"Skrót" z teorii liczb zespolonych

Ustalmy liczby rzeczywiste x oraz y. Wyrażenie postaci $x + y\mathrm{i}$ nazywamy liczbą zespoloną, gdzie i nazywamy *jednostką urojoną*. Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczamy przez $\mathbb{C}$. Na liczbach zespolonych definiujemy działania $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ oraz $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ według następujących zasad:

$$(x_1 + y_1\mathrm{i}) + (x_2 + y_2\mathrm{i}) := (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathrm{i},$$
$$(x_1 + y_1\mathrm{i}) \cdot (x_2 + y_2\mathrm{i}) := (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\mathrm{i},$$

dla dowolnych $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. W praktyce oznacza to, że wykonujemy "standardowo" operacje algebraiczne jak na wyrażeniach rzeczywistych, pamiętając tylko o tym, że liczba i ma taką własność, że $\mathrm{i}^2 = -1$.

Niech $z \in \mathbb{C}$. Niech $z = x + y\mathrm{i}$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy

- liczbę $x + y\mathrm{i}$ nazywamy *postacią algebraiczną* liczby zespolonej z.
- liczbę $\overline{z} := x - y\mathrm{i}$ nazywamy *sprzężeniem* liczby zespolonej z.
- liczbę $\mathrm{Re}(z) := x$ nazywamy *częścią rzeczywistą* liczby zespolonej z.
- liczbę $\mathrm{Im}(z) := y$ nazywamy *częścią urojoną* liczby zespolonej z.
- liczbę $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ nazywamy *modułem* liczby zespolonej z.

Podstawowe własności. Dla dowolnych liczb zespolonych z, z_1, z_2 zachodzi:

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, o ile $z_2 \neq 0$,
- $|z| = |\overline{z}|$,
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$,
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, o ile $z_2 \neq 0$,
- $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ (*nierówność trójkąta*),
- $z \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, kiedy $z = \overline{z}$,
- $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, kiedy $z = -\overline{z}$, gdzie $\mathrm{i}\mathbb{R} := \{\mathrm{i}x \ : \ x \in \mathbb{R}\}$.

Ustalmy $n \in \mathbb{Z}_+$ oraz $z \in \mathbb{C}$. Pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby zespolonej z nazywamy następujący zbiór:

$$\sqrt[n]{z} := \{w \in \mathbb{C} \ : \ w^n = z\}.$$

Zatem na przykład (w sensie przedstawionej definicji) można pokazać, że $\sqrt{1} = \{1, -1\}$ oraz $\sqrt[4]{1} = \{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$.

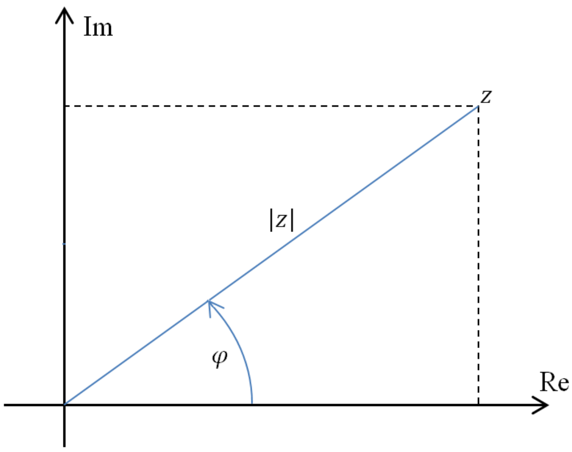
Ustalmy teraz niezerową liczbę zespoloną z. Dla takiej liczby definiujemy jej *argument* ($\arg z =: \varphi$) jako rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} \cos\varphi &= \dfrac{\mathrm{Re} z}{|z|}, \\ \sin\varphi &= \dfrac{\mathrm{Im} z}{|z|}. \end{cases}$$

Liczbę z możemy zatem zapisać w postaci: $z = |z|\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, którą to nazywamy *postacią trygonometryczną* liczby zespolonej z.

