6 Homomorfizmy przestrzeni liniowych

Definicja 6.1. *Niech V, U bedą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Przekształcenie $F : V \to W$ nazywamy przekształceniem liniowym (homomorfizmem przestrzeni liniowych), gdy dla dowolnych $v, u \in V, \quad a \in K$ spełnione są następujące warunki*

- $F(u + v) = F(u) + F(v)$,
- $F(au) = aF(u)$.

Łatwo udowodnić nastepujący fakt:

Uwaga 6.2. *Przekształcenie $F : V \to W$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych wektorów $v_1, v_2, \ldots v_n \in V$ oraz dowolnych $a_1, a_2, \ldots a_n \in K$, $F(a_1v_1 + \ldots + a_nv_n) = a_1F(v_1) + \ldots + a_nF(v_n)$*

Przykłady

1. $F : K[x] \to K[x], \quad w \mapsto \frac{dw}{dx}$.
2. Niech $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ będzie bazą przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Definiujemy przekształcenie $M_{\mathcal{B}} : V \to M_n^1(K)$,
$$M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow v = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n.$$
Przekształcenie $M_{\mathcal{B}}$ jest przekształceniem liniowym. Nazywamy je *przekształceniem wspólrzędnych.*
3. Niech X bedzie niepustym zbiorem, K ciałem i $x_0 \in X$. Przekształcenie $F : Map(X, K) \to K, \quad f \mapsto f(x_0)$ jest liniowe.
4. Niech $V = V_1 \oplus V_2$. Dla dowolnego wektora $v \in V$ istnieją wtedy wyznaczone jednoznacznie wektory $v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2$, takie że $v = v_1 + v_2$. Przekształcenie
$$P_{V_1} : V \to V,\ v \mapsto v_1$$
nazywamy rzutem na V_1 wdłuz V_2.
Symetrią wzgledem V_1 wzdłuż V_2 nazywamy takie przekształcenie
$$S : V \to V,\ v \mapsto v_1 - v_2.$$
Łatwo pokazać, że oba te przekształcenia są liniowe.

Twierdzenie 6.3. *Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ bedzie bazą przestrzeni V oraz niech $w_1, \ldots, w_n$ będzie dowolnym układem wektorów w przestrzeni W. Istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $F : V \to W$, takie że $F(v_i) = w_i$, dla $i = 1, \ldots, n$.*

Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Oznaczmy symbolem $Hom(V, W)$ zbiór wszystkich przekształceń liniowych z V w W. Przekształcenia liniowe z $Hom(V, W)$ możemy dodawać i mnożyć przez elementy z ciała K. Dla $F, G \in Hom(V, W)$, $a \in K$

$$(F + G)(v) := F(v) + G(v),\ (aF)(v) := aF(v).$$

Zbiór $Hom(V, W)$ z tymi działaniami jest przestrzenia wektorową nad ciałem K. Wektorem zerowym w tej przestrzeni jest przekształcenie zerowe przyporzadkowujące dowolnemu wektorowi v z przestrzeni V wektor zerowy z przestrzeni W.

Twierdzenie 6.4. *Niech $F : V \to W$, $G : W \to U$ będa przekształceniami liniowymi.*

1. *Przekształcenie $G \circ F : V \to U$ jest przekształceniem liniowym.*
2. *Jesli przekształcenie liniowe F jest odwracalne to $F^{-1} : W \to V$ jet również przekształceniem liniowym.*

Definicja 6.5. *Niech $F : V \to W$ bedzie przekształceniem liniowym. Wówczas*

1. *Jądrem przekształcenia F nazywamy zbiór*

$$kerF := \{v \in V : F(v) = \boldsymbol{0}\}.$$

2. *Obrazem przekształcenia F nazywamy zbiór*

$$ImF := \{F(v) : v \in V\}.$$

Przykład 6.6. *Niech $V = V_1 \oplus V_2$ oraz P_{V_1} będzie rzutem na V_1 wzdłuż V_2.*
Wtedy $KerP_{V_1} = V_2$ oraz $ImP_{V_1} = V_1$.
Ponadto $P_{V_1}|V_1 = Id_{V_1}$ oraz $P_{V_1} + P_{V_2} = Id_V$.

Uwaga 6.7. *Niech $F : V \to W$ bedzie przekształceniem liniowym. Wówczas*

1. *$kerF$ jest podprzestrzenia liniową V,*

2. *ImF jest podprzestrzenia liniową W.*

Twierdzenie 6.8. *Niech $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ będzie bazą przestrzeni V oraz niech $F : V \to W$ bedzie przekształceniem liniowym. Wówczas $ImF = \mathcal{L}(F(\mathcal{B}))$.*

Twierdzenie 6.9. *Niech $F : V \to W$ bedzie przekształceniem liniowym. Wówczas*

$$dimV = dimkerF + dimImF.$$

Definicja 6.10. *Przekształcenie liniowe $F : V \to W$ nazywamy*

- *monomorfizmem, jeśli F jest róznowartosciowe,*
- *epimorfizmem, jeśli F jest " na",*
- *izomorfizmem, jesli F jest róznowartościowe i "na" .*

Twierdzenie 6.11. *Niech $F : V \to W$ bedzie przekształceniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:*

1. *F jest monomorfizmem ,*

2. *$kerF = \{\mathbf{0}\}$,*

3. *F przeprowadza dowolny liniowo niezależny układ wektorów na układ liniowo niezależny,*

4. *F przeprowadza dowolną bazę na układ liniowo niezależny ,*

5. *F przeprowadza pewną bazę na układ liniowo niezależny.*

Wniosek 6.12. *Niech $F : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:*

1. *F jest izomorfizmem ,*

2. *F przeprowadza każdą bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W,*

3. *F przeprowadza pewną bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W.*

Niech $F : V \to W$ bedzie izomorfizmem przestrzeni liniowych. Z powyższych wniosków wynika, że wtedy $dimV = dimW$. Ponadto, jeśli $dimV = dimW = n$ to przestrzenie V oraz W są izomorficzne. Oznacza to, że dwie przestrzenie wektorowe V, W są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy $dimV = dimW$ W szczególnosci wynika stąd, ze każda n wymiarowa przestrzeń wektorowa jest izomorficzna z przestrzenią K^n.

