

23.10.2019

X - zbiór (przestrzeń)

1. Def. Dopełnieniem zbioru A w przestrzeni X nazywamy zbiór $-A = \{x \in X : x \notin A\}$ - na mocy aksjomatu wyróżniania

(a) Własności dopełnienia:

- i. $-(A \cup B) = -A \cap -B$
D: $x \in -(A \cup B) \stackrel{\text{def. dopełnienia}}{\iff} x \notin (A \cup B) \stackrel{\text{def.}}{\iff} \neg(x \in A \cup B) \stackrel{\text{def. iloczynu}}{\iff} \neg(x \in A \wedge x \in B) \stackrel{\text{prawo de Morgana}}{\iff} x \notin A \vee x \notin B \iff x \in -A \cap -B$
- ii. $-(A \cap B) = -A \cup -B$
- iii. $\emptyset \subseteq A$
- iv. $A \cup \emptyset = A$
- v. $A \cap \emptyset = \emptyset$
- vi. $A \setminus \emptyset = A$
- vii. $\emptyset \setminus A = \emptyset$
- viii. $-\emptyset = X$
- ix. $-X = \emptyset$
- x. $A \cup -A = X$
- xi. $A \cap -A = \emptyset$
- xii. $-(-A) = A$
- xiii. $A \setminus B = A \cap -B$
- xiv. $A \cap X = A$
- xv. $A \cup X = X$
- xvi. $A \subseteq B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B$
- xvii. $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \iff A \cup B \subseteq C$
- xviii. $C \subseteq A \wedge C \subseteq B \iff C \subseteq A \cap B$

(b) Przykład:

- i. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
- ii. $\emptyset \in \{\emptyset\}$
- iii. $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$
- iv. $\{\emptyset\} \notin \{\emptyset\}$
- v. $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

(c) \emptyset - jedyny element zbioru $\{\emptyset\}$, ale $\emptyset \neq \{\emptyset\}$

2. **Aksjomat zbioru potęgowego:** Dla każdego zbioru istnieje zbiór (potęgowy) wszystkich jego podzbiorów.

A - zbiór, $P(A)$ (lub 2^A) - zbiór potęgowy

$P(A) = \{B : B \subseteq A\}$

$\emptyset, A \in P(A)$ zawsze

(a) Przykład: $A = \{a, b\}$, $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

3. **Aksjomat pary nieuporządkowanej:** Dla dowolnych zbiorów A i B istnieje zbiór, którego elementami są dokładnie zbiory A oraz B

$\{A, B\} = \{x : x = A \vee x = B\}$

$\{A\} = \{A, A\}$ - Singleton, zbiór 1-elementowy

(a) Def. **Parą uporządkowaną** $\langle a, b \rangle$ nazywamy zbiór $\{\{a\}, \{a, b\}\}$

i. $\langle a, a \rangle = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$

(b) Twierdzenie: $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \iff a = c \wedge b = d$

i. \Leftarrow : $a = c \wedge b = d$, więc $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ więc $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$

ii. \Rightarrow : Dla $a = b$, $\langle a, b \rangle = \{\{a\}\}$, $\langle c, d \rangle = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ więc $\{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ tylko gdy $c = d$, a wtedy $\{\{a\}\} = \{\{c\}\}$, więc z tego wynika że $a = c \wedge b = d$

Dla $a \neq b$: $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ tylko gdy $(\{a\} = \{c\} \vee \{a\} = \{c, d\}) \wedge (\{a, b\} = \{c, d\} \vee \{a, b\} = \{d\})$.
Ponieważ $\{a, b\}$ oraz $\{c, d\}$ są dwuelementowe, bo $a \neq b$, to $\{a\} = \{c\} \wedge \{a, b\} = \{c, d\}$ z czego $a = b$ oraz $c = d$

iii. Implikacja zachodzi w dwie strony, więc jest równoważność

4. Def. **Iloczynem kartezjańskim** zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \times B = \{\langle a, b \rangle : a \in A \wedge b \in B\}$

(a) Przykłady

- i. $\{1, 2\} \times \{3, 4\} = \{< 1, 3 >, < 1, 4 >, < 2, 3 >, < 2, 4 >\}$
- ii. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ - płaszczyzna \mathbb{R}^2
- iii. $[1, 3] \times [1, 2]$ - prostokąt o wierzchołkach $< 1, 1 >, < 1, 2 >, < 3, 1 >, < 3, 2 >$

5. Def. **Uporządkowaną trójką** $< a, b, c >$ nazywamy zbiór $< < a, b >, c >$

6. Def. **Uporządkowaną n-tką** $< x_1, \dots, x_n >$ nazywamy zbiór $< < x_1, \dots, x_{n-1} >, x_n >$

(a) Twierdzenie: Dla $n \geq 2$, $< x_1, \dots, x_n > = < y_1, \dots, y_n > \iff \forall_{i \in \{1, \dots, n\}} x_i = y_i$

i. Dowód indukcyjny: Dla $n = 2$ prawda

Założenie indukcyjne: $< x_1, \dots, x_{n-1} > = < y_1, \dots, y_{n-1} > \iff \forall_{i \in \{1, \dots, n-1\}} x_i = y_i$.

$a = < x_1, \dots, x_{n-1} >, b = < y_1, \dots, y_{n-1} >$.

Wtedy z definicji uporządkowanej n-tki $< x_1, \dots, x_n > = < a, x_n >$, oraz $< y_1, \dots, y_n > = < b, y_n >$

Z tego, że dla $n = 2$, to $< a, x_n > = < b, y_n > \iff a = b \wedge x_n = y_n$

Z założenia indukcyjnego, $a = b \iff \forall_{i \in \{1, \dots, n-1\}} x_i = y_i$, więc $< a, x_n > = < b, y_n > \iff \forall_{i \in \{1, \dots, n\}} x_i = y_i$ co kończy dowód.

7. **Aksjomat sumy zbiorów rodziny**: \mathcal{A} – rodzina zbiorów - zbiór którego elementami są zbiory

(a) Dla dowolnej rodziny zbiorów \mathcal{A} istnieje zbiór:

$$\bigcup \mathcal{A} := \{x : \exists A (A \in \mathcal{A} \wedge x \in A)\}$$

do którego należą te elementy, które należą do co najmniej jednego zbioru rodziny \mathcal{A}

(b) Iloczynem (przecięciem) rodziny zbiorów \mathcal{A} nazywamy zbiór

$$\bigcap \mathcal{A} := \{x \in \bigcup \mathcal{A} : \forall A (A \in \mathcal{A} \implies x \in A)\}$$

Istnieje na mocy aksjomatu wyróżniania i aksjomatu sumy rodziny zbiorów

8. I - zbiór indeksów, X - zbiór przestrzeni

Def. Funkcję $A : I \rightarrow P(X)$ i $i \mapsto A(i) \subseteq X$ nazywamy **indeksowaną rodziną zbiorów** (będziemy pisać A_i zamiast $A(i)$)

(a) R - zbiór wartości funkcji A

$$R = \{B \in P(X) : \exists_{i \in I}\}$$