Do tej pory poznaliśmy kilka nowych definicji, za którymi na pierwszy rzut oka, nie stoi nic interesującego. Przekonajmy się jednak, że liczby zespolone (oraz odpowiednie "rzeczy" z nimi powiązane) posiadają interesującą interpretację geometryczną. Mianowicie, liczbę zespoloną z, przedstawioną w postaci algebraicznej $x + y\mathrm{i}$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, możemy traktować jako punkt (x, y) na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ (którą często w tym ujęciu będziemy nazywać *płaszczyzną zespoloną* lub *płaszczyzną Gaussa*, której osie poziomą i pionową nazywamy odpowiednio *osią rzeczywistą* oraz *osią urojoną*) i wtedy:

- $\mathrm{Re} z$ oraz $\mathrm{Im} z$ oznaczają odpowiednio odciętą oraz rzędną punktu z,
- $|z|$ oznacza odległość punktu z od początku układu współrzędnych, z czego można wywnioskować, że liczba rzeczywista $|z_1 - z_2|$ oznacza długość odcinka o końcach w dwóch ustalonych punktach $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (czyli odległość punktu z_1 od z_2),
- $\overline{z}$ oznacza punkt symetryczny do z względem osi rzeczywistej,
- $\varphi := \arg z$ (o ile $z \neq 0$) oznacza kąt skierowany pomiędzy wektorem o początku w $(0, 0)$ oraz o końcu w z, a dodatnią półosią rzeczywistą:



Dodatkowe własności. Dla niezerowych liczb zespolonych z_1, z_2, zachodzi

- $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ modulo 2π,
- $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$ modulo 2π.

Z powyższych rozważań można wywnioskować następujące własności:

- jeżeli zachodzi $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi)$ oraz $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, to

$$z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \Big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\Big), \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\Big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\Big).$$

- **(Wzór de Moivre'a)**: jeżeli $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, to dla dowolnej liczby całkowitej n zachodzi
$$z^n = |z|^n\Big(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)\Big).$$

Zatem łatwo można wydedukować (przydatny) wniosek, że po obrocie liczby z o kąt α dookoła punktu **0** otrzymamy punkt $z \cdot (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$.

Ustalmy dodatnią liczbę całkowitą n. Mając niezerową liczbę zespoloną z zapisaną w postaci trygonometrycznej $|z|\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ można pokazać, że

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \;:\; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \right\}.$$

Często łatwiej jednak wyznaczać pierwiastki z liczb zespolonych korzystając z ich interpretacji geometrycznej. Ustalmy n - dodatnią liczbę całkowitą oraz z - niezerową liczbę zespoloną. Wtedy $\sqrt[n]{z}$ jest zbiorem dokładnie n liczb zespolonych, które są wierzchołkami n-kąta foremnego o środku w **0** takiego, że okrąg opisany na nim ma promień równy $\sqrt[n]{|z|}$.

Zadanie 1.1.

Zapisz poniższe liczby zespolone w postaci algebraicznej (w przypadku podpunktów (d) oraz (e) chcemy otrzymać odpowiednie zbiory liczb zespolonych zapisanych w postaci algebraicznej).

$$(a)\ \frac{3+2\mathrm{i}}{\overline{5+\mathrm{i}}},\quad (b)\ \frac{\mathrm{i}^5}{3-4\mathrm{i}},\quad (c)\ (4+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})\left|\overline{5-12\mathrm{i}}\right|,$$
$$(d)\ \sqrt{3-4\mathrm{i}},\quad (e)\ \sqrt{-5+12\mathrm{i}},\quad (f)\ \mathrm{Re}[(1+\mathrm{i})^2] + \frac{2+\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}(5-2\mathrm{i}).$$

Zadanie 1.2.

