09.10.2019
CIĄGI LICZBOWE
Ważne: $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}|x+y| \leq |x|+|y|$ oraz $||x|-|y|| \leq |x-y|$

1. Def. Ciągiem $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ lub $\{a_n\}_{n\geq 1}$lub $\{a_n\}$ nazywamy funkcję $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Ponadto a_n nazywamy n-tym wyrazem ciągu
   (a) Przykłady:
      i. $a_n = \sqrt[n]{n}$
      ˆ ciąg zdefiniowany przez podanie wzoru na n-ty wyraz tego ciągu
         A. $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}$ itp
      ii. $b_1 = 1$
      $b_2 = 1$
      $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}, n \geq 2$
      ˆ ciąg zdefiniowany rekurencyjnie
         A. Pierwsze wyrazy ciągu - $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$ Fibonacci
2. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony z dołu $\iff \exists_{m\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n \geq m$
3. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony z góry $\iff \exists_{M\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n \leq M$
4. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony $\iff (\exists_{m\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n \geq m) \wedge (\exists_{M\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n \leq M)$ czyli $\exists_{K\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}|a_n| \leq K$
   (a) Przykład:
      i. Ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ jest ograniczony z dołu, bo $\exists_{m\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n \geq m$ $(m = 0)$
      ii. Ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ jest ograniczony z dołu, bo $\exists_{M\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n \leq M$ $(m = 1)$
      iii. Skoro ciąg jest ograniczony z góry i z dołu to możemy powiedzieć że ciąg ten jest ograniczony
5. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący $\iff \forall_{n\in\mathbb{N}} a_{n+1} > a_n \overset{\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n > 0}{\iff} \forall_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$
6. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest niemalejący $\iff \forall_{n\in\mathbb{N}} a_{n+1} \geq a_n \overset{\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n > 0}{\iff} \forall_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$
7. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest malejący $\iff \forall_{n\in\mathbb{N}} a_{n+1} < a_n \overset{\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n > 0}{\iff} \forall_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$
8. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest nierosnący $\iff \forall_{n\in\mathbb{N}} a_{n+1} \leq a_n \overset{\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n > 0}{\iff} \forall_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$
   (a) Ciągi rosnące,niemalejące,malejące i nierosnące nazywamy monotonicznymi
      i. np $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \to a_1 - 1 < a_2 = \frac{1}{2} > a_3 = -\frac{1}{3}$
      ii. $b_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$
         A. Ze wzrostem n, n+1 rośnie, więc $\frac{1}{n+1}$ maleje, więc $1 - \frac{1}{n+1}$ rośnie
         B. Zatem ciąg b_n jest rosnący
9. Def. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do granicy $g \in \mathbb{R} \iff \forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|a_n - g| < \epsilon$
   (a) Dla dowolnie małego $\epsilon > 0$ dla wyrazów ciągu o dostatecznie dużych wartościach, odległość pomiędzy dowolnym wyrazem ciągu spełniającym warunki a g jest mniejsza od ϵ
   (b) Wtedy g nazywamy granicą i zapisujemy $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ lub $a_n \to g$
      i. Przykład: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ bo $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$
      $\frac{1}{n} < \epsilon$
      $\frac{1}{\epsilon} < n \longrightarrow n_0 = \lceil\frac{1}{\epsilon}\rceil$
10. Def. Jeśli ciąg $\{a_n\}$ nie jest zbieżny to nazywamy go rozbieżnym;
11. Twierdzenie 2.1: Każdy ciąg stały jest zbieżny: $\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n = a \implies \lim_{n\to\infty} a_n = a$
   (a) Dowód: $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|a_n - a| < \epsilon$. Ponieważ $\forall_{n_0\in\mathbb{N}} a_n - a = 0$, to zawsze $0 < \epsilon$
12. Twierdzenie 2.2: Ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę
   (a) Dowód: Zakładamy, że $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oraz $\lim_{n\to\infty} b$ i $a \neq b$
   (b) Niech $\epsilon = \frac{1}{2}|a - b|$. Wtedy $\epsilon > 0$ bo $a \neq b$
   (c) Z założenia $\lim_{n\to\infty} a_n = a \implies \forall_{\epsilon>0}\exists_{n_1\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_1}|a_n - a| < \epsilon$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = b \implies \forall_{\epsilon>0}\exists_{n_2\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_2}|a_n - b| < \epsilon$

