Algebra liniowa z geometrią dla informatyków - konspekt wykładu 2018/19

Barbara Roszkowska -Lech

Październik 2018

4 Przestrzenie wektorowe

Definicja 4.1. *Przestrzenią wektorową (liniową) nad ciałem K nazywamy zbiór V z odwzorowaniami*

$$V \times V \to V \quad (u, v) \mapsto u + v \quad \textit{zwanym dodawaniem wektorów,}$$

$$K \times V \to V \quad (a, v) \mapsto a \cdot v \quad \textit{zwanym mnożeniem wektora przez skalar,}$$

oraz z wyróżnionym elementem w V zwanym wektorem zerowym i oznaczanym przez $\boldsymbol{0}$ jeśli spełnione są następujace warunki zwane aksjomatami przestrzeni wektorowej. Dla każdych $u, v, w \in V$ oraz $a, b, \in K$

1. $u + (w + v) = (u + w) + v$ *łączność dodawania wektorów ,*
2. $u + w = w + u$ *przemienność dodawania wektorów ,*
3. $0 + u = u + 0 = u$ *wektor $\boldsymbol{0}$ jest elementem neutralnym dodawania,*
4. $\forall_{u \in V} \exists_{u' \in V}\ u + u^{'} = \boldsymbol{0}$ *istnienie elementu odwrotnego w dodawaniu,*
5. $a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$ *łączność mnożenia przez skalary,*
6. $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$ *rozdzielność mnożenia względem dodawania wektorów*
7. $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$ *rozdzielność mnożenia względem dodawania skalarów,*

8. $1 \cdot v = v$ *1 jest elementem neutralnym mnożenia.*

Elementy zbioru V nazywamy wektorami a elementy ciała K skalarami. Przestrzeń wektorową V nad ciałem K oznaczamy $V[K]$, a tam gdzie nie będzie to prowadzić do nieporozumień tylko V.

Przykłady przestrzeni liniowych

1. Niech L będzie podciałem ciała K. Wtedy K jest przestrzenią wektorową na dciałem L.

2. Zbiór $K^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in K, i = 1, 2, \ldots n\}$ wszystkich n elementowych ciągów o wyrazach z ciała K z działaniami określonymi następujaco:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

$$a(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$$

   jest przestrzenią liniową nad ciałem K

3. Niech $M_m^n(K)$ oznacza zbiór wszystkich macierzy o wyrazach z ciała K. *Sumą macierzy* $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ nazywamy taką macierz $C = [c_{ij}] \in M_m^n(K)$, taką że $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, dla każdego $i = 1, \cdots, m$, $\quad j = 1, \cdots, n$. *Iloczynem macierzy* A przez skalar $c \in K$ nazywamy taka macierz $D = [d_{ij}] \in M_m^n(K)$, że $d_{ij} = ca_{ij}$ dla dla każdego $i = 1, \cdots, m$, $\quad j = 1, \cdots, n$. Zbiór $M_m^n(K)$ z tak określonymi działaniami jest przestrzenia liniowa nad ciałem K.

4. Niech $K[x]$ bedzie zbiorem wszystkich wielomianów o wspólczynnikach w ciele K. Czyli

$$K[x] = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n | n \in N \cup \{0\}, a_0, a_1, \cdots, a_n \in K\}.$$

   Określamy dodawanie i mnożenie wielomianów przez skalary. Z tymi działaniami $k[x]$ jest przestrzenią wektorową nad K.

5. Niech K bedzie ciałem, a X niepustym zbiorem.. Oznaczmy $Map(X, K) := \{f; f : X \to K\}$. Zbiór $Map(X, K)$ z dodawaniem $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ i mnożeniem przez skalary $(af)(x) = a(f(x))$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem K.

Definicja 4.2. *Niech V bedzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Niepusty podzbiór $U \subseteq V$ nazywamy podprzestrzenią V, jeśli dla dowolnych u, $w \in U$ oraz dla dowolnego $a \in K$*

$$u + w \in U, \quad au \in U.$$

Jeśli U jest podprzestrzenią V, to będziemy ten fakt zapisywać symbolocznie $U < V$. Jeśli U jest podprzestrzenią V to U zawiera wektor zerowy), oraz dla dowolnego wektora $u \in U$ zawiera wektor $-u$. Ponadto U jest przestrzenią liniową nad K z działaniami indukowanymi z V.

Przykłady podprzestrzeni przestrzeni liniowych

1. Dla dowolnej przestrzeni liniowej V podzbiór $\{\mathbf{0}\}$, złożony tylko z wektora zerowego jest podprzestrzenią V. Nazywamy ja podprzestrzenią zerową. Ponadto V jest swoją własną podprzestrzenią.

2. Niech $K_m[x]$ oznacza zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach w ciele K stopnia $\leq m$. Wtedy $K_m[x] < K[x]$.

3. Niech U będzie jednorodnym układem równań z n niewiadomymi o współczynnikach w ciele K i macierzą A. Wtedy Zbiór wszystkich rozwiązań tego układu jest podprzestrzenia przestrzeni K^n. $Rozw(A, 0) < K^n$.

