Algebra liniowa z geometrią dla informatyków - konspekt wykładu 2018/19

Barbara Roszkowska -Lech

December 2, 2018

4 Rząd macierzy

Twierdzenie 4.1. *Niech* $A, A' \in M_m^n(K)$ *oraz* $v_1, v_2, \cdots, v_m$ *będą wierszami macierzy* A *a* $v_1', v_2', \cdots, v_m'$ *wierszami macierzy* A'. *Jeśli macierze* A *i* A' *są wierszowo równoważne to* $\mathcal{L}(v_1, v_2, \cdots, v_m) = \mathcal{L}(v_1', v_2', \cdots, v_m')$.

Twierdzenie 4.2. *Jeśli* $v_1, \cdots, v_m$ *beda wierszami macierzy* A, *a* $v_1', \cdots, v_m'$ *będa wierszami macierzy* A' *wierszowo równoważnej z macierzą* A *to układ* $v_1, \cdots, v_m$ *jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy gdy układ* $v_1', \cdots, v_m'$ *jest liniowo niezalezny.*

Zauważmy, że niezerowe wiersze każdej macierzy schodkowej tworzą układ liniowo niezależny, a jeśli jeden z wierszy jest zerowy to taki układ jest zależny.

Wniosek 4.3. *Wiersze dowolnej macierzy* A *tworzą układ liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz ta jest równoważna z macierzą schodkowa bez zerowych wierszy.*

Twierdzenie 4.4. *Niech* $c^1(A), c^2(A), \cdots, c^n(A)$ *bedą kolumnami macierzy* $A \in M_m^n(K)$. *Wtedy układ wektorów*

$$c^1(A), c^2(A), \cdots, c^n(A)$$

jest układem liniowo niezależnym wtedy i tylko wtedy gdy jednorodny układ równań o macierzy A *ma tylko zerowe rozwiązanie.*

Wniosek 4.5. *Niech macierz A będzie wierszowo równoważna z macierzą A'. Wtedy kolumny macierzy A są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy liniowo niezależne są kolumny macierzy A'.*

Wniosek 4.6. *Macierz $A \in M_n^n(K)$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy gdy jej kolumny $c^1(A), c^2(A), \cdots, c^n(A)$ tworzą układ liniowo niezalezny.*

Wniosek 4.7. *Niech macierz $A \in M_m^n(K)$ będzie wierszowo równoważna z macierzą A'. Wtedy układ kolumn $(c^{i_1}(A), c^{i_2}(A), \cdots, c^{i_k}(A))$ macierzy A jest bazą przestrzeni*

$$\mathcal{L}(c^1(A), c^2(A), \cdots, c^n(A))$$

wtedy i tylko wtedy, gdy układ kolumn $(c^{i_1}(A'), c^{i_2}(A'), \cdots, c^{i_k}(A'))$ macierzy A' jest bazą przestrzeni

$$\mathcal{L}(c^1(A'), c^2(A'), \cdots, c^n(A')).$$

Definicja 4.8. ***Rzędem macierzy*** *$A \in M_m^n(K)$ (ozn $rz(A)$)nazywamy wymiar przestrzeni*

$$\mathcal{L}(c^1(A), c^2(A), \cdots, c^n(A)).$$

Uwaga 4.9. ***(Drugie twierdzenie magiczne)*** *Niech $A \in M_m^n(K)$. Wtedy*

$$dim\mathcal{L}(c^1(A), c^2(A), \cdots, c^n(A)) = dim\mathcal{L}(r_1(A), r_2(A), \cdots, r_m(A)).$$

Twierdzenie 4.10. ***(Twierdzenie Kroneckera -Capelliego)*** *Niech $A \in M_m^n(K)$, $\quad B \in M_m^1(K)$. Układ równań liniowych $Ax = B$ ma conajmniej jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy $rz(A|B) = rz(A)$.*

Wniosek 4.11. *Niech $A \in M_m^n(K)$. Układ równań liniowych $Ax = B$ ma dla każdego $B \in M_m^1(K)$ conajmniej jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy $rz(A|B) = m$.*

Zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań $Ax = \mathbf{0}$ zawsze jest przestrzenią liniową. Wyznaczymy teraz jej wymiar.

Twierdzenie 4.12. *Niech $A \in M_m^n(K)$. Następujące warunki są równoważne*

1. *Układ równań $Ax = \mathbf{0}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. (zerowe)*
2. *Istnieje $B \in M_m^1(K)$ takie, że układ $Ax = B$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.*

3. *Dla każdego* $B \in M_m^1(K)$ *układ* $Ax = B$ *ma co najwyżej jedno rozwiązanie.*

4. $rz(A) = n$.

Twierdzenie 4.13. *Niech* $A \in M_m^n(K)$. *Wtedy* $Rozw(A|\mathbf{0}) < M_n^1(K)$ *oraz* $dimRozw(A|\mathbf{0}) = n - rz(A)$.

Dowolną bazę przestrzeni $Rozw(A|\mathbf{0})$ nazywamy fundamentalnym układem rozwiazań.

Twierdzenie 4.14. *Niech* $A \in M_m^n(K)$, $B \in M_m^1(K)$. *Ponadto niech* $X_0 \in M_n^1(K)$ *będzie elementem zbioru rozwiązań układu równań* $Ax = B$ *oraz niech* $X \in M_n^1(K)$. *Wtedy*

$$X \in Rozw(A|B) \Longleftrightarrow X - X_0 \in Rozw(A|\mathbf{0}).$$

Wniosek 4.15. *Niech* $A \in M_m^n(K)$, $B \in M_m^1(K)$. *Ponadto niech* $X_0 \in M_n^1(K)$ *będzie ustalonym elementem zbioru rozwiązań układu równań* $Ax = B$. *Wtedy*

- $Rozw(A|B) = X_0 + Rozw(A|\mathbf{0}) = \{X_0 + Y; Y \in Rozw(A|\mathbf{0})$.
- *Jeśli* $X_1, \ldots, X_p$ *jest układem fundamentalnym przestrzeni* $Rozw(A|\mathbf{0})$ *to każde rozwiazanie* X *układu* $Ax = B$ *daje się jednoznacznie przedstawić w postaci* $X = X_0 + a_1X_1 + \ldots + a_pX_p$, *gdzie* $a_1, a_2, \ldots, a_p \in K$.