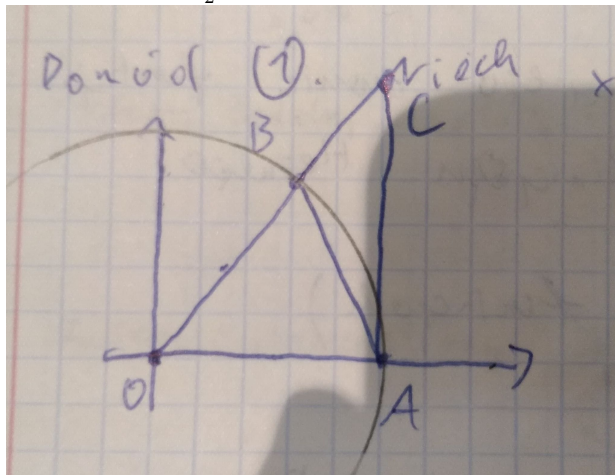


1. Twierdzenie 4.6:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  - (a) oraz  $\forall x \in \mathbb{R} |\sin x| \leq |x|$  - (b)

(a) D: Niech  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$



$$P_{\triangle AOB} < P_{\text{wycinek koła } AOB} < P_{\triangle OAC}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2\pi} \pi \cdot 1^2 < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

Dla  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , mamy  $\frac{\sin x}{x} < 1$  oraz  $-\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

Dla  $-x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$  mamy  $\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1$

Dla  $y \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$  mamy  $\cos y < \frac{\sin y}{y} < 1$

Stąd  $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}) \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$  tw. o 3 funkcjach  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , bo  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$

(b) D: Weźmy, że  $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}) |\frac{\sin x}{x}| < 1$  z czego  $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}) |\sin x| < |x|$ ,

Dla  $x = 0$ ,  $|\sin x| = 0 \leq |x|$

Dla  $x$  takich, że  $|x| \geq \frac{\pi}{2}$  mamy  $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|$

Z wszystkich poprzednich  $\implies \forall x \in \mathbb{R} |\sin x| \leq |x|$

## 5. Granice jednostronne, asymptoty i ciągłość funkcji

1. Przez cały wykład zakładamy, że  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  gdzie  $D \subset \mathbb{R}$

(a)  $y = \sqrt{x}$  - granicę w zerze możemy liczyć tylko z prawej strony.

(b)  $y = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$   $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  nie istnieje. Ale możemy rozważać granicę lewostronną  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  i granicę prawostronną  $\lim_{x \rightarrow 0^+}$

2. Def. (Heinego granic jednostronnych)

(a) Niech  $a \in \mathbb{R}$  będzie punktem skupienia zbioru  $D \cap (-\infty, a)$  i niech  $g \in \widetilde{\mathbb{R}}$ . Wtedy  $g$  jest granicą lewostronną funkcji  $f$  w punkcie  $a$  (co zapisujemy  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = g$  lub  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} g$  lub  $f(a^-) = g$ )  
 $\iff \forall \{x_n\} \subset D \cap (-\infty, a) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$

(b) Niech  $a \in \mathbb{R}$  będzie punktem skupienia zbioru  $D \cap (a, +\infty)$  i niech  $g \in \widetilde{\mathbb{R}}$ . Wtedy  $g$  jest granicą prawostronną funkcji  $f$  w punkcie  $a$  (co zapisujemy  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g$  lub  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} g$  lub  $f(a^+) = g$ )  
 $\iff \forall \{x_n\} \subset D \cap (a, +\infty) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$

3. Twierdzenie 5.1 (def. Cauchy'ego granic jednostronnych funkcji) - podkreślone to zmiana od definicji zwykłej granicy

(a) Niech  $a \in \mathbb{R}$  będzie punktem skupienia zbioru  $D \cap (-\infty, a)$

i. Jeśli  $g \in \mathbb{R}$  to  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = g \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D -\delta \leq x - a < 0 \implies |f(x) - g| < \epsilon$

ii. Jeśli  $g = +\infty$   $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \iff \forall G > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D -\delta \leq x - a < 0 \implies f(x) > G$

iii. Jeśli  $g = -\infty$   $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \iff \forall G > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D -\delta \leq x - a < 0 \implies f(x) < -G$

(b) Niech  $a \in \mathbb{R}$  będzie punktem skupienia zbioru  $D \cap (a, +\infty)$

i. Jeśli  $g \in \mathbb{R}$  to  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D 0 \leq x - a < \delta \implies |f(x) - g| < \epsilon$

ii. Jeśli  $g = +\infty$   $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \iff \forall G > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D 0 \leq x - a < \delta \implies f(x) > G$

iii. Jeśli  $g = -\infty \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \iff \forall G > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \ 0 < x - a < \delta \implies f(x) < -G$

4. Twierdzenie 5.2: Jeśli  $a \in \mathbb{R}$  jest punktem skupienia  $D \cap (-\infty, a)$  i  $D \cap (a, +\infty)$  oraz  $g \in \widetilde{\mathbb{R}}$ , to  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g$

(a)  $[\frac{1}{0^+}] = +\infty, [\frac{1}{0^-}] = -\infty$

5. Asymptoty

(a) Def. Prosta  $x = a$ , gdzie  $a \in \mathbb{R}$  jest

- Asymptotą pionową lewostronną (wykresu) funkcji  $y = f(x) \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$
- Asymptotą pionową prawostronną (wykresu) funkcji  $y = f(x) \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$
- Asymptotą pionową obustronną gdy jest asymptotą pionową lewostronną i prawostronną

