KRYTERIA ZBIEŻNOŚCI CAŁEK NIEWŁAŚCIWYCH

Niech $b = \infty$ lub $b \in \mathbb{R}$ i $a < b$

1. Twierdzenie 1.1: (Kryterium porównawcze) Niech $f, g : < a, b) \to \mathbb{R}$ będą całkowalne w sensie Riemanna na $< a, \beta >$dla każdego $a < \beta < b$ i $\forall_{x \in < a,b)} 0 \le f(x) \le g(x)$. Wtedy:
   (a) Jeśli $\int_a^b g(x)dx$ jest zbieżna, to $\int_a^b f(x)dx$ też jest zbieżna.
   (b) Jeśli $\int_a^b f(x)dx$ jest rozbieżna, to $\int_a^b g(x)dx$ też jest rozbieżna
2. Twierdzenie 1.2: Jeśli $f : < a, b) \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $< a, \beta >$ dla każdego $a < \beta < b$ i $\int_a^b |f(x)|dx$ jest zbieżna, to $\int_a^b f(x)dx$ też jest zbieżna. W przypadku zbieżności mamy $|\int_a^b f(x)dx| \le \int_a^b |f(x)|dx$
   Analogiczne twierdzenia są prawdziwe także dla funkcji $f, g : (a, b > \to \mathbb{R}$ gdzie $a = -\infty$ lub $a \in \mathbb{R}$ i $a < b$
3. $$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx \text{ jest zbieżna } \iff p > 1$$
   $$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx \text{ jest zbieżna } \iff p < 1$$
   Z czego $\int_0^\infty \frac{1}{x^p}$ jest rozbieżna
4. Przykłady:
   (a) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[4]{5x^5+1}}$ jest zbieżna, bo $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{5/4}}$ jest zbieżna (bo $p = \frac{5}{4} > 1$) z twierdzenia 1.1(a)
   (b) $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{x^3}}dx$ jest rozbieżna, bo $\int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}}$ jest rozbieżna (bo $p = \frac{3}{2} \le 1$) z twierdzenia 1.1(b)
   (c) $\int_2^\infty \frac{x \cdot \sin x}{(x^2+4)^2}dx : \forall_{x \in <2,\infty)} |\frac{x \cdot \sin x}{(x^2+4)^2}| = \frac{x \cdot |\sin x|}{(x^2+4)^2} \le \frac{x}{(x^2+4)^2} \le \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3}$. $\int_2^\infty \frac{1}{x^3}$ jest zbieżna, więc $\int_2^\infty |\frac{x \cdot \sin x}{(x^2+4)^2}|$ jest zbieżna więc $\int_2^\infty \frac{x \cdot \sin x}{(x^2+4)^2}$ jest zbieżna

2.ZASTOSOWANIA GEOMETRYCZNE CAŁKI RIEMANNA

1. Pole
   (a) Pole figury płaskiej pomiędzy wykresem funkcji $y = f(x)$, $x \in < a, b >$a osią OX
   Twierdzenie 2.1: Jeśli $f : < a, b > \to \mathbb{R}$ jest ciągła i nieujemna i $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in < a, b > \text{ i } 0 \le y \le f(x)\}$ to pole $D \overset{\text{ozn}}{=} |D| = \int_a^b f(x)dx$
   D: Niech $\Pi_n = (x_0^{(n)}, \dots x_n^{(n)})$ będzie podziałem odcinka $< a, b >$na n równych kawałków. Wtedy ciąg $\{\Pi_n\}$ jest normalnym ciągiem podziałów.
   $m_i^{(n)} = \inf_{x \in < x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)} >} f(x)$, $M_i^{(n)} = \sup_{x \in < x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)} >} f(x)$
   Wtedy $|D| \le \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \overset{n \to \infty}{\to} \int_a^b f(x)dx$ (suma prostokątów "przykrywających" figurę = górna suma całkowa Darboux)
   oraz $|D| \ge \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \overset{n \to \infty}{\to} \int_a^b f(x)dx$ (suma prostokątów "pod" figurą = dolna suma całkowa Darboux)
   f jest ciągła na $< a, b > \implies$ całkowalna w sensie Riemanna na $< a, b > \implies \int_a^b f(x)dx(\text{dolna}) = \int_a^b f(x)dx(\text{górna}) = \int_a^b f(x)dx(\text{Riemanna})$
   Z tw o 3 ciągach otrzymujemy $|D| = \lim_{n \to \infty} |D| = \int_a^b f(x)dx$
   (b) Pole figury płaskiej pomiędzy dwoma wykresami funkcji
   Twierdzenie 2.2: Jeśli $g, d :< a, b > \to \mathbb{R}$ są ciągłe i $\forall_{x \in < a,b >} d(x) \le g(x)$ i $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in < a, b >$ i $d(x) \le y \le g(x)\}$ to $|D| = \int_a^b [g(x) - d(x)]dx$
   D: 1: funkcja $d(x)$ jest nieujemna. $|D| = |D_g| - |D_d| \overset{\text{tw 2.1}}{=} \int_a^b g(x)dx - \int_a^b d(x)dx = \int_a^b [g(x) - d(x)]dx$
   2: funkcja $d(x)$ przyjmuje wartość ujemną, tzn $c \overset{\text{ozn}}{=} \inf_{x \in < a,b >} d(x) < 0$. Przesuwamy wykresy funkcji $d(x)$ i $g(x)$ o c jednostek do góry otrzymując funkcje $d(x) + c$ i $g(x) + c$ które są nieujemne. Przesunięcie nie zmienia pola figury zawartej pomiędzy dwoma wykresami. Z tego $|D| = |D_{g+c}| - |D_{d+c}| \overset{1:}{=} \int_a^b [g(x) + c - d(x) - c] = \int_a^b [g(x) - d(x)]$
   Z tego $|D| = \int_a^b [g(x) - d(x)]$
2. Długośc łuku:
   Twierdzenie 2.3: Jeśli $f :< a, b > \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1, to długość łuku opisanego równaniem $y = f(x), x \in < a, b >$, dana

jest wzorem

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

3. Objętość bryły obrotowej
Twierdzenie 2.2: Jeśli Jeśli $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ jest ciągła, to objętość bryły powstałej w wyniku obrotu funkcji $y = f(x)$, $x \in< a, b >$, wokół osi OX dana jest wzorem:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

D: Dowód analogiczny do dowodu Twierdzenia 2.1, tylko że liczymy sumę objętości walców zamiast prostokątów.
$m_i^{(n)} = \inf_{x\in<x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}>} |f(x)|$, $M_i^{(n)} = \sup_{x\in<x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}>} |f(x)|$
$|V| \geq \sum_{i=1}^n \pi \cdot (m_i)^2 \cdot (x_i - x_{i-1}) = \pi \cdot \sum_{i=1}^n (m_i)^2 \cdot (x_i - x_{i-1}) \overset{n\to\infty}{\to} \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$ (dolna suma całkowa Darboux)
$|V| \leq \sum_{i=1}^n \pi \cdot (M_i)^2 \cdot (x_i - x_{i-1}) = \pi \cdot \sum_{i=1}^n (M_i)^2 \cdot (x_i - x_{i-1}) \overset{n\to\infty}{\to} \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$ (górna suma całkowa Darboux)
f jest ciągła w sensie Riemanna na $< a, b > \implies f^2$ też jest $\implies$ (dolna suma)= (górna suma)= $\int_a^b [f(x)]^2 dx$