09.10.2019
CIĄGI LICZBOWE

1. Def. Ciągiem $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ lub $\{a_n\}_{n\geq1}$lub $\{a_n\}$ nazywamy funkcję $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Ponadto a_n nazywamy n-tym wyrazem ciągu
   (a) Przykłady:
      i. $a_n = \sqrt[n]{n}$
      ^ ciąg zdefiniowany przez podanie wzoru na nty wyraz tego ciągu
         A. $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}$ itp
      ii. $b_1 = 1$
      $b_2 = 1$
      $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}, n \geq 2$
      ^ ciąg zdefiniowany rekurencyjnie
         A. Pierwsze wyrazy ciągu - $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$ fibonacci
2. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony z dołu $\iff \exists_{m\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}a_n \geq m$
3. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony z góry $\iff \exists_{M\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}a_n \leq M$
4. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony $\iff (\exists_{m\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}a_n \geq m) \wedge (\exists_{M\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}a_n \leq M)$ czyli $\exists_{K\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}|a_n| \leq K$
   (a) Przykład:
      i. Ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ jest ograniczony z dołu, bo $\exists_{m\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}a_n \geq m$ $(m = 0)$
      ii. Ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ jest ograniczony z dołu, bo $\exists_{M\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}a_n \leq M$ $(m = 1)$
      iii. Skoro ciąg jest ograniczony z góry i z dołu to możemy powiedzieć że ciąg ten jest ograniczony
5. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący $\iff \forall_{n\in\mathbb{N}}a_{n+1} > a_n \overset{\forall_{n\in\mathbb{N}}a_n>0}{\iff} \forall_{n\in\mathbb{N}}\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$
6. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest niemalejący $\iff \forall_{n\in\mathbb{N}}a_{n+1} \geq a_n \overset{\forall_{n\in\mathbb{N}}a_n>0}{\iff} \forall_{n\in\mathbb{N}}\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$
7. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest malejący $\iff \forall_{n\in\mathbb{N}}a_{n+1} < a_n \overset{\forall_{n\in\mathbb{N}}a_n>0}{\iff} \forall_{n\in\mathbb{N}}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$
8. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest nierosnący $\iff \forall_{n\in\mathbb{N}}a_{n+1} \leq a_n \overset{\forall_{n\in\mathbb{N}}a_n>0}{\iff} \forall_{n\in\mathbb{N}}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$
   (a) Ciągi rosnące,niemalejące,malejące i nierosnące nazywamy monotonicznymi
      i. np $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \to a_1 - 1 < a_2 = \frac{1}{2} > a_3 = -\frac{1}{3}$
      ii. $b_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$
         A. Ze wzrostem n, n+1 rośnie, więc $\frac{1}{n+1}$ maleje, więc $1 - \frac{1}{n+1}$ rośnie
         B. Zatem ciąg b_n jest rosnący
9. Def. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do granicy $g \in \mathbb{R} \iff \forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|a_n - g| < \epsilon$
   (a) Dla dowolnie małego $\epsilon > 0$ dla wyrazów ciągu o dostatecznie dużych wartościach, odległość pomiędzy dowolnym wyrazem ciągu spełniającym warunki a g jest mniejsza od ϵ
   (b) Wtedy g nazywamy granicą i zapisujemy $\lim_{n\to\infty}a_n = g$ lub $a_n \to g$
      i. Przykład: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ bo $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$
      $\frac{1}{n} < \epsilon$
      $\frac{1}{\epsilon} < n \longrightarrow n_0 = \lceil\frac{1}{\epsilon}\rceil$
10. Def. Jeśli ciąg $\{a_n\}$ nie jest zbieżny to nazywamy go rozbieżnym
11. Twierdzenie 2.1: Każdy ciąg stały jest zbieżny: $\forall_{n\in\mathbb{N}}a_n = a \implies \lim_{n\to\infty} a_n = a$
   (a) Dowód: $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|a_n - a| < \epsilon$. Ponieważ $\forall_{n_0\in\mathbb{N}}a_n - a = 0$, to zawsze $0 < \epsilon$
12. Twierdzenie 2.2: Ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę