

02.10.2019

prof. dr hab. inż. Zbigniew Lonc

zblonc@mini.pw.edu.pl

pokój 558, konsultacje 12.15-13.00

http://pages.mini.pw.edu.pl/~loncz/www

username:student

pass:elitmxy

32 punkty na ćwiczeniach zwalnia z części egzaminu

## 1. Rachunek zdań

(a) zdanie - wyrażenie któremu można przypisać jednoznacznie wartość prawdy lub fałszu

(b) zdania:

i. Paryż jest we Francji

ii.  $-1 > 0$

(c) nie zdania:

i. Niebieski to ładny kolor

(d) Zmienne zdaniowe -  $p, q, r, s$  zazwyczaj - pod nie podstawiamy zdania

(e)  $X$  - zbiór zmiennych zdaniowych

(f) Ze zdań prostych budujemy zdania złożone za pomocą operatorów (spójników) logicznych

i. Negacja, zaprzeczenie,  $\neg p$  - nieprawda że  $p$ , nie  $p$  ( $\neg / \sim$ )

ii. Alternatywa  $p \vee q$  ( $p$  lub  $q$ )

iii. Koniunkcja  $p \wedge q$  ( $p$  i  $q$ )

iv. Implikacja  $p \implies q$  (jeśli  $p$  to  $q$ )

v. Równoważność  $p \iff q$  ( $p$  jest równoważne  $q$ )

(g) Budujemy "język legalnych" formuł rachunku zdań (syntaktyka)

i. Def. Zbiór formuł rachunku zdań jest to najmniejszy zbiór  $Z$  taki, że

A. Każda zmienna zdaniowa należy do  $Z$

B. Jeśli  $\alpha, \beta \in Z$  to  $\neg\alpha, \alpha \vee \beta, \alpha \wedge \beta, \alpha \implies \beta, \alpha \iff \beta \in Z$

ii. Konwencja:

A. Dla uproszczenia formuł przyjmujemy priorytet wykonywania operacji

$\neg$ , potem  $\wedge / \vee$ , potem  $\implies / \iff$

A.  $((\neg q) \wedge p) \implies p \iff (p \vee q)$  sprowadza się do  $(\neg q \wedge p \implies p) \iff p \vee q$

iii.  $X$  - zbiór zmiennych zdaniowych

A. Def. Wartościowanie jest to funkcja  $V: X \rightarrow \{0, 1\}$  (prawda, fałsz) - przypisuje zmiennym zdaniowym wartości logiczne

|     |          |
|-----|----------|
| $p$ | $\neg p$ |
|-----|----------|

|    |   |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|---|
| B. | <table><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table> | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1  | 0   |   |   |   |   |
| 0  | 1   |   |   |   |   |

|    |     |     |            |              |                |            |
|----|-----|-----|------------|--------------|----------------|------------|
|    | $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $p \wedge q$ | $p \implies q$ | $p \iff q$ |
|    | 0   | 0   | 0          | 0            | 1              | 1          |
| C. | 1   | 0   | 1          | 0            | 0              | 0          |
|    | 0   | 1   | 1          | 0            | 1              | 0          |
|    | 1   | 1   | 1          | 1            | 1              | 1          |

iv. Rozszerzamy wartościowanie na zbiór  $Z$  formuł rachunku zdań

A.  $\alpha, \beta \in Z$

B.  $V: X \rightarrow \{0, 1\}$

C.  $V(\neg\alpha) = \neg V(\alpha)$

D.  $V(\alpha \vee \beta) = V(\alpha) \vee V(\beta)$

E.  $V(\alpha \wedge \beta) = V(\alpha) \wedge V(\beta)$

F.  $V(\alpha \implies \beta) = V(\alpha) \implies V(\beta)$

G.  $V(\alpha \iff \beta) = V(\alpha) \iff V(\beta)$

H. Przykład:  $X = \{p, q\}$ ,  $V(p) = 1$ ,  $V(q) = 0$

$V((\neg q \wedge p) \implies p) \iff p \vee q = 1$

(h) def. Tautologia rachunku zdań jest to formuła prawdziwa dla każdego wartościowania zmiennych zdaniowych

