

09.10.2019

CIAŁGI LICZBOWE

Ważne: $\forall x, y \in \mathbb{R} |x + y| \leq |x| + |y|$ oraz $||x| - |y|| \leq |x - y|$

1. Def. Ciągiem $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ lub $\{a_n\}_{n \geq 1}$ lub $\{a_n\}$ nazywamy funkcję $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Ponadto a_n nazywamy n-tym wyrazem ciągu

(a) Przykłady:

i. $a_n = \sqrt[n]{n}$

^ ciąg zdefiniowany przez podanie wzoru na n-ty wyraz tego ciągu

A. $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}$ itp

ii. $b_1 = 1$

$b_2 = 1$

$b_{n+1} = b_n + b_{n-1}, n \geq 2$

^ ciąg zdefiniowany rekurencyjnie

A. Pierwsze wyrazy ciągu - 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Fibonacchi

2. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony z dołu $\iff \exists m \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} a_n \geq m$

3. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony z góry $\iff \exists M \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} a_n \leq M$

4. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony $\iff (\exists m \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} a_n \geq m) \wedge (\exists M \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} a_n \leq M)$ czyli $\exists K \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} |a_n| \leq K$

(a) Przykład:

i. Ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ jest ograniczony z dołu, bo $\exists m \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} a_n \geq m$ ($m = 0$)

ii. Ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ jest ograniczony z góry, bo $\exists M \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} a_n \leq M$ ($M = 1$)

iii. Skoro ciąg jest ograniczony z góry i z dołu to możemy powiedzieć że ciąg ten jest ograniczony

5. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący $\iff \forall n \in \mathbb{N} a_{n+1} > a_n \iff \forall n \in \mathbb{N} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

6. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest niemalejący $\iff \forall n \in \mathbb{N} a_{n+1} \geq a_n \iff \forall n \in \mathbb{N} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$

7. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest malejący $\iff \forall n \in \mathbb{N} a_{n+1} < a_n \iff \forall n \in \mathbb{N} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

8. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest nierosnący $\iff \forall n \in \mathbb{N} a_{n+1} \leq a_n \iff \forall n \in \mathbb{N} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$

(a) Ciągi rosnące, niemalejące, malejące i nierosnące nazywamy monotonicznymi

i. np $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow a_1 = -1 < a_2 = \frac{1}{2} > a_3 = -\frac{1}{3}$

ii. $b_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

A. Ze wzrostem n, $\frac{1}{n+1}$ rośnie, więc $1 - \frac{1}{n+1}$ maleje, więc b_n rośnie

B. Zatem ciąg b_n jest rosnący

9. Def. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do granicy $g \in \mathbb{R}$ $\iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 |a_n - g| < \epsilon$

(a) Dla dowolnie małego $\epsilon > 0$ dla wyrazów ciągu o dostatecznie dużych wartościach, odległość pomiędzy dowolnym wyrazem ciągu spełniającym warunki a g jest mniejsza od ϵ

(b) Wtedy g nazywamy granicą i zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ lub $a_n \rightarrow g$

i. Przykład: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ bo $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 |\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$

$\frac{1}{n} < \epsilon$

$\frac{1}{\epsilon} < n \rightarrow n_0 = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$

10. Def. Jeśli ciąg $\{a_n\}$ nie jest zbieżny to nazywamy go rozbieżnym;

11. Twierdzenie 2.1: Każdy ciąg stały jest zbieżny: $\forall n \in \mathbb{N} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

(a) Dowód: $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 |a_n - a| < \epsilon$. Ponieważ $\forall n_0 \in \mathbb{N} a_n - a = 0$, to zawsze $0 < \epsilon$

12. Twierdzenie 2.2: Ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę

(a) Dowód: Zakładamy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ i $a \neq b$

(b) Niech $\epsilon = \frac{1}{2}|a - b|$. Wtedy $\epsilon > 0$ bo $a \neq b$

(c) Z założenia $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \forall \epsilon > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_1 |a_n - a| < \epsilon$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \implies \forall \epsilon > 0 \exists n_2 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_2 |a_n - b| < \epsilon$

(d) Ponieważ $\forall_{x,y \in \mathbb{R}} |x+y| \leq |x|+|y|$, to $2\epsilon = |a-b| = |a-a_n+a_n-b| \leq |a-a_n|+|a_n-b| = |a_n-a|+|a_n-b| <^{n \geq n_1, n \geq n_2} \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$

(e) Otrzymaliśmy $2\epsilon > 2\epsilon$ oraz $\epsilon > 0 \implies 2 > 2$ sprzeczność

13. Twierdzenie 2.3: Jeśli ciąg jest zbieżny, to jest ograniczony.

(a) Dowód: Niech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, tzn $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_1 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} |a_n - g| < \epsilon$

(b) W szczególności dla $\epsilon = 1$ otrzymujemy $\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} |a_n - g| < 1$, czyli $-1 < a_n - g < 1$, czyli $\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} g - 1 < a_n < g + 1$

(c) Stąd $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \leq \max\{g + 1, a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}\} \implies \{a_n\}$ jest ograniczony z góry

(d) $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \geq \min\{g - 1, a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}\} \implies \{a_n\}$ jest ograniczony z dołu

(e) Zatem $\{a_n\}$ jest ograniczony.

