29.10.2019
$A(row, column)$, $A \in M_{rows}^{columns}$

1. $A \in M_m^n(K)$, $B \in M_n^p(K)$
   (a) $AB \in M_m^p(K)$
   (b) $A \cdot B(i,j) \overset{def.}{=} \sum_{k=1}^n A(i,k) \cdot B(k,j)$
      i. $c^j(A \cdot B) = Ac^j(B)$
      ii. $r_i(A \cdot B) = r_i(A) \cdot B$
   (c) Mnożenie macierzy nie musi być przemienne - zazwyczaj nie jest
   (d) Przykład - $A, B \in M_2^2(K)$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,$B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,$A \cdot B \neq B \cdot A$
2. Własności sumy i iloczynu - Niec $A, A', A'' \in M_m^n(K)$,$B, B \in M_n^p(K)$,$C \in M_p^r(K)$,$\lambda \in K$
   (a) $(A + A') + A'' = A + (A' + A'')$
   (b) $A + A' = A' + A$
   (c) $A + (-A) = 0_m^n$
   (d) $A + 0_m^n = A$
   (e) $(AB)C = A(BC)$
   (f) $(A + A')B = AB + A'B$
   $A(B + B') = AB + AB'$
      i. D: $[(A + A')B](i,j) = \sum_{k=1}^n (A + A')(i,k) \cdot B(k,j) = \sum_{k=1}^n (A(i,k) + A'(i,k)) \cdot B(k,j) = \sum_{k=1}^n A(i,k) \cdot B(k,j) + \sum_{k=1}^n A'(i,k) \cdot B(k,j) = AB(i,j) + A'B(i,j) = (AB + A'B)(i,j)$
   (g) $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$
   (h) $I_m A = A = AI_m$
3. Macierz transponowaną do $A \in M_m^n(K)$ nazywamy macierz $A^\top \in M_n^m(K)$, taką że $A^\top(i,j) = A(j,i)$
   (a) Przykład $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$
   (b) $(A^\top)^\top = A$
   (c) Def. Jeśli $A \in M_m^n(K)$ i $A = A^\top$to $A$ nazywamy macierzą symetryczną. Jeśli $A = -A^\top$,to $A$ nazywamy macierzą antysymetryczną
      i. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ - macierz symetryczna
      ii. $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ - macierz antysymetryczna (muszą być zera na przekątnej)
4. Własności operacji transponowania. $A, B \in M_m^n(K)$, $C \in M_m^p(K)$, $\lambda \in K$
   (a) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$
   (b) $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$
   (c) $(A^\top)^\top = A$
   (d) $I_n^\top = I_n$
   (e) $(AC)^\top = C^\top A^\top$
      i. D: $(AC)^\top(i,j) = (AC)(j,i) = \sum_{k=1}^n A(j,k) \cdot C(k,i) = \sum_{k=1}^n A^\top(k,j) \cdot C^\top(i,k) = \sum_{k=1}^n C^\top(i,k) \cdot A^\top(k,j) = (C^\top A^\top)(i,j)$

A teraz pora przejsć do prawdziwej algebry liniowej: Przestrzenie wektorowe.

**Przestrzenie wektorowe (liniowe)**

1. Def. Przestrzeń wektorową nad ciałem $K$ nazywamy zbiór $V \neq \emptyset$ z odwzorowaniami:

   $V \times V \to V: \ (u, v) \mapsto u + v$ - dodawanie wektorów

   $K \times V \to V \ (a, v) \mapsto a \cdot v$- mnożenie wektora przez skalar
   Oraz z wyróżnionym elementem $\mathbb{O} \in V$ (wektor zerowy), to znaczy dla każdych $u, v, u \in V, a, b \in K$

   (a) $u + (v + u) = (u + w) + v$
   (b) $u + v = v + u$
   (c) $\mathbb{O} + u = u$
   (d) $\forall_{u \in V} \exists_{u'} u + u' = \mathbb{O}$
   (e) $a \cdot (b \cdot u) = (a \cdot b) \cdot u$
   (f) $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$
   $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$
   (g) $1 \cdot v = v$

   Oznaczamy $V[K]$
   Przykłady przestrzeni liniowych:

   (a) $\mathbb{R}^2 = \{[x, y] : x, y \in \mathbb{R}\}$
   (b) $\mathbb{R}^n = \{[x_1, \ldots, x_n] : \forall_i x_i \in \mathbb{R}\}$ - wtedy $[x_1, \ldots x_n] + [y_1, \ldots, y_n] = [x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n]$ oraz $\lambda[x_1, \ldots, x_n] = [\lambda x_1, \ldots \lambda x_n]$
   (c) $K^n$- przestrzeń liniowa nad $K$
   (d) $L < K$ - $L$ podciało $K$: $\mathbb{R}$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$, $K$ nad $L$
   (e) $\mathbb{R}$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$, $K$ nad $K$
   (f) $V = M_m^n(K)$ - przestrzeń liniowa nad $K$
   (g) Wielomiany: $K[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n : \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in K\}$
   $\lambda(a_0 + \cdots + a_n x^n) = \lambda a_0 + \cdots + \lambda a_n x^n$
   $K[x]$ to przestrzeń liniowa nad ciałem $K$
   (h) $Map(X, K) = \{f : \ f : \ X \to K\}$ - $K$ ciało, $X$ niepusty zbiór

2. Def. Niech $V$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem $K$
   Niepusty podzbiór $U \subset V$ nazywamy podprzestrzenią przestrzeni $V$, jeśli dla każdych $u, v \in U$ oraz dla dowolnego $a \in K$ $u + v \in U, \ au \in U$

   (a) $U < V$ : Jeśli $U < V$ to $\mathbb{O} \in U$
   (b) Trywialne podprzestrzenie $\{\mathbb{O}\} < V$, $V < V$
   (c) $\mathbb{R}^2 < \mathbb{R}^3, K_{n-a}[x] < K_n$ dla $n, a \in \mathbb{N}_+, n > a$
   (d) Rozwiązania układu równań są przestrzenią wektorową

3. $V$ - przestrzeń liniowa nad $K$

   (a) $a \cdot v = \mathbb{O} \iff a = 0 \vee v = 0$