9. Pochodne jednostronne

1. Na poprzednim wykładzie zakładaliśmy, że $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ i x_0 jest punktem wewnętrznym D. W pozostałych dwóch definicjach **nie** wymagamy by x_0 był punktem wewnętrznym D

   (a) Def. (pochodnej lewostronnej):
   Jeśli $\exists_{\delta>0}(x_0-\delta, x_0] \subset D$ i istnieje skończona granica $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ to nazywamy ją pochodną lewostronną f w x_0 i oznaczamy $f'_-(x_0)$

   (b) Def. (pochodnej prawostronnej):
   Jeśli $\exists_{\delta>0}[x_0, x_0+\delta] \subset D$ i istnieje skończona granica $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0^+-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ to nazywamy ją pochodną prawostronną f w x_0 i oznaczamy $f'_+(x_0)$

2. Twierdzenie 9.1 (warunek konieczny i dostateczny różniczkowalności):
   Funkcja f jest różniczkowalna w x_0 $\iff$ istnieją $f'_-(x_0)$ i $f'_+(x_0)$ oraz $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. W przypadku różniczkowalności $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

Pochodne wyższych rzędów

1. Def. Pochodną n-tego rzędu funkcji f w x_0 definiujemy rekurencyjnie:

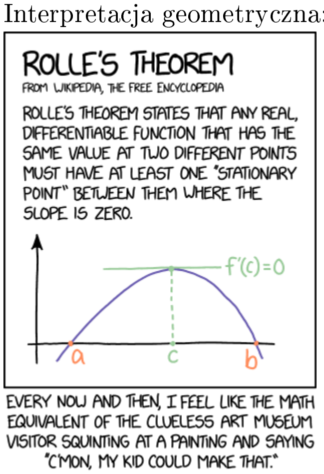
$$f^{(0)} = f(x)$$
$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$$

   Aby istniała pochodna n-tego rzędu f w x_0 musi istnieć pochodna rzędu $n-1$ w pewnym otoczeniu x_0 $\implies$ muszą istnieć wszystkie poprzednie pochodne w pewnym otoczeniu punktu x_0
   Do oznaczanie $f^{(n)}(x_0)$ używa się także $\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$ lub $D^n f(x_0)$
   Funkcję, która ma n-tą pochodną w penwym przedziale będzemy nazywać n-krotnie różniczkowalną w tym przedziale

Twierdzenie Rolle'a i twierdzenie Lagrange'a

1. Twierdzenie 9.2 (Rolle'a):
   Jeśli funkcja f jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna w (a, b) i $f(a) = f(b)$ to $\exists_{c\in(a,b)} f'(c) = 0$

   (a) Interpretacja geometryczna:



   (b) D: Z założenia f jest ciągła na $[a, b] \overset{\text{tw.Weierstrassa II}}{\implies} f$ osiąga swoje kresy na $[a, b]$,tzn $\exists_{x_m\in[a,b]} f(x_m) = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ oraz $\exists_{x_M\in[a,b]} f(x_M) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$
   $\implies \forall_{x\in[a,b]} f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)$

      i. Jeśli $f(x_m) = f(x_M)$,to $\forall_{x\in[a,n]} f(x_m) = f(x) = f(x_M)$,tzn f jest stała w na $[a, b]$ $\implies \forall_{x\in(a,b)} f'(x) = 0 \implies$ za c możemy wziąć dowolny punkt z (a, b)

      ii. Jeśli $f(x_m) \ne f(x_M)$ to $f(x_m) \ne f(a)$ lub $f(x_n) \ne f(a) \implies f(x_m) < f(a)$ lub $f(x_n) > f(a)$
      Załózmy, że $f(x_m) < f(a)$, (dowód gdy $f(x_M) > f(a)$ przebiega analogicznie)
      Mamy zatem $f(x_m) < f(a) = f(b) \implies x_m \in (a, b) \implies f$ jest różniczkowalna w punkcie $x_m \overset{\text{tw 9.1}}{\implies}$ istnieją $f'_-(x_m)$ i $f'_+x(m)$ i $f'(x_m) = f'_-(x_m) = f'_+(x_m)$
      $f'_-(x_m) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \le 0$ bo "góra" jest zawsze ≥ 0 a dół < 0
      $f'_+(x_m) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \ge 0$ bo "góra" jest zawsze ≥ 0 a dół > 0
      Wtedy $f'(x_m) = 0$ bo $0 \le f'_+(x_m) = f'(x_m) = f'_+(x_m) \le 0$

