**Zbiory częściowo uporządkowane**

1. Def: Relację $R \subseteq X \times X$ $(X \neq \emptyset)$ nazywamy **relacją częściowego porządku** ,jeśli $R$ jest zwrotna, przechodnia i antysymetryczna.

2. **Zbiór częściowo uporządkowany** jest to para $(X, R)$ gdzie $X$ jest niepustym zbiorem a $R \subseteq X^2$ jest relacją częściowego porządku
Przykłady:

   (a) $(\mathbb{R}, \leq), (P(X), \subseteq)$ dla niepustego $X$

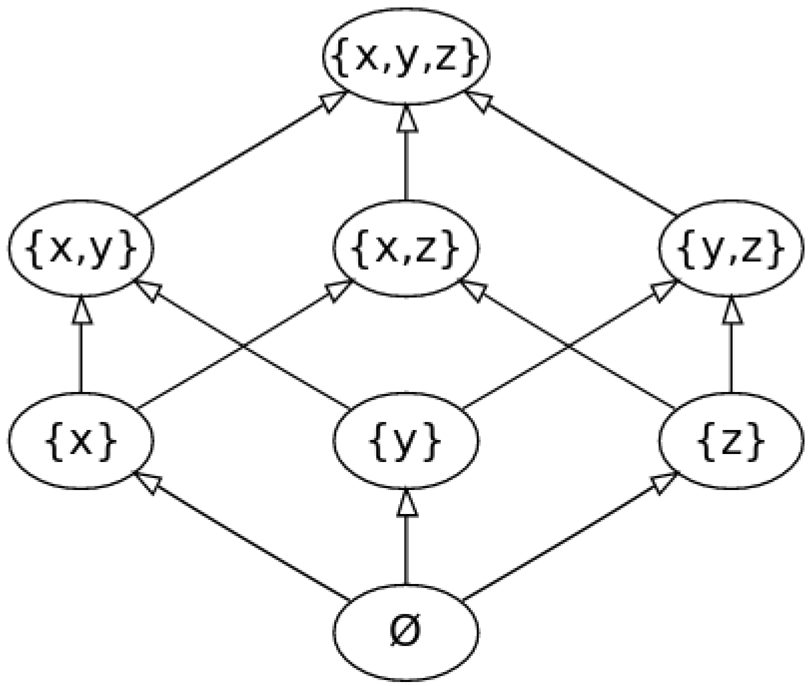
   (b) $(\mathbb{N}, |)$ $a|b$ - $a$ jest podzielne przez $b$

   (c) $(\mathbb{R}^X, \preceq)$ - $\mathbb{R}^X = \{f : f : X \to \mathbb{R}\}, f \preceq g \iff \forall_{x \in X} f(x) \leq g(x)$

   (d) $(\mathbb{R}^2, \preceq)$ - $\forall_{x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}} (x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2$

   (e) $(P, \preceq)$ - zbiór częściowo uporządkowany
   Definiujemy relację $\prec \subseteq P \times P$ i $\prec_{\bullet} \subseteq P \times P$ następująco
   $x \prec y \iff x \preceq y \wedge x \neq y$
   $x \prec_{\bullet} y \iff x \prec y \wedge \neg(\exists_{z \in P} x \prec z \prec y)$
   Jeśli $x \prec_{\bullet} y$ to mówimy, że **x jest poprzednikiem y**, oraz **y jest następnikiem x**
   Na przykład $(\mathbb{N}, \leq), n \in \mathbb{N}, n <_{\bullet} n + 1$

3. Def: **Diagramem Hassego** zbioru częsciowo uporządkowanego $(P, \preceq)$ nazywamy graf, którego wierzchołakmi są elementy zbioru $P$. Jeśli dla $x, y \in P$ zachodzi $x \prec y$, to $x$ rysujemy niżej niż $y$. Ponadto dwa wierzchołki $x, y \in P$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy $x <_{\bullet} y$




4. Def: Niech $(P, \preceq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym
Element $a \in p$ nazywamy:

   (a) **maksymalnym**, jeśli $\neg(\exists_{x \in P} a \prec x)$

   (b) **minimalnym**, jeśli $\neg(\exists_{x \in P} x \prec a)$

   (c) **największym**, jeśli $\forall_{x \in P} x \preceq a$

   (d) **najmniejszym**, jeśli $\forall_{x \in P} a \preceq x$

   (e) Maksymalne elementy to wierzchołki diagramu Hassego bez połączeń z góry
   Minimalne - wierzchołki bez połączeń w dół
   Największy $\implies$ jedyny element maksymalny (równoważność dla skończonych zbiorów)
   Najmniejszy $\implies$ jedyny element minimalny

   (f) Dowód (e): $a$ - element najmniejszy. Pokażemy, że $a$ jest minimalny. Załóżmy, że $a$ nie jest minimalny. Stąd $\exists_{y \in P} y \prec a$. Wtedy nieprawdą jest, że $\forall_{x \in \mathbb{R}} a \preceq x$ (bo $y \prec a$)
   Załóżmy, że w $P$ jest inny element $b \neq a$, który jest minimalny. $a$- najmniejszy, $\begin{cases} a \preceq b \\ a \neq b \end{cases} \implies a \prec b \implies \exists_{x \in P} x \prec b \implies b$ nie jest minimalny

(g) W $(P, \preceq)$ istnieje co najwyżej jeden element najmniejszy
D(nie wprost): $a, b$ elemeny najmniejsze, $a \neq b$
$\begin{cases} \forall_{x \in P} a \preceq x \implies a \preceq b \\ \forall_{x \in P} b \preceq x \implies b \preceq a \end{cases}$ $a \neq b$, sprzeczność

5. Def: $(P, \preceq)$ - zbiór częściowo uporządkowany, $X \subseteq P$
Element $a \in P$ jest **ograniczeniem górnym** zbioru $X$, jeśli $\forall_{x \in X} x \preceq a$
Element $a \in P$ jest **ograniczeniem dolnym** zbioru $X$, jeśli $\forall_{x \in X} a \preceq x$
$X^* \stackrel{\text{def.}}{=} \{a \in P : \forall_{x \in X} x \preceq a\}$ - zbiór wszystkich ograniczeń górnych zbioru $X$
$X_* \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in P : \forall_{x \in X} a \preceq X\}$ - zbiór wszystkich ograniczeń dolnych zbioru $X$

6. Def: $(P, \preceq)$ - zbiór częsciowo uporządkoany, $X \subseteq P$
Element $a \in P$ jest **kresem górnym** zbioru $X$ jeśli jest najmniejszym ograniczeniem górnym dla $X$ ( tzn. jest elementem najmniejszym w $X^*$)
Oznaczenie: $\sup X$
Element $a \in P$ jest **kresem dolnym** zbioru $X$ jeśli jest największym ograniczeniem dolnemy dla $X$ ( tzn. jest elementem największym w $X_*$)