4. Niech $x_0 \in X$ i niech $W = \{f \in Map(X, K) : f(x_0) = 0\}$. Wtedy W jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $Map(X, K)$.

Twierdzenie 4.3. *Niech $U \subseteq V$. Wtedy następujące warunki są równoważne*

1. $U < V$
2. $\forall_{a,b \in K} \forall_{u,w \in U} \qquad au + bv \in U$
3. $\forall_{a_1,a_2,\cdots,a_k \in K} \forall_{u_1,u_2,\cdots,u_k \in U} \qquad a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_kv_k \in U.$

Twierdzenie 4.4. *Niech dla każdego $t \in T$, U_t bedzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej V. Wtedy część wspólną wszytkich podprzestrzeni U_t, $\bigcap_{t \in T} U_t$ jest podprzestrzenią przestrzeni V.*

Definicja 4.5. *Niech $A \subset V$. Podprzestrzeń $L(A) := \bigcap_{A \subset U < V} U$ będąca częscią wspólna wszystkich podprzestrzeni V zawierających zbiór A nazywamy podprzestrzenią generowana przez zbiór A.*

Jeśli $L(A) = V$ to mówimy, że A jest zbiorem generatorów przestrzeni V

Definicja 4.6. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K oraz niech $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$, $a_1, a_2, \cdots, a_n \in K$. Wektor $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ nazywamy kombinacją liniową wektorów v_1, $v_2, \cdots, v_n$ o współ czynnikach $a_1, a_2, \cdots, a_n$.*

Zauważmy, że z twierdzenia 3.3 wynika, że U jest podprzestrzenią przestrzeni V wtedy i tylko wtedy gdy U jest zamknięte ze względu wszytkie kombinacje liniowe wektorów z U.

Twierdzenie 4.7. *Niech* $A \subset V$. *Wtedy*

$$L(A) = \{v \in V; \exists_{n \in N}, \quad \exists_{v_1, v_2, \cdots, v_n}, \quad \exists_{a_1, a_2, \cdots, a_n} \quad v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n\}.$$

Twierdzenie 4.8. *Niech* $A, A' \in M^n_m(K)$ *oraz* $v_1, v_2, \cdots, v_m$ *będą wierszami macierzy* A *a* $v'_1, v'_2, \cdots, v'_m$ *wierszami macierzy* A'. *Jeśli macierze* A *i* A' *są wierszowo równoważne to* $L(v_1, v_2, \cdots, v_m) = L(v'_1, v'_2, \cdots, v'_m)$.

Przykłady

1. $K_n[x] = L(1, x, \cdots, x^n)$
2. $K^n = L(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ gdzie $e_i = [0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots 0]$.
3. $L(x^n, x^{n+1}, \cdots)$ jest podprzestrzenią przestrzeni wielomianów $K[x]$ zawierającą wszystkie wielomiany podzielne przez x^n.

Definicja 4.9. *Niech* V *bedzie przestrzenią liniową nad ciałem* K. *Układ wektorów* $v_1, v_2, \cdots, v_k$ *przestrzeni wektorowej* V *nazywamy liniowo zależnym, jeśli istnieją* $a_1, a_2, \cdots, a_k \in K$ *nie wszystkie równe 0, takie że* $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k = 0$. *Układ wektorów* $v_1, v_2, \cdots, v_k$ *jest liniowo niezależny, jeśli*

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0.$$

Zauważmy, ze jeśli któryś z wektorów v_i jest zerowy to taki układ jest liniowo zależny.

Twierdzenie 4.10. *Układ* $v_1, v_2, \cdots, v_k$ *jest liniowo zależny* $\Leftrightarrow$ *jeden z wektorów* v_i *jest kombinacją liniową pozostałych.*

Uwaga 4.11. *Niech* $c^1(A), c^2(A), \cdots, c^n(A)$ *bedą kolumnami macierzy* $A \in M^n_m$. *Wtedy układ* $c^1(A), c^2(A), \cdots, c^n(A)$ *jest układem liniowo niezależnym wtedy i tylko wtedy gdy jednorodny układ równań o macierzy* A *ma tylko zerowe rozwiązanie.*

Wniosek 4.12. *Niech macierz* A *będzie wierszowo równoważna z macierzą* A'. *Wtedy kolumny macierzy* A *są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy liniowo niezależne są kolumny macierzy* A'.

Podobny wniosek można też udowodnić o wierszach wierszowo równoważnych macierzy A oraz $A^{'}$. Dokładniej, jeśli $v_1, \cdots, v_m$ beda wierszami macierzy A, a $v_1^{'}, \cdots, v_m^{'}$ będa wierszami macierzy $A^{'}$ wierszowo równoważnej z macierzą A to układ $v_1, \cdots, v_m$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy gdy układ $v_1^{'}, \cdots, v_m^{'}$ jest liniowo niezalezny. Ponadto zauważmy, że niezerowe wiersze kazdej macierzy schodkowej tworzą układ liniowo niezależny a jeśli jeden z wierszy jest zerowy to taki układ jest zależny. Wnioskujemy stad, że wiersze macierzy dowolnej A tworzą układ liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz ta jest równoważna z macierzą schodkowa bez zerowych wierszy.

