09.10.2019
Rachunek predykatów
Na elitmie $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0$

1. Def: Wyrażenie $\phi(x)$, które po wstawieniu za x konkretnej wartości z ustalonego zbioru X nazywamy **funkcją zdaniową**
    (a) X - **zakres** zmiennej x
    (b) **Kwantyfikator ogólny** (uniwersalny)
        i. $(\forall_{x \in X})\phi(x)$ oznacza, że dla każdego $x \in X$ zdanie $\phi(x)$ jest prawdziwe
        ii. ^ taki napis jest zdaniem
    (c) **Kwantyfikator szczegółowy** (egzystencjalny)
        i. $(\exists_{x \in X})\phi(x)$ oznacza, że istnieje takie $x \in X$, dla którego zdanie $\phi(x)$ jest prawdziwe
    (d) Przykłady (b,c):
        i. $\forall_{x \in \mathbb{R}} x^2 \geq 1$ - zdanie fałszywe
        ii. $\exists_{x \in \mathbb{R}} x^2 = x + 1$- zdanie prawdziwe
2. Def: $\phi(x)$ - funkcja zdaniowa, X - zakres zmiennej x, $A \subseteq X$, $\alpha(x)$ - funkcja zdaniowa:
    (a) :
        i. $\forall_{x \in A}\phi(x) \iff {}^{def}\forall_{x \in X}(x \in A \implies \phi(x))$
        ii. $\exists_{x \in A}\phi(x) \iff {}^{def}\exists_{x \in X}(x \in A \wedge \phi(x))$
    (b) A więc generalniej:
        i. $\forall_{x:\, \alpha(x)}\phi(x) \iff {}^{def}\forall_{x \in X}(\alpha(x) \implies \phi(x))$
        ii. $\exists_{x:\, \alpha(x)}\phi(x) \iff {}^{def}\exists_{x \in X}(\alpha(x) \wedge \phi(x))$
    (c) Niech $A = \emptyset$
        i. $\forall_{x \in \emptyset}\phi(x) \iff \forall_{x \in X}(x \in \emptyset \implies \phi(x))$ - zdanie prawdziwe (zawsze)
        ii. $\exists_{x \in \emptyset}\phi(x) \iff \exists_{x \in X}(x \in \emptyset \wedge \phi(x))$ - zdanie fałszywe (zawsze)
    (d) Jeśli nie prowadzi to do nieporozumień, to będziemy pisać $\forall_x\phi(x)$ zamiast $\forall_{x \in X}\phi(x)$ oraz $\exists_x\phi(x)$ zamiast $\exists_{x \in X}\phi(x)$
3. Funkcje zdaniowe wielu zmiennych
    (a) $\phi(x, y)$ - staje się zdaniem po wstawieniu za x, y konkretnych wartości z zakresu x, y
    (b) $\phi(x_1, ..., x_n)$ - funkcja zdaniowa n zmiennych
    (c) Przykład:
        i. $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{Z}$: $\phi(x, y)$=$(x \neq y)$ - funkcja zdaniowa 2 zmiennych
        ii. $\forall_{x \in \mathbb{R}} x \neq y$ - nie zdanie, lecz funkcja zdaniowa - wartość zależy od y
        iii. $\exists_{y \in \mathbb{Z}}\forall_{x \in \mathbb{R}} x \neq y$ - zdanie fałszywe
4. $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ - zbiór skończony
    (a) $\forall_{x \in X}\phi(x) \iff \phi(x_1) \wedge \cdots \wedge \phi(x_n)$
    (b) $\exists_{x \in X}\phi(x) \iff \phi(x_1) \vee \cdots \vee \phi(x_n)$
5. Def: **Zasięg kwantyfikatora** to funkcja zdaniowa, której ten kwantyfikator dotyczy
    (a) $\exists_{y \in \mathbb{Z}}\underline{\forall_{x \in \mathbb{R}} x \neq y}$ - zasięg kwantyfikatora $\exists_{y \in \mathbb{Z}}$
    (b) Przykład: $\forall_x(\underline{\forall_y(\underline{x > y \implies (\exists_z)(\underline{x > z > y})})})$ - odpowiednie podkreślenia to zasięgi kwantyfikatorów na lewo od nich
    (c) Notacja: Zamiast $\forall_x(\exists_y(\forall_z(\ldots)))$ piszemy $\forall_x\exists_y\forall_z\ldots$
6. Def: Zmienną x nazywamy **związaną** jeśli leży ona w zasięgu kwantyfikatora (w którym występuje!) dla $\forall_x$ lub $\exists_x$. W przeciwnym wypadku x jest zmienną **wolną**
    (a) Przykłady:
        i. $\exists_y\forall_x(x + y > z)$ - x, y - zmienna związana, z - zmienna wolna
        ii. $z^2 \neq 1 \wedge \forall_y x^2 = y^2$- y - zmienna związana, x, z - zmienne wolne
    (b) $\phi(x)$ = "x jest liczbą pierwszą" - funkcja zdaniowa o zakresie $\mathbb{N} \setminus \{0\}$
        i. $\phi(x) = x > 1 \wedge \forall_{n \in \mathbb{N}}(n|x \implies n = x \vee n = 1)$ ($n|x$ oznacza "n dzieli x")