2. Twierdzenie 9.3 (tw. Lagrange'a o wartości średniej). Jeśli f jest ciągła w $[a,b]$ i rózniczkowalna w (a,b) to $\exists_{c\in(a,b)} f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
D: Weźmy $g(x) = f(x - f(a) - \frac{f(x)-f(a)}{b-a}(x-a)$. $g(a) = 0, g(b) = 0 \implies g(a) = g(b)$
Funkcja g jest ciągła w $[a,b]$ i różniczkowalna w (a,b). Zatem g spełnia założenia tw. Rolle'a i używając tego twierdzenia otrzymujemy $\exists_{c\in(a,b)} g'(c) = 0$
$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot 1$
$\implies \exists_{c\in(a,b)} f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-1}$
Wnioski:

   (a) $\forall_{x\in(a,b)} f'(x) = 0 \iff f$ jest funkcją stałą na (a,b)
   $\Longleftarrow$ Już na poprzednim wykładzie udowodniliśmy że pochodna stałej $= 0$
   $\implies$ Zakładamy, że $\forall_{x\in(a,b)} f'(x) = 0$. Weźmy dowolne $x_1, x_2 \in (a,b)$ takie, że $x_1 < x_2$. Pokażemy, że $f(x_1) = f(x_2)$,a z tego już będzie łatwo wykazać że f jest stała na (a,b)
   Z założenia f jest różniczkowalna na $(a,b) \implies$ jest ciągła na (a,b)
   W szczególności f jest ciągła na $[x_1,x_2]$. Wtedy $\exists_{c\in(x_1,x_2)} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) = 0 \implies f(x_2) - f(x_1) = 0 \implies f(x_1) = f(x_2)$ co zachodzi dla dowolnego x_1, x_2, więc f jest stała.

   (b) $\forall_{x\in(a,b)} f'(x) > 0 \implies f$ jest rosnąca na (a,b) (nie zachodzi w drugą stronę, bo na przykład $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\, x \mapsto x^3$)
   D: Weźmy dowolne $x_1, x_2 \in (a,b)$ takie, że $x_1 < x_2$. Powtarzamy rozumowanie z dowodu powyżej, otrzymujemy $\exists_{c\in(x_1,x_2)} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) > 0 \implies f(x_2) - f(x_1) > 0 \implies f(x_2) > f(x_1)$

   (c) $\forall_{x\in(a,b)} f'(x) < 0 \implies f$ jest malejąca na (a,b) (nie zachodzi w drugą stronę, bo na przykład $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\, x \mapsto -x^3$)
   D: Analogicznie do poprzedniego.

3. Twierdzenie 9.4: $\forall_{x\in(a,b)} f'(x) \geq 0 \iff f$ jest rosnąca (niemalejąca) i różniczkowalna na (a,b)
D: Niech $x \in (a,b)$. Z założenia f jest rózniczkowalna w $x_0 \overset{\text{tw 9.1}}{\implies}$istnieje $f'_+(x)$ i $f'(x) = f'_{+(x)}$
$f'(x) = f'_+(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ bo góra i dół > 0
$$\begin{cases} f \text{ jest rosnąca} \\ h > 0 \implies x + h > x \end{cases} \implies f(x+h) > f(x)$$

4. Twierdzenie 9.5: $\forall_{x\in(a,b)} f'(x) \leq 0 \iff f$ jest malejąca (nierosnąca) i różniczkowalna na (a,b)
Wnioski 2.(a-c) oraz twierdzenia 3,4 pozostają prawdziwe, gdy przedział ograniczone (a,b) zamienimy na nieograniczone $(a,+\infty), (-\infty,b), (-\infty,+\infty)$

5. **Reguła De L'Hospitala**
Twierdzenie 9.6 (tw. de l'Hospitala):
Jeśli
$$1. x_0 \in (a,b)$$
$$2. f,g : (a,b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$$
$$3. \forall_{x\in(a,b)\setminus\{x_0\}} g(x) \neq 0 \,\text{i}\, g'(x) \neq 0$$
$$4. \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \,\text{lub}\, \lim_{x\to x_0} = \pm\infty$$
$$5. \text{istnieje granica (skończona lub nie) } \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
To istnieje granica $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ oraz $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
W skrócie $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = [\frac{0}{0} \,\text{lub}\, \frac{\text{coś}}{\pm\infty}] \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ jeśli $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ istnieje
Uwaga: Twierdzenie de l'Hostpitala jest także prawdziwe dla granic jednostronnych i granic w $\pm\infty$, z tym że w przypadku granicy w $+\infty$ musimy założyć $f,g : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne w $(0,+\infty)$. $\forall_{x\in(0,\infty)} g(x) \neq 0 \,\text{i}\, g'(x) \neq 0$