

02.10.2019

Dr hab. Anna Dembińska
mini.pw.edu.pl/~dembinsk

3 kolokwia 3 kartkowki

45+ punktów - zwolnienie z egzaminu (cz. zadaniowa)

Literatura:

1. Dembińska, Karpińska, Kotus - Analiza matematyczna I dla studentów informatyki PW
2. Gewert, Skoczylas - Analiza matematyczna I /Definicje twierdzenia wzory / Przykłady i zadania / Kolokwia i egzaminy GIS
3. Leja - Rachunek różniczkowy i całkowy PWN

OZNACZENIA

1. $N := 1, 2, 3, \dots$
2. $N_0 := 0, 1, 2, 3, \dots$
3. $\mathbb{Z} := \dots - 1, 0, 1, \dots$
4. $\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} \text{ gdzie } n \in N, m \in \mathbb{Z}\}$
5. $\mathbb{R} := \text{rzeczywiste}$
6. \forall - dla każdego - $\forall_{x \in R} x^2 \geq 0$
7. \exists - istnieje
8. \iff - wtedy i tylko wtedy
9. $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
10. $[x]$ - część całkowita $x : x - 1 < [x] \leq x$, $[7\frac{1}{3}] = 7$, $[-2\frac{1}{3}] = -3$

LICZBY RZECZYWISTE I ICH PODZBIORY.

1. Def. Zbiór \mathbb{R} , dwa wyróżnione w nim elementy 0 i 1, relacja $<$ oraz dwa działania $+$ i \times to tak zwane pojęcia pierwotne, które przyjmujemy bez definicji. Ponadto przyjmujemy bez dowodu, że te pojęcia pierwotne mają pewne własności zwane aksjomatami (lub pewnikami)
2. Def. Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z dołu $\iff \exists m \in \mathbb{R} \forall a \in A a \geq m$ Wtedy m nazywamy ograniczeniem dolnym zbioru A
 - (a) Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry $\iff \exists M \in \mathbb{R} \forall a \in A a \leq M$ Wtedy M nazywamy ograniczeniem górnym zbioru
 - (b) Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony \iff jest ograniczony z góry i z dołu $\iff \exists m, M \in \mathbb{R} \forall a \in A m \leq a \leq M \iff \exists K \in \mathbb{R} \forall a \in A |a| \leq K$. Przykład: $A = (-1, 2]$ - przykładowe ograniczenia dolne - $\{-10, -1.5, -1\}$, ograniczenia górne - $\{3, 100, 2\} \implies$ zbiór A jest ograniczony
3. Def. Niech $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z dołu. Wtedy kresem dolnym zbioru A (oznaczanym $\inf A$) nazywamy największe ograniczenie dolne zbioru A
 - (a) To znaczy $\inf A = \alpha \iff (\forall a \in A a \geq \alpha \text{ (}\alpha \text{ jest ograniczeniem dolnym)}) \text{ oraz } \forall \epsilon > 0 \exists a_0 \in A a_0 < \alpha + \epsilon$
4. Def. Niech $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z góry. Wtedy kresem górnym zbioru A (oznaczamy $\sup A$) nazywamy najmniejsze ograniczenie górne zbioru A .
 - (a) $\sup A = \beta \iff (\forall a \in A a \leq \beta \text{ oraz } \forall \epsilon > 0 \exists a_0 \in A a_0 > \beta - \epsilon)$
5. Jeśli zbiór A nie jest ograniczony z dołu, to $\inf A = -\infty$, jeśli nie jest ograniczony z góry, to $\sup A = +\infty$
 - (a) $\inf(\emptyset) = +\infty$, $\sup(\emptyset) = -\infty$
 - (b) Przykład: $A = (-1, 2]$
 - i. $\inf(A) = -1$
 - ii. $\sup(A) = 2$
6. Aksjomat ciągłości - Każdy zbiór $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ ograniczony z dołu/góry ma skończony kres dolny/górny $\in \mathbb{R}$
 - (a) dla \mathbb{Q} tego nie ma: $B = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2 \text{ i } q > 0\}$ kres górny to $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