(d) Ponieważ $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}|x+y| \leq |x|+|y|$, to $2\epsilon = |a-b| = |a-a_n+a_n-b| \leq |a-a_n|+|a_n-b| = |a_n-a|+|a_n-b| <^{n\geq n_1, n\geq n_2} \epsilon+\epsilon = 2\epsilon$

(e) Otrzymaliśmy $2\epsilon > 2\epsilon$ oraz $\epsilon > 0 \implies 2 > 2$ sprzeczność

13. Twierdzenie 2.3: Jeśli ciąg jest zbieżny, to jest ograniczony.

   (a) Dowód: Niech $\lim_{n\to\infty} a_n = g$,tzn $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_1\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|a_n - g| < \epsilon$

   (b) W szczególności dla $\epsilon = 1$ otrzymujemy $\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|a_n - g| < 1$,czyli $-1 < a_n - g < 1$, czyli $\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0} g - 1 < a_n < g + 1$

   (c) Stąd $\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n \leq max\{g+1, a_1, a_2, ..., a_{n_0-1}\} \implies \{a_n\}$ jest ograniczony z góry

   (d) $\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n \geq min\{g-1, a_1, a_2, ..., a_{n_0-1}\} \implies \{a_n\}$ jest ograniczony z dołu

   (e) Zatem $\{a_n\}$jest ograniczony.

   (f) UWAGA: $\{a_n\}$ jest zbieżny $\implies \{a_n\}$ jest ograniczony

      i. NIE DZIAŁA W DRUGĄ STRONĘ

      ii. np $a_n = (-1)^n$ daje nam $-1, 1, -1, 1$ - ciąg jest ograniczony, ale nie jest zbieżny

14. Twierdzenie 2.4 (o ciągłości działań arytmetycznych): Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oraz $\lim_{n\to\infty} b = b$, to

   (a) Dowód: Wiemy, że $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_1\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_1}|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ oraz $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_2\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_2}|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$

      i. Chcemy pokazać, że $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|a_n + b_n - (a+b)| < \epsilon$

      ii. $|a_n + b_n - a - b| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| <^{n\geq n_1, n\geq n_2} \dfrac{\epsilon}{2}$

      iii. $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|a_n + b_n - (a+b)| < \epsilon$ jeśli $n_0 = max(n_1, n_2)$

   (b) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$

      i. Ciąg pomocniczy $\forall_{n\in\mathbb{N}} c_n = -b_n$,wtedy wystarczy pokazać że $c_n \to -b$, i leci pierwszy dowód

   (c) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$

      i. Dowód: Skoro z $\{a_n\}$ jest zbieżny, to z twierdzenia 2.3 jest ograniczony, tzn $\exists_{K\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}|a_n| \leq K$ (dodatkowo, $K \neq 0$)

      ii. Wiemy to samo co w dowodzie z (a).

      iii. Chcemy pokazać, że $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|a_n b_n - ab| < \epsilon$

      iv. $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)| = |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \leq K|b_n - b| + |b||a_n - a|$

      v. $\lim_{n\to\infty} b_n = b \iff \forall_{\epsilon>0}\exists_{n_2\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_2}|b_n - b| < \dfrac{\epsilon}{2K}$

      vi. $\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall_{\epsilon>0}\exists_{n_1\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_1}|a_n - a| < \dfrac{\epsilon}{2(|b|+1)}$

      vii. $K|b_n - b| + |b||a_n - a| \leq K|b_n - b| + (|b|+1)|a_n - a|$

      viii. Stąd $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|a_n b_n - ab| < \epsilon$ - $n_0 = max(n_1, n_2)$

