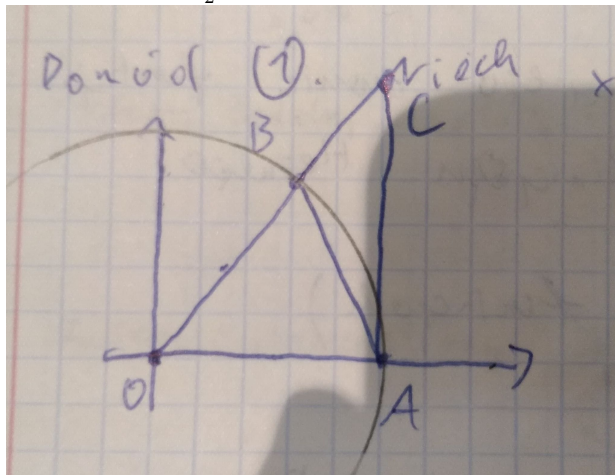


1. Twierdzenie 4.6: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ - (a) oraz $\forall x \in \mathbb{R} |\sin x| \leq |x|$ - (b)

(a) D: Niech $x \in (0, \frac{\pi}{2})$



$$P_{\triangle AOB} < P_{\text{wycinek koła } AOB} < P_{\triangle OAC}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2\pi} \pi \cdot 1^2 < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

Dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, mamy $\frac{\sin x}{x} < 1$ oraz $-\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

Dla $-x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ mamy $\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1$

Dla $y \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ mamy $\cos y < \frac{\sin y}{y} < 1$

Stąd $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}) \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ tw. o 3 funkcjach $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, bo $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$

(b) D: Weźmy, że $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}) |\frac{\sin x}{x}| < 1$ z czego $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}) |\sin x| < |x|$,

Dla $x = 0$, $|\sin x| = 0 \leq |x|$

Dla x takich, że $|x| \geq \frac{\pi}{2}$ mamy $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|$

Z wszystkich poprzednich $\implies \forall x \in \mathbb{R} |\sin x| \leq |x|$

5. Granice jednostronne, asymptoty i ciągłość funkcji

1. Przez cały wykład zakładamy, że $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ gdzie $D \subset \mathbb{R}$

(a) $y = \sqrt{x}$ - granicę w zerze możemy liczyć tylko z prawej strony.

(b) $y = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nie istnieje. Ale możemy rozważać granicę lewostronną $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ i granicę prawostronną $\lim_{x \rightarrow 0^+}$

2. Def. (Heinego granic jednostronnych)

(a) Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru $D \cap (-\infty, a)$ i niech $g \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Wtedy g jest granicą lewostronną funkcji f w punkcie a (co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = g$ lub $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} g$ lub $f(a^-) = g$)
 $\iff \forall \{x_n\} \subset D \cap (-\infty, a) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$

(b) Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru $D \cap (a, +\infty)$ i niech $g \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Wtedy g jest granicą prawostronną funkcji f w punkcie a (co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g$ lub $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} g$ lub $f(a^+) = g$)
 $\iff \forall \{x_n\} \subset D \cap (a, +\infty) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$

3. Twierdzenie 5.1 (def. Cauchy'ego granic jednostronnych funkcji) - podkreślone to zmiana od definicji zwykłej granicy

(a) Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru $D \cap (-\infty, a)$

i. Jeśli $g \in \mathbb{R}$ to $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = g \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D -\delta \leq x - a < 0 \implies |f(x) - g| < \epsilon$

ii. Jeśli $g = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \iff \forall G > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D -\delta \leq x - a < 0 \implies f(x) > G$

iii. Jeśli $g = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \iff \forall G > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D -\delta \leq x - a < 0 \implies f(x) < -G$

(b) Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru $D \cap (a, +\infty)$

i. Jeśli $g \in \mathbb{R}$ to $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D 0 \leq x - a < \delta \implies |f(x) - g| < \epsilon$

ii. Jeśli $g = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \iff \forall G > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D 0 \leq x - a < \delta \implies f(x) > G$

iii. Jeśli $g = -\infty \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \iff \forall G > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \underline{0} < x - a < \delta \implies f(x) < -G$

4. Twierdzenie 5.2: Jeśli $a \in \mathbb{R}$ jest punktem skupienia $D \cap (-\infty, a)$ i $D \cap (a, +\infty)$ oraz $g \in \widetilde{\mathbb{R}}$, to $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g$

(a) $[\frac{1}{0^+}] = +\infty, [\frac{1}{0^-}] = -\infty$

5. Asymptoty

(a) Def. Prosta $x = a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ jest

- Asymptotą pionową lewostronną (wykresu) funkcji $y = f(x) \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$
- Asymptotą pionową prawostronną (wykresu) funkcji $y = f(x) \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$
- Asymptotą pionową obustronną gdy jest asymptotą pionową lewostronną i prawostronną

