02.10.2019
prof. dr hab. inż. Zbigniew Lonc
zblonc@mini.pw.edu.pl
pokój 558, konsultacje 12.15-13.00
http://pages.mini.pw.edu.pl/~loncz/www
username:student
pass:elitmxy
32 punkty na ćwiczeniach zwalnia z części egzaminu

1. Rachunek zdań
   (a) <u>zdanie</u> - wyrażenie któremu można przypisać jednoznacznie wartość prawdy lub fałszu
   (b) zdania:
      i. Paryż jest we Francji
      ii. -1>0
   (c) nie zdania:
      i. Niebieski to ładny kolor
   (d) Zmienne zdaniowe - p,q,r,s zazwyczaj - pod nie podstawiamy zdania
   (e) X - zbiór zmiennych zdaniowych
   (f) Ze zdań prostych budujemy zdania złożone za pomocą operatorów (spójników) logicznych
      i. <u>Negacja</u>, zaprzeczenie , ¬p - nieprawda że p,nie p (¬/ ∼)
      ii. <u>Alternatywa</u> $p \vee q$ (p lub q)
      iii. <u>Koniunkcja</u> $p \wedge q$ (p i q)
      iv. <u>Implikacja</u> $p \implies q$ (jeśli p to q)
      v. <u>Równoważność</u> $p \iff q$(p jest równoważne q)
   (g) Budujemy "język legalnych" formuł rachunku zdań (synktatyka)
      i. Def. Zbiór formuł rachunku zdań jest to najmniejszy zbiór Z taki, że
         A. Każda zmienna zdaniowa należy do Z
         B. Jeśli $\alpha, \beta \in Z$ to $\neg\alpha, \alpha \vee \beta, \alpha \wedge \beta, \alpha \implies \beta, \alpha \iff \beta \in Z$
      ii. Konwencja:
         A. Dla uproszczenia formuł przyjmujemy priorytet wykonywania operacji
         ¬, potem ∧/∨,potem $\implies$ / $\iff$
         A. $(((\neg q) \wedge p) \implies p) \iff (p \vee q)$ sprowadza się do $(\neg q \wedge p \implies p) \iff p \vee q$
      iii. X - zbiór zmiennych zdaniowych
         A. Def. Wartościowanie jest to funkcja V: X→ {0,1} (prawda,fałsz) - przypisuje zmiennym zdaniowym wartości logiczne
         B.

p	¬p
1	0
0	1

         C.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \implies q$	$p \iff q$
0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1

      iv. Rozszerzamy wartościowanie na zbiór Z formuł rachunku zdań
         A. $\alpha, \beta \in Z$
         B. V : X→ $\{0, 1\}$
         C. $V(\neg\alpha) = \neg V(\alpha)$
         D. $V(\alpha \vee b) = V(\alpha) \vee V(\beta)$
         E. $V(\alpha \wedge b) = V(\alpha) \wedge V(\beta)$
         F. $V(\alpha \implies b) = V(\alpha) \implies V(\beta)$
         G. $V(\alpha \iff b) = V(\alpha) \iff V(\beta)$
         H. Przykład: $X = \{p, q\}$, $V(p) = 1$, $V(q) = 0$
         $V((\neg q \wedge p \implies p) \iff p \vee q) = 1$

(h) def. Tautologia rachunku zdań jest to formuła prawdziwa dla każdego wartościowania zmienych zdaniowych

i. $p \vee \neg p$ prawo wyłączonego środka

ii. $\neg(p \wedge \neg p)$ prawo sprzeczności

iii. $p \vee p \iff p$

iv. $p \wedge p \iff p$ idempotentność alternatywy i koniunkcji

v. $p \iff \neg(\neg p)$ podwójna negacja

vi. $(p \vee q) \wedge r \iff (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

vii. $(p \wedge q) \vee r \iff (p \vee r) \wedge (q \wedge r)$ prawo rozdzielności ^

viii. $(p \vee q) \vee r \iff p \vee (q \vee r)$

ix. $(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r)$ łączność ^

x. $(p \implies q) \wedge (q \implies r) \implies (p \implies r)$ przechodniość implikacji

xi. $(p \implies q) \iff (\neg p \vee q)$ eliminacja implikacji

xii. $(p \iff q) \iff (p \implies q) \wedge (q \implies p)$ eliminacja równoważności

xiii. $\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$

xiv. $\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$ prawa de Morgana^

xv. $\neg(p \implies q) \iff p \wedge \neg q$ negacja implikacji

xvi. $(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p)$ kontrapozycja

xvii. $p \implies (\neg p \implies q)$

A.

p	q	$\neg p \implies q$	$p \implies (\neg p \implies q)$
0	0	0	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

B. Przypuscmy że przy pewnym wartościowaniu formuła jest fałszywa. Wtedy p musi być prawdziwe, a nastepnik fałszywy. Jeśli p jest prawdziwe,to następnik też jest prawdziwy, więc implikacja musi wartościować się do prawdy.

(i) Podejście aksjomatyczne do rachunku zdań

i. Def. Aksjomat - formuła rachunku zdań ($\in Z$) o której przyjmujemy, że jest prawdziwa

ii. Def. Dowód formalny formuły $\beta \in Z$ jest to ciąg formuł $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n \in Z$ taki, że

A. $\alpha_n = \beta$

B. dla każdego $i \in \{1, 2, ..., n\}$ αjest aksjomatem, lub istnieją $j, k \in 1, 2, ...i - 1$takie że $j < k$ oraz $\alpha_k = (\alpha_j \implies \alpha_i)$

iii. Def. Formułę nazywamy twierdzeniem rachunku zdań jeśli istnieje jej dowód formalny

iv. Aksjomaty rachunku zdań (przykładowo) $(A, B, C \in\ Z)$ (nie trzeba pamiętać)

A. $(A \implies (B \implies A))$

B. $(A \implies (B \implies C)) \implies ((A \implies B) \implies (A \implies C))$

C. $(\neg A \implies B) \implies ((\neg A \implies \neg B) \implies A)$

v. Twierdzenie o pełności

A. Formuła rachunku zdań jest twierdzeniem $\iff$ jest tautologią

vi. Przykład dowodu formalnego formuły $\alpha \implies \alpha$ $(A = \alpha, B = \beta, C = \alpha)$:

A. $\alpha_1 = (\alpha \implies (\beta \implies \alpha) \implies \alpha)$ - aksjomat 1

B. $\alpha_2 =(\alpha \implies (\beta \implies \alpha)) \implies ((\alpha \implies \beta) \implies (\alpha \implies \alpha))$ - aksjomat 2

C. α_3

(j) Tw. Każda formuła F zapisana w języku rachunku zdań sprowadza się do postaci dysjunktywno koniunktywnej (DNF). Czyli dla każdej F istnieje F' w DNF tak, że $F \iff F'$

i. DNF to drzewkowo alternatywy na samej górze, poziom niżej koniunkcja, dwa poziomy niżej zmienna lub jej negacja

