Zbiory częściowo uporządkowane

$(P, \preceq), x, y, \in P$, x, y są porównywalne jeśli $x \preceq y$ lub $y \preceq x$, nieporównywalne jeśli $\neg$porównywalne, $(x \parallel y)$

1. **Łańcuchem** w zbiorze częściowo uporządkowanym jest każdy podzbiór parami porównywalnych elementów

2. **Antyłańcuchem** jest każdy podzbiór parami nieporównywalnych elementów

3. Twierdzenie(Lemat Kuratowskiego- Zorna):
   Jeśli w zbiorze częściowo uporządkowanym każdy łańcuch ma ograniczenie górne (dolne), to na $(P, \preceq)$ istnieje element maksymalny (minimalny)

   Wniosek: W dowolnym zbiorze częściowo uporządkowanym każdy łańcuch można rozszerzyć do łańuccha maksymalnego (w sensie inkluzji)
   Dowód: $(P, \preceq)$ - zbiór częsciowo uporządkowany. C_0-łańcuch w $(P, \preceq)$, $\mathcal{P}$ - zbiór łańcuchów w $(P, \preceq)$ rozszerzających C_0
   $(\mathcal{P}, \subseteq)$ - zbiór częsciowo uporządkowany
   $\mathcal{C}$ - łańcuch w $(\mathcal{P}, \subseteq)$
   Skoro $\mathcal{C}$ jest łańcuchem,to $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, więc $C_1 \subseteq C_2$ lub $C_2 \subseteq C_1$.
   $\bigcup \mathcal{C} = \{x \in P : \exists_{c \in \mathcal{C}} x \in C\} = \{x \in P : \exists_c c \in \mathcal{C} \wedge x \in C\}$ Powiemy, że $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{P}$ i że $\bigcup \mathcal{C}$ jest ograniczeniem górnym dla zbioru $\mathcal{C}$
   $x, y \in \mathcal{C} \implies \exists_{C_1 \in \mathcal{C}} x \in C_1 \wedge \exists_{C2 \in \mathcal{C}} y \in C_2$. $C_1 \subseteq C_2$ lub $C_2 \subseteq C_2$ ponieważ $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$
   Stąd $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{P}$.
   $\forall_{C \in \mathcal{C}} c \subseteq \bigcup \mathcal{C} = \bigcup_{C \in \mathcal{C}}$
   Stąd $\bigcup \mathcal{C}$ jest ograniczeniem górnym zbioru $\mathcal{C}$ w $(\mathcal{P}, \subseteq)$. Stosujemy Lemat Kuratowskiego-Zorna dla $(\mathcal{P}, \subseteq)$
   W zbiorze $(\mathcal{P}, \subseteq)$ istnieje element maksymalny, czyli maksymalny w sensie inkluzji łańcuch w $(P, \preceq)$ rozszerzający C_0

4. **def:** Zbiór częściowo uporządkowany $(P, \preceq)$ jest **liniowo uporządkowany**, jeśli $\forall_{x,y \in P} x \preceq y$ lub $y \preceq x$

5. **def:** Zbiór liniowo uporządkowany jest dobrze uporządkowany jeśli w każdym niepustym jego podzbiorze jest element najmniejszy