

Relacje

1. X, Y - zbiory

Def: **Relacją dwuargumentową** nazywamy podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$

Zamiast $\langle x, y \rangle \in R$ piszemy $x R y$

2. Def: $R \subseteq X \times Y$

Zbiór $D_R = \{x \in X : \exists y \in Y \langle x, y \rangle \in R\}$ nazywamy dziedziną relacji R

Na przykład $R = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ to koło

3. Jeśli $X = Y$, to mówimy, że relacja $R \subseteq X^2$ jest **określona** na zbiorze X

4. Relacja R jest **pusta** jeśli jest zbiorem pustym

pełna, jeśli $R = X \times Y$

5. Def: Relacja **odwrotna** do relacji $R \subseteq X \times Y$ to relacja $R^{-1} = \{\langle y, x \rangle \in Y \times X : \langle x, y \rangle \in R\}$

6. Def: **Złożeniem** relacji $R \subseteq X \times Y$ oraz relacji $S \subseteq Y \times Z$ nazywamy relację $S \circ R = \{\langle x, z \rangle \in X \times Z : \exists y \in Y \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in S\}$

7. Def:

(a) R jest **zwrotna**, jeśli $\forall x \in X x R x$

(b) R jest **symetryczna**, jeśli $\forall x, y \in X x R y \implies y R x$

(c) R jest **przechodnia**, jeśli $\forall x, y, z \in X (x R y \wedge y R z) \implies x R z$

(d) R jest **antysymetryczna**, jeśli $\forall x, y \in X (x R y \wedge y R x) \implies x = y$

(e) R jest **przeciwzwrotna**, jeśli $\forall x \in X \neg(x R x)$

(f) R jest **przeciwsymetryczna**, jeśli $\forall x, y \in X x R y \implies \neg(y R x)$

(g) R jest **spójna**, jeśli $\forall x, y \in X x R y \wedge y R x \vee x = y$

8. Def: Relację $R \subseteq X^2$ nazywamy relacją **równoważności** jeśli R jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, na przykład

Relacja równości

Relacja równoległości

Relacja pełna $R = X^2$ dla dowolnego zbioru x

Relacja \equiv_n - przystawanie modulo

Relacja $R \subseteq \mathbb{R}^2, x R y \iff \exists q \in \mathbb{Q} x + q = y$

Relacja dla par wektorów R taka że $\langle a, b \rangle R \langle c, d \rangle$ gdy $b - a = d - c$

Relacja \iff , relacja $a R b := a \implies b \wedge b \implies a$

9. Def: Niech $\sim \subseteq X \times X$ będzie relacją równoważności i $a \in X$

Zbiór $[a]_{\sim} = \{x \in X : x \sim a\}$ nazywamy klasą **abstrakcji (równoważności)** dla elementu a

Element a nazywamy reprezentantem klasy abstrakcji $[a]_{\sim}$

10. Własności klas abstrakcji

(a) $\forall a \in X a \in [a]_{\sim}$

(b) $\forall a, b \in X b \in [a]_{\sim} \implies a \in [b]_{\sim}$

(c) $\forall a, b \in X [a]_{\sim} = [b]_{\sim} \iff a \sim b$

(d) $\forall a, b \in X ([a]_{\sim} = [b]_{\sim}) \vee [a]_{\sim} \cap [b]_{\sim} = \emptyset$

(e) $\bigcup_{a \in X} [a]_{\sim} = X$

11. **Podziałem zbioru X** nazywamy rodzinę $\{A_i : i \in I\}$ taką, że

$\forall i \in I A_i \neq \emptyset$

$\forall i, j \in I (i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset)$

$\bigcup_{i \in I} A_i = X$

(a) Wniosek : Rodzina klas abstrakcji relacji równoważności $\sim \subseteq X^2$ jest podziałem X

12. Def: \sim - relacja równoważności na X

Zbiór klas abstrakcji relacji \sim nazywamy **zbiorem ilorazowym** i oznaczamy $X/{\sim}$

13. Twierdzenie: Niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie podziałem zbioru X . Wtedy istnieje relacja równoważności \sim na X taka, że $X/{\sim} = \{A_i : i \in I\}$