Niech X i Y będą zbiorami.

Definicja 1 *Relacją dwuargumentową (binarną) R nazywamy podzbiór iloczynu kartezjańskiego dwóch zbiorów, czyli $R \subseteq X \times Y$.*

Przykład 2

1. *mniejszość* $< \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *np.:* $\langle 2, 4 \rangle \in <$
2. *podzielność* $| \subseteq \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ *np.:* $\langle 2, 4 \rangle \in |$

Definicja 3 *Niech $R \subseteq X \times Y$ będzie relacją. Zbiór $D_R = \{x \in X \colon \exists y \in Y \langle x, y \rangle \in R\}$ nazywamy dziedziną relacji R.*

Na ogół piszemy xRy zamiast $\langle x, y \rangle \in R$.
Jeśli $X = Y$, to mówimy, że relacja $R \subseteq X \times X$ jest określona w zbiorze X.
Pustą relacją nazywamy relację nie zawierającą żadnej pary (czyli zbór pusty): $\emptyset \subseteq X \times Y$.
Relacją pełną nazywamy relację zawierającą wszystkie pary czyli $R = X \times Y$.

Definicja 4 *Relacją odwrotną do relacji $R \subseteq X \times Y$ nazywamy relację*
$R^{-1} = \{\langle y, x \rangle \in Y \times X \colon \langle x, y \rangle \in R\} \subseteq Y \times X$.

Definicja 5 *Złożeniem relacji $R \subseteq X \times Y$ i $S \subseteq Y \times Z$ nazywamy relację*
$S \circ R = \{\langle x, z \rangle \in X \times Z \colon \exists y \; xRy \wedge ySz\}$.

Definicja 6 *Relację $R \subseteq X \times X$ nazywamy:*

- *zwrotną, jeśli $\forall x \in X \; xRx$. Relacjami zwrotnymi są np.* $=, \leqslant, |$
- *symetryczną, jeśli $\forall x, y \in X \; xRy \Rightarrow yRx$. Relacjami symetrycznymi są np.* $=, ||$
- *przechodnią, jeśli $\forall x, y, z \in X \; xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$. Relacjami przechodnimi są np.* $=, \leqslant$
- *antysymetryczną, jeśli $\forall x, y \in X \; xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$. Relacjami antysymetrycznymi są np.* $\leqslant, \subseteq$
- *przeciwzwrotną, jeśli $\forall x \in X \; \sim xRx$. Relacjami przeciwzwrotnymi są np.* $\neq, <$
- *przeciwsymetryczną, jeśli $\forall x, y \in X \; xRy \Rightarrow \sim yRx$. Relacją przeciwsymetryczną jest np.* $<$
- *spójną, jeśli $\forall x, y \in X \; xRy \vee yRx \vee x = y$. Relacjami spójnymi są np.* $<, \leqslant$

Definicja 7 *Relację $R \subseteq X \times X$ nazywamy relacją równoważności, jeśli jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.*

Przykład 8 *Przykładami relacji równoważności są:*

1. *Relacja równości $= \subseteq X \times X$, dla dowolnego zbioru X.*
2. *Relacja pełna $R = X \times X$, dla dowolnego zbioru X.*

3. *Relacja* $\equiv_n \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *przystawania modulo* $n \in \mathbb{N}^+$ $(z_1 \equiv_n z_2 \Leftrightarrow n|z_1 - z_2)$.

4. *Relacja* $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *taka, że* $xRy \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q}\ x + q = y$.

5. *Niech* $X = \{\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle \mid \overline{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle, \overline{b} = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle \in \mathbb{R}^n\}$. *Relacja* $R \subseteq X \times X$ *taka, że* $\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle R \langle \overline{c}, \overline{d} \rangle \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\}\ b_i - a_i = d_i - c_i$.

6. *Niech* X *będzie zbiorem formuł rachunku zdań. Relacja* $R \subseteq X \times X$ *taka, że* $\alpha R \beta \Leftrightarrow \alpha \Rightarrow \beta$ *i* $\beta \Rightarrow \alpha$ *są tautologiami.*

Definicja 9 *Niech* $\sim \subseteq X \times X$ *będzie relacją równoważności i niech* $a \in X$. *Zbiór* $[a]_\sim = \{x \in X : x \sim a\}$ *nazywamy klasą abstrakcji elementu* a. *Element* a *nazywamy reprezentantem klasy.*

Jeżeli z kontekstu wynika jaką relację równoważności rozważamy, to zamiast $[a]_\sim$ będziemy czasami pisać $[a]$.
Własności klas abstrakcji relacji równoważności $\sim \subseteq X \times X$:

1. $\forall a \in X\ a \in [a]_\sim$

2. $\forall a, b \in X\ \ b \in [a]_\sim \Rightarrow a \in [b]_\sim$

3. $\forall a, b \in X\ \ [a]_\sim = [b]_\sim \Leftrightarrow a \sim b$

4. $\forall a, b \in X\ [a]_\sim = [b]_\sim \vee [a]_\sim \cap [b]_\sim = \emptyset$

5. $\bigcup_{a \in X} [a]_\sim = X$

Przykład 10 *Niech* X *będzie zbiorem i niech* $a \in X$.

1. $[a]_= = \{x \in X : x = a\} = \{a\}$.

2. *Niech* $R = X \times X$ *będzie relacją pełną. Wtedy* $[a]_R = \{x \in X : xRa\} = X$.

3. *Niech* $X = \mathbb{Z}$. *Wtedy* $[a]_{\equiv_n} = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv_n a\} = \{x \in \mathbb{Z} : n|x - a\} = \{a + k \cdot n : k \in \mathbb{Z}\}$.

Definicja 11 *Niech* $\sim$ *będzie relacją równoważności na zbiorze* X. *Zbiorem ilorazowym nazywamy zbiór klas abstrakcji relacji* $\sim$ *i oznaczamy* $X/_\sim$.

Przykład 12 $\mathbb{Z}/_{\equiv_n} = \{[0]_{\equiv_n}, [1]_{\equiv_n}, \ldots, [n-1]_{\equiv_n}\}$.

Twierdzenie 13 *Niech* $\{A_i : i \in I\}$ *będzie rodziną podzbiorów zbioru* X *taką, że:*

1. $\forall i \in I\ A_i \neq \emptyset$

2. $\forall i, j \in I\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

3. $\bigcup_{i \in I} A_i = X$.

Wtedy istnieje relacja równoważności $\sim$ *na zbiorze* X *taka, że* $X/_\sim = \{A_i : i \in I\}$.

Definicja 14 *Niech* $X_1, \ldots, X_n$ *będą zbiorami i niech* $n \in \mathbb{N}$. *Relacją* n*-arną nazywamy podzbiór iloczynu kartezjańskiego* $R \subseteq X_1 \times \ldots \times X_n$.