KRYTERIA ZBIEŻNOŚCI CAŁEK NIEWŁAŚCIWYCH

Niech $b = \infty$ lub $b \in \mathbb{R}$ i $a < b$

1. Twierdzenie 1.1: (Kryterium porównawcze) Niech $f, g :< a, b) \to \mathbb{R}$ będą całkowalne w sensie Riemanna na $< a, \beta >$dla każdego $a < \beta < b$ i $\forall_{x \in <a,b)} 0 \le f(x) \le g(x)$. Wtedy:
   (a) Jeśli $\int_a^b g(x)dx$ jest zbieżna, to $\int_a^b f(x)dx$ też jest zbieżna.
   (b) Jeśli $\int_a^b f(x)dx$ jest rozbieżna, to $\int_a^b g(x)dx$ też jest rozbieżna
2. Twierdzenie 1.2: Jeśli $f :< a, b) \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $< a, \beta >$ dla każdego $a < \beta < b$ i $\int_a^b |f(x)|dx$ jest zbieżna, to $\int_a^b f(x)dx$ też jest zbieżna. W przypadku zbieżności mamy $|\int_a^b f(x)dx| \le \int_a^b |f(x)|dx$
   Analogiczne twierdzenia są prawdziwe także dla funkcji $f, g : (a, b >\to \mathbb{R}$ gdzie $a = -\infty$ lub $a \in \mathbb{R}$ i $a < b$
3. $$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx \text{ jest zbieżna } \iff p > 1$$
   $$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \text{ jest zbieżna } \iff p < 1$$
   Z czego $\int_0^\infty \frac{1}{x^p}$ jest rozbieżna
4. Przykłady:
   (a) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[4]{5x^5+1}}$ jest zbieżna, bo $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{5/4}}$ jest zbieżna (bo $p = \frac{5}{4} > 1$) z twierdzenia 1.1(a)
   (b) $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{x^3}} dx$ jest rozbieżna, bo $\int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}}$ jest rozbieżna (bo $p = \frac{3}{2} \le 1$) z twierdzenia 1.1(b)
   (c) $\int_2^\infty \frac{x \cdot \sin x}{(x^2+4)^2} dx : \forall_{x \in <2,\infty)} |\frac{x \cdot \sin x}{(x^2+4)^2}| = \frac{x \cdot |\sin x|}{(x^2+4)^2} \le \frac{x}{(x^2+4)^2} \le \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3}$. $\int_2^\infty \frac{1}{x^3}$ jest zbieżna, więc $\int_2^\infty |\frac{x \cdot \sin x}{(x^2+4)^2}|$ jest zbieżna więc $\int_2^\infty \frac{x \cdot \sin x}{(x^2+4)^2}$ jest zbieżna

2.ZASTOSOWANIA GEOMETRYCZNE CAŁKI RIEMANNA

1. Pole
   (a) Pole figury płaskiej pomiędzy wykresem funkcji $y = f(x)$, $x \in < a, b >$a osią OX
   Twierdzenie 2.1: Jeśli $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ jest ciągła i nieujemna i $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in < a, b >$ i $0 \le y \le f(x)\}$ to pole $D \overset{\text{ozn}}{=} |D| = \int_a^b f(x)dx$
   D: Niech $\Pi_n = (x_0^{(n)}, \dots x_n^{(n)})$ będzie podziałem odcinka $< a, b >$na n równych kawałków. Wtedy ciąg $\{\Pi_n\}$ jest normalnym ciągiem podziałów.
   $m_i^{(n)} = \inf_{x \in <x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}>} f(x)$, $M_i^{(n)} = \sup_{x \in <x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}>} f(x)$
   Wtedy $|D| \le \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \overset{n \to \infty}{\to} \int_a^b f(x)dx$ (suma prostokątów "przykrywających" figurę = górna suma całkowa Darboux)
   oraz $|D| \ge \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \overset{n \to \infty}{\to} \int_a^b f(x)dx$ (suma prostokątów "pod" figurą = dolna suma całkowa Darboux)
   f jest ciągła na $< a, b > \implies$ całkowalna w sensie Riemanna na $< a, b > \implies \int_a^b f(x)dx(\text{dolna}) = \int_a^b f(x)dx(\text{górna}) = \int_a^b f(x)dx(\text{Riemanna})$
   Z tw o 3 ciągach otrzymujemy $|D| = \lim_{n\to\infty} |D| = \int_a^b f(x)dx$
   (b) Pole figury płaskiej pomiędzy dwoma wykresami funkcji
   Twierdzenie 2.2: Jeśli $g, d :< a, b >\to \mathbb{R}$ są ciągłe i $\forall_{x \in <a,b>} d(x) \le g(x)$ i $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in < a, b >$ i $d(x) \le y \le g(x)\}$ to $|D| = \int_a^b [g(x) - d(x)]dx$
   D: 1: funkcja $d(x)$ jest nieujemna. $|D| = |D_g| - |D_d| \overset{\text{tw 2.1}}{=} \int_a^b g(x)dx - \int_a^b d(x)dx = \int_a^b [g(x) - d(x)]dx$
   2: funkcja $d(x)$ przyjmuje wartość ujemną, tzn $c \overset{\text{ozn}}{=} \inf_{x \in <a,b>} d(x) < 0$. Przesuwamy wykresy funkcji $d(x)$ i $g(x)$ o c jednostek do góry otrzymując funkcje $d(x) + c$ i $g(x) + c$ które są nieujemne. Przesunięcie nie zmienia pola figury zawartej pomiędzy dwoma wykresami. Z tego $|D| = |D_{g+c}| - |D_{d+c}| \overset{1:}{=} \int_a^b [g(x) + c - d(x) - c] = \int_a^b [g(x) - d(x)]$
   Z tego $|D| = \int_a^b [g(x) - d(x)]$
2. Długość łuku:
   Twierdzenie 2.3: Jeśli $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ jest klasy C^1, to długość łuku opisanego równaniem $y = f(x), x \in < a, b >$, dana