7 Macierze przekształceń liniowych

Definicja 7.1. *Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $F : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Ponadto niech układ wektorów $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ bedzie bazą przestrzeni V, a układ $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ bazą przestrzeni W. Macierzą przekształcenia F w bazach $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ nazywamy macierz $A = [a_{ij}] \in M_m^n(K)$ taką, że*

$$c^j(A) = M_{\mathcal{C}}(F(v_j)),$$

dla $j = 1, \ldots, n$.

Macierz przekształcenia liniowego w bazach $\mathcal{B}$ oraz $\mathcal{C}$ oznaczamy $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F)$. Bezpośrednio z definicji wynika, że dla dowolnego $j = 1, \ldots, n$

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i.$$

Uwaga 7.2. *Niech $F : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym.*

$$DimImF = rz(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F)).$$

Twierdzenie 7.3. *Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $F : V \to W$ bedzie przekształceniem liniowym. Ponadto niech $\mathcal{B}$ bedzie bazą przestrzeni V a układ $\mathcal{C} =$ bazą przestrzeni W. Przekształcenie*

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} : Hom(V, W) \to M_m^n(K), \quad F \mapsto M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F),$$

jest izomorfizmem przestrzeni wektorowych.

Twierdzenie 7.4. *Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $F : V \to W$ bedzie przekształceniem liniowym. Ponadto niech $\mathcal{B}$ bedzie bazą przestrzeni V a układ $\mathcal{C}$ bazą przestrzeni W. Macierz $A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F)$ wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego wektora $v \in V$, $M_{\mathcal{C}}(F(v)) = A \cdot M_{\mathcal{B}}(v)$.*

Niech $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ będą bazami przestrzeni wektorowej V, a przekształcenie $Id = Id_V$ bedzie przekształceniem identycznosciowym przestrzeni V (tzn $Id_V(v) = v$). Macierz $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(Id)$ nazywamy macierzą zmiany bazy z $\mathcal{B}$ do $\mathcal{B}'$. Macierz ta pozwala obliczyć współrzędne dowolnego wektora z V w bazie $\mathcal{B}'$, gdy znamy te współrzedne w bazie $\mathcal{B}$. Prawdziwy jest następujący wzór

$$M_{\mathcal{B}'}(v) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(Id)M_{\mathcal{B}}(v).$$

Twierdzenie 7.5. *Jeśli V, U, W są przestrzeniami liniowymi nad ciałem K z bazami $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ odpowiednio a $F : V \to W$, $G : W \to U$ są przekształceniami liniowymi, to*

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(G \circ F) = M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(G) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F).$$

Twierdzenie 7.6. *Jeśli $F : V \to W$ jest przekształceniem liniowym a $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ są bazami przestrzeni V oraz $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}'$ są bazami przestrzeni W, to*

$$M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(F) = M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(Id)M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F)M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id).$$

8 Macierze odwracalne (przypomnienie)

Definicja 8.1. *Macierz $A \in M_n^n(K)$ nazywamy odwracalną, jeśli istnieje macierz $B \in M_n^n(K)$, taka że $AB = I_n$. Macierz B nazywamy wówczas macierzą odwrotną do macierzy A i oznaczamy A^{-1}.*

Twierdzenie 8.2. *Niech $A \in M_n^n(K)$. Nastepujące warunki są równoważne:*

- *Macierz A jest odwracalna,*
- *Macierz A jest wierszowo równowazna z macierzą jednostkową,*
- *Macierz A jest iloczynem macierzy elementarnych,*
- *Rząd macierzy A jest równy n*

Poniższe twierdzenie opisuje algorytm znajdowania macierzy odwrotnej.

Twierdzenie 8.3. *Niech $A \in M_n^n(K)$. Macierz A jest odwracalna wtedy i tylko wtedy gdy macierz $A|I$ jest wierszowo równoważna z macierzą $I|B$. Ponadto jeśli ten warunek jest spełniony to $A^{-1} = B$.*

Pokazaliśmy, ze macierze przekształceń (jeśli wybierzemy bazy) wyznaczają jednoznacznie przekształcenia liniowe.
Okazuje się że macierze odwracalne odpowiadają przy takinm utożsamieniu izomorfizmom.

Uwaga 8.4. *Macierz $A \in M_n^n(K)$ jest macierzą odwracalną wtedy i tylko wtedy gdy przekształcenie liniowe $F : K^n \to K^n$ takie, że $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = A$, gdzie $\mathcal{B}$ jest dowolną bazą K^n, jest izomorfizmem.*

Wniosek 8.5. *Niech $A \in M_n^n(K)$. Jeśli istnieje $B \in M_n^n(K)$, takie że $AB = I$ to zachodzi też $BA = I$. Ponadto taka macierz B jest wyznaczona jednoznacznie.*

Uwaga 8.6.

1. *Macierze zamiany wpółrzednych są odwracalne. Ponadto $(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(Id))^{-1} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id)$.*
2. *Jeśli $A, \quad B$ są macierzami odwracalnymi to AB jest macierza odwracalną i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*