

16.10.2019

Nierówność Bernoulliego:  $\forall_{x>-1, n \in \mathbb{N}} (1+x)^n \geq 1+nx$

1. Twierdzenie 2.8: Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

- (a)  $\{a_n\}$  jest monotoniczny i ograniczony  $\implies$  (nie  $\Leftarrow$ )  $\{a_n\}$  zbieżny
- (b) Ciąg, który jest zbieżny, nie musi być monotoniczny. Na przykład  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ . Ciąg ten jest zbieżny z twierdzenia o trzech ciągach, bo  $\forall_{n \in \mathbb{N}} \frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ . Ale ciąg ten nie jest monotoniczny, bo  $a_1 = -1 < a_2 = \frac{1}{2}$ ,  $a_2 = \frac{1}{2} > a_3 = \frac{-1}{3}$

2. Granice niewłaściwe

- (a) Def. Ciąg  $\{a_n\}$  jest rozbieżny do  $+\infty$  (co zapisujemy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  lub  $a_n \rightarrow +\infty$ )  $\iff \forall_{D>0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} a_n > D$
- (b) Def. Ciąg  $\{a_n\}$  jest rozbieżny do  $-\infty$  (co zapisujemy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  lub  $a_n \rightarrow -\infty$ )  $\iff \forall_{D>0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} a_n < -D$
- (c) Przykład:
- i.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ , bo  $\forall_{D>0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}, n_0 = \lceil D \rceil} \forall_{n \geq n_0} a_n > D$

3. Twierdzenie 2.9 (o dwóch ciągach): Jeśli  $\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} a_n \leq b_n$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , to  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$

- (a) Jeśli  $\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} a_n \leq b_n$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ , to  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

4. Twierdzenie 2.10:

- (a) Jeśli  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ , to  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$
- (b) Jeśli  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  i ciąg  $\{b_n\}$  jest ograniczony z dołu, to  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$
- (c) Jeśli  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  i ciąg  $\{b_n\}$  jest ograniczony z góry, to  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = -\infty$
- (d) Przykład:
- i. Niech  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pm\infty$ . Co możemy powiedzieć o zbieżności ciągu  $\{a_n b_n\}$ ?
- ii. Nic, bo na przykład  $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ ,  $b_n = n \rightarrow \infty$ ,  $a_n b_n = 1 \rightarrow 1$ , ale dla  $a_n = \frac{1}{n^2}$   $a_n b_n \rightarrow 0$ , lub  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ,  $a_n b_n \rightarrow \infty$
- iii.  $[0 \cdot \infty]$  to symbol nieoznaczony
- iv. Inne symbole nieoznaczone:
- A.  $[\infty - \infty]$
- B.  $[\frac{0}{0}]$
- C.  $[\frac{\infty}{\infty}]$
- D.  $[\infty^0]$
- E.  $[0^0]$
- F.  $[1^\infty]$
- v. Ale dla  $a \in \mathbb{R}$ :
- A.  $[a + \infty] = \infty$
- B.  $[a \cdot \infty] = (\infty \text{ jeśli } a > 0, -\infty \text{ jeśli } a < 0)$
- C.  $[\frac{a}{\infty}] = 0 \text{ jeśli } a \in \mathbb{R}$

(e) Twierdzenie 2.11:

- i.  $|a| < 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |a|^n = 0$
- D: 1. przypadek:  $a = 0$ . Wtedy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$
- 2.:  $a \neq 0$ . Wtedy  $\frac{1}{|a|} > 1$  więc istnieje  $\delta > 0$  taka, że  $\frac{1}{|a|} = 1 + \delta$
- :  $\frac{1}{|a|^n} = (\frac{1}{|a|})^n = (1 + \delta)^n \geq^{nier. Bern} 1 + n\delta \geq n\delta$
- :  $\forall_{n \in \mathbb{N}} 0 \leq |a|^n \leq \frac{1}{n\delta} \implies^{tw.o3 ciagach} \lim_{n \rightarrow \infty} |a|^n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |a^n| = 0 \implies^{uwaga 2.1} \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$
- ii.  $a > 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$
- D: 1. przypadek:  $a = 1$ . Wtedy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$
- : 2. przypadek:  $a > 1$ . Wtedy  $\forall_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{a} > 1$
- :  $a = (\sqrt[n]{a})^n = (1 + \sqrt[n]{a} - 1)^n \geq^{n. Bern} 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1)$
- :  $\forall_{n \in \mathbb{N}} a \geq 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1)$
- :  $\forall_{n \in \mathbb{N}} \frac{a-1}{n} \geq \sqrt[n]{a} - 1$
- :  $\forall_{n \in \mathbb{N}} \frac{a-1}{n} + 1 \geq \sqrt[n]{a} \geq 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

