

1. Własności dla X - przestrzeń, $A : I \rightarrow P(X)$, $B : I \rightarrow P(X)$, C - zbiór(a) Jeśli $i_0 \in I$, to $A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ (b) Jeśli $i_0 \in I$, to $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_{i_0}$ (c) Jeżeli $\forall_{i \in I} A_i \subseteq C$, to $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq C$ (d) Jeżeli $\forall_{i \in I} C \subseteq A_i$, to $C \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$ i. D: Niech $x \in C \implies \forall_{i \in I} x \in A_i \implies x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ (e) $\bigcup_{i \in I} (A_i \cup B_i) = (\bigcup_{i \in I} A_i) \cup (\bigcup_{i \in I} B_i)$ (f) $\bigcap_{i \in I} (A_i \cap B_i) \subseteq (\bigcap_{i \in I} A_i) \cap (\bigcap_{i \in I} B_i)$ i. D: $x \in \bigcap_{i \in I} (A_i \cap B_i) \iff \forall_{i \in I} x \in A_i \cap B_i \iff \forall_{i \in I} (x \in A_i \wedge x \in B_i) \iff (x \in \bigcap_{i \in I} A_i) \wedge (x \in \bigcap_{i \in I} B_i) \iff x \in (\bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{i \in I} B_i)$ (g) $\bigcup_{i \in I} (A_i \cap B_i) \subseteq (\bigcup_{i \in I} A_i) \cap (\bigcup_{i \in I} B_i)$ i. D: $x \in \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B_i) \implies \exists_{i \in I} x \in A_i \cap B_i \implies \exists_{i \in I} (x \in A_i \wedge x \in B_i) \implies (\exists_{i \in I} x \in A_i) \wedge (\exists_{i \in I} x \in B_i) \implies x \in \bigcup_{i \in I} A_i \wedge x \in \bigcup_{i \in I} B_i \implies x \in (\bigcup_{i \in I} A_i) \cap (\bigcup_{i \in I} B_i)$ (h) $(\bigcap_{i \in I} A_i) \cup (\bigcap_{i \in I} B_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B_i)$, Inkluzja przeciwna nie zachodzi(i) $-\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} -A_i$ i. D: $x \in -\bigcup_{i \in I} A_i \iff x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \iff \neg(x \in \bigcup_{i \in I} A_i) \iff \neg(\exists_{i \in I} x \in A_i) \iff \forall_{i \in I} \neg(x \in A_i) \iff x \in \bigcap_{i \in I} -A_i$ (j) $-\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} -A_i$ (k) Jeżeli $\forall_{i \in I} A_i \subseteq B_i$ to $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$ oraz $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i$ (l) $\bigcup_{i \in I} (C \cap A_i) = C \cap \bigcup_{i \in I} A_i$ i. D: $x \in \bigcup_{i \in I} (C \cap A_i) \iff \exists_{i \in I} x \in C \cap A_i \iff \exists_{i \in I} (x \in C \wedge x \in A_i) \iff x \in C \wedge \exists_{i \in I} x \in A_i \iff x \in C \cap \bigcup_{i \in I} A_i$ (m) $\bigcap_{i \in I} (C \cup A_i) = C \cup (\bigcap_{i \in I} A_i)$ (n) Jeżeli $J \subseteq I$ to $\bigcup_{j \in J} A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ oraz $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{j \in J} A_j$ i. D: $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \implies \forall_{i \in I} x \in A_i \implies \forall_{j \in J} x \in A_j \implies x \in \bigcap_{j \in J} A_j$ (o) $\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset$ i. D: Przypuśćmy, że istnieje $x \in \bigcup_{i \in \emptyset} A_i$, to $\exists_{i \in \emptyset} x \in A_i \iff \exists_{i \in \emptyset} i \wedge x \in A_i$, ale $i \in \emptyset$ to zdanie fałszywe stąd sprzeczność(p) $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = X$ D: $x \in \bigcap_{i \in \emptyset} A_i \iff \forall_{i \in \emptyset} x \in A_i \iff \forall_{i \in \emptyset} i \implies x \in A_i \iff x \in X$ 2. Indeksowanie dwoma indeksami I, J - zbiory indeksów $C : I \times J \rightarrow P(X)$, $(i, j) \mapsto c_{ij} = C(i, j)$

$$x \in \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} C_{ij} \iff \exists_{j \in J} x \in \bigcap_{i \in I} C_{ij} \iff \exists_{j \in J} \forall_{i \in I} x \in C_{ij}$$

Analogicznie definiujemy $\bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} C_{ij}$ oraz $\bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I} C_{ij}$ oraz $\bigcap_{j \in J} \bigcap_{i \in I} C_{ij}$ Własności: $C : I \times J \rightarrow P(X)$

$$(a) \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I} C_{ij} = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} C_{ij} \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} C_{ij}$$

$$(b) \bigcap_{j \in J} \bigcap_{i \in I} C_{ij} = \bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J} C_{ij} \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} C_{ij}$$

$$(c) \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} C_{ij} \subseteq \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} C_{ij}$$

$$i. x \in \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} C_{ij} \iff \exists_{i \in I} \forall_{j \in J} x \in C_{ij} \implies \forall_{j \in J} \exists_{i \in I} x \in C_{ij} \iff x \in \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} C_{ij}$$

3. nieskończone rodziny indeksowane. $I = J = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}^2$ (a) Dla każdego $a, b \in \mathbb{R}$, niech $C_{ab} = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : y \leq ax + b \}$

$$\bigcup_{a \in \mathbb{R}} C_{ab} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times (b, +\infty)$$

$$\bigcap_{b \in \mathbb{R}} C_{ab} = \mathbb{R}^2$$

$$\bigcap_{a \in \mathbb{R}} C_{ab} = \{0\} \times (-\infty, b)$$

$$\bigcap_{b \in \mathbb{R}} C_{ab} = \emptyset$$

$$\bigcap_{b \in \mathbb{R}} \bigcup_{a \in \mathbb{R}} C_{ab} = \bigcap_{b \in \mathbb{R}} (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times (b, +\infty)) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$$

$$\bigcup_{b \in \mathbb{R}} \bigcap_{a \in \mathbb{R}} C_{ab} = \bigcup_{b \in \mathbb{R}} (\{0\} \times (-\infty, b)) = \{0\} \times \mathbb{R}$$