Zapisz poniższe liczby zespolone w postaci trygonometrycznej:

(a) $3+3\mathrm{i}$, (b) $\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}$, (c) $-\sqrt{3}+3\mathrm{i}$, (d) $\cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha$,
(e) $\mathrm{i}\cos\alpha$, (f) $2\sin\alpha\cos\alpha + \mathrm{i}(2\cos^2\alpha - 1)$, (g) $\cos\alpha+\sin\alpha+\mathrm{i}(\sin\alpha-\cos\alpha)$, (h) $1-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$.

W podpunktach $(d) - (h)$ mamy $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zadanie 1.3.

Zapisz poniższe liczby w postaci trygonometrycznej lub algebraicznej:

(a) $(\mathrm{i}-1)^{25}$, (b) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}\right)^{2013}$, (c) $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}}\right)^{30}$, (d) $[\sin\alpha + \mathrm{i}(1+\cos\alpha)]^n, n \in \mathbb{Z}_+$, (e) $\sqrt[6]{1}$,

(f) $\sqrt[3]{-\mathrm{i}}$, (g) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}\mathrm{i}}$, (h) $\sqrt[6]{\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}}$, (i) $\sqrt[3]{(1+\mathrm{i})^6}$, (j) $\sqrt[4]{(\mathrm{i}-\sqrt{3})^{12}}$.

Zadanie 1.4.

Znajdź wszystkie liczby zespolone z, które spełniają

(a) $z^2 - 2z + 5 = 0$, (b) $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$, (c) $z^2 - 3z - 5\mathrm{i} = 3\mathrm{i}z$, (d) $2z + \overline{z} = 6 + 5\mathrm{i}$,
(e) $4z^2 + 8|z|^2 = 8$, (f) $|z| - 2z = 3 - 4\mathrm{i}$, (g) $(\mathrm{i}z)^4 = (1-2\mathrm{i})^4$, (h) $(z-1+\mathrm{i})^3 = 8z^3$,
(i) $\mathrm{Re}\,(z(1+\mathrm{i})) + z\overline{z} = 0$, (j) $\mathrm{Re}(z^2) + \mathrm{iIm}\,(\overline{z}(1+2\mathrm{i})) = -3$, (k) $z^3 = \overline{z}$, (l) $|z|^2\overline{z}^5 = z$.

Zadanie 1.5.

Udowodnij, że jeżeli wielomian $M : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zmiennej zespolonej ma wszystkie współczynniki rzeczywiste oraz jeżeli liczba zespolona z_0 jest pierwiastkiem tego wielomianu, to również $\overline{z_0}$ jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Czy założenie o tym, że współczynniki wielomianu $M(z)$ są liczbami rzeczywistymi jest istotne?

Zadanie 1.6.

Wiedząc, że jednym z pierwiastków wielomianu danego wzorem $M(z) = z^4 - 6z^3 + 15z^2 - 18z + 10$ dla $z \in \mathbb{C}$ jest liczba $z_1 = 2 - i$, wyznacz pozostałe pierwiastki.

Zadanie 1.7.

Znajdź wielomian $M : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o współczynnikach rzeczywistych, stopniu równym $n \in \{3, 4\}$, dla którego zachodzą następujące równości: $M(2) = M(3 - \mathrm{i}) = 0$, $M(3) = 2013$ oraz nie ma innych pierwiastków rzeczywistych z wyjątkiem 2.

Zadanie 1.8.

Ustalmy liczbę całkowitą n większą od 1. Udowodnij, że jeżeli liczby $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ są różnymi pierwiastkami n-tego stopnia z 1, to:

$$(a)\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n = 0,$$
$$(b)\ \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_n = (-1)^{n+1}.$$

Zadanie 1.9.