- : 3. przypadek:  $a \in (0, 1)$ . Wtedy  $\frac{1}{a} > 1 \implies \text{przypadek 2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$
- : stąd  $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$  oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}} = 1$
- iii.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(f)  $\forall a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

## 5. Liczba $e$

- (a) Rozważmy ciąg Eulera  $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ . Pokażemy, że  $\{e_n\}$  jest rosnący i ograniczony z góry, zatem zbieżny. Liczba  $e$  to granica tego ciągu  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2,71828$
- (b) Twierdzenie 2.12: Ciąg Eulera jest rosnący i ograniczony z góry, więc zbieżny.

D: Najpierw pokażemy, że  $\{e_n\}$  jest rosnący

: 
$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{(\frac{n+2}{n+1})^n \cdot (\frac{n+2}{n+1})}{(\frac{n+1}{n})^n} = (\frac{n+2}{n+1})^n \cdot \frac{n+2}{n+1} = (\frac{n(n+2)}{(n+1)^2})^n \cdot \frac{n+2}{n+1} = (\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1})^n \cdot \frac{n+2}{n+1} =$$

$$(1 + \frac{-1}{n^2+2n+1})^n \cdot \frac{n+2}{n+1} \stackrel{n.Bern}{\geq} (1 - \frac{n}{n^2+2n+1})^{\frac{n+2}{n+1}} = \frac{n^2+2n+1-n}{n^2+2n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{(n^2+n+1)(n+2)}{(n+1) \cdot (n+1)} =$$

$$\frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1$$

: Zatem  $\forall n \in \mathbb{N} \frac{e_{n+1}}{e_n} > 1 \implies e_n > 0 \forall n \in \mathbb{N} e_{n+1} > e_n$  czyli  $\{e_n\}$  jest rosnący

: Teraz pokażemy, że  $\{e_n\}$  jest ograniczony z góry.

: 
$$e_n = (1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \stackrel{n \geq 2}{=} 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{(n-k+1)(n-k+2) \dots n}{k! \cdot n^k} <$$

$$2 + \sum_{k=2}^n \frac{n^k}{k! \cdot n^k} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{1 \cdot 2 \dots k} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n-2}}{1 - \frac{1}{2}} < 2 + 1 = 3$$

:  $\forall n \geq 2 e_n < 3$  i  $e_1 = 2 \implies \forall n \in \mathbb{N} e_n < 3$ , czyli ciąg  $\{e_n\}$  jest ograniczony z góry

(c) Def. Liczba  $e$  to granica ciągu Eulera:  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$

- i. Pokazaliśmy, że  $\forall n \in \mathbb{N} e_n < 3 \implies e = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n \leq 3$
- ii. Pokazaliśmy, że  $\{e_n\}$  jest rosnący  $\implies \forall n \in \mathbb{N} e_n \geq e_1 = 2 \implies e = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n \geq 2$
- iii. Więc  $2 \leq e \leq 3$
- iv. Uwaga: to jest przykład na to, że  $[1^\infty]$  to symbol nieoznaczony, bo  $a_n = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$ ,  $b_n = n \rightarrow \infty \implies a_n^{b_n} = (1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$
- A.  $a_n = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$ ,  $b_n = 2n \rightarrow \infty \implies a_n^{b_n} = (1 + \frac{1}{n})^{2n} \rightarrow 2e$