(b) Def. Prosta $y = b$, gdzie $b \in \mathbb{R}$ jest

- Asymptotą poziomą lewostronną (wykresu) funkcji $y = f(x) \iff \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g$
- Asymptotą poziomą prawostronną (wykresu) funkcji $y = f(x) \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g$
- Asymptotą poziomą obustronną gdy jest asymptotą poziomą lewostronną i prawostronną

(c) Def. Prosta $y = mx + k$, gdzie $m, k \in \mathbb{R}$ jest

- Asymptotą ukośną lewostronną (wykresu) funkcji $y = f(x) \iff \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + k)] = 0$
- Asymptotą ukośną prawostronną (wykresu) funkcji $y = f(x) \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + k)] = 0$
- Asymptotą ukośną obustronną gdy jest asymptotą poziomą lewostronną i prawostronną
- Twierdzenie 5.3: Prosta $y = mx + k$, gdzie $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $k \in \mathbb{R}$ jest asymptotą ukośną prawo/lewostronną $\iff m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \wedge k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$ - (dowód na ćwiczeniach)

A. Przykład: Wyznaczymy asymptoty funkcji $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = [\frac{1}{0^-}] = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = [\frac{1}{0^+}] = +\infty$, Więc $x = 0$ to asymptota pionowa obustronna

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = -1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = 1$ - asymptota pozioma lewostronna to $y = -1$, prawostronna $y = 1$

Brak asymptot ukośnych, bo są asymptoty poziome

6. Ciągłość

(a) Przypomnienie: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g \stackrel{(H)}{\iff} \forall \{x_n\} \subset D \setminus \{a\} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g \stackrel{(C)}{\iff} \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \underline{0} < |x - a| < \delta \implies |f(x) - g| < \epsilon$

(b) Def. (Heinego ciągłości funkcji w punkcie):

Funkcja f jest ciągła w punkcie $a \in D$ (musi być w dziedzinie) $\iff \forall \{x_n\} \subset D \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ - **(CH)**

i. W przypadku funkcji ciągłej f mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$, tzn. z granicą można wejść pod symbol funkcji.

ii. Uwaga: Jeśli $a \in D$ nie jest punktem skupienia zbioru D , to

$\forall \{x_n\} \subset D \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ - (*) jest spełnione jedynie przez ciągi $\{x_n\}$ takie, że dla wszystkich dalszych $n : x_n = a$

\implies dla wszystkich dużych n $f(x_n) = f(a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a)$

Zatem warunek (CH) jest spełniony i funkcja jest ciągła w a . Na przykład każda $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w każdym punkcie z $D = \mathbb{N}$, bo każdy taki punkt nie jest punktem skupienia dziedziny

(c) Twierdzenie 5.4 (def. Cauchy'ego ciągłości funkcji w punkcie).

Funkcja $f(x)$ jest ciągła w pkt. $a \in D \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$ - **(CC)**

i. D (gdzie a jest punktem skupienia zbioru D): Chcemy pokazać, że (CH) \iff (CC)

(CH) $\iff \forall \{x_n\} \subset D \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) \iff \forall \{x_n\} \subset D \setminus \{a\} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \iff \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \underline{0} < |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon \iff$ (CC)

ii. Przy okazji udowodniliśmy następujące twierdzenie:

(d) Twierdzenie 5.5: Jeśli $a \in D$ jest punktem skupienia zbioru D , to $f(x)$ jest ciągła w punkcie $a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

(e) Def. Funkcja $f(x)$ jest ciągła $\iff f(x)$ jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny, tzn.

$\forall a \in D \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon \iff f(x)$ jest ciągła w a

Przykłady:

- i. Funkcja stała $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$ gdzie $c \in \mathbb{R}$
 $\forall_{a \in D} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies |c - c| = 0 < \epsilon$ więc jest ciągła
- ii. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ jest ciągła:
 $\forall_{a \in D} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies |x - a| < \epsilon$, co zachodzi dla $\delta = \epsilon$
- iii. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ jest ciągła:
 $\forall_{a \in D} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies ||x| - |a|| \leq |x - a| < \epsilon$, co zachodzi dla $\delta = \epsilon$
- iv. $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ - przydatne do następnego
 $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
 $\sin \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$
 $\sin \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$
- v. $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$ są ciągłe, bo:
 $\forall_{a \in D} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies |\sin x - \sin a| = 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \leq 2 \cdot \left| \frac{x-a}{2} \right| \cdot |1| \leq |x - a| < \epsilon$ ($\delta = \epsilon$)
 $\forall_{a \in D} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies |\cos x - \cos a| = 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{x+a}{2} \right| \leq 2 \cdot \left| \frac{x-a}{2} \right| \cdot |1| \leq |x - a| < \epsilon$ ($\delta = \epsilon$)