Twierdzenie 4.13. *Niech $v_1, v_2, \cdots, v_k$ będzie układem liniowo niezależnym i niech $v \in V$. Wtedy wektor $v \in L(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ wtedy i tylko wtedy, gdy układ $(v, v_1, v_2, \cdots, v_k)$ jest liniowo zależny.*

Twierdzenie 4.14. *(**Tw. Steinitza (magiczne)**) Niech układ wektorów $(w_1, w_2, \cdots, w_k)$ w przestrzeni wektorowej $V = L(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ bedzie liniowo niezależny. Wtedy*

- *$k \leq m$,*
- *z układu $v_1, v_2, \cdots, v_m$ można wybrać podukład $v_{i_1}, \cdots, v_{i_{m-k}}$, taki, że $L(v_1, v_2, \cdots, v_m) = L(w_1, w_2, \cdots, w_k, v_{i_1}, \cdots, v_{i_{m-k}})$.*

Twierdzenie Steinitza nazywane jest twierdzeniem o wymianie. Mówi ono, że jeśli układ $(w_1, \cdots, w_k)$ jest liniowo niezależny w przestrzeni $V = L(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ to w układzie $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ można wymienić pewnych k wektorów na wektory $w_1, w_2, \cdots, w_k$ i uzyskać nowy układ generujący przestrzeń V.

Wnioski

1. Jesli W jest podprzestrzenią przestrzeni $V = L(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ to w W istnieje układ liniowo niezależny $(w_1, w_2, \cdots, w_k), (k \leq m)$, taki że $W = L(w_1, w_2, \cdots, w_k)$.
2. Jeśli $L(w_1, w_2, \cdots, w_k) = L(w_1^{'}, w_2^{'}, \cdots, w_l^{'})$ i układy $(w_1, w_2, \cdots, w_k)$ oraz $(w_1^{'}, w_2^{'}, \cdots, w_l^{'})$ są liniowo niezależne to $k = l$.

Definicję liniowej niezależności dla skończonych układów wektorów w przestrzeni liniowej V można rozszerzyc na przypadek układów nieskończonych. Układ wektorów $\mathcal{B}$ przestrzeni V nazywamy liniowo niezależnym gdy każdy jego skończony podukład jest liniowo niezależny.

Bazy i wymiary przestrzeni wektorowych

Definicja 4.15. *Układ wektorów $\mathcal{B}$ nazywamy bazą przestrzeni liniowej V, jeśli*

- *Układ $\mathcal{B}$ jest liniowo niezależny,*
- *Układ $\mathcal{B}$ generuje przestrzeń V, czyli $V = L(\mathcal{B})$.*

Twierdzenie 4.16. *Układ wektorów $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ jest bazą przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny wektor $v \in V$ można jednoznacznie przedstawić jako kombinację liniową wektorów $v_1, v_2, \cdots, v_m$).*

Twierdzenie 4.17. *Niech $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ będzie układem wektorów w przestrzeni V. Wtedy następujące warunki są równoważne*

1. *$\mathcal{B}$ jest bazą przestrzeni V.*
2. *$\mathcal{B}$ jest maksymalnym układem liniowo niezaleznym.*
3. *$\mathcal{B}$ jest minimalnym układem generatorów przestrzeni V*

Twierdzenie 4.18. *Jeśli przestrzeń wektorowa V posiada bazę n elementową to każda baza V ma n elementów.*

Definicja 4.19. *Mówimy, że przestrzeń V ma wymiar n, jeśli V posiada bazę n elementową. Piszemy wtedy, że $dimV = n$. Ponadto przyjmujemy, że wymiar przestrzeni zerowej wynosi 0, a jeśli V nie ma skończonej bazy, to V nazywamy przestrzenią nieskończenie wymiarową i piszemy $dimV = \infty$.*

Jeśli $dimV = n$, to każdy n-elementowy liniowo niezależny układ wektorów w przestrzeni V jest bazą V. Jeśli $dimV = n$, to każdy n elementowy układ wektorów w przestrzeni V jest bazą V.

Twierdzenie 4.20. *Podprzestrzeń przestrzeni rozpiętej na skończonym układzie wektorów jest skończenie wymiarowa. Jeśli W jest podprzestrzenią w V oraz $dimV = n$, to $dimW \leq n$. Ponadto, jesli $dimV = dimW$, to $V = W$.*

Twierdzenie 4.21. *Niech V będzie przestrzenia wektorową nad ciałem K. Wówczas*

1. *Każdy liniowo niezależny układ wektorów można uzupełnic do bazy V.*
2. *Z każdego układu generatorów V mozna wybrać bazę.*