22.10.2019

1. Przypomnienie co to macierz schodkowa
2. Twierdzenie: Każda macierz $A \in M_m^n(K)$jest równoważna z macierzą w postaci schodkowej (potrzebne operacje a,b) oraz z macierzą w postaci schodkowej zredukowanej (a,b,c)
   (a) $r_i \leftrightarrow r_j$
   (b) $r_i + ar_j$
   (c) $a \neq 0 : \; ar_i$
   (d) Wniosek - Każdy niesprzeczny układ równań ma rozwiązanie
   (e) Dowód:
      i. Dla macierzy zerowej - OK - na przykład $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$
      ii. Indukcja: $A \neq 0$

         Jeden wiersz - od razu postać schodkowa

         ZJ - A ma m wierszy , jest niezerowa, jest w postaci schodkowej

         : Możemy zrobić algorytm, dla którego jeśli $A_m$jest w postaci schodkowej to otrzymamy z A_{m+1} postać schodkową. Zerujemy odpowiednie kolumny ostatniego wiersza używając wierszy z A_m. Jeśli jakaś kolumna nie dała się wyzerować to wstawiamy wiersz w odpowiednie miejsce. Jak mamy schodkową to łatwo można zrobić schodkową zredukowaną z c. Mamy schodki. Koniec dowodu.

3. Definicja: Wielomianem zmiennej x o współczynnikach w K nazywamy wyrażenie $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots a_n \in K$
   (a) Każdy wielomian f wyraża funkcję $f : K \to K$, $s \mapsto a_0 + a_1s + \cdots + a_ns^n$. f nazywamy funkcją wielomianową.
      i. Pierwiastkiem wielomianu nazywamy $s \in K : f(s) = 0$
      ii. $K = \mathbb{R} \vee \mathbb{C} \vee \mathbb{Q}$
   (b) Przykład: $K = Z_2 = \{0, 1\}$
      i. $|\{f : f : Z_2 \to Z_2\}| = 4$. W Z_2, różne wielomiany oznaczają tą samą funkcję, na przykład $x^2 + x + 1$ oraz $x^3 + x + 1$
      ii. Ciało w którym każdy wielomian n-tego stopnia ma n pierwiastków, to ciało algebraicznie domknięte.
   (c) Zasadnicze twierdzenie algebry: Ciało liczb zespolonych jest ciałem algebraicznie domkniętym. To znaczy, że każdy wielomian o n współczynnikach w tym ciele ma n pierwiastków. $\mathbb{R}$ nie jest algebraicznie domknięte
4. $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}$ $A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to K, \quad (i, j) \mapsto A(i, j)$ czyli (a_{ij}) (i - wiersz, j - kolumna)
   (a) $r_i(A) = [a_{i1}, \ldots, a_{in}]$, $c^j(A) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$
   (b) $A^{(3,5,7)}_{(2,3)}$ bierze trzecią, piątą i siódmą kolumnę, z tylko drugim i trzecim rzędem.
   (c) $0^n_m = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$
   (d) Macierz kwadratowa - $m = n$
   (e) $\begin{bmatrix} x & & \\ & x & \\ & & x \end{bmatrix}$ - główna przekątna
   (f) Jeśli poniżej głównej przekątnej same zera - górna trójkątna, na odwrót - dolna trójkątna, jeśli na górze i na dole same zera- diagonalna, jeśli dodatkowo na głównej przekątnej same jedynki - macierz jednostkowa
   (g) Macierze możemy dodać, jeśli ich wymiary się zgadzają: $(A + B)(i, j) = A(i, j) + B(i, j)$
   (h) $-A : (-A)(i, j) = -(A)(i, j)$

(i) $A \in M_m^n, B \in M_m^1 : \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \in M_m^1$

i. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

(j) $A \in M_m^n$, $B \in M_n^k$: $A \cdot B \in M_m^k$

i. $c^i(A \cdot B) = A \cdot c^i(B)$

ii. więc $(A \cdot B)(i,j) := \sum_{s=1}^n A(i,s) \cdot B(s,j) = r_i(A)c^j(B)$

iii. $r_j(AB) = r_j(A)B$

iv. $c^i(AB) = A \cdot c^i(B)$

v.