- i.  $p \vee \neg p$  prawo wyłączonego środka
- ii.  $\neg(p \wedge \neg p)$  prawo sprzeczności
- iii.  $p \vee p \iff p$
- iv.  $p \wedge p \iff p$  idempotentność alternatywy i koniunkcji
- v.  $p \iff \neg(\neg p)$  podwójna negacja
- vi.  $(p \vee q) \wedge r \iff (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
- vii.  $(p \wedge q) \vee r \iff (p \vee r) \wedge (q \vee r)$  prawo rozdzielności  $\wedge$
- viii.  $(p \vee q) \vee r \iff p \vee (q \vee r)$
- ix.  $(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r)$  łączność  $\wedge$
- x.  $(p \implies q) \wedge (q \implies r) \implies (p \implies r)$  przechodność implikacji
- xi.  $(p \implies q) \iff (\neg p \vee q)$  eliminacja implikacji
- xii.  $(p \iff q) \iff (p \implies q) \wedge (q \implies p)$  eliminacja równoważności
- xiii.  $\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$
- xiv.  $\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$  prawa de Morgana  $\wedge$
- xv.  $\neg(p \implies q) \iff p \wedge \neg q$  negacja implikacji
- xvi.  $(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p)$  kontrapozycja
- xvii.  $p \implies (\neg p \implies q)$

|    | p | q | $\neg p \implies q$ | $p \implies (\neg p \implies q)$ |
|----|---|---|---------------------|----------------------------------|
|    | 0 | 0 | 0                   | 1                                |
| A. | 1 | 0 | 1                   | 1                                |
|    | 0 | 1 | 1                   | 1                                |
|    | 1 | 1 | 1                   | 1                                |

B. Przypuszcmy że przy pewnym wartościowaniu formuła jest fałszywa. Wtedy p musi być prawdziwe, a następnik fałszywy. Jeśli p jest prawdziwe, to następnik też jest prawdziwy, więc implikacja musi wartościować się do prawdy.

(i) Podejście aksjomatyczne do rachunku zdań

- i. Def. Aksjomat - formuła rachunku zdań ( $\in Z$ ) o której przyjmujemy, że jest prawdziwa
- ii. Def. Dowód formalny formuły  $\beta \in Z$  jest to ciąg formuł  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in Z$  taki, że
  - A.  $\alpha_n = \beta$
  - B. dla każdego  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$   $\alpha_i$  jest aksjomatem, lub istnieją  $j, k \in 1, 2, \dots, i-1$  takie że  $j < k$  oraz  $\alpha_k = (\alpha_j \implies \alpha_i)$
- iii. Def. Formułę nazywamy twierdzeniem rachunku zdań jeśli istnieje jej dowód formalny
- iv. Aksjomaty rachunku zdań (przykładowo) ( $A, B, C \in Z$ ) (nie trzeba pamiętać)
  - A.  $(A \implies (B \implies A))$
  - B.  $(A \implies (B \implies C)) \implies ((A \implies B) \implies (A \implies C))$
  - C.  $(\neg A \implies B) \implies ((\neg A \implies \neg B) \implies A)$
- v. Twierdzenie o pełności
  - A. Formuła rachunku zdań jest twierdzeniem  $\iff$  jest tautologią
- vi. Przykład dowodu formalnego formuły  $\alpha \implies \alpha$  ( $A = \alpha, B = \beta, C = \alpha$ ):
  - A.  $\alpha_1 = (\alpha \implies (\beta \implies \alpha)) \implies \alpha$  - aksjomat 1
  - B.  $\alpha_2 = (\alpha \implies (\beta \implies \alpha)) \implies ((\alpha \implies \beta) \implies (\alpha \implies \alpha))$  - aksjomat 2
  - C.  $\alpha_3$

(j) Tw. Każda formuła F zapisana w języku rachunku zdań sprowadza się do postaci dysjunktywno koniunktywnej (DNF). Czyli dla każdej F istnieje F' w DNF tak, że  $F \iff F'$

- i. DNF to drzewkowo alternatywy na samej górze, poziom niżej koniunkcja, dwa poziomy niżej zmienna lub jej negacja