   (d) $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$ jeśli $b \neq 0$ i $\forall_{n\in\mathbb{N}} b_n \neq 0$

   (e) Przykład:

      i. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{4n^2-n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n^2}}{4-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+3\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{4-\frac{1}{n}+5\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}} = \frac{1+3\cdot0\cdot0}{4-0+5\cdot0\cdot0} = \frac{1}{4}$

15. Twierdzenie 2.5 (o ciągłości wartości bezwzględnej): Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, to $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

   (a) Dowód: Wiemy, że $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_1\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_1}|a_n - a| < \epsilon$

   (b) Chcemy pokazać, że $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}||a_n| - |a|| < \epsilon$

   (c) Mamy $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$

   (d) Stąd $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \epsilon$

   (e) Uwaga 2.1: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

      i. $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|a_n - 0| < \epsilon$ z lewej strony oraz

      ii. $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}||a_n| - 0| < \epsilon$z prawej strony. $|x| = ||x||$,więc strony są równoważne

16. Twierdzenie 2.6 (o przechodzeniu do granicy w nierównościach): Jeśli $\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0} a_n \leq b_n$ i $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ to $a \leq b$

   (a) Uwaga 2.2: Twierdzenie 2.6 **nie** będzie prawdziwe jeśli $\leq$ zamienimy na $<$

      i. np $a_n = \frac{1}{n^2}, b_n = \frac{1}{n}$

ii. $\forall_{n\geq 2} a_n < b_n$ ale $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n$

17. Twierdzenie 2.7 (o trzech ciągach): Jeśli $\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0} a_n \leq b_n \leq c_n$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$, to $\lim_{n\to\infty} b_n = g$
    (a) Dowód: Chcemy pokazać, że $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_3\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_3}|b_n - g| < \epsilon \iff \forall_{\epsilon>0}\exists_{n_3\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_3} - \epsilon < b_n - g < \epsilon$
    (b) Wiemy, że $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_1\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_1}|a_n - g| < \epsilon \iff \forall_{\epsilon>0}\exists_{n_1\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_1}\epsilon < a_n - g < \epsilon$ oraz $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_2\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_2}\epsilon < c_n - g < \epsilon$
    (c) $(n \geq n_2 \wedge n \geq n_0) \implies b_n - g \leq c_n - g < \epsilon$
    (d) $(n \geq n_1 \wedge n \geq n_0) \implies b_n - g \geq a_n - g > -\epsilon$
    (e) Zatem pokazaliśmy, że $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0} - \epsilon < b_n - g < \epsilon$ $(n_3 = max(n_0, n_1, n_2))$
    (f) Wniosek z twierdzenia o trzech ciągach: Jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony i $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, to $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$
        i. Na mocy uwagi 2.1 wystarczy pokazać, że $\lim_{n\to\infty} |a_n b_n| = 0$
        ii. Z założenia $\exists_{K\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}|a_n| \leq K$
        iii. $\forall_{n\in\mathbb{N}} 0 \leq |a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq K \cdot |b_n|$, $K \cdot |b_n| \to 0$, więc z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy $\lim_{n\to\infty} |a_n b_n| = 0$

18. Twierdzenie 2.8: Jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest niemalejący i ograniczony z góry, to jest zbieżny

19. Twierdzenie 2.8.1: Jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest nierosnący i ograniczony z dołu, to jest zbieżny

20. 2.8 oraz 2.8.1 razem: Jeśli ciąg jest monotoniczny i ograniczony, to jest zbieżny

21. Twierdzenie 2.11 (z przyszłości):
    (a) $|a| < 1 \implies \lim_{n\to\infty} |a|^n = 0$
    (b) $a > 0 \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$
    (c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

22. def. $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$ jest rosnące, jeśli $\forall_{x_1,x_2\in A} : (x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2))$

23. def $f : A \to \mathbb{R}$ jest funkcją okresową jeśli $\exists_{r\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\forall_{a\in A} x + r \in A \wedge x - r \in A \wedge f(a) = f(a + r)$