10. Wzór Taylora

Przypomnienie tw. Lagrange'a : Jeśli funkcja f jest ciągła na $[x_0, x]$ i różniczkowalna na (x_0, x) to $\exists_{c\in(x_0,x)} f'(c) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \implies \exists_{c\in(x_0,x)} f(x) = f(x_0) + f'(x-x_0)$ - wzór ten można uogólnić

1. Twierdzenie 10.1 (wzór Taylora z resztą Lagrange'a):
Jeśli $f^{(n)}$ jest ciągła na $[x_0, x]$ i istnieje $f^{(n+1)}$ na (x_0, x) to
$\exists_{c\in(x_0,x)} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$
Ostatni wyraz to $R_n(x)-$reszta w postaci Lagrange'a, suma reszty wyrazów to wielomian Taylora $T_n(x)$

   Szkic dowodu: Korzystamy z tw. Rolle'a dla funkcji $h :< x_0, x >\to \mathbb{R}$,
$h(t) = f(x) - (f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t)^1 + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t}{n!}(x-t)^n) - \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \cdot (x-t)^{n+1}$
h spełnia założenia tw. Rolle'a : $h(x_0) = f(x) - T_n(x) - (f(x) - T_n(x)) = 0$, $h(x) = f(x) - f(x) = 0$ - $h(x_0) = h(x)$
h jest ciągła na $< x_0, x >$, bo z założenia $f^{(n+1)}$ jest ciągła na $[x_0, x]$, więc wszystkie poprzednie pochodne muszą być różniczkowalne - a więc ciągłe
h jest różniczkowalna na (x_0, x) bo każdy wyraz sumowania jest różniczkowalny na (x_0, x) - z założenia istnieją pochodne $f', \ldots, f^{(n+1)}$
$h'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \cdot (n+1)(x-t)^n$
Z tw Rolle'a otrzymujemy $\exists_{c\in(x_0,x)} h'(c) = 0 \implies \exists_{c\in(x_0,x)} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}(n+1)(x-t)^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-t)^n \implies \exists_{c\in(x_0,x)} f(x) = T_n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

   Uwaga: Wzór Taylora jest także prawdziwy dla przedziału $< x, x_0 >$
Uwaga: Jeśli we wzorze Taylora podstawimy $x_0 = 0$ to dostaniemy wzór Maclaurina.
Wzór Taylora jest przydatny do liczenia przybliżonych wartości wyrażeń

   (a) Przykład: Wyznaczmy przybliżenie e wzorem Maclaurina:
   $f(x) = e^x$ - ma pochodne dowolnego rzędu, ciągła na $[0, \infty)$
   Wtedy $f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x}{2!} + \cdots + R_n(x)$
   Stąd $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$
   Dla pierwszych 6 wyrazów suma wynosi ~ 2.717

2. Twierdzenie 10.2 (wzór Taylora z resztą Peano):
Jeśli istnieje $f^{(n)}(x_0)$ ($\implies \exists_{\delta>0} f', \ldots, f^{(n-1)}$ istnieją w $(x-\delta, x+\delta)$), to
$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ gdzie $R_n(x)$ to reszta w postaci Peano, gdzie $\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$, co zapiusjemy $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$
Dowód: $\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_9)^n} = [\frac{0}{0}]$ - lecimy l'Hopitalem aż do $\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-(f^{(n-1)}(x_0)+f^{(n)}(x-x_0)}{n(n-1)\cdot 2\cdot(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{n(n-1)} \cdot (\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0)) = \frac{1}{n(n-1)}(f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)) = 0$

   Wzór Taylora z resztą Peano może być wygoniejszy do liczenia granic niż tw. de l'Hopitala.
Rozwijamy wtedy wielomian Taylora odpowiednio żeby skorzystać z faktu, że $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$

Badanie przebiegu zmienności funkcji

W tej części wykładu będziemy zakładać, że $D \subset \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ i x_0 jest punktem wewnętrznym D

1. Def (ekstremów lokalnych):
Funkcja f ma w punkcie x_0:

   (a) maksimum lokalne, jeśli $\exists_{\delta>0} \forall_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)} f(x_0) \geq f(x)$
   (b) maksimum lokalne właściwe, jeśli $\exists_{\delta>0} \forall_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}} f(x_0) > f(x)$
   (c) minimumlokalne, jeśli $\exists_{\delta>0} \forall_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)} f(x_0) \leq f(x)$
   (d) minimumlokalne właściwe, jeśli $\exists_{\delta>0} \forall_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}} f(x_0) < f(x)$

2. Twierdzenie 11.1 (warunek konieczny ekstremum lokalnego):
Jeśli funkcja f osiąga w punkcie x_0 ekstremum lokalne i jest w tym punkcie różcniczkowalna, to $f'(x_0) = 0$

   D: Przeprowadzamy dla maksimum lokalnego, dla minimum dowód przebiega analogicznie)
Zakładamy, że f osiąga w x_0 maksimum lokalne. Wtedy $f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, $f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$
Z założenia f jest różniczkowalna w x_0, więc $0 \leq f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0 \implies f'(x_0) = 0$
Uwaga - to nie jest warunek dostateczny ekstremum lokalnego - przykładowo x^3 nie osiąga ekstremum w $x = 0$

3. Twierdzenie 11.3 (coś się zepsuło w numeracji)(drugi warunek dostateczny istnienia ekstremum lokalnego)
   Jeśli $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) \neq 0$ to w punkcie x_0 jest osiągane ekstremum lokalne właściwe.
   Ponadto, jeśli $f''(x_0) > 0$ to jest to minimum lokalne właściwe, a jeśli $f''(x_0) < 0$ to jest to maksimum lokalne właściwe

   D:Korzystając ze wzoru Taylora z resztą Peano i $n = 2$, otrzymujemy $f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+R_2(x)$ gdzie $\lim_{x\to x_0} \frac{R_2(x)}{(x-x_0)^2} = 0$
   Pokażemy, że $f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + R_2(x) > f(x_0)$ dla $x \in (x - \delta, x + \delta) \setminus \{x_0\}$
   Wystarczy pokazać, że $\frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + R_2(x) > 0$, czyli $\frac{f''(x_0)}{2} + \frac{R_2(x)}{(x-x_0)^2} > 0$
   $\frac{R_2(x)}{(x-x_0)^2} > 0 \iff \forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D} 0 < |x - x_0| < \delta \implies |\frac{R_2(x)}{(x-x_0)^2} - 0| < \epsilon$
   W szczególności dla $\epsilon = \frac{f''(x_0)}{4}$ $\exists_{\delta>0}\forall_{x\in(x-\delta,x+\delta)\setminus\{x_0\}} -\frac{f''(x_0)}{4} < \frac{R_2(x)}{(x-x_0)^2} < \frac{f''(x_0)}{4}$, więc $\frac{f''(x_0)}{2} - \frac{R_2(x)}{(x-x_0)^2} > \frac{f''(x_0)}{2} - \frac{f''(x_0)}{4} = \frac{f''(x_0)}{4} > 0$