09.10.2019
Rachunek predykatów
Na elitmie $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0$

1. Def: Wyrażenie $\phi(x)$, które po wstawieniu za x konkretnej wartości z ustalonego zbioru X nazywamy **funkcją zdaniową**
   (a) X - **zakres** zmiennej x
   (b) **Kwantyfikator ogólny** (uniwersalny)
      i. $(\forall_{x\in X})\phi(x)$ oznacza, że dla każdego $x \in X$ zdanie $\phi(x)$ jest prawdziwe
      ii. ^ taki napis jest zdaniem
   (c) **Kwantyfikator szczegółowy** (egzystencjalny)
      i. $(\exists_{x\in X})\phi(x)$ oznacza, że istnieje takie $x \in X$, dla którego zdanie $\phi(x)$ jest prawdziwe
   (d) Przykłady (b,c):
      i. $\forall_{x\in\mathbb{R}} x^2 \geq 1$ - zdanie fałszywe
      ii. $\exists_{x\in\mathbb{R}} x^2 = x + 1$- zdanie prawdziwe
2. Def: $\phi(x)$ - funkcja zdaniowa, X - zakres zmiennej x, $A \subseteq X$, $\alpha(x)$ - funkcja zdaniowa:
   (a) :
      i. $\forall_{x\in A}\phi(x) \iff {}^{def}\forall_{x\in X}(x \in A \implies \phi(x))$
      ii. $\exists_{x\in A}\phi(x) \iff {}^{def}\exists_{x\in X}(x \in A \wedge \phi(x))$
   (b) A więc generalniej:
      i. $\forall_{x:\,\alpha(x)}\phi(x) \iff {}^{def}\forall_{x\in X}(\alpha(x) \implies \phi(x))$
      ii. $\exists_{x:\,\alpha(x)}\phi(x) \iff {}^{def}\exists_{x\in X}(\alpha(x) \wedge \phi(x))$
   (c) Niech $A = \emptyset$
      i. $\forall_{x\in\emptyset}\phi(x) \iff \forall_{x\in X}(x \in \emptyset \implies \phi(x))$ - zdanie prawdziwe (zawsze)
      ii. $\exists_{x\in\emptyset}\phi(x) \iff \exists_{x\in X}(x \in \emptyset \wedge \phi(x))$ - zdanie fałszywe (zawsze)
   (d) Jeśli nie prowadzi to do nieporozumień, to będziemy pisać $\forall_x\phi(x)$ zamiast $\forall_{x\in X}\phi(x)$ oraz $\exists_x\phi(x)$ zamiast $\exists_{x\in X}\phi(x)$
3. Funkcje zdaniowe wielu zmiennych
   (a) $\phi(x, y)$ - staje się zdaniem po wstawieniu za x, y konkretnych wartości z zakresu x, y
   (b) $\phi(x_1, ..., x_n)$ - funkcja zdaniowa n zmiennych
   (c) Przykład:
      i. $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{Z}$: $\phi(x, y)$=$(x \neq y)$ - funkcja zdaniowa 2 zmiennych
      ii. $\forall_{x\in\mathbb{R}} x \neq y$ - nie zdanie, lecz funkcja zdaniowa - wartość zależy od y
      iii. $\exists_{y\in\mathbb{Z}}\forall_{x\in\mathbb{R}} x \neq y$ - zdanie fałszywe
4. $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ - zbiór skończony
   (a) $\forall_{x\in X}\phi(x) \iff \phi(x_1) \wedge \cdots \wedge \phi(x_n)$
   (b) $\exists_{x\in X}\phi(x) \iff \phi(x_1) \vee \cdots \vee \phi(x_n)$
5. Def: **Zasięg kwantyfikatora** to funkcja zdaniowa, której ten kwantyfikator dotyczy
   (a) $\exists_{y\in\mathbb{Z}}\underline{\forall_{x\in\mathbb{R}} x \neq y}$ - zasięg kwantyfikatora $\exists_{y\in\mathbb{Z}}$
   (b) Przykład: $\forall_x(\underline{\forall_y(\underline{x > y \implies (\exists_z)(\underline{x > z > y})})})$ - odpowiednie podkreślenia to zasięgi kwantyfikatorów na lewo od nich
   (c) Notacja: Zamiast $\forall_x(\exists_y(\forall_z(\ldots)))$ piszemy $\forall_x\exists_y\forall_z\ldots$
6. Def: Zmienną x nazywamy **związaną** jeśli leży ona w zasięgu kwantyfikatora (w którym występuje!) dla $\forall_x$ lub $\exists_x$. W przeciwnym wypadku x jest zmienną **wolną**
   (a) Przykłady:
      i. $\exists_y\forall_x(x + y > z)$ - x, y - zmienna związana, z - zmienna wolna
      ii. $z^2 \neq 1 \wedge \forall_y x^2 = y^2$- y - zmienna związana, x, z - zmienne wolne
   (b) $\phi(x)$ = "x jest liczbą pierwszą" - funkcja zdaniowa o zakresie $\mathbb{N} \setminus \{0\}$
      i. $\phi(x) = x > 1 \wedge \forall_{n\in\mathbb{N}}(n|x \implies n = x \vee n = 1)$ ($n|x$ oznacza "n dzieli x")

7. **Definicja rachunku predykatów**

   (a) A - alfabet: zbiór stałych, (np liczby rzeczywiste), symbole funkcyjne i symbole relacyjne (**predykaty**)

   (b) x, y, z - symbole zmiennych

   (c) **Zbiór termów T** to najmniejszy zbiór taki, że

      i. wszystkie stałe i zmienne należą do T

      ii. jeśli $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ oraz $\alpha \in A$ jest symbolem funkcji m-argumentowej, to $\alpha(t_1, \ldots t_n) \in T$

      iii. Elementy zbioru T nazywamy termami

   (d) **Predykat** to m-argumentowa funkcja, której wartościami jest prawda lub fałsz

      i. Przykłady $x, y \in \mathbb{R}$:

         A. $\beta(x, y) = (x < y)$ - predykat 2-argumentowy

         B. $p(x) =$(x jest liczbą pierwszą) $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

   (e) $t_1, \ldots, t_m$ - termy, β - symbol m-argumentowego predykatu - wtedy wyrażenie $\beta(t_1, \ldots, t_m)$ nazywamy **formułą atomową** rachunku predykatów

   (f) **Zbiór formuł rachunku predykatów** jest to najmniejszy zbiór Z taki, że

      i. Wszystkie formuły atomowe należą do Z

      ii. Jeśli $A, B \in Z$, to $(\neg A,\ A \vee B,\ A \wedge B,\ A \implies B,\ A \iff B) \in Z$

      iii. Jeśli $A \in Z$ i x jest zmienną wolną (nie związaną kwantyfikatorem) w A, to $\forall_x A \exists_x A \in Z$

8. Tautologie rachunku predykatów:

   (a) Def: Formułę rachunku predykatów nazywamy **tautologią** jeśli jest prawdziwa dla wszystkich interpretacji symboli funkcyjnych, predykatów, i dla wszystkich wartościowań zmiennych wolnych występujących w tej formule.

   (b) Przykłady:

      i. Formuły powstałe z tautologii rachunku zdań przez zastąpienie zmiennych formami rachunku predykatów (X - zakres x)

         A. $\alpha \vee \neg\alpha \longrightarrow \forall_x \phi(x) \vee \neg \forall_x \phi(x)$

      ii. $\forall_x \forall_y \phi(x, y) \iff \forall_y \forall_x \phi(x, y)$

      iii. $\exists_x \exists_y \phi(x, y) \iff \exists_y \exists_x \phi(x, y)$ - ^ przemienność kwantyfikatorów tego samego rodzaju

      iv. $\exists_x \forall_y \phi(x, y) \implies \forall_y \exists_x \phi(x, y)$ - ale nie w drugą stronę

      Dowód: X, Y - zakres zmiennych x, y
      $x_0 \in X$ będzie takie, że $\forall_y \phi(x_0, y)$ jest prawdą
      Weźmy dowolne $y \in Y$. Prawdą jest, że dla tego y, $\phi(x_0, y)$ jest prawdą
      Zatem rzeczywiście $\forall_y \exists_x \phi(x, y)$

      Przykład: Przykład, że implikacja odwrotna nie zachodzi
      $X = Y = \mathbb{R}$
      $\phi(x, y) = (x > y)$
      $\exists_{x \in \mathbb{R}} \forall_{y \in \mathbb{R}} x > y$ - zdanie fałszywe
      $\forall_{y \in \mathbb{R}} \exists_{x \in \mathbb{R}} x > y$ - zdanie prawdziwe, więc
      $\forall_{y \in \mathbb{R}} \exists_{x \in \mathbb{R}} x > y \implies \exists_{x \in \mathbb{R}} \forall_{y \in \mathbb{R}} x > y$ jest fałszywe

      v. $\forall_x (\phi(x) \wedge \psi(x)) \iff \forall_x \phi(x) \wedge \forall_x \psi(x)$

      vi. $\exists_x (\phi(x) \vee \psi(x)) \iff \exists_x \phi(x) \vee \exists_x \psi(x)$ -forall-koniunkcja/ exists-alternatywa

      vii. $\exists_x (\phi(x) \wedge \psi(x)) \implies \exists_x \phi(x) \wedge \exists_x \psi(x)$

      viii. $\forall_x (\phi(x) \vee \psi(x)) \impliedby \forall_x \phi(x) \vee \forall_x \psi(x)$ - forall-alternatywa/ exists-koniunkcja

      ix. $\forall_x \phi(x) \implies \phi(x_0)$ gdzie $x_0 \in X$

      x. $\neg(\forall_x \phi(x)) \iff \exists_x \neg\phi(x)$

      xi. $\neg(\exists_x \phi(x)) \iff \forall_x \neg\phi(x)$

      xii. $(\forall_x (\phi(x) \implies \psi(x))) \implies ((\forall_x \phi(x)) \implies (\forall_x \psi(x)))$

      xiii. $\forall_x \phi(x) \vee \psi \iff (\forall_x \phi(x)) \vee \psi$- x nie jest zmienną wolną w ψ

      xiv. $\forall_x (\phi(x) \wedge \psi) \iff (\exists_x \phi(x)) \wedge \psi$

      xv. $(\phi \implies \forall_x \psi(x)) \iff \forall_x (\phi \implies \psi(x))$

      xvi. $(\phi \implies \exists_x \psi(x)) \iff \exists_x (\phi \implies \psi(x))$

      xvii. $((\forall_x \phi(x)) \implies \psi) \iff \exists_x (\phi(x) \implies \psi)$

D: $((\forall_x \psi(x)) \implies \phi) \iff \neg(\forall_x \psi(x)) \vee \phi \iff (\exists_x \neg\psi(x)) \vee \phi \iff \exists_x(\neg\psi(x) \vee \phi) \iff \exists_x(\psi(x) \implies \phi)$

xviii. $((\exists_x \phi(x)) \implies \psi) \iff \forall_x(\phi(x) \implies \psi)$