Naszkicuj na płaszczyźnie zespolonej wszystkie te liczby zespolone z, które spełniają

(a) $4\mathrm{Re}(z) - 3\mathrm{Im}(z) = 2$, (b) $|z + \mathrm{i}| = 3$, (c) $|2z - 6 + 4\mathrm{i}| = 3$, (d) $|z|^2 - 4\mathrm{Re}(z) + 6\mathrm{Im}(z) = 17$,

(e) $|z - 3 - 5\mathrm{i}| = |z + 2 - \mathrm{i}|$, (f) $\left|\frac{z+3}{z-2\mathrm{i}}\right| \geqslant 1$, (g) $|z - 1| + |z + \mathrm{i}| = \sqrt{2}$, (h) $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$,

(i) $|z|^2\overline{z} = z^3$, (j) $\mathrm{Im}(z^6) < 0$, (k) $0 < \mathrm{Arg}\left(\frac{z^3}{\mathrm{i}}\right) \leqslant \frac{\pi}{2}$, (l) $\mathrm{Arg}(z + 2 - \mathrm{i}) = \pi$,

(k) $|z - 3| + |z + 3| = 10$, (m) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 2$, (n) $\mathrm{Arg}\frac{z-1}{z+1} = \frac{\pi}{2}$.

Zadanie 1.10.

Niech z_1, z_2 będą takimi liczbami zespolonymi, dla których zachodzi $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$ oraz $|z_1| = |z_2| = 1$. Oblicz $|z_1 - z_2|$.

Zadanie 1.11.

Ustalmy $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Udowodnij, że zachodzą poniższe równości:

$$(a) |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right),$$
$$(b) |z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2,$$
$$(c)\ \left(1 - |z_1|^2\right)\left(1 - |z_2|^2\right) = |1 - z_1\overline{z_2}|^2 - |z_1 - z_2|^2,$$
$$(d)\ |z_1 + z_2 + z_3|^2 + |-z_1 + z_2 + z_3|^2 + |z_1 - z_2 + z_3|^2 + |z_1 + z_2 - z_3|^2 = 4(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2).$$

Jaką interpretację geometryczną ma równość w podpunkcie (a)?

Zadanie 1.12.

Ustalmy $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Udowodnij, że jeżeli $|z_1| = |z_2| = 1$ oraz $z_1 z_2 \neq -1$, to $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$.

Zadanie 1.13.

Udowodnij, że $\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t$ oraz $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$ dla $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 1.14.

Wiedząc, że $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$ oraz $|z| = 1$ wyznacz wartość $z^n + \frac{1}{z^n}$, gdzie $n \in \mathbb{Z}_+$.

Zadanie 1.15.

Znajdź wszystkie liczby zespolone z takie, że $|z| = 1$ oraz

$$\left|\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}\right| = 1.$$

Zadanie 1.16.

Udowodnij, że:

$$(a)\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos k\theta = \left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n \cos\frac{n\theta}{2},$$
$$(b)\ \cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2},$$
$$(c)\ \cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}.$$

Zadanie 1.17.

Znajdź wszystkie liczby zespolone z dla których $\dfrac{1+z+z^2}{1-z+z^2} \in \mathbb{R}$.

Zadanie 1.18.

Udowodnij, że jeżeli dla różnych liczb zespolonych z_1, z_2 zachodzi $|z_1| = |z_2|$, to również $\frac{1}{2}|z_1 + z_2| < |z_1|$.

Zadanie 1.19.

Przeprowadź konstrukcję geometryczną mnożenia liczb zespolonych.

Zadanie 1.20.

Pewien Zwierz zaczyna swoją podróż w lesie, dajmy na to w punkcie M. Jego podróż składa się z 2013 etapów. Każdy etap podzielony jest na trzy odcinki, każdy o długości równej 100 metrów, a po każdym zakończonym odcinku Zwierz skręca o $60°$ w prawo, z wyjątkiem skrętu oddzielającego etapy, wtedy skręca w lewo o $60°$. Jak daleko od punktu M będzie znajdował się Zwierz na końcu swojej podróży?