(b) Twierdzenie: jeśli $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$ to

i. $\inf A \geq \inf B$

A. Dowód: Jeśli B nie jest ograniczony z dołu, to $\inf B = -\infty$, więc i. jest spełniona

B. Jeśli B jest ograniczony z dołu, to z aksjomatu ciągłości B ma skończony kres dolny. Ponadto A też jest ograniczony z dołu, więc też ma skończony kres dolny. Oznaczmy $\inf A = \alpha$ i $\inf B = \beta$. Wtedy mamy :

$$\forall a \in A a \geq \alpha$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists a_0 \in A a_0 < \alpha + \epsilon$$

$$\forall b \in B b \geq \beta$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists b_0 \in B b_0 < \beta + \epsilon$$

Chcemy pokazać że $\alpha \geq \beta$

$$A \subset B \implies (a \in A \implies a \in B) \implies \alpha \geq \beta, \text{ czyli } \beta \text{ jest ograniczeniem dolnym zbioru } A$$

ii. $\sup A \leq \sup B$

A. Dowodzimy analogicznie

7. LICZBY NATURALNE I ZASADA INDUKCJI MATEMATYCZNEJ

(a) Zdefiniowaliśmy $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Definicja ta nie jest matematycznie precyzyjna, bo nie zdefiniowaliśmy "...". Podamy definicję liczb naturalnych odwołującą się jedynie do pojęć pierwotnych i do pojęć zdefiniowanych wcześniej. Def. Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ nazywamy induktywnym jeśli spełnia następujące dwa warunki

i. $1 \in A$

ii. $\forall a \in A a + 1 \in A$

A. $[1, \infty)$

B. \mathbb{R}

C. \mathbb{Q}

D. \mathbb{N}

iii. Def. Zbiór liczb naturalnych \mathbb{N} to zbiór zawarty w każdym zbiorze induktywnym tzn. $\mathbb{N} = \bigcap_{A \in I} A$ gdzie I to rodzina wszystkich zbiorów induktywnych

(b) Twierdzenie - Zasada indukcji matematycznej

i. Jeśli $A \subset \mathbb{N}$ spełnia warunki

$$1 \in A$$

$$\forall n \in \mathbb{N} (n \in A \implies n + 1 \in A)$$

ii. to $A = \mathbb{N}$

iii. Zbiór A jest induktywny, bo $1 \in A$ oraz $\forall n \in A n + 1 \in A$ Zatem $\mathbb{N} \subset A$

iv. Skoro $A \subset \mathbb{N}$ oraz $\mathbb{N} \subset A$ to $A = \mathbb{N}$

(c) Przykład - dowód tego, że $\forall n \in \mathbb{N} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$ (**)

i. Niech $A = \{n \in \mathbb{N} : 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}\}$

ii. Potrzebujemy pokazać, że $1 \in A$ oraz, że $\forall n \in \mathbb{N} (n \in A \implies n + 1 \in A)$ To znaczy, że

A. Dla $n=1$ wzór (**) jest spełniony ($1 + 1 \geq \sqrt{1}$)

B. Zakładamy, że wzór (**) jest prawdziwy dla n i dowodzimy jego prawdziwości dla $n+1$

Zakładamy, że $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$. Chcemy pokazać, że $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \stackrel{\text{z at. ind.}}{\geq} \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} \text{ co kończy dowód.}$$

(d) Twierdzenie:

i. Zbiór \mathbb{N} nie jest ograniczony z góry

A. Dowód nie wprost. Zakładamy, że zbiór \mathbb{N} jest ograniczony z góry. Wtedy $\exists M \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \leq M \implies n + 1 \leq M \implies n \leq M - 1 \implies M - 1$ też jest ograniczeniem górnym \implies zbiór \mathbb{N} nie ma najmniejszego ograniczenia górnego. Z drugiej strony. \mathbb{N} jako zbiór niepusty i ograniczony z góry ma kres górny, czyli najmniejsze ograniczenie górne. Skoro założenie implikuje sprzeczność to założenie jest nieprawdziwe więc zbiór \mathbb{N} nie jest ograniczony z góry

ii. Zbiór \mathbb{Q} jest gęsty w \mathbb{R} , to znaczy $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \exists q \in \mathbb{Q} x < q < y$ (pomiędzy dowolnymi dwoma rzeczywistymi istnieje liczba wymierna)

iii. Zbiór $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (zbiór liczb niewymiernych) jest gęsty w \mathbb{R} , to znaczy $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \exists z \notin \mathbb{Q} x < z < y$

(e) Dowód indukcyjny tego, że wszystkie kąty są tego samego koloru. Indukcja e względu na n-liczba kotów.

i. Dla $n=1$ OK

ii. Zakładamy że fakt jest prawdziwy dla n, i dowodzimy dla $n+1$