

**6 Funkcje Ciągłe**

1. Def. Funkcja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  gdzie  $D \subset \mathbb{R}$  jest ciągła w punkcie  $a \in D \stackrel{(CH)}{\iff} \forall_{\{x_n\} \in D} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) \stackrel{(CC)}{\iff} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$

- (a) T: Jeśli  $a \in D$  jest punktem skupienia  $D$ , to  $f$  jest ciągła w punkcie  $a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \iff \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

Funkcje  $c, x, |x|, \sin x, \cos x$  są ciągłe

2. Twierdzenie 6.1: Jeśli funkcje  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $D \subset \mathbb{R}$  są ciągłe w punkcie  $a \in D$ , to

$f + g, f - g, fg$  też są ciągłe w punkcie  $a$

$\frac{f}{g}$  też jest ciągła w punkcie  $a$  jeśli  $\forall_{x \in D} g(x) \neq 0$

Đ: Twierdzenie to wynika z def. Heinego ciągłości funkcji i z tw. o ciągłości działań arytmetycznych

Wnioski:

- (a) Każdy wielomian  $w(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  jest funkcją ciągłą
- (b) Każda funkcja wymierna  $\frac{w_1(x)}{w_2(x)}$  jest funkcją ciągłą
- (c) Funkcje  $\tan x$  i  $\cot x$  są ciągłe
3. Twierdzenie 6.2: Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. Dokładniej, jeśli  $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$  i  $f : D_1 \rightarrow D_2$  jest ciągła w punkcie  $a \in D_1$  i  $g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła w punkcie  $f(a)$ , to złożenie  $g \circ f$  ( $g \circ f(x) := g(f(x))$ ) jest ciągłe w punkcie  $a$
- Przykład Funkcja  $f(x) = \sin |x|$  jest ciągła
- Funkcja odwrotna do funkcji ciągłej nie musi być funkcją ciągłą - musi być odwracalna

4. Twierdzenie 6.3 (o ciągłości funkcji odwrotnej): Jeśli  $P$  to przedział i  $f : P \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$  jest ciągła i odwracalna, to funkcja odwrotna  $f^{-1} : Y \rightarrow P$  też jest funkcją ciągłą.

Wniosek: Funkcje cyklometryczne, tzn  $\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$  to funkcje ciągłe jako funkcje odwrotne

5. Def. Do funkcji elementarnych będziemy zaliczać:

- (a) wielomiany  $w(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$

- (b) funkcje wymierne  $\frac{w_1(x)}{w_2(x)}$

- (c) funkcja pierwiastek  $\sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}$

- (d) funkcje trygonometryczne i cyklometryczne

- (e) funkcje wykładniczą  $a^x$  gdzie  $a > 0$

Jak rozumieć  $a^x$  gdy  $a > 0$  i  $x \in \mathbb{R}$ ?

- i. Dla  $x = 0, a^x = a^0 = 1$

- ii. Dla  $x \in \mathbb{N}, a^x = a \cdot \dots \cdot a$  ( $x$  czynników)

- iii. Jeśli  $x \in \mathbb{Z}$  i  $x < 0$  to  $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$

- iv. Jeśli  $x \in \mathbb{Q}$ , czyli  $x = \frac{n}{m}$ , gdzie  $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$ , to  $a^x = a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

- v. A co jeśli  $x \notin \mathbb{Q}$ ?

Def. Jeśli  $a \in [1, \infty)$ , to  $a^x := \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q} \wedge q \leq x\}$  - zbiór niepusty i ograniczony z góry, np. przez  $a^{\lfloor x \rfloor + 1}$

$\implies$  ma skończony kres górny

Jeśli  $a \in (0, 1)$ , to  $a^x := \frac{1}{(\frac{1}{a})^x}$

- (f) funkcję logarytmiczną  $\log_a x$

6. Twierdzenie 6.4 (własności potęgowania):

- (a) Jeśli  $a, b > 0, x, y \in \mathbb{R}$ , to  $a^{x+y} = a^x \cdot a^y, (a^x)^y = a^{xy}, (ab)^x = a^x \cdot b^x$

- (b) Jeśli  $a \in (1, \infty)$ , to funkcja  $f(x) = a^x$  jest rosnąca i jej zbiór wartości to  $(0, \infty)$

- (c) Jeśli  $a \in (0, 1)$ , to funkcja  $f(x) = a^x$  jest malejąca i jej zbiór wartości to  $(0, \infty)$

7. Twierdzenie 6.5: Funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a^x$ , gdzie  $a > 0$  jest ciągła, tzn

$$\forall_{x_0 \in \mathbb{R}} \lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$$

8. Def. Niech  $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ . Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcję  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$ , która jest funkcją odwrotną do funkcji  $g : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), g(x) = a^x$

Uwaga: Funkcja logarytmiczna jest funkcją ciągłą jako funkcja odwrotna do funkcji ciągłej określonej na przedziale

9. Funkcja pierwiastek: Na ćwiczeniach, pokazaliśmy, że  $\forall_{g \geq 0} \forall_{\{x_n\} \in [0, \infty)} \lim_{x \rightarrow \infty} x_n = g \iff \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[4]{x_n} = \sqrt[4]{g}$   
 Analogicznie można wykazać, że powyższy fakt zachodzi nie tylko dla pierwiastka stopnia 4 ale dowolnego stopnia  $k \in \mathbb{N}$   
 Warunek ten oznacza, że  $f(x) = \sqrt[k]{x}$  jest funkcją ciągłą w dowolnym punkcie  $g$

10. Twierdzenie 6.6: Każda funkcja elementarna jest funkcją ciągłą.

11. Def (funkcje hyperboliczne):

(a)  $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$

(b)  $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$

(c)  $\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, x \in \mathbb{R}$

(d)  $\coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(e) Uwagi:

i. Pomiędzy funkcjami hiperbolicznymi zachodzą **podobne** związki jak pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi, np:

$$\sinh 2x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 2 \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1$$

ii. Funkcje hiperboliczne są ciągłe, np  $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

iii.