(c) Przykłady:

(vii) $\phi(x) = (x > 0), \psi(x) = (x < 0)$

: $\exists_x \phi(x) \wedge \exists_x \psi(x) \iff \exists_x x > 0 \wedge \exists_x x < 0$

: ^ fałsz - w (vii) implikacja odwrotna nie zachodzi

(viii) $\phi(x) = (x \geq 0)$, $\psi(x) = (x < 0)$

: $\forall_x(\phi(x) \vee \psi(x)) \iff \forall_x(x \geq 0 \vee x < 0)$ - prawda

(xii) $\phi(x) = (x > 0)$, $\psi(x) = (x > 1)$

: $\forall_x(\phi(x) \implies \psi(x)) \iff \forall_x(x > 0 \implies x > 1)$- działa, bo weźmy $x = \frac{1}{2}$

... W (viii) oraz (xii) implikacje odwrotne nie są tautologiami

9. Tautologia dla formuł z kwantyfikatorami:
   (a) Logika pierwszego rzędu ma inną definicję tautologii - dla wszystkich wartościowań zdanie jest prawdziwe
   (b) Dla rachunku predykatów tautologia jest formułą lub zdaniem - (formuła bez zmiennych wolnych),
      i. Zdanie jest tautologią jeśli jest prawdziwe w każdym modelu
   (c) W logice pierwszego rzędu też były modele, tylko nazywaliśmy je każdym możliwym wartościowaniem

10. $\forall_{x_{\alpha(x)}} \phi(x) \overset{def.}{=} \forall_x \alpha(x) \implies \phi(x)$

11. $\exists_{x_{\alpha(x)}} \phi(x) \overset{def.}{=} \exists_x \phi(x) \wedge \alpha(x)$

16.10.2019

1. Zbiory - aksjomatyczna teoria zbiorów.

   (a) Zbiór - pojęcie pierwotne (nie definiujemy go)

   (b) bycie elementem zbioru - pojęcie pierwotne

   (c) $A, B, C, \ldots X, \ldots$ - zbiory

   (d) $a \in A$ - a jest elementem zboiru A (a należy do A)

   (e) $a \notin A \iff \neg(a \in A)$ - a nie należy do A

   (f) **Aksjomat ekstencjonalności**

      i. Zbiory A i B są równe wtedy i tylko wtedy gdy mają te same elementy, czyli

      ii. $A = B \iff \forall_x (x \in A \iff x \in B)$

      iii. **Uwaga** - aby pokazać, że $A = B$ wystarczy udowodnić dwie implikacje $\forall_x (x \in A \implies x \in B) \wedge (x \in B \implies x \in A)$

   (g) **Aksjomat zbioru pustego**

      i. Istnieje zbiór pusty czyli taki, który nie ma żadnego elementów

      ii. $\emptyset-$zbiór pusty, $\forall_x x \notin \emptyset$

      iii. Twierdzenie - istnieje tylko jeden zbiór pusty

   D: A, B - zbiory puste, $\neg(A = B)$ czyli $A \neq B$

   : Z aksjomatu ekstencjonalności zbiory są rózne $\iff \exists_x \neg((x \in A \implies x \in B) \wedge (x \in B \implies x \in A)) \iff \exists_x \neg(x \in A \implies x \in B) \vee \neg(x \in B \implies x \in A) \iff$

   : $\iff \exists_x (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge a \notin B)$

   : $x \in A \wedge x \notin B$ zdanie fałszywe, bo A jest zbiorem pustym

   : $x \in B \wedge a \notin B$ zdanie fałszywe, bo B jest zbiorem pustym

   : Sprzeczność - istnieje tylko jeden zbiór pusty

   (h) **Aksjomat wyróżniania**

      i. Jeśli A jest zbiorem, a $\phi(x)$ funkcją zdaniową o zakresie A ($x \in A$), to istnieje zbiór $\{x : x \in A \wedge \phi(x)\} = \{x \in A : \phi(x)\}$

   : Czyli $a \in \{x \in A : \phi(x)\} \iff a \in A \wedge \phi(x)$

   (i) **Uwaga:** nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów

   D: V- zbiór wszystkich zbiorów

   : $A = \{X \in V : X \notin X\}$ - zbiór na mocy aksjomatu wyróżnienia

   : $A \in A \implies A \notin A$ - sprzeczność. Stąd $A \notin A \implies \neg\phi(A) \iff \neg(A \notin A) \implies A \in A$ - też sprzeczność

   : Stąd nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów

   (j) **Antynomia (paradoks) Russella**

   : $Z = \{X : X \notin X\}$.Czy $Z \in Z$?

   : $Z \in Z = \{X : X \notin X\} \iff Z \notin Z$ - sprzeczność

   (k) Sposoby definiowania zbiorów

      i. $A = \{1, 3, \sqrt{2}\}$,$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

      ii. $\phi(x)$ - funkcja zdaniowa - $A = \{x : \phi(x)\}$ - na przyklad $P = \{x :$ x jest liczbą parzystą$\}$

         A. $a \in \{x : \phi(x)\} \iff \phi(a)$

   (l) **Def.** Zbiór A zawiera się w zbiorze B (A jest podzbiorem B) wtedy i tylko wtedy gdy każdy element z A jest elementem B

   : $A \subseteq B \iff \forall_x (x \in A \implies x \in B)$

   (m) **Def.** A jest właściwym podzbiorem B jeśli $A \subseteq B \wedge A \neq B$ (oznaczenie $A \subsetneq B$)

   (n) **Proste własności**

      i. $A = A$

      ii. $(A = B \wedge B = C) \implies A = C$

      iii. $A = B \iff B = A$

      iv. $A \subseteq A$

      v. $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \implies A \subseteq C$

      D: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C$ (Z)

: $A \subseteq C$?

: $x \in A \implies {}^{?} x \in C$

: $x \in A \implies x \in B \implies x \in C$ - z Z

vi. $A = B \iff A \subseteq B \land B \subseteq A$

(o) **Aksjomat sumy**

i. Jeśli A i B są zbiorami, to istnieje zbiór $A \cup B = \{x : x \in A \lor x \in B\}$

(p) **Def.** Iloczyn (przecięcie) zbiorów to zbiór $A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$ (jest to zbiór na mocy aksjomatu wyróżniania)

(q) **Def.** Różnica zbiorów A i B to zbiór $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$

(r) **Prawa rachunku zbiorów** - A, B, C - zbiory

i. $A \cup B = B \cup A$

ii. $A \cap B = B \cap A$

iii. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

iv. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B)$∩C

v. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

vi. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

D: Trzeba pokazać, że implikacje zachodzą w obie strony. Aksjomat sumy, definicja iloczynu, rachunek zdań, aksjomat sumy

vii. $A \cap B \subseteq A$

viii. $A \subseteq A \cup B$

ix. $A \cap A = A = A \cup A$

2. $A \div B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

23.10.2019
X - zbiór (przestrzeń)

1. Def. Dopełnieniem zbioru A w przestrzeni X nazywamy zbiór $-A = \{x \in X : x \notin A\}$ - na mocy aksjomatu wyróżniania
   (a) Własności dopełnienia:
      i. $-(A \cup B) = -A \cap -B$
      D: $x \in -(A \cap B) \overset{\text{def. dopełnienia}}{\iff} x \notin (A \cap B) \overset{\text{def.} \notin}{\iff} \neg x \in A \cap B \overset{\text{def. iloczynu}}{\iff} \neg(x \in A \wedge x \in B) \overset{\text{prawo de Morgana}}{\iff} /$
      $\iff x \notin A \vee x \notin B \iff x \in -A \cup -B$
      ii. $-(A \cap B) = -A \cup -B$
      iii. $\emptyset \subseteq A$
      iv. $A \cup \emptyset = A$
      v. $A \cap \emptyset = \emptyset$
      vi. $A \setminus \emptyset = A$
      vii. $\emptyset \setminus A = \emptyset$
      viii. $-\emptyset = X$
      ix. $-X = \emptyset$
      x. $A \cup -A = X$
      xi. $A \cap -A = \emptyset$
      xii. $-(-A) = A$
      xiii. $A \setminus B = A \cap -B$
      xiv. $A \cap X = A$
      xv. $A \cup X = X$
      xvi. $A \subseteq B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B$
      xvii. $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \iff A \cup B \subseteq C$
      xviii. $C \subseteq A \wedge C \subseteq B \iff C \subseteq A \cap B$
   (b) Przykład:
      i. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
      ii. $\emptyset \in \{\emptyset\}$
      iii. $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$
      iv. $\{\emptyset\} \notin \{\emptyset\}$
      v. $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
   (c) $\emptyset$ - jedyny element zbioru $\{\emptyset\}$,ale $\emptyset \neq \{\emptyset\}$