7. **Definicja rachunku predykatów**

   (a) A - alfabet: zbiór stałych, (np liczby rzeczywiste), symbole funkcyjne i symbole relacyjne (**predykaty**)

   (b) x, y, z - symbole zmiennych

   (c) **Zbiór termów *T*** to najmniejszy zbiór taki, że

      i. wszystkie stałe i zmienne należą do T

      ii. jeśli $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ oraz $\alpha \in A$ jest symbolem funkcji m-argumentowej, to $\alpha(t_1, \ldots t_n) \in T$

      iii. Elementy zbioru T nazywamy termami

   (d) **Predykat** to m-argumentowa funkcja, której wartościami jest prawda lub fałsz

      i. Przykłady $x, y \in \mathbb{R}$:

         A. $\beta(x, y) = (x < y)$ - predykat 2-argumentowy

         B. $p(x) =$(x jest liczbą pierwszą) $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

   (e) $t_1, \ldots, t_m$ - termy, β - symbol m-argumentowego predykatu - wtedy wyrażenie $\beta(t_1, \ldots, t_m)$ nazywamy **formułą atomową** rachunku predykatów

   (f) **Zbiór formuł rachunku predykatów** jest to najmniejszy zbiór Z taki, że

      i. Wszystkie formuły atomowe należą do Z

      ii. Jeśli $A, B \in Z$, to $(\neg A,\ A \vee B,\ A \wedge B,\ A \implies B,\ A \iff B) \in Z$

      iii. Jeśli $A \in Z$ i x jest zmienną wolną (nie związaną kwantyfikatorem) w A, to $\forall_x A \exists_x A \in Z$

8. Tautologie rachunku predykatów:

   (a) Def: Formułę rachunku predykatów nazywamy **tautologią** jeśli jest prawdziwa dla wszystkich interpretacji symboli funkcyjnych, predykatów, i dla wszystkich wartościowań zmiennych wolnych występujących w tej formule.

   (b) Przykłady:

      i. Formuły powstałe z tautologii rachunku zdań przez zastąpienie zmiennych formami rachunku predykatów

         A. $\alpha \vee \neg\alpha \longrightarrow \forall_x \phi(x) \vee \neg\forall_x \phi(x)$

      ii. $\forall_x \forall_y \phi(x, y) \iff \forall_y \forall_x \phi(x, y)$

      iii. $\exists_x \exists_y \phi(x, y) \iff \exists_y \exists_x \phi(x, y)$ - ^ przemienność kwantyfikatorów tego samego rodzaju

      iv. $\exists_x \forall_y \phi(x, y) \implies \forall_y \exists_x \phi(x, y)$ - ale nie w drugą stronę

      v. $\forall_x (\phi(x) \wedge \psi(x)) \iff \forall_x \phi(x) \wedge \forall_x \psi(x)$

      vi. $\exists_x (\phi(x) \vee \psi(x)) \iff \exists_x \phi(x) \vee \forall_x \psi(x)$ -forall-koniunkcja/ exists-alternatywa

      vii. $\exists_x (\phi(x) \wedge \psi(x)) \implies \exists_x \phi(x) \wedge \forall_x \psi(x)$

      viii. $\forall_x (\phi(x) \vee \psi(x)) \implies \forall_x \phi(x) \vee \forall_x \psi(x)$ - forall-alternatywa/ exists-koniunkcja