**Funkcje**

1. Def: **Relację** $R \subseteq X \times Y$ nazywamy **funkcją**, jeśli $\forall_{x \in X} \forall_{y_1, y_2 \in Y} xRy_1 \wedge xRy_2 \implies y_1 = y_2$
   Gdy relacja jest funkcją często zamiasy $xRy$ piszemy $y = R(x)$. Element $x$ nazywamy **argumentem funkcji** R, zaś $y$ **wartością R dla argumentu** $x$
2. Def: Zbiór $D_r = \{x \in X : \exists_{y \in Y} R(x) = y\}$ nazywamy **dziedziną** funkcji R. Jeśli $D_R = X$, to oznaczamy $R : X \to Y$
3. Def: Jeśli przeciwdziedzina jest równa zbiorowi wartosci, to mówimy, że funkcja jest "na", lub że jest **surjekcją**
4. Twiedzenie - Złożenie dwóch funkcji jest funkcją
5. Uwaga: Relacja odwrotna do funkcji nie musi być funkcją
6. Def: Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy **różnowartościową**, lub **iniekcją**, jeśli $\forall_{x_1, x_2 \in X} x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$
7. Twierdzenie: Jeśli $f : X \to Y$jest iniekcją to jej relacja odwrotna jest funkcją
8. Uwaga: Jeśli funkcja $f$ jest **na** zbiór $Y$, to piszemy $f^{-1} : Y \to X$
9. Twierdzenie: Niech $f : X \to Y$ oraz $f^{-1} : Y \to X$. Wtedy $f \circ f^{-1} = id_Y = \{(y, y) : y \in Y\}$, $f^{-1} \circ f = id_X = \{(x, x) : x \in X\}$
10. Funkcja która jest iniekcją i surjekcją nazywamy **bijekcją**
11. Niech $f : X \to Y$ oraz $Z \subseteq X$. Funkcję $g = f_{/Z} = f \cap Z \times Y$ nazywamy obcięciem funkcji $f$ do zbioru $Z$
12. Niech $f_i : X_i \to Y$ dla $i \in I$ oraz dla każdego $i \neq j \in I$ $X_i \cap X_j = \emptyset$.Wtedy $f = f_1 \cup \cdots \cup f_n$ jest funkcją i $f : \bigcap_{i \in I} X_i \to Y$
13. Niech $X, Y, Z, T$ - zbiory oraz $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ $h : Z \to T$ - funkcje
    (a) $f : X \overset{1-1}{\to} Y, g : Y \overset{1-1}{\to} Z \implies g \circ f : X \overset{1-1}{\to} Z$ - $(1-1)$ - różnowartościowe
    (b) $f : X \overset{na}{\to} Y, g : Y \overset{na}{\to} Z \implies g \circ f : X \overset{na}{\to} Z$
    (c) $f : X \overset{bijekcja}{\to} Y, g : Y \overset{bijekcja}{\to} Z \implies g \circ f : X \overset{bijekcja}{\to} Z$
    (d) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
    (e) Składanie funkcji nie jest przemienne
    (f) $f \circ id_x = f$, $id_y \circ f = f$
    (g) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
14. Def: Niech $f : X \to Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Zbiór $f[A] = \{y \in Y : \exists_{x \in A} y = f(x)\} = \{f(x) : x \in A\} \subseteq Y$ nazywamy **obrazem** zbioru $A$ funkcji $f$
    Zbiór $f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$ nazywamy **przeciwobrazem** funkcji $f$
15. Twierdzenie: $f : X \to Y$ $A_1, A_2 \subseteq X$ $A : I \to P(X)$ (rodzina indeksowana). Wtedy:
    (a) $f[\emptyset] = \emptyset$
    (b) $A_1 \subseteq A_2 \implies f[A_1] \subseteq f[A_2]$
    (c) $f[\bigcup_{i \in I} A_i] = \bigcup_{i \in I} f[A_i]$
    (d) $f[\bigcap_{i \in I} A_i] \subseteq \bigcap_{i \in I} f[A_i]$
    (e) Jeśli $f$ jest iniekcją to we własności (d) mamy równość
16. Twierdzenie: $f : X \to Y, B_1, B_2 \subseteq Y$, $B : I \to P(Y)$ (rodzina indeksowana). Wtedy:
    (a) $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$
    (b) $B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}[B_1] \subseteq f^{-1}[B_2\}$
    (c) $f^{-1}[\bigcup_{i \in I} B_i] = \bigcup_{i \in I} f^{-1}[B_i]$
    (d) $f^{-1}[\bigcap_{i \in I} B_i] = \bigcap_{i \in I} f^{-1}[B_i]$
17. Twierdzenie: $f : X \to Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$
    (a) $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$
    (b) $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$
    (c) Jeśli $f$ jest iniekcją to w 1 zachodzi równość
    (d) Jeśli $f$ jest surjekcją to w 2 zachodzi równość 2