2. **Aksjomat zbioru potegowego:** Dla każdego zbioru istnieje zbiór (potegowy) wszystkich jego podzbiorów.
   A - zbiór, $P(A)$ (lub 2^A) - zbiór potęgowy
   $P(A) = \{B : B \subseteq A\}$
   $\emptyset, A \in P(A)$ zawsze
   (a) Przykład: $A = \{a, b\}$, $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

3. **Aksjomat pary nieuporządkowanej:** Dla dowolnych zbiorów A i B istnieje zbiór, którego elementami są dokładnie zbiory A oraz B
   $\{A, B\} = \{x : x = A \vee x = B\}$
   $\{A\} = \{A, A\}$ - Singleton, zbiór 1-elementowy
   (a) Def. **Parą uporządkowaną** $< a, b >$ nazywamy zbiór $\{\{a\}, \{a, b\}\}$
      i. $< a, a >= \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$
   (b) Twierdzenie: $< a, b >=< c, d > \iff a = c \wedge b = d$
      i. $\Longleftarrow$: $a = c \wedge b = d$, więc $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ więc $< a, b >=< c, d >$
      ii. $\Longrightarrow$: Dla $a = b$, $< a, b >= \{\{a\}\}, < c, d >= \{\{c\}, \{c, d\}\}$ więc $\{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ tylko gdy $c = d$, a wtedy $\{\{a\}\} = \{\{c\}\}$, więc z tego wynika że $a = c \wedge b = d$
      Dla $a \neq b$: $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ tylko gdy $(\{a\} = \{c\} \vee \{a\} = \{c, d\}) \wedge (\{a, b\} = \{c, d\} \vee \{a, b\} = \{d\})$.
      Ponieważ $\{a, b\}$ oraz $\{c, d\}$ są dwuelementowe, bo $a \neq b$, to $\{a\} = \{c\} \wedge \{a, b\} = \{c, d\}$ z czego $a = b$ oraz $c = d$
      iii. Implikacja zachodzi w dwie strony, więc jest równoważność

4. Def. **Iloczynem kartezjańskim** zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \times B = \{< a, b >: a \in A \wedge b \in B\}$

(a) Przykłady

i. $\{1,2\} \times \{3,4\} = \{<1,3>, <1,4>, <2,3>, <2,4>\}$

ii. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ - płaszczyzna $\mathbb{R}^2$

iii. $[1,3] \times [1,2]$ - prostokąt o wierzchołkach $<1,1>, <1,2>, <3,1>, <3,2>$

5. Def. **Uporządkowaną trójką** $<a,b,c>$nazywamy zbiór $<<a,b>,c>$

6. Def. **Uporządkowaną n-tką** $<x_1,\ldots,x_n>$nazywamy zbiór $<<x_1,\ldots,x_{n-1}>,x_n>$

   (a) Twierdzenie: Dla $n \geq 2$, $<x_1,\ldots,x_n>=<y_1,\ldots,y_n> \iff \forall_{i\in\{1,\ldots,n\}} x_i = y_i$

   i. Dowód indukcyjny: Dla $n=2$ prawda
   Założenie indukcyjne: $<x_1,\ldots,x_{n-1}>=<y_1,\ldots,y_{n-1}> \iff \forall_{i\in\{1,\ldots,n-1\}} x_i = y_i$.
   $a=<x_1,\ldots,x_{n-1}>, b=<y_1,\ldots,y_{n-1}>$.
   Wtedy z definicji uporządkowanej n-tki $<x_1,\ldots,x_n>=<a,x_n>$,oraz $<y_1,\ldots,y_n>=<b,y_n>$
   Z tego, że dla $n=2$, to $<a,x_n>=<b,y_n> \iff a=b \wedge x_n = y_n$
   Z założenia indukcyjnego, $a=b \iff \forall_{i\in\{1,\ldots,n-1\}} x_i = y_i$, więc $<a,x_n>=<b,y_n> \iff \forall_{i\in\{1,\ldots,n\}} x_i = y_i$ co kończy dowód.

7. **Aksjomat sumy zbiorów rodziny:** $\mathcal{A}-$rodzina zbiorów - zbiór którego elementami są zbiory

   (a) Dla dowolnej rodziny zbiorów $\mathcal{A}$ istnieje zbiór:
   $\bigcup \mathcal{A} := \{x : \exists_A (A \in \mathcal{A} \wedge x \in A)\}$
   do którego należą te elementy, które należa do co najmniej jednego zbioru rodziny $\mathcal{A}$

   (b) Iloczynem (przecięciem) rodziny zbiorów $\mathcal{A}$ nazywamy zbiór
   $\bigcap \mathcal{A} := \{x \in \bigcup \mathcal{A} : \forall_A (A \in \mathcal{A} \implies x \in A)\}$
   Istnieje na mocy aksjomatu wyróżniania i aksjomatu sumy rodziny zbiorów

8. I - zbiór indeksów, $X-$zbiór przestrzeni
   Def. Funkcję $A : I \to P(X)$ i $\mapsto A(i) \subseteq X$ nazywamy **indeksowaną rodziną zbiorów** (będziemy pisać A_i zamiast $A(i)$)

   (a) R - zbiór wartości funkcji A
   $R = \{B \in P(X) : \exists_{i\in I} B = A(I)\} = \{A_i : i \in I\}$

9. Def. **Sumą indeksowanej rodziny zbiorów** $A : I \to P(X)$ nazywamy sumę rodziny R, czyli $\bigcup R = \bigcup \{A_i : i \in I\}$
   Oznaczenie $\bigcup_{i\in I} A_i$
   $x \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff \exists_{i\in I} x \in A_i$

10. Def. Iloczynem rodziny indeksowanej $A : I \to P(X)$ nazywamy zbiór $\bigcap R = \bigcap \{A_i : i \in I\}$
   Oznaczamy $\bigcap_{i\in I} A_i$,
   $x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff \forall_{i\in I} x \in A_i$

30.10.2019

1. Własności dla X - przestrzeń, $A: I \to P(X)$, $B: I \to P(X)$,$C-$zbiór

   (a) Jeśli $i_0 \in I$, to $A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$

   (b) Jeśli $i_0 \in I$, to $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_{i_0}$

   (c) Jeżeli $\forall_{i\in I} A_i \subseteq C$,to $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq C$

   (d) Jeżeli $\forall_{i\in I} C \subseteq A_i$,to $C \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$

      i. D: Niech $x \in C \implies \forall_{i\in I} x \in A_i \implies x \in \bigcap_{i\in I} A_i$

   (e) $\bigcup_{i\in I}(A_i \cup B_i) = (\bigcup_{i\in I} A_i) \cup (\bigcup_{i\in I} B_i)$

   (f) $\bigcap_{i\in I}(A_i \cap B_i) \subseteq (\bigcap_{i\in I} A_i) \cap (\bigcap_{i\in I} B_i)$

      i. D:$x \in \bigcap_{i\in I}(A_i \cap B_i) \iff \forall_{i\in I} x \in A_i \cap B_i \iff \forall_{i\in I}(x \in A \wedge x \in B) \iff (x \in \bigcap_{i\in I} A_i) \wedge (x \in \bigcap_{i\in I} B_i) \iff x \in (\bigcap_{i\in I} A_i \cap \bigcap_{i\in I} B_i)$

   (g) $\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_i) \subseteq (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{i\in I} B_i)$

      i. D:$x \in \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_i) \implies \exists_{i\in I} x \in A_i \cap B_i \implies \exists_{i\in I}(x \in A_i \wedge x \in B_i) \implies (\exists_{i\in I} a \in A_i) \wedge (\exists_{i\in I} x \in B_i) \implies x \in \bigcup_{i\in I} A_i \wedge x \in \bigcup_{i\in I} B_i \implies x \in (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{i\in I} B_i)$

   (h) $(\bigcap_{i\in I} A_i) \cup (\bigcap_{i\in I} B_I) \subseteq \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B_i)$, Inkluzja przeciwna nie zachodzi

   (i) $-\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} -A_i$

      i. D: $x \in -\bigcup_{i\in I} A_i \iff x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \iff \neg(x \in \bigcup_{i\in I} A_i) \iff \neg(\exists_{i\in I} x \in A_i) \iff \forall_{i\in I} \neg(x \in A_i) \iff x \in \bigcap_{i\in I} -A_i$

   (j) $-\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} -A$

   (k) Jeżeli $\forall_{i\in I} A_i \subseteq B_i$to $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$ oraz $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap_{i\in I} B_i$

   (l) $\bigcup_{i\in I}(C \cap A_i) = C \cap \bigcup_{i\in I} A_i$

      i. D: $x \in \bigcup_{i\in I}(C \cap A_i) \iff \exists_{i\in I} x \in C \cap A_i \iff \exists_{i\in I}(x \in C \wedge x \in A_i) \iff x \in C \wedge \exists_{i\in I} x \in A_i \iff x \in C \wedge x \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff x \in C \cap \bigcup_{i\in I} A_i$