(b) Def. Prosta  $y = b$ , gdzie  $b \in \mathbb{R}$  jest

- Asymptotą poziomą lewostronną (wykresu) funkcji  $y = f(x) \iff \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g$
- Asymptotą poziomą prawostronną (wykresu) funkcji  $y = f(x) \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g$
- Asymptotą poziomą obustronną gdy jest asymptotą poziomą lewostronną i prawostronną

(c) Def. Prosta  $y = mx + k$ , gdzie  $m, k \in \mathbb{R}$  jest

- Asymptotą ukośną lewostronną (wykresu) funkcji  $y = f(x) \iff \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + k)] = 0$
- Asymptotą ukośną prawostronną (wykresu) funkcji  $y = f(x) \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + k)] = 0$
- Asymptotą ukośną obustronną gdy jest asymptotą poziomą lewostronną i prawostronną
- Twierdzenie 5.3: Prosta  $y = mx + k$ , gdzie  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  i  $k \in \mathbb{R}$  jest asymptotą ukośną prawo/lewostronną  $\iff m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \wedge k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$  - (dowód na ćwiczeniach)

A. Przykład: Wyznaczymy asymptoty funkcji  $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ .  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = [\frac{1}{0^-}] = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = [\frac{1}{0^+}] = +\infty$ , Więc  $x = 0$  to asymptota pionowa obustronna

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = -1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = 1$  - asymptota pozioma lewostronna to  $y = -1$ , prawostronna  $y = 1$

Brak asymptot ukośnych, bo są asymptoty poziome

6. Ciągłość

(a) Przypomnienie:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g \stackrel{(H)}{\iff} \forall \{x_n\} \subset D \setminus \{a\} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g \stackrel{(C)}{\iff} \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \ 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - g| < \epsilon$

(b) Def. (Heinego ciągłości funkcji w punkcie):

Funkcja  $f$  jest ciągła w punkcie  $a \in D$  (musi być w dziedzinie)  $\iff \forall \{x_n\} \subset D \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$  - (CH)

i. W przypadku funkcji ciągłej  $f$  mamy  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$ , tzn. z granicą można wejść pod symbol funkcji.

ii. Uwaga: Jeśli  $a \in D$  nie jest punktem skupienia zbioru  $D$ , to

$\forall \{x_n\} \subset D \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$  - (\*) jest spełnione jedynie przez ciągi  $\{x_n\}$  takie, że dla wszystkich dalszych  $n : x_n = a$

$\implies$  dla wszystkich dużych  $n \ f(x_n) = f(a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a)$

Zatem warunek (CH) jest spełniony i funkcja jest ciągła w  $a$ . Na przykład każda  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła w każdym punkcie z  $D = \mathbb{N}$ , bo każdy taki punkt nie jest punktem skupienia dziedziny

(c) Twierdzenie 5.4 (def. Cauchy'ego ciągłości funkcji w punkcie).

Funkcja  $f(x)$  jest ciągła w pkt.  $a \in D \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \ |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$  - (CC)

i. D (gdzie  $a$  jest punktem skupienia zbioru  $D$ ): Chcemy pokazać, że (CH)  $\iff$  (CC)

(CH)  $\iff \forall \{x_n\} \subset D \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) \iff \forall \{x_n\} \subset D \setminus \{a\} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \iff \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \ 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon \iff$  (CC)

ii. Przy okazji udowodniliśmy następujące twierdzenie:

(d) Twierdzenie 5.5: Jeśli  $a \in D$  jest punktem skupienia zbioru  $D$ , to  $f(x)$  jest ciągła w punkcie  $a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

(e) Def. Funkcja  $f(x)$  jest ciągła  $\iff f(x)$  jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny, tzn.

$\forall a \in D \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \ |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon \iff f(x)$  jest ciągła w  $a$

Przykłady:

- i. Funkcja stała  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = c$  gdzie  $c \in \mathbb{R}$   
 $\forall_{a \in D} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies |c - c| = 0 < \epsilon$  więc jest ciągła
- ii.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$  jest ciągła:  
 $\forall_{a \in D} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies |x - a| < \epsilon$ , co zachodzi dla  $\delta = \epsilon$
- iii.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$  jest ciągła:  
 $\forall_{a \in D} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies ||x| - |a|| \leq |x - a| < \epsilon$ , co zachodzi dla  $\delta = \epsilon$
- iv.  $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$  - przydatne do następnego  
 $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$   
 $\sin \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$   
 $\sin \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$
- v.  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin(x)$ ,  $g(x) = \cos(x)$  są ciągłe, bo:  
 $\forall_{a \in D} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies |\sin x - \sin a| = 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \leq 2 \cdot \left| \frac{x-a}{2} \right| \cdot |1| \leq |x - a| < \epsilon$  ( $\delta = \epsilon$ )  
 $\forall_{a \in D} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies |\cos x - \cos a| = 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{x+a}{2} \right| \leq 2 \cdot \left| \frac{x-a}{2} \right| \cdot |1| \leq |x - a| < \epsilon$  ( $\delta = \epsilon$ )