07.01.2020 13 i 14 Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona

Przez cały wykład p będzie oznaczać przedział

1. Def. Funkcja $F : P \to \mathbb{R}$ jest funkcją pierwotną funkcji $f : P \to \mathbb{R} \iff F$ jest różniczkowalna i $\forall_{x \in P} F'(x) = f(x)$
   np x^2 jest funkcją pierwotną funkcji x

2. Twierdzenie 13.1:
   Jeśli $F_0 : P \to \mathbb{R}$ jest funkcją pierwotną $f : P \to \mathbb{R}$ to $F : P \to \mathbb{R}$ też jest funkcją pierwotną $f : P \to \mathbb{R} \iff \exists_{C \in \mathbb{R}} \forall_{x \in P} F(x) = F_0(x) + C$
   D: $\Longrightarrow$ Zakładamy, że $F_0, F : P \to \mathbb{R}$ to funkcje pierwotne f,
   tzn. $\begin{cases} \forall_{x \in P} F_0'(x) = f(x) \\ \forall_{x \in P} F'(x) = f(x) \end{cases} \implies \forall_{x \in P} (F(x) - F_0(x))' = 0 \implies$ funkcja $F(x) - F_0(xb)$ jest stała na P czyli $\exists_{C \in \mathbb{R}} \forall_{x \in P} F(x) = F_0(x) + C$
   D: $\Longleftarrow$ Zakładamy, że $\exists_{C \in \mathbb{R}} \forall_{x \in P} F(x) = F_0(x) + C$ i F_0 jest funkcją pierwotną f. Wtedy $F' = f + 0 = f$ więc F też jest funkcją pierwotną f

3. Nie każda funkcja ma funkcję pierwotną, na przykład $f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$. Można poprowadzić dowód nie wprost z którego wynika że F musiałaby być stała ale wtedy F' musiałoby być wszędzie 0 skąd sprzeczność

4. Twierdzenie 13.2: Każda funkcja ciągła $f : P \to \mathbb{R}$ ma funkcję pierwotną

5. Def: Całką nieoznaczoną funkcji $f : P \to \mathbb{R}$ oznaczaną $\int f(x)dx$ nazywamy zbiór wszystkich funkcji pierwotncy funkcji f. Zapisujemy $\int f(x)dx = F(x) + C$ gdzie F to dowolna funkcja pierwotna f.

6. **Podstawowe wzory na całki:**
   (a) $\int 0dx = C$
   (b) $\int 1dx = x + C$
   (c) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ dla $n \neq = 1$
   (d) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
   (e) $\int e^x dx = e^x + C$
   (f) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
   (g) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
   (h) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
   (i) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
   (j) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
   (k) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arccot } x + C$
   (l) Jeśli f i g mają funkcjie pierwotne, to $f + g$ też ma funkcję pierwotną i $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
   D: Niech F i G to funkcje pierwotne odpowiednio f i g. Wtedy $(F + G)' = F' + G' = f + g \implies \int (f(x) + g(x))dx = F + G + C = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
   (m) Jeśli f ma funkcję pierwotną i $A \in \mathbb{R}$, to Af też ma funkcję pierwotną i $\int Af(x)dx = \begin{cases} A \int f(x)dx + C & A \neq 0 \\ C & A = 0 \end{cases}$
   (n) Przykłady:
      i. $\int \frac{3\sqrt{x}+8}{x} dx = 3 \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx + 8 \int \frac{1}{x} dx = 3 \int x^{-1/2} + 8 \int \frac{1}{x} dx = 8 \ln|x| + 6x^{1/2} + C$
      ii. $\int (\cot^2 x + 1)dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

7. Twierdzenie 13.3(o całkowaniu przez części)
   Jeśli $f, g : P \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne i $f'g$ ma funkcje pierwotną, to fg' też ma funkcję pierwotną i $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ z wzoru na pochodną iloczynu

8. Twierdzenie 13.4(o całkowaniu przez podstawienie)
   Jeśli $g : P_1 \to P_2$ jest różniczkowalna i $f : P_2 \to \mathbb{R}$ ma funkcję pierwotną, to $f \circ g \cdot g'$ też ma funkcję pierwotną i $\int f(g(x))g'(x)dx$, wtedy wstawiamy $t = g(x), dt = g'(x)dx$