   (m) $\bigcap_{i\in I}(C \cup A_i) = C \cup (\bigcap_{i\in I} A_i)$

   (n) Jeżeli $J \subseteq I$ to $\bigcup_{j\in J} A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ oraz $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap_{j\in J} A_j$

      i. D: $x \in \bigcap_{i\in I} A_i \implies \forall_{i\in I} x \in A_i \implies \forall_{j\in J} x \in A_j \implies x \in \bigcap_{j\in J} A_j$

   (o) $\bigcup_{i\in\emptyset} A_i = \emptyset$

      i. D: Przypuśćmy, że istnieje $x \in \bigcup_{i\in\emptyset} A_i$, to $\exists_{i\in\emptyset} x \in A_i \iff \exists_i i \in \emptyset \wedge x \in A_i$, ale $i \in \emptyset$ to zdanie fałszywe stąd sprzeczność

   (p) $\bigcap_{i\in\emptyset} A_i = X$
   D: $x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff \forall_{i\in\emptyset} x \in A_i \iff \forall_i i \in \emptyset \implies x \in A_i \iff x \in X$

2. Indeksowanie dwoma indeksami I, J - zbiory indeksów$C: I \times J \to P(X), (i,j) \mapsto c_{ij} = C(i,j)$
   $x \in \bigcup_{j\in J} \bigcap_{i\in I} C_{ij} \iff \exists_{j\in J} x \in \bigcap_{i\in I} C_{ij} \iff \exists_{j\in J} \forall_{i\in I} x \in C_{ij}$
   Analogicznie definiujemy $\bigcap_{j\in J} \bigcup_{i\in I} C_{ij}$ oraz $\bigcup_{j\in J} \bigcup_{i\in I} C_{ij}$ oraz$\bigcap_{j\in J} \bigcap_{i\in I} C_{ij}$
   Własności: $C: I \times J \to P(X)$

   (a) $\bigcup_{j\in J} \bigcup_{i\in I} C_{ij} = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in J} C_{ij} \overset{\text{def.}}{=} \bigcup_{\substack{i\in I \\ j\in J}} C_{ij}$

   (b) $\bigcap_{j\in J} \bigcap_{i\in I} C_{ij} = \bigcap_{i\in I} \bigcap_{j\in J} C_{ij} \overset{\text{def.}}{=} \bigcap_{\substack{i\in I \\ j\in J}} C_{ij}$

   (c) $\bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in J} C_{ij} \subsetneqq \bigcap_{j\in J} \bigcup_{i\in I} C_{ij}$

      i. $x \in \bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in J} C_{ij} \iff \exists_{i\in I} \forall_{j\in J} x \in C_{ij} \implies \forall_{j\in J} \exists_{i\in I} x \in C_{ij} \iff x \in \bigcap_{j\in J} \bigcup_{i\in I} C_{ij}$

3. Nieskończone rodziny indeksowane. $I = J = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}^2$

   (a) Dla każdego $a, b \in \mathbb{R}$, niech $C_{ab} = \{< x, y > \in \mathbb{R}^2 : y \leq ax + b\}$
   $\underline{\bigcup_{a\in\mathbb{R}} C_{ab} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times (b, +\infty)}$
   $\bigcup_{b\in\mathbb{R}} C_{ab} = \mathbb{R}^2$
   $\bigcap_{a\in\mathbb{R}} C_{ab} = \{0\} \times (-\infty, b)$
   $\bigcap_{b\in\mathbb{R}} C_{ab} = \emptyset$
   $\bigcap_{b\in\mathbb{R}} \bigcup_{a\in\mathbb{R}} C_{ab} = \bigcap_{b\in\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times (b, +\infty)) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$
   $\bigcup_{b\in\mathbb{R}} \bigcap_{a\in\mathbb{R}} C_{ab} = \bigcup_{b\in\mathbb{R}}(\{0\} \times (-\infty, b)) = \{0\} \times \mathbb{R}$

Relacje

1. X, Y - zbiory
Def: **Relacją dwuargumentową** nazywamy podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$
Zamiast $< x, y > \in R$ piszemy $x\,R\,y$

2. Def: $R \subseteq X \times Y$
Zbiór $D_R = \{x \in X : \exists_{y \in Y} < x, y > \in R\}$ nazywammy dziedziną relacji R
Na przykład $R = \{< x, y > \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ to koło

3. Jeśli $X = Y$, to mówimy, że relacja $R \subseteq X^2$ jest **określona** na zbiorze X

4. Relacja R jest **pusta** jeśli jest zbiorem pustym
pełna, jeśli $R = X \times Y$

5. Def: Relacja **odwrotna** do relacji $R \subseteq X \times Y$ to relacja $R^{-1} = \{< y, x > \in Y \times X : < x, y > \in R\}$

6. Def: **Złożeniem** relacji $R \subseteq X \times Y$ oraz relacji $S \subseteq Y \times Z$ nazywamy relację $S \circ R = \{< x, z > \in X \times Z : \exists_{y \in Y} < x, y > \in \mathbb{R} \wedge < y, z > \in S\}$

7. Def:
   (a) R jest **zwrotna**, jeśli $\forall_{x \in X} x\,R\,x$
   (b) R jest **symetryczna**, jeśli $\forall_{x,y \in X} x\,R\,y \implies y\,R\,x$
   (c) R jest **przechodnia**, jeśli $\forall_{x,y,z, \in X} (x\,R\,y \wedge y\,R\,z) \implies x\,R\,z$
   (d) R jest **antysymetryczna**, jeśli $\forall_{x,y \in X} (x\,R\,y \wedge y\,R\,x) \implies x = y$
   (e) R jest **przeciwzwrotna**, jeśli $\forall_{x \in X} \neg(x\,R\,x)$
   (f) R jest **przeciwsymetryczna**, jeśli $\forall_{x,y \in X} x\,R\,y \implies \neg(y\,R\,x)$
   (g) R jest **spójna**, jeśli $\forall_{x,y \in X} x\,R\,y \wedge y\,R\,x \vee x = y$

8. Def: Relację $R \subseteq X^2$nazywamy relację **równoważności** jeśli R jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, na przykład
Relacja równości
Relacja równoległości
Relacja pełna $R = X^2$dla dowolnego zbioru x
Relacja $\equiv_n$ - przystawanie modulo
Relacja $R \subseteq \mathbb{R}^2$, $x\,R\,y \iff \exists_{q \in \mathbb{Q}} x + q = y$
Relacja dla par wektorów R taka że $< a, b > R < c, d >$ gdy $b - a = d - c$
Relacja $\iff$, relacja $a\,R\,b := a \implies b \wedge b \implies a$

9. Def: Niech $\sim \subseteq X \times X$ będzie relacją równoważności i $a \in X$
Zbiór $[a]_\sim = \{x \in X : x \sim a\}$ nazywamy klasą **abstrakcji (równoważności)** dla elementu a
Element a nazywamy reprezentantem klasy abstrakcji $[a]_\sim$

10. Własności klas abstrakcji
    (a) $\forall_{a \in X} a \in [a]_\sim$
    (b) $\forall_{a,b \in X} b \in [a]_\sim \implies a \in [b]_\sim$
    (c) $\forall_{a,b \in X} [a]_\sim = [b]_\sim \iff a \sim b$
    (d) $\forall_{a,b \in X} ([a]_\sim = [b]_\sim) \vee [a]_\sim \cap [b]_\sim = \emptyset$
    (e) $\bigcup_{a \in X} [a]_\sim = X$

11. **Podziałem zbioru** X nazywamy rodzinę $\{A_i : i \in I\}$ taką, że
$\forall_{i \in I} A_i \neq \emptyset$
$\forall_{i,j \in I} (i \neq j \implies A_j \cap A_i = \emptyset)$
$\bigcup_{i \in I} A_i = X$
    (a) Wniosek : Rodzina klas abstrakcji relacji równoważności $\sim \subseteq X^2$ jest podziałem x

12. Def: $\sim$- relacja równoważności na X
Zbiór klas abstrakcji relacji $\sim$ nazywamy **zbiorem ilorazowym** i oznaczamy $X_{/\sim}$

13. Twierdzenie: Niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie podziałem zbioru X. Wtedy istineje relacja równoważności $\sim$ na X taka, że $X_{/\sim} = \{A_i : i \in I\}$