(f) UWAGA: $\{a_n\}$ jest zbieżny $\implies \{a_n\}$ jest ograniczony

i. NIE DZIAŁA W DRUGĄ STRONĘ

ii. np $a_n = (-1)^n$ daje nam $-1, 1, -1, 1$ - ciąg jest ograniczony, ale nie jest zbieżny

14. Twierdzenie 2.4 (o ciągłości działań arytmetycznych): Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, to

(a) Dowód: Wiemy, że $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_1 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_1} |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ oraz $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_2 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_2} |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$

i. Chcemy pokazać, że $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} |a_n + b_n - (a + b)| < \epsilon$

ii. $|a_n + b_n - a - b| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| <^{n \geq n_1, n \geq n_2} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

iii. $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} |a_n + b_n - (a + b)| < \epsilon$ jeśli $n_0 = \max(n_1, n_2)$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$

i. Ciąg pomocniczy $\forall_{n \in \mathbb{N}} c_n = -b_n$, wtedy wystarczy pokazać że $c_n \rightarrow -b$, i leci pierwszy dowód

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$

i. Dowód: Skoro z $\{a_n\}$ jest zbieżny, to z twierdzenia 2.3 jest ograniczony, tzn $\exists_{K \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \leq K$ (dodatkowo, $K \neq 0$)

ii. Wiemy to samo co w dowodzie z (a).

iii. Chcemy pokazać, że $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} |a_n b_n - ab| < \epsilon$

iv. $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)| = |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \leq K|b_n - b| + |b||a_n - a|$

v. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \iff \forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_2 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_2} |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2K}$

vi. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_1 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_1} |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2(|b| + 1)}$

vii. $K|b_n - b| + |b||a_n - a| \leq K|b_n - b| + (|b| + 1)|a_n - a|$

viii. Stąd $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} |a_n b_n - ab| < \epsilon$ - $n_0 = \max(n_1, n_2)$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$ jeśli $b \neq 0$ i $\forall_{n \in \mathbb{N}} b_n \neq 0$

(e) Przykład:

$$i. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3}{4n^2-n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{3}{n^2}}{4-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{4-\frac{1}{n}+5 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}} = \frac{1+3 \cdot 0 \cdot 0}{4-0+5 \cdot 0 \cdot 0} = \frac{1}{4}$$

15. Twierdzenie 2.5 (o ciągłości wartości bezwzględnej): Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$

(a) Dowód: Wiemy, że $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_1 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_1} |a_n - a| < \epsilon$

(b) Chcemy pokazać, że $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} ||a_n| - |a|| < \epsilon$

(c) Mamy $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$

(d) Stąd $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} ||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \epsilon$

(e) Uwaga 2.1: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$

i. $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} |a_n - 0| < \epsilon$ z lewej strony oraz

ii. $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} ||a_n| - 0| < \epsilon$ z prawej strony. $|x| = ||x|$, więc strony są równoważne

16. Twierdzenie 2.6 (o przechodzeniu do granicy w nierównościach): Jeśli $\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} a_n \leq b_n$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ to $a \leq b$

(a) Uwaga 2.2: Twierdzenie 2.6 **nie** będzie prawdziwe jeśli \leq zamienimy na $<$

i. np $a_n = \frac{1}{n^2}, b_n = \frac{1}{n}$

ii. $\forall_{n \geq 2} a_n < b_n$ ale $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

17. Twierdzenie 2.7 (o trzech ciągach): Jeśli $\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} a_n \leq b_n \leq c_n$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$

(a) Dowód: Chcemy pokazać, że $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_3 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_3} |b_n - g| < \epsilon \iff \forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_3 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_3} -\epsilon < b_n - g < \epsilon$

(b) Wiemy, że $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_1 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_1} |a_n - g| < \epsilon \iff \forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_1 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_1} \epsilon < a_n - g < \epsilon$ oraz $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_2 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_2} \epsilon < c_n - g < \epsilon$

(c) $(n \geq n_2 \wedge n \geq n_0) \implies b_n - g \leq c_n - g < \epsilon$

(d) $(n \geq n_1 \wedge n \geq n_0) \implies b_n - g \geq a_n - g > -\epsilon$

(e) Zatem pokazaliśmy, że $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} -\epsilon < b_n - g < \epsilon$ ($n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$)

(f) Wniosek z twierdzenia o trzech ciągach: Jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$

i. Na mocy uwagi 2.1 wystarczy pokazać, że $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n b_n| = 0$

ii. Z założenia $\exists_{K \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \leq K$

iii. $\forall_{n \in \mathbb{N}} 0 \leq |a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq K \cdot |b_n|$, $K \cdot |b_n| \rightarrow 0$, więc z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n b_n| = 0$

18. Twierdzenie 2.8: Jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest niemalejący i ograniczony z góry, to jest zbieżny

19. Twierdzenie 2.8.1: Jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest nierosnący i ograniczony z dołu, to jest zbieżny

20. 2.8 oraz 2.8.1 razem: Jeśli ciąg jest monotoniczny i ograniczony, to jest zbieżny

21. Twierdzenie 2.11 (z przyszłości):

(a) $|a| < 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |a|^n = 0$

(b) $a > 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

22. def. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ jest rosnące, jeśli $\forall_{x_1, x_2 \in A} : (x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2))$

23. def $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją okresową jeśli $\exists_{r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \forall_{a \in A} x + r \in A \wedge x - r \in A \wedge f(a) = f(a + r)$