   (b) zdania:
      i. Paryż jest we Francji
      ii. -1>0
   (c) nie zdania:
      i. Niebieski to ładny kolor
   (d) Zmienne zdaniowe - p,q,r,s zazwyczaj - pod nie podstawiamy zdania
   (e) X - zbiór zmiennych zdaniowych
   (f) Ze zdań prostych budujemy zdania złożone za pomocą operatorów (spójników) logicznych
      i. Negacja, zaprzeczenie , ¬p - nieprawda że p,nie p (¬/ ∼)
      ii. Alternatywa $p \vee q$ (p lub q)
      iii. Koniunkcja $p \wedge q$ (p i q)
      iv. Implikacja $p \implies q$ (jeśli p to q)
      v. Równoważność $p \iff q$(p jest równoważne q)
   (g) Budujemy "język legalnych" formuł rachunku zdań (synktatyka)
      i. Def. Zbiór formuł rachunku zdań jest to najmniejszy zbiór Z taki, że
         A. Każda zmienna zdaniowa należy do Z
         B. Jeśli $\alpha, \beta \in Z$ to $\neg\alpha, \alpha \vee \beta, \alpha \wedge \beta, \alpha \implies \beta, \alpha \iff \beta \in Z$
      ii. Konwencja:
         A. Dla uproszczenia formuł przyjmujemy priorytet wykonywania operacji
         ¬, potem ∧/∨,potem $\implies$ / $\iff$
         A. $(((\neg q) \wedge p) \implies p) \iff (p \vee q)$ sprowadza się do $(\neg q \wedge p \implies p) \iff p \vee q$
      iii. X - zbiór zmiennych zdaniowych
         A. Def. Wartościowanie jest to funkcja V: X→ {0,1} (prawda,fałsz) - przypisuje zmiennym zdanoiwym wartości logiczne
         B.

p	¬p
1	0
0	1

         C.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \implies q$	$p \iff q$
0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1

      iv. Rozszerzamy wartościowanie na zbiór Z formuł rachunku zdań
         A. $\alpha, \beta \in Z$
         B. V : X→ $\{0, 1\}$
         C. $V(\neg\alpha) = \neg V(\alpha)$
         D. $V(\alpha \vee b) = V(\alpha) \vee V(\beta)$
         E. $V(\alpha \wedge b) = V(\alpha) \wedge V(\beta)$
         F. $V(\alpha \implies b) = V(\alpha) \implies V(\beta)$
         G. $V(\alpha \iff b) = V(\alpha) \iff V(\beta)$
         H. Przykład: $X = \{p, q\}$, $V(p) = 1$, $V(q) = 0$
         $V((\neg q \wedge p \implies p) \iff p \vee q) = 1$

(h) def. Tautologia rachunku zdań jest to formuła prawdziwa dla każdego wartościowania zmienych zdaniowych

i. $p \vee \neg p$ prawo wyłączonego środka

ii. $\neg(p \wedge \neg p)$ prawo sprzeczności

iii. $p \vee p \iff p$

iv. $p \wedge p \iff p$ idempotentność alternatywy i koniunkcji

v. $p \iff \neg(\neg p)$ podwójna negacja

vi. $(p \vee q) \wedge r \iff (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

vii. $(p \wedge q) \vee r \iff (p \vee r) \wedge (q \wedge r)$ prawo rozdzielności ^

viii. $(p \vee q) \vee r \iff p \vee (q \vee r)$

ix. $(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r)$ łączność ^

x. $(p \implies q) \wedge (q \implies r) \implies (p \implies r)$ przechodniość implikacji

xi. $(p \implies q) \iff (\neg p \vee q)$ eliminacja implikacji

xii. $(p \iff q) \iff (p \implies q) \wedge (q \implies p)$ eliminacja równoważności

xiii. $\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$

xiv. $\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$ prawa de Morgana^

xv. $\neg(p \implies q) \iff p \wedge \neg q$ negacja implikacji

xvi. $(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p)$ kontrapozycja

xvii. $p \implies (\neg p \implies q)$

A.

p	q	$\neg p \implies q$	$p \implies (\neg p \implies q)$
0	0	0	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

B. Przypuscmy że przy pewnym wartościowaniu formuła jest fałszywa. Wtedy p musi być prawdziwe, a nastepnik fałszywy. Jeśli p jest prawdziwe,to następnik też jest prawdziwy, więc implikacja musi wartościować się do prawdy.

(i) Podejście aksjomatyczne do rachunku zdań

i. Def. Aksjomat - formuła rachunku zdań ($\in Z$) o której przyjmujemy, że jest prawdziwa

ii. Def. Dowód formalny formuły $\beta \in Z$ jest to ciąg formuł $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n \in Z$ taki, że

A. $\alpha_n = \beta$

B. dla każdego $i \in \{1, 2, ..., n\}$ αjest aksjomatem, lub istnieją $j, k \in 1, 2, ...i - 1$takie że $j < k$ oraz $\alpha_k = (\alpha_j \implies \alpha_i)$

iii. Def. Formułę nazywamy twierdzeniem rachunku zdań jeśli istnieje jej dowód formalny

iv. Aksjomaty rachunku zdań (przykładowo) $(A, B, C \in\ Z)$ (nie trzeba pamiętać)

A. $(A \implies (B \implies A))$

B. $(A \implies (B \implies C)) \implies ((A \implies B) \implies (A \implies C))$

C. $(\neg A \implies B) \implies ((\neg A \implies \neg B) \implies A)$

v. Twierdzenie o pełności

A. Formuła rachunku zdań jest twierdzeniem $\iff$ jest tautologią

vi. Przykład dowodu formalnego formuły $\alpha \implies \alpha$ $(A = \alpha, B = \beta, C = \alpha)$:

A. $\alpha_1 = (\alpha \implies (\beta \implies \alpha) \implies \alpha)$ - aksjomat 1

B. α_2 =$(\alpha \implies (\beta \implies \alpha)) \implies ((\alpha \implies \beta) \implies (\alpha \implies \alpha))$ - aksjomat 2

C. α_3

(j) Tw. Każda formuła F zapisana w języku rachunku zdań sprowadza się do postaci dysjunktywno koniunktywnej (DNF). Czyli dla każdej F istnieje F' w DNF tak, że $F \iff F'$

i. DNF to drzewkowo alternatywy na samej górze, poziom niżej koniunkcja, dwa poziomy niżej zmienna lub jej negacja