Funkcje

1. Def: **Relację** $R \subseteq X \times Y$ nazywamy **funkcją**, jeśli $\forall_{x \in X} \forall_{y_1, y_2 \in Y} xRy_1 \wedge xRy_2 \implies y_1 = y_2$
   Gdy relacja jest funkcją często zamiasy xRy piszemy $y = R(x)$. Element x nazywamy **argumentem funkcji** R, zaś y **wartością R dla argumentu** x
2. Def: Zbiór $D_r = \{x \in X : \exists_{y \in Y} R(x) = y\}$ nazywamy **dziedziną** funkcji R. Jeśli $D_R = X$, to oznaczamy $R : X \to Y$
3. Def: Jeśli przeciwdziedzina jest równa zbiorowi wartosci, to mówimy, że funkcja jest "na", lub że jest **surjekcją**
4. Twiedzenie - Złożenie dwóch funkcji jest funkcją
5. Uwaga: Relacja odwrotna do funkcji nie musi być funkcją
6. Def: Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy **różnowartościową**, lub **iniekcją**, jeśli $\forall_{x_1, x_2 \in X} x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$
7. Twierdzenie: Jeśli $f : X \to Y$jest iniekcją to jej relacja odwrotna jest funkcją
8. Uwaga: Jeśli funkcja f jest **na** zbiór Y, to piszemy $f^{-1} : Y \to X$
9. Twierdzenie: Niech $f : X \to Y$ oraz $f^{-1} : Y \to X$. Wtedy $f \circ f^{-1} = id_Y = \{(y, y) : y \in Y\}$, $f^{-1} \circ f = id_X = \{(x, x) : x \in X\}$
10. Funkcja która jest iniekcją i surjekcją nazywamy **bijekcją**
11. Niech $f : X \to Y$ oraz $Z \subseteq X$. Funkcję $g = f_{/Z} = f \cap Z \times Y$ nazywamy obcięciem funkcji f do zbioru Z
12. Niech $f_i : X_i \to Y$ dla $i \in I$ oraz dla każdego $i \neq j \in I$ $X_i \cap X_j = \emptyset$.Wtedy $f = f_1 \cup \cdots \cup f_n$ jest funkcją i $f : \bigcap_{i \in I} X_i \to Y$
13. Niech X, Y, Z, T - zbiory oraz $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ $h : Z \to T$ - funkcje
    (a) $f : X \overset{1-1}{\to} Y, g : Y \overset{1-1}{\to} Z \implies g \circ f : X \overset{1-1}{\to} Z$ - $(1 - 1)$ - różnowartościowe
    (b) $f : X \overset{na}{\to} Y, g : Y \overset{na}{\to} Z \implies g \circ f : X \overset{na}{\to} Z$
    (c) $f : X \overset{bijekcja}{\to} Y, g : Y \overset{bijekcja}{\to} Z \implies g \circ f : X \overset{bijekcja}{\to} Z$
    (d) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
    (e) Składanie funkcji nie jest przemienne
    (f) $f \circ id_x = f$, $id_y \circ f = f$
    (g) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
14. Def: Niech $f : X \to Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Zbiór $f[A] = \{y \in Y : \exists_{x \in A} y = f(x)\} = \{f(x) : x \in A\} \subseteq Y$ nazywamy **obrazem** zbioru A funkcji f
    Zbiór $f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$ nazywamy **przeciwobrazem** funkcji f
15. Twierdzenie: $f : X \to Y$ $A_1, A_2 \subseteq X$ $A : I \to P(X)$ (rodzina indeksowana). Wtedy:
    (a) $f[\emptyset] = \emptyset$
    (b) $A_1 \subseteq A_2 \implies f[A_1] \subseteq f[A_2]$
    (c) $f[\bigcup_{i \in I} A_i] = \bigcup_{i \in I} f[A_i]$
    (d) $f[\bigcap_{i \in I} A_i] \subseteq \bigcap_{i \in I} f[A_i]$
    (e) Jeśli f jest iniekcją to we własności (d) mamy równość
16. Twierdzenie: $f : X \to Y, B_1, B_2 \subseteq Y$, $B : I \to P(Y)$ (rodzina indeksowana). Wtedy:
    (a) $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$
    (b) $B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}[B_1] \subseteq f^{-1}[B_2\}$
    (c) $f^{-1}[\bigcup_{i \in I} B_i] = \bigcup_{i \in I} f^{-1}[B_i]$
    (d) $f^{-1}[\bigcap_{i \in I} B_i] = \bigcap_{i \in I} f^{-1}[B_i]$
17. Twierdzenie: $f : X \to Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$
    (a) $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$
    (b) $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$
    (c) Jeśli f jest iniekcją to w 1 zachodzi równość
    (d) Jeśli f jest surjekcją to w 2 zachodzi równość 2

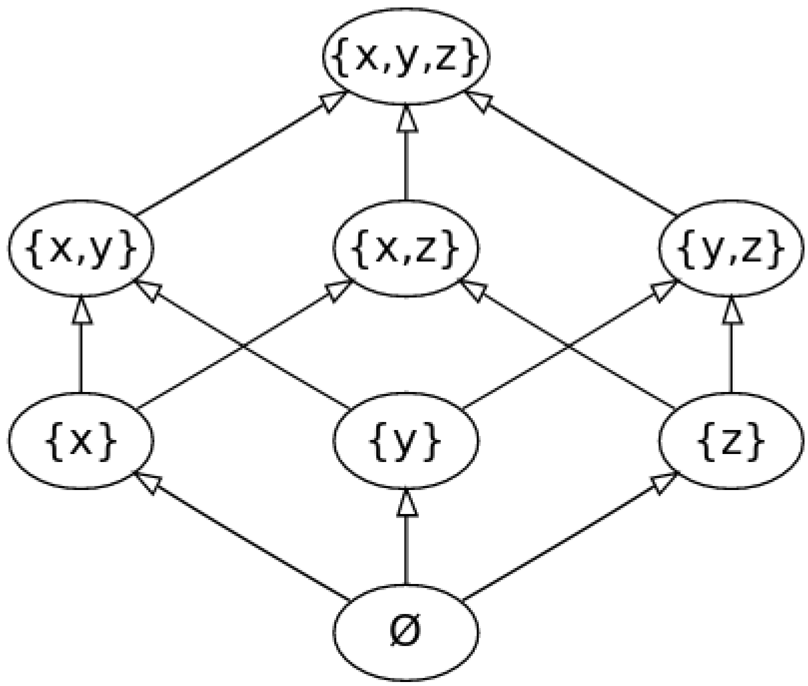
Zbiory częściowo uporządkowane

1. Def: Relację $R \subseteq X \times X$ $(X \neq \emptyset)$ nazywamy **relacją częściowego porządku** ,jeśli R jest zwrotna, przechodnia i antysymetryczna.

2. **Zbiór częściowo uporządkowany** jest to para (X, R) gdzie X jest niepustym zbiorem a $R \subseteq X^2$ jest relacją częściowego porządku
   Przykłady:

   (a) $(\mathbb{R}, \leq), (P(X), \subseteq)$ dla niepustego X
   (b) $(\mathbb{N}, |)$ $a|b$ - a jest podzielne przez b
   (c) $(\mathbb{R}^X, \preceq)$ - $\mathbb{R}^X = \{f : f : X \to \mathbb{R}\}, f \preceq g \iff \forall_{x \in X} f(x) \leq g(x)$
   (d) $(\mathbb{R}^2, \preceq)$ - $\forall_{x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}} (x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2$
   (e) $(P, \preceq)$ - zbiór częściowo uporządkowany
   Definiujemy relację $\prec \subseteq P \times P$ i $\prec_\bullet \subseteq P \times P$ następująco
   $x \prec y \iff x \preceq y \wedge x \neq y$
   $x \prec_\bullet y \iff x \prec y \wedge \neg(\exists_{z \in P} x \prec z \prec y)$
   Jeśli $x \prec_\bullet y$ to mówimy, że **x jest poprzednikiem y**, oraz **y jest następnikiem x**
   Na przykład $(\mathbb{N}, \leq), n \in \mathbb{N}, n <_\bullet n + 1$

3. Def: **Diagramem Hassego** zbioru częsciowo uporządkowanego $(P, \preceq)$ nazywamy graf, którego wierzchołakmi są elementy zbioru P. Jeśli dla $x, y \in P$ zachodzi $x \prec y$, to x rysujemy niżej niż y. Ponadto dwa wierzchołki $x, y \in P$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy $x <_\bullet y$



4. Def: Niech $(P, \preceq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym
   Element $a \in p$ nazywamy:

   (a) **maksymalnym**, jeśli $\neg(\exists_{x \in P} a \prec x)$
   (b) **minimalnym**, jeśli $\neg(\exists_{x \in P} x \prec a)$
   (c) **największym**, jeśli $\forall_{x \in P} x \preceq a$
   (d) **najmniejszym**, jeśli $\forall_{x \in P} a \preceq x$
   (e) Maksymalne elementy to wierzchołki diagramu Hassego bez połączeń z góry
   Minimalne - wierzchołki bez połączeń w dół
   Największy $\implies$ jedyny element maksymalny (równoważność dla skończonych zbiorów)
   Najmniejszy $\implies$ jedyny element minimalny
   (f) Dowód (e): a - element najmniejszy. Pokażemy, że a jest minimalny. Załóżmy, że a nie jest minimalny. Stąd $\exists_{y \in P} y \prec a$. Wtedy nieprawdą jest, że $\forall_{x \in \mathbb{R}} a \preceq x$ (bo $y \prec a$)
   Załóżmy, że w P jest inny element $b \neq a$, który jest minimalny. a- najmniejszy, $\begin{cases} a \preceq b \\ a \neq b \end{cases} \implies a \prec b \implies \exists_{x \in P} x \prec b \implies b$ nie jest minimalny

(g) W $(P, \preceq)$ istnieje co najwyżej jeden element najmniejszy
D(nie wprost): a, b elemeny najmniejsze, $a \neq b$
$$\begin{cases} \forall_{x \in P} a \preceq x \implies a \preceq b \\ \forall_{x \in P} b \preceq x \implies b \preceq a \end{cases} \quad a \neq b, \text{ sprzeczność}$$

5. Def: $(P, \preceq)$ - zbiór częściowo uporządkowany, $X \subseteq P$
Element $a \in P$ jest **ograniczeniem górnym** zbioru X, jeśli $\forall_{x \in X} x \preceq a$
Element $a \in P$ jest **ograniczeniem dolnym** zbioru X, jeśli $\forall_{x \in X} a \preceq x$
$X^* \stackrel{\text{def.}}{=} \{a \in P : \forall_{x \in X} x \preceq a\}$ - zbiór wszystkich ograniczeń górnych zbioru X
$X_* \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in P : \forall_{x \in X} a \preceq X\}$ - zbiór wszystkich ograniczeń dolnych zbioru X

6. Def: $(P, \preceq)$ - zbiór częsciowo uporządkoany, $X \subseteq P$
Element $a \in P$ jest **kresem górnym** zbioru X jeśli jest najmniejszym ograniczeniem górnym dla X (tzn. jest elementem najmniejszym w X^*)
Oznaczenie: $\sup X$
Element $a \in P$ jest **kresem dolnym** zbioru X jeśli jest największym ograniczeniem dolnemy dla X (tzn. jest elementem największym w X_*)
Oznaczenie: $\inf X$

7. Zbiór częściowo uporządkowany $(P, \preceq)$ jest **kratą**, jeśli $\forall_{x,y \in P} \sup\{x, y\}$ i $\forall_{x,y \in P} \inf\{x, y\}$ istnieją

Zbiory częściowo uporządkowane

$(P, \preceq), x, y, \in P$, x, y są porównywalne jeśli $x \preceq y$ lub $y \preceq x$, nieporównywalne jeśli $\neg$porównywalne, $(x \parallel y)$

1. **Łańcuchem** w zbiorze częściowo uporządkowanym jest każdy podzbiór parami porównywalnych elementów

2. **Antyłańcuchem** jest każdy podzbiór parami nieporównywalnych elementów

3. Twierdzenie(Lemat Kuratowskiego- Zorna):
   Jeśli w zbiorze częściowo uporządkowanym każdy łańcuch ma ograniczenie górne (dolne), to na $(P, \preceq)$ istnieje element maksymalny (minimalny)

   Wniosek: W dowolnym zbiorze częściowo uporządkowanym każdy łańcuch można rozszerzyć do łańuccha maksymalnego (w sensie inkluzji)
   Dowód: $(P, \preceq)$ - zbiór częsciowo uporządkowany. C_0-łańcuch w $(P, \preceq)$, $\mathcal{P}$ - zbiór łańcuchów w $(P, \preceq)$ rozszerzających C_0
   $(\mathcal{P}, \subseteq)$ - zbiór częsciowo uporządkowany
   $\mathcal{C}$ - łańcuch w $(\mathcal{P}, \subseteq)$
   Skoro $\mathcal{C}$ jest łańcuchem,to $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, więc $C_1 \subseteq C_2$ lub $C_2 \subseteq C_1$.
   $\bigcup \mathcal{C} = \{x \in P : \exists_{c \in \mathcal{C}} x \in C\} = \{x \in P : \exists_c c \in \mathcal{C} \wedge x \in C\}$ Powiemy, że $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{P}$ i że $\bigcup \mathcal{C}$ jest ograniczeniem górnym dla zbioru $\mathcal{C}$
   $x, y \in \mathcal{C} \implies \exists_{C_1 \in \mathcal{C}} x \in C_1 \wedge \exists_{C2 \in \mathcal{C}} y \in C_2$. $C_1 \subseteq C_2$ lub $C_2 \subseteq C_2$ ponieważ $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$
   Stąd $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{P}$.
   $\forall_{C \in \mathcal{C}} c \subseteq \bigcup \mathcal{C} = \bigcup_{C \in \mathcal{C}}$
   Stąd $\bigcup \mathcal{C}$ jest ograniczeniem górnym zbioru $\mathcal{C}$ w $(\mathcal{P}, \subseteq)$. Stosujemy Lemat Kuratowskiego-Zorna dla $(\mathcal{P}, \subseteq)$
   W zbiorze $(\mathcal{P}, \subseteq)$ istnieje element maksymalny, czyli maksymalny w sensie inkluzji łańcuch w $(P, \preceq)$ rozszerzający C_0

4. **def:** Zbiór częściowo uporządkowany $(P, \preceq)$ jest **liniowo uporządkowany**, jeśli $\forall_{x,y \in P} x \preceq y$ lub $y \preceq x$

5. **def:** Zbiór liniowo uporządkowany jest dobrze uporządkowany jeśli w każdym niepustym jego podzbiorze jest element najmniejszy

Konstrukcja von Neumanna liczb naturalnych.

Definicja 1 $0 := \emptyset$ - *liczba naturalna zero.*
Jeżeli n jest liczbą naturalną, to następną po niej jest liczba

$$n' := \{n\} \cup n.$$

Istnienie liczb naturalnych gwarantują: Aksjomat zbioru pustego, Aksjomat pary nieuporządkowanej oraz Aksjomat sumy.

Przykład 2 $1 := 0' = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$
$2 := 1' = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$3 := 2' = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Uwaga 1 *$n \in n'$ oraz $n \subseteq n'$.*

Aksjomat nieskończoności. Istnieje zbiór X (tzw. zbiór *induktywny*) taki, że:

1. $\emptyset \in X$,
2. $\forall y\ (y \in X \Rightarrow y \cup \{y\} \in X)$.

Aksjomat nieskończoności gwarantuje istnienie zbioru $\mathbb{N}$ wszystkich liczb naturalnych.
Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ jest najmniejszym (ze względu na inkluzję) zbiorem induktywnym.

Fakt 3 $\forall x\ x \in \mathbb{N} \Rightarrow (x = \emptyset\ \vee\ \exists y\ (y \in \mathbb{N} \wedge y' = x))$.

Twierdzenie 4 (O indukcji matematycznej.)
Dla dowolnego zbioru P, jeśli

- $P \subseteq \mathbb{N}$
- $\emptyset \in P$
- $\forall n\ n \in P \Rightarrow n' \in P$

to $P = \mathbb{N}$.

Fakt 5 *Dla dowolnej liczby naturalnej n i dowolnego zbioru Y:*

$$Y \in n\ \Rightarrow Y\ \subseteq n.$$

Własności liczb naturalnych. Niech $n, m \in \mathbb{N}$. Wtedy

1. $m' = n'\ \Rightarrow\ m = n$
2. $m \subseteq n\ \wedge\ m \neq n\ \Rightarrow\ m \in n$
3. $m \subseteq n\ \vee\ n \subseteq m$

4. $m \in n$ albo $m = n$ albo $n \in m$

Porządek w zbiorze liczb naturalnych. Niech $k, n, m \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$m \leqslant n \overset{def}{\Leftrightarrow} m \subseteq n$$
$$m < n \overset{def}{\Leftrightarrow} m \in n.$$

Własności relacji $\leqslant$ oraz $<$. Niech $k, n, m \in \mathbb{N}$. Wtedy

1. $m < n \;\Rightarrow\; m \leqslant n$
2. $(m \leqslant n \;\wedge\; m \neq n) \;\Rightarrow\; m < n$
3. $m \leqslant n \;\vee\; n \leqslant m$
4. $m < n$ albo $m = n$ albo $n < m$
5. $m = n \;\Leftrightarrow\; (m \leqslant n \;\wedge\; n \leqslant m)$
6. $\sim (n < n)$
7. $k \leqslant m \;\wedge\; m \leqslant n \;\Rightarrow\; k \leqslant n$
8. $k < m \;\wedge\; m \leqslant n \;\Rightarrow\; k < n$
9. $k \leqslant m \;\wedge\; m < n \;\Rightarrow\; k < n$
10. $k < m \;\wedge\; m < n \;\Rightarrow\; k < n$

Działania w zbiorze liczb naturalnych.

Definicja 6 *Funkcję* $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *zdefiniowaną następująco*

$$+(0, m) \overset{ozn}{=} 0 + m := m$$
$$+(n', m) \overset{ozn}{=} n' + m := (n + m)'$$

nazywamy dodawaniem liczb naturalnych.

Definicja 7 *Funkcję* $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *zdefiniowaną następująco*

$$\cdot(0, m) \overset{ozn}{=} 0 \cdot m := 0$$
$$\cdot(n', m) \overset{ozn}{=} n' \cdot m := (n \cdot m) + m$$

nazywamy mnożeniem liczb naturalnych.

Własności działań w zbiorze liczb naturalnych. Niech $k, n, m \in \mathbb{N}$. Wtedy

1. $k + (m + n) = (k + m) + n$
2. $n + 0 = n$
3. $k' + m = k + m'$
4. $k + m = m + k$
5. $k \cdot 1 = k$
6. $k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$
7. $k \cdot (m \cdot n) = (k \cdot m) \cdot n$
8. $k \cdot 0 = 0$
9. $k \cdot m = m \cdot k$
10. $k + n = k + m \;\Rightarrow\; n = m$

Konstrukcja zbioru liczb całkowitych.
Niech $\sim \subseteq \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$ będzie relacją określoną następująco:

$$(p, q) \sim (k, l) \;\Leftrightarrow\; p + l = q + k.$$

$\sim$ jest relacją równoważności.

Definicja 8 *Zbiorem liczb całkowitych nazywamy zbiór ilorazowy relacji* $\sim$*:*

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N}/_{\sim}.$$

Przykład 9 *Niech* $n \in \mathbb{N}$*.*
$[(0,0)]_{\sim} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + 0 = y + 0\} = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{N}\}$
$[(n,0)]_{\sim} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + 0 = y + n\} = \{(y + n, y) \mid y \in \mathbb{N}\}$
$[(0,n)]_{\sim} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + n = y + 0\} = \{(x, x + n) \mid x \in \mathbb{N}\}$

Działania w zbiorze liczb całkowitych. Niech $(p, q), (k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \text{Dodawanie}: &\quad [(p,q)]_{\sim} \oplus [(k,l)]_{\sim} := [(p+k, q+l)]_{\sim} \\ \text{Mnożenie}: &\quad [(p,q)]_{\sim} \odot [(k,l)]_{\sim} := [(pk+ql, qk+pl)]_{\sim} \\ \text{Odejmowanie}: &\quad [(p,q)]_{\sim} \ominus [(k,l)]_{\sim} := [(p+l, q+k)]_{\sim} \end{aligned}$$

Twierdzenie 10 *Działania dodawania, mnożenia oraz odejmowania zdefiniowane w zbiorze liczb całkowitych są dobrze określone (tzn. klasy będące wynikiem działań nie zależą od wyboru reprezentantów).*

Dowód (dla działania dodawania i mnożenia):
Dowód poprawności definicji polega na wykazaniu, że wynik działania nie zależy od wyboru reprezentantów klas na których wykonujemy działanie. Dla dodawania oznacza to, że jeśli $[(p,q)]_\sim = [(s,t)]_\sim$ i $[(k,l)]_\sim = [(a,b)]_\sim$ to $[(p,q)]_\sim \oplus [(k,l)]_\sim = [(s,t)]_\sim \oplus [(a,b)]_\sim$.
Równoważnie, jeśli $(p,q) \sim (s,t)$ i $(k,l) \sim (a,b)$ to $(p+k, q+l) \sim (s+a, t+b)$.
Z definicji relacji założenie jest równoważne warunkowi: $p+t = s+q$ i $k+b = a+l$. Dodając stronami otrzymujemy $p+k+t+b = q+l+s+a$, co oznacza, że $(p+k, q+l) \sim (s+a, t+b)$.
Podobnie, aby udowodnić poprawność definicji mnożenia wystarczy wykazać, że jeśli $(p,q) \sim (s,t)$ i $(k,l) \sim (a,b)$ to $(pk+ql, qk+pl) \sim (sa+tb, sb+at)$.
Z definicji relacji założenie jest równoważne warunkowi: $p+t = s+q$ i $k+b = a+l$. Mnożymy pierwsze równanie przez k, drugie przez s, następnie pierwsze zapisane w odwrotnej kolejności mnożymy przez l a drugie (również w odwróconej kolejności) przez t. Dodając wszystkie cztery równania stronami otrzymujemy:
$pk+tk+sk+sb+ta+tl+sl+ql = sk+kq+sa+sl+tk+tb+pl+lt$. Po zredukowaniu mamy $pk+ql+sb+at = sa+tb+qk+pl$, co po skorzystaniu z definicji relacji $\sim$ kończy dowód.

Uwaga 2 *Dla dowolnych* $p, q \in \mathbb{N}$,
$[(p,q)]_\sim \oplus [(q,p)]_\sim = [(p+q, q+p)]_\sim = [(0,0)]_\sim$.
W szczególności, $[(p,0)]_\sim \oplus [(0,p)]_\sim = [(0,0)]_\sim$.

Własności działań w zbiorze liczb całkowitych. Niech $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Wtedy

1. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$
2. $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$
3. $x \oplus y = y \oplus x$
4. $x \odot y = y \odot x$
5. $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$

Porządek w zbiorze liczb całkowitych. Niech $k, n, p, q \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$[(p,q)]_\sim \preceq [(k,n)]_\sim \;\Leftrightarrow\; p+n \leqslant q+k.$$

Uwaga 3 *Zbiór* $(\mathbb{Z}, \preceq)$ *jest uporządkowany liniowo. Ponadto, dla* $n \in \mathbb{N}$

$$[(0,0)]_\sim \preceq [(n,0)]_\sim$$
$$[(0,n)]_\sim \preceq [(0,0)]_\sim$$

Funkcja $i : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto [(n,0)]_\sim$ jest naturalnym włożeniem zbioru liczb naturalnych w zbiór liczb całkowitych. Dla $n, m \in \mathbb{N}$

$$i(n+m) = i(n) \oplus i(m)$$
$$i(n \cdot m) = i(n) \odot i(m)$$
$$i(n) \preceq i(m) \;\Leftrightarrow\; n \leqslant m$$

Dzięki temu możemy utożsamiać liczbę całkowitą $[(n,0)]_\sim = i(n)$ z odpowiadającą jej liczbą naturalną n oraz liczbę $-n := [(0,n)]_\sim$ z liczbą przeciwną do $[(n,0)]_\sim$.
Przy takich oznaczeniach

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Konstrukcja zbioru liczb wymiernych.
Niech $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ i niech $\varrho \subseteq (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)$ będzie relacją określoną następująco:

$$(p,q)\varrho(k,l) \;\Leftrightarrow\; pl = qk.$$

ϱ jest relacją równoważności.

Definicja 11 *Zbiorem liczb wymiernych nazywamy zbiór ilorazowy relacji ϱ:*

$$\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\varrho.$$

Klasę pary $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ będziemy oznaczać jako ułamek $\frac{p}{q} := [(p,q)]_\varrho$.

Przykład 12 *Niech $p \in \mathbb{Z}$.*
$\frac{0}{1} = [(0,1)]_\varrho = \{(k,l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid k \cdot 1 = l \cdot 0\} = \{(0,l) \mid l \in \mathbb{Z}^*\}$
$\frac{1}{1} = [(1,1)]_\varrho = \{(k,l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid k \cdot 1 = l \cdot 1\} = \{(k,k) \mid k \in \mathbb{Z}^*\}$
$\frac{p}{1} = [(p,1)]_\varrho = \{(k,l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid k \cdot 1 = p \cdot l\} = \{(pl,l) \mid l \in \mathbb{Z}^*\}$

Działania w zbiorze liczb wymiernych. Niech $p,k \in \mathbb{Z}$, $q,l \in \mathbb{Z}^*$:

$$\begin{aligned}
\text{Dodawanie :} \quad & \frac{p}{q} \oplus \frac{k}{l} := \frac{pl+kq}{ql} \\
\text{Odejmowanie :} \quad & \frac{p}{q} \ominus \frac{k}{l} := \frac{pl-kq}{ql} \\
\text{Mnożenie :} \quad & \frac{p}{q} \odot \frac{k}{l} := \frac{pk}{ql} \\
\text{Dzielenie :} \quad & \frac{p}{q} \oslash \frac{k}{l} := \frac{pl}{kq}, \text{ dla } \frac{k}{l} \neq \frac{0}{1}
\end{aligned}$$

Twierdzenie 13 *Działania dodawania, mnożenia, odejmowania oraz dzielenia zdefiniowane w zbiorze liczb wymiernych są dobrze określone (tzn. klasy będące wynikiem działań nie zależą od wyboru reprezentantów).*

Uwaga 4 *Dla $p \in \mathbb{Z}$ i $q \in \mathbb{Z}^*$*

$$\frac{p}{1} \oslash \frac{q}{1} = \frac{p \cdot 1}{q \cdot 1} = \frac{p \cdot 1}{1 \cdot q} = \frac{p}{1} \odot \frac{1}{q} = \frac{p}{q}.$$

Porządek w zbiorze liczb wymiernych. Niech $p,k \in \mathbb{Z}$, $q,l \in \mathbb{Z}^*$. Wtedy

$$\frac{p}{q} \preceq \frac{k}{l} \;\Leftrightarrow\; pl \leqslant kq \;\wedge\; q,l > 0.$$

Funkcja $j : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $k \mapsto [(k,1)]_\varrho = \frac{k}{1}$ jest naturalnym włożeniem zbioru liczb całkowitych w zbiór liczb wymiernych. Dla $k, l \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} j