

8. Pochoda funkcji jednej zmiennej

1. Def. Punkt a jest punktem wewnętrznym zbioru $D \subset \mathbb{R} \iff \exists_{\delta > 0} (a - \delta, a + \delta) \subset D$
Przez cały wykład będziemy zakładać, że (o ile nie będzie powiedziane inaczej)
 $D \subset \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}$ i x_0 jest punktem wewnętrznym zbioru D
2. Def. Jeśli istnieje skończona granica $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, - (tzw. iloraz różnicowy) to nazywamy ją pochodną funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy $f'(x_0)$ lub $\frac{df}{dx}(x_0)$
Wtedy funkcję f nazywamy różniczkowalną w punkcie x_0

3. Interpretacja geometryczna pochodnej

Wartość pochodnej $f'(x_0)$ to nachylenie prostej stycznej do wykresu funkcji f w x_0 w postaci $f'(x_0) = \tan \alpha$ gdzie α to kąt nachylenia prostej do dodatniej półosi OX , gdzie styczna to graniczne położenie siecznej przechodzącej przez punkty $(x_0, f(x_0))$ i $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ dla $h \rightarrow 0$, która istnieje jeśli iloraz różnicowy ma granicę.

Jeśli granica istnieje i też jest skończona, to $f'(x_0) = \tan \alpha$

Wyznamy równanie prostej stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$

$y = ax + b$ gdzie $a = \tan \alpha = f'(x_0)$ i $f(x_0) = ax_0 + b$, z czego $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$

$y = f'(x_0) + f(x_0) - f'(x_0)x_0 \iff y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \iff y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ gdzie $y_0 = f(x_0)$

4. Twierdzenie 8.1: Warunek konieczny różniczkowalności

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to jest też ciągła w x_0 .

f jest różniczkowalna w $x_0 \implies f$ jest ciągła w x_0

- (a) D:(egzamin) Z założenia x_0 jest punktem wewnętrznym $D \implies x_0$ jest punktem skupienia zbioru $D \implies (f$ jest ciągła w $x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
Z różniczkowalności funkcji f w x_0 mamy $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$. Stąd $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} ((x-x_0) \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x_0)) = 0 + f(x_0) = f(x_0)$

- (b) Uwaga 8.1: Twierdzenie odwrotne do 8.1 nie jest prawdziwe, tzn nie każda funkcja ciągła w x_0 jest różniczkowalna w x_0

Przykład: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$ jest ciągła, ale nie jest różniczkowalna w $x_0 = 0$

5. Def: Funkcja f jest różniczkowalna w zbiorze $D \iff \forall_{x_0 \in D} f$ jest różniczkowalna w x_0

Wtedy możemy mówić o funkcji $f' : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$

6. Twierdzenie 8.2: (o działaniach arytmetycznych na pochodnych)

Jeśli $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ są różniczkowalne w x_0 , to:

- (a) $f \pm g$ jest różniczkowalna w x_0 i $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- (b) fg jest różniczkowalna w x_0 i $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- (c) $\frac{f}{g}$ jest różniczkowalna w x_0 i $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$ jeśli tylko $\forall_{x \in D} g(x) \neq 0$
- (d) D: Z założenia f, g są różniczkowalne w x_0 . Z warunku koniecznego różniczkowalności f, g są ciągłe w x_0 .

Dowód (a) jest trywialny więc pomijam

$$(b) (fg)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

$$(c): (\frac{f}{g})'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\frac{f}{g})(x) - (\frac{f}{g})(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{(x - x_0) \cdot (g(x)g(x_0))} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{(x - x_0) \cdot (g(x)g(x_0))} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot (g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}) = \frac{f'(x)g(x_0) - f(x_0)g'(x)}{g^2(x)}$$

7. Twierdzenie 8.3 (o różniczkowaniu złożenia):

jeśli $D_1, D_2 \in \mathbb{R}$ i $f : D_1 \rightarrow D_2$ jest różniczkowalna w $x_0 \in D_1$ i $g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $f(x_0) \in D_2$, to złożenie $g \circ f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalne w punkcie x_0 i $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

- (a) D: $(g \circ f)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0+h) - f(x_0) + f(x_0)) - g(f(x_0))}{h}$ oznaczmy $\Delta = f(x_0 + h) - f(x_0) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x_0) - f(x_0) = 0$ bo f jest ciągła w x_0
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0) + \Delta) - g(f(x_0))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0) + \Delta) - g(f(x_0))}{\Delta} \cdot \frac{\Delta}{h} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0) + \Delta) - g(f(x_0))}{\Delta} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

8. Twierdzenie 8.4 (o różniczkowaniu funkcji odwrotnej):

Jeśli f jest ciągła i ściśle monotoniczna w pewnym otoczeniu punktu x_0 (tzn w zbiorze $(x - \delta, x + \delta)$, gdzie $\delta > 0$) i istnieje pochodna $f'(x_0) \neq 0$, to funkcja odwrotna f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $y_0 = f(x_0)$ i $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

- (a) Dowód: Wiemy, że $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow (y_0 - \eta_1, y_0 + \eta_2)$ ($\delta, \eta_1, \eta_2 > 0$) jest ciągła i ściśle monotoniczna ($\implies 1 - 1 \implies$ odwracalna)
 $f^{-1} : (y_0 - \eta_1, y_0 + \eta_2) \rightarrow (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ Z tw o ciągłości funkcji odwrotnej wynika, że f^{-1} jest funkcją ciągłą.
 $(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$

9. Twierdzenie 8.5 (o pochodnych funkcji elementarnych):

- (a) f : funkcja stała, tzn $\forall x \in D f(x) = c, c \in \mathbb{R} \implies \forall x \in D f'(x) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0$
Wniosek: Z twierdzenia 8.2 i (a), $(cf(x))' = c'f(x) + cf'(x) = 0 + cf'(x) = f'(x)$
- (b) $(x^n) = nx^{n-1}$, dla $(x, n) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{N}) \setminus (0, 1)$ (dla $n = 1$ definiujemy $x' = 1$ bo $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1$)
 $(x^n)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} = nx^{n-1} + 0 = nx^{n-1}$
- (c) $(x^{-n})'$ dla $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 $(x^{-n})' = ((\frac{1}{x})^n)' = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$
- (d) $(\sin x)' = \cos x$ dla $x \in \mathbb{R}$
 $(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos \frac{2x+h}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos(x+h) = \cos(x)$
- (e) $(\cos x)' = -\sin x$ dla $x \in \mathbb{R}$
- (f) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
 $(\tan x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x}$
- (g) $(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- (h) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ dla $x \in (0, \infty)$
 $(\ln x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \ln(1 + \frac{h}{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \ln(1 + \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{h}})^{\frac{1}{h}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$
Ogólniej: $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
D: Dla $x < 0$, $(\ln |x|)' = (\ln -x)' = \frac{1}{-x} \cdot -1 = \frac{1}{x}$
- (i) $(e^x)' = e^x$
 $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(x)$ - funkcja ciągła i ściśle rosnąca i $\forall x \in (0, \infty) f'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$
Z tw o pochodnej funkcji odwrotnej, $(e^{\ln x})' = x \implies (e^{\ln e^x})' = e^x \implies (e^x)' = e^x$
- (j) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ dla $x \in (0, \infty), \alpha \in \mathbb{R}$
 $(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$
- (k) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $x \in (-1, 1)$
- (l) $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $x \in (-1, 1)$
- (m) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$
- (n) $(\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$
Dowody (k)-(n) wynikają bezpośrednio z twierdzenia o różniczkowaniu funkcji odwrotnej