jest wzorem

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

3. Objętość bryły obrotowej
   Twierdzenie 2.2: Jeśli Jeśli $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ jest ciągła, to objętość bryły powstałej w wyniku obrotu funkcji $y = f(x)$, $x \in< a, b >$, wokół osi OX dana jest wzorem:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

   D: Dowód analogiczny do dowodu Twierdzenia 2.1, tylko że liczymy sumę objętości walców zamiast prostokątów.
   $m_i^{(n)} = \inf_{x \in < x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)} >} |f(x)|$, $M_i^{(n)} = \sup_{x \in < x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)} >} |f(x)|$
   $|V| \geq \sum_{i=1}^n \pi \cdot (m_i)^2 \cdot (x_i - x_{i-1}) = \pi \cdot \sum_{i=1}^n (m_i)^2 \cdot (x_i - x_{i-1}) \overset{n \to \infty}{\to} \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$ (dolna suma całkowa Darboux)
   $|V| \leq \sum_{i=1}^n \pi \cdot (M_i)^2 \cdot (x_i - x_{i-1}) = \pi \cdot \sum_{i=1}^n (M_i)^2 \cdot (x_i - x_{i-1}) \overset{n \to \infty}{\to} \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$ (górna suma całkowa Darboux)
   f jest ciągła w sensie Riemanna na $< a, b > \Longrightarrow$ f^2 też jest $\Longrightarrow$ (dolna suma)= (górna suma)= $\int_a^b [f(x)]^2 dx$
   Z tw o 3 ciągach otrzymujemy $|V| = \lim_{n \to \infty} V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$

SZEREGI LICZBOWE

1. Niech $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$. Rozważamy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots$
   Def. Ciąg $\{S_n\}$, gdzie $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_n$ nazywamy ciągiem sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
   Def. Jeśli ciąg sum cześciowych ma granicę (skończoną lub nie), $\lim_{n\to\infty} S_n$, to nazywamy ją sumą szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i zapisujemy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$. Ponadto, gdy granica ta istnieje i jest skończona, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy zbieżnym; w pozostałych zaś przypadkach (tzn, gdy granica ta nie istnieje lub istnieje i jest nieskończona) szereg ten nazywamy rozbieżnym
   Przykłady:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
   $S_n = a_1 + \cdots + a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \overset{n\to\infty}{\to} 1$
   Zatem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ jest zbieżny i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

   (b) Suma szeregu geometrycznego o ilorazie q: $1 + q + q^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ (<u>tutaj</u> umawiamy się, że $0^0 = 1$)
   $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} n & q = 1 \\ \frac{1-q^n}{1-q} & q \neq 1 \end{cases}$
   $$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \infty & q = 1 \\ \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \\ \infty & q > 1 \\ \text{brak granicy} & q \leq -1 \end{cases}$$
   Twierdzenie 3.1: Szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} (= \sum_{n=0}^{\infty} q^n)$ jest zbieżny $\iff$ $|q| < 1$. W przypadku zbieżności $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}$
   Ogólniej, $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ jest zbieżny $\iff$ $|q| < 1$ lub $a_1 = 0$. W przypadku zbieżności, $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny.
   Dowód nie wprost: Zakładamy, że szereg jest zbieżny, tzn istnieje skończona granica $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \overset{\text{ozn}}{=} S \in \mathbb{R}$
   $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$
   $$S_{2n} - S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{2n} - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n} = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{\text{n wyrazów}} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$
   $\forall_{n\in\mathbb{N}} S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2} \implies \lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) \geq \frac{1}{2}$
   Z drugiej strony $\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = S - S = 0$ - sprzeczność

2. Twierdzenie 3.2: Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ jest zbieżny $\iff$ $a > 1$ (rozbieżny $\iff$ $\alpha \leq 1$)

3. Twierdzenie 3.3: (podstawowy warunek zbieżności szeregu):
   Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
   D: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$
   $\forall_{n\geq 2} a_n = S_n - S_{n-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$