## 6. Podciągi

- (a) Def. Niech  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  będzie ciągiem, zaś  $n_1, n_2, n_3, \dots$  liczbami naturalnymi, takimi, że  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ . Wtedy ciąg  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  o wyrazach  $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$  nazywamy podciągiem ciągu  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$
- i. Przykład:  $a_n = \frac{1}{n}$ , wyrazy tego ciągu:  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \dots$
- :  $b_n = \frac{1}{n^2}$ , wyrazy tego ciągu:  $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots$ . Ciąg  $\{b_n\}$  to podciąg ciągu  $\{a_n\}$ :  $b_k = a_{k^2}$
- :  $c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ , wyrazy tego ciągu:  $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \dots$ . Ciąg  $\{c_n\}$  nie jest podciągiem  $\{a_n\}$  (ale  $\{a_n\}$  jest podciągiem  $\{c_n\}$ )

(b) Twierdzenie 2.13: Każdy podciąg ciągu zbieżnego do  $g$  też zbiega do  $g$ :

- i.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$  i  $\{a_{n_k}\}$  jest podciągiem ciągu  $\{a_n\} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = g$
- ii. Wniosek: Jeśli ciąg  $\{a_n\}$  zawiera co najmniej dwa podciągi zbieżne do różnych granic, to nie jest zbieżny
- iii. Przykład: Ciąg  $a_n = (-1)^n$  nie jest zbieżny, bo  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{2n} = 1$  oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{2n+1} = -1$ , oba są podciągami  $\{a_n\}$  i są zbieżne do innych granic, więc  $a_n$  nie jest zbieżny
- iv. Przykład:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{2n+3}{2n+2})^{4n-3} (= [1^\infty]) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2n+2})^{4n-3} = \lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{m})^{2m-7} = \frac{(\lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{m})^m)^2}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^7} = \frac{e^2}{1} = e^2$

(c) Twierdzenie 2.14: (Bolzano-Weierstrassa)

- i. Każdy ciąg ograniczony zawiera podciąg zbieżny.

(d) Def. Ciąg  $\{a_n\}$  jest ciągiem Cauchyego (podstawowym)  $\iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 |a_n - a_m| < \epsilon$

(e) Twierdzenie 2.15 (warunek równoważny zbieżności ciągu)

- i. Ciąg  $\{a_n\}$  jest zbieżny  $\iff \{a_n\}$  jest ciągiem Cauchyego

D  $\implies$  Zakładamy, że  $\{a_n\}$  jest zbieżny, tzn.  $\exists g \in \mathbb{R} \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 |a_n - g| < \frac{\epsilon}{2}$

: Pokażemy, że  $\{a_n\}$  jest ciągiem Cauchyego, tzn.  $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 |a_n - a_m| < \epsilon$

:  $|a_n - a_m| = |a_n - g + (-a_n + g)| \leq |a_n - g| + |a_m - g| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

: Zatem pokazaliśmy, że  $\forall \epsilon > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N}, n_1 = n_0 \forall n, m \geq n_1 |a_n - a_m| < \epsilon$

$\Leftarrow$  pomijamy bo długi dowód

i. Przykład: Ciąg  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$  nie jest zbieżny, bo nie jest ciągiem Cauchyego.

:  $\neg(\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n, m \geq n_0} |a_n - a_m| < \epsilon)$

: Chcemy pokazać, że  $\exists_{\epsilon > 0} \forall_{n_0 \in \mathbb{N}} \exists_{n, m \geq n_0} |a_n - a_m| \geq \epsilon$

:  $|a_{2n} - a_n| = |1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n}| = |\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}| = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

: Zatem pokazaliśmy, że  $\exists_{\epsilon > 0} \forall_{n_0 \in \mathbb{N}} \exists_{n, m \geq n_0} |a_n - a_m| \geq \epsilon$  - zachodzi dla  $\epsilon = \frac{1}{2}$ ,  $n = 2n_0$ ,  $m = n_0$