

## 1. Zbiory - aksjomatyczna teoria zbiorów.

- (a) Zbiór - pojęcie pierwotne (nie definiujemy go)
- (b) bycie elementem zbioru - pojęcie pierwotne
- (c)  $A, B, C, \dots X, \dots$  - zbiory
- (d)  $a \in A$  -  $a$  jest elementem zbioru  $A$  ( $a$  należy do  $A$ )
- (e)  $a \notin A \iff \neg(a \in A)$  -  $a$  nie należy do  $A$
- (f) **Aksjomat ekstencjonalności**
  - i. Zbiory  $A$  i  $B$  są równe wtedy i tylko wtedy gdy mają te same elementy, czyli
  - ii.  $A = B \iff \forall x(x \in A \iff x \in B)$
  - iii. **Uwaga** - aby pokazać, że  $A = B$  wystarczy udowodnić dwie implikacje  $\forall x(x \in A \implies x \in B) \wedge (x \in B \implies x \in A)$

(g) **Aksjomat zbioru pustego**

- i. Istnieje zbiór pusty czyli taki, który nie ma żadnego elementów
- ii.  $\emptyset$ -zbiór pusty,  $\forall x x \notin \emptyset$
- iii. Twierdzenie - istnieje tylko jeden zbiór pusty

D:  $A, B$  - zbiory puste,  $\neg(A = B)$  czyli  $A \neq B$

: Z aksjomatu ekstencjonalności zbiory są różne  $\iff \exists x \neg((x \in A \implies x \in B) \wedge (x \in B \implies x \in A)) \iff \exists x \neg(x \in A \implies x \in B) \vee \neg(x \in B \implies x \in A) \iff$

:  $\iff \exists x(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$

:  $x \in A \wedge x \notin B$  zdanie fałszywe, bo  $A$  jest zbiorem pustym

:  $x \in B \wedge x \notin A$  zdanie fałszywe, bo  $B$  jest zbiorem pustym

: Sprzeczność - istnieje tylko jeden zbiór pusty

(h) **Aksjomat wyróżniania**

- i. Jeśli  $A$  jest zbiorem, a  $\phi(x)$  funkcją zdaniową o zakresie  $A$  ( $x \in A$ ), to istnieje zbiór  $\{x : x \in A \wedge \phi(x)\} = \{x \in A : \phi(x)\}$

: Czyli  $a \in \{x \in A : \phi(x)\} \iff a \in A \wedge \phi(a)$

(i) **Uwaga:** nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów

D:  $V$  - zbiór wszystkich zbiorów

:  $A = \{X \in V : X \notin X\}$  - zbiór na mocy aksjomatu wyróżnienia

:  $A \in A \implies A \notin A$  - sprzeczność. Stąd  $A \notin A \implies \neg(A \in A) \iff \neg(A \notin A) \implies A \in A$  - też sprzeczność

: Stąd nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów

(j) **Antynomia (paradoks) Russella**

:  $Z = \{X : X \notin X\}$ . Czy  $Z \in Z$ ?

:  $Z \in Z = \{X : X \notin X\} \iff Z \notin Z$  - sprzeczność

## (k) Sposoby definiowania zbiorów

- i.  $A = \{1, 3, \sqrt{2}\}, \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

- ii.  $\phi(x)$  - funkcja zdaniowa -  $A = \{x : \phi(x)\}$  - na przykład  $P = \{x : x \text{ jest liczbą parzystą}\}$

A.  $a \in \{x : \phi(x)\} \iff \phi(a)$

(l) **Def.** Zbiór  $A$  zawiera się w zbiorze  $B$  ( $A$  jest podzbiorem  $B$ ) wtedy i tylko wtedy gdy każdy element z  $A$  jest elementem  $B$ 

:  $A \subseteq B \iff \forall x(x \in A \implies x \in B)$

(m) **Def.**  $A$  jest właściwym podzbiorem  $B$  jeśli  $A \subseteq B \wedge A \neq B$  (oznaczenie  $A \subsetneq B$ )(n) **Proste własności**

- i.  $A = A$
- ii.  $(A = B \wedge B = C) \implies A = C$
- iii.  $A = B \iff B = A$
- iv.  $A \subseteq A$
- v.  $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \implies A \subseteq C$

D:  $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$  (Z)

- :  $A \subseteq C?$
- :  $x \in A \implies ?x \in C$
- :  $x \in A \implies x \in B \implies x \in C$  - z  $Z$
- vi.  $A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

(o) **Aksjomat sumy**

- i. Jeśli  $A$  i  $B$  są zbiorami, to istnieje zbiór  $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

(p) **Def.** Iloczyn (przecięcie) zbiorów to zbiór  $A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$  (jest to zbiór na mocy aksjomatu wyróżniania)

(q) **Def.** Różnica zbiorów  $A$  i  $B$  to zbiór  $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$

(r) **Prawa rachunku zbiorów** -  $A, B, C$  - zbiory

- i.  $A \cup B = B \cup A$
- ii.  $A \cap B = B \cap A$
- iii.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
- iv.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- v.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- vi.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

D: Trzeba pokazać, że implikacje zachodzą w obie strony. Aksjomat sumy, definicja iloczynu, rachunek zdań, aksjomat sumy

- vii.  $A \cap B \subseteq A$
- viii.  $A \subseteq A \cup B$
- ix.  $A \cap A = A = A \cup A$

2.  $A \div B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$