15.10.2019

1. :

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$$
$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3$$
$$6x_1 + 9x_2 + 5x_2 + 2x_4 = 5$$

2. :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 2 \\ 6 & 9 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to$$

$$x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 + 2x_4 = 0$$
$$x_3 - 2x_4 = 1$$

: Rozwiązanie $= \{(-\frac{3}{2}x_2 - 2x_4\ ,\ x_2, 1 + 2x_4\ ,\ x_4) : \ x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$

3. Zbiór K zawierający co najmniej dwa elementy nazywamy ciałem, jeśli
   (a) $K \times K \to K \quad (x, y) \to x \oplus y$
   (b) $K \times K \to K \quad (x, y) \to x \odot y$
   (c) Wybierane są dwa elementy K - element zerowy oznaczamy 0, element jedynkowy 1
      i. Spełnione są następujące warunki dla każdych $a, b, c \in K$
         A. $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ - łączność
         B. $a \oplus b = b \oplus a$ - przemienność
         C. $0 \oplus a = a$ - element neutralny
         D. $\forall_{a \in K} \exists_{p \in K} a \oplus p = 0$ - istnienie elementu przeciwnego
         E. $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$ - łączność
         F. $a \odot b = b \odot a$ - przemienność
         G. $1 \odot a = a$ - element neutralny
         H. $\forall_{a \in K \setminus \{0\}} \exists_{p \in K} a \odot p = 1$ - istnienie elementu odwrotny
         I. $(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)$
   (d) Przykłady - $K = \mathbb{R}$ $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$
      i. $\{Z_2, +_2, \cdot_2, 0, 1\}$ - $\begin{array}{ccc} +_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$ (xor) oraz $\begin{array}{ccc} \cdot_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$ (koniunkcja)
   (e) Def. K ciało. Podzbiór $L \subset K$ nazywamy podciałem K jeśli dla dowolnych $a, b \in L$
      i. $a + b \in L,\ a \cdot b \in L,\ -a \in L,\ a^{-1} \in L$
      ii. Przykład: $Z_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$
         A. tzn $a +_n b :=(a + b)\%n$
         B. $a \cdot_n b\ := (a \cdot b)\%n$
         C. Dla na przykład Z_6 nie zawsze spełniona jest odwracalność
      iii. Kiedy $(Z_n, +_n, \cdot_n, 0, 1)$ jest ciałem?
      iv. Kiedy $\forall_{k \in Z_n} k \in Z_n$ma element odwrotny?

4. Def. Macierzą $m \times n$ (o m wierszach i n kolumnach) o wyrazach ze zbioru X nazywamy
   (a) $A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}$, $a_{ij} \in X$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$
   (b) Formalnie: $A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots n\} \to X$, $(i, j) \mapsto a_{ij} = A(i, j)$

5. $M_n^m(x)$- zbiór wszystkich macierzy $m \times n$ o wspólnym X
   (a) $U : \begin{matrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = n_m \end{matrix}$ - macierz współczynników układu $A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{vmatrix}$

6. Def. $A \in M_n^m(K)$ Operacjami elementarnymi macierzy A nazywamy
   (a) Dodanie do wiersza innego przemnozonego przez $a \in K$ $(r_i + ar_j)$
   (b) $r_i \leftrightarrow r_i$
   (c) ar_i , $a \neq 0$
7. Formalna definicja - jak się macierz ułoży w takie jakby schodki to jest postać schodkowa
   (a) Mówimy, że macierz $A \in M_n^m(K)$ jest w postaci schodkowej, jeśli:
      i. Każdy wiersz zerowy w A znajduje się ponizej każdego wiersza niezerowego
      ii. Dla każdego i>1 pierwszy od lewej $\neq 0$ wyraz w i-tym wierszu znajduje się w kolumnie na prawo od pierwszego $\neq 0$ wyrazu $i-1$ wiersza
      iii. Macierz jest w **zredukowanej** postaci schodkowej, jeśli jest w postaci schodkowej i w każdym niezerowym $\neq 0$ wierszu pierwszy $\neq 0$ wyraz to 1, i jest on jedynym różnym od zera wyrazem w swojej kolumnie
8. Niech K ciało. Każda $\neq 0$ macierz $A \in M_n^m(K)$ jest równoważna (A jest równoważne B , $A \approx B$ jeśli z A możemy otrzymać B za pomocą skończonej liczby operacji elementarnych) macierzą w postaci schodkowej i z macierzą w postaci schodkowo zredukowanej.
   (a) Z tego wynika, że każdy układ równań o współczynnikach w K ma rozwiązanie