

Własności funkcji ciągłych:

1. Twierdzenie 7.1 : Każda funkcja ciągła $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ ma własność Darboux, to znaczy

$$f(a) \neq f(b) \implies \forall c \text{ między } f(a), f(b) \exists x_0 \in (a, b) f(x_0) = c$$

2. Twierdzenie 7.1: (twierdzenie Weierstrassa I)

Jeśli funkcja $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to jest ograniczona

3. Twierdzenie 7.2: (twierdzenie Weierstrassa II)

Jeśli funkcja $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to przyjmuje wartość najmniejszą i największą - osiąga swoje kresy

$$\exists x_m, x_M \in < a, b > f(x_m) = \inf_{x \in < a, b >} f(x) \text{ i } f(x_M) = \sup_{x \in < a, b >} f(x)$$

Uwaga - z przedziału otwartego to niekoniecznie prawda

- (a) Dowód: $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ - funkcja ciągła $\xrightarrow{\text{tw. Weierstrassa I}}$ f jest ograniczona, tzn ograniczony jest zbiór wartości tej funkcji $Y = \{f(x) : x \in < a, b >\}$. Ponadto $Y \neq \emptyset$. Zatem istnieją skończone kresy zbioru Y . Oznaczmy $m = \inf Y = \inf_{x \in < a, b >} f(x)$ i $M = \sup Y = \sup_{x \in < a, b >} f(x)$. Pokażemy, że $\exists x_M \in < a, b > f(x_M) = M$. Dowód tego, że

$\exists x_m \in < a, b > f(x_m) = m$ przebiega analogicznie.

Dowód nie wprost: Zakładamy, że $\forall x \in < a, b > f(x) \neq M$, więc $f(x) < M$ bo $M = \sup_{x \in < a, b >} f(x)$

Zdefiniujemy funkcję $F : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{M-f(x)}$. Funkcja ta jest dobrze zdefiniowana, bo mianownik się nie zeruje.

$F : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą $\xrightarrow{\text{tw. Weierstrassa I}}$ jest ograniczona, tzn. $\exists K > 0 \forall x \in < a, b > 0 < F(x) < K$ tzn $\exists K > 0 \forall x \in < a, b > 0 < \frac{1}{M-f(x)} < K \implies \exists K > 0 \forall x \in < a, b > M - f(x) > \frac{1}{K}$

$\implies \exists K > 0 \forall x \in < a, b > f(x) < M - \frac{1}{K}$, co oznacza że M nie jest największym ograniczeniem Y , czyli $M \neq \sup_{x \in < a, b >} f(x)$ -

sprzeczność

Jednostajna ciągłość funkcji

Do końca wykładu będziemy zakładać, że $D \subset \mathbb{R}$.

Przypomnienie:

Funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła $\iff \forall a \in D$ funkcja f jest ciągła w $a \iff \forall a \in D \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D |x-a| < \delta \implies |f(x)-f(a)| < \epsilon$ - δ może zależeć od a .

Jeśli δ nie zależy od a , tzn jest taka sama dla każdego a , to wtedy mówimy, że funkcja f jest jednostajnie ciągła, tzn spełnia warunek:

1. Def: Funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła $\iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall a \in D \forall x \in D |x-a| < \delta \implies |f(x)-f(a)| < \epsilon$

- (a) Uwaga 7.1: Każda funkcja jednostajnie ciągła jest ciągła.

- (b) Przykłady:

- i. $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ nie jest jednostajnie ciągła

Dowód nie wprost. Zakładamy, że f jest jednostajnie ciągła, czyli $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall a \in D \forall x \in D |x-a| < \delta \implies |f(x)-f(a)| < \epsilon$

W szczególności dla $\epsilon = 1$ przyjmujemy $\exists \delta > 0 \forall x, y \in (0, \infty) |x-y| < \delta \implies |f(x)-f(y)| < 1$

Weźmy $x_n = \frac{1}{n}$, $t_n = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $|x_n - t_n| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Stąd dla dostatecznie dużego n mamy $|x_n - t_n| < \delta \implies |f(x_n) - f(t_n)| < 1$

Z drugiej strony, $|f(x_n) - f(t_n)| = |n - n - 1| = 1$ - skąd sprzeczność.

- ii. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, jest jednostajnie ciągła - $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall a \in D \forall x \in D |x-a| < \delta \implies |f(x)-f(a)| = |\cos x - \cos a| = |-2 \sin \frac{x-a}{2} \sin \frac{x+a}{2}| = 2 |\sin \frac{x-a}{2}| |\sin \frac{x+a}{2}| \leq 2 |\frac{x-a}{2}| \cdot 1 = |x-a| < \epsilon$

Więc wystarczy wybrać $\delta = \epsilon$

2. Twierdzenie 7.4: (twierdzenie Cantora):

Jeśli $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to jest jednostajnie ciągła.

Dowód nie wprost: Zakładamy, że $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła ale nie jest jednostajnie ciągła. Wtedy

$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists a \in D \exists x \in D |x-a| < \delta \wedge |f(x)-f(a)| \geq \epsilon$. W szczególności biorąc $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy $\exists \epsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n, y_n \in < a, b > |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ i $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$

W ten sposób otrzymaliśmy dwa ciągi $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$. Ciąg $\{x_n\}$ jest ograniczony, bo $\forall n \in \mathbb{N} x_n \in [a, b] \xrightarrow{\text{tw. Bolzano-Weierstrassa}} \{x_n\}$ zawiera podciąg zbieżny; oznaczmy $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0$

Z twierdzenia o przechodzeniu do granicy w nierównościach, mamy $x_0 \in [a, b]$

$\forall n \in \mathbb{N} |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \implies \forall n \in \mathbb{N} x_n - \frac{1}{n} < y_n < x_n + \frac{1}{n} \implies \forall k \in \mathbb{N} x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < y_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k}$ lewa i prawa strona zbiegają do x_0 , więc z tw o 3 ciągach $y_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0$

Z ciągłości funkcji f w punkcie x_0 , $f(x_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x_0)$ i $f(y_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x_0)$

Stąd $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, co jest sprzeczne z $\exists \epsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n, y_n \in \langle a, b \rangle |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$, bo z drugiej strony $\exists \epsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n, y_n \in \langle a, b \rangle |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon \implies \exists \epsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n, y_n \in \langle a, b \rangle |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \epsilon$

3. Def: Funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza na $D \iff \exists L > 0 \forall x, y \in D |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$
 Przykład: Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ spełnia warunek Lipschitza, bo już dzisiaj pokazaliśmy, że $\forall x, y \in \mathbb{R} |f(x) - f(y)| = |\cos x - \cos y| \leq |x - y|$, tzn istnieje L spełniające warunek Lipschitza ($L = 1$)

4. Twierdzenie 7.5: Jeśli $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza, to jest jednostajnie ciągła.
 Dowód: Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza. Wtedy $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall a \in D \forall x \in D |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq L|x - y| < \epsilon$ ($\delta = \frac{\epsilon}{L}$), co oznacza, że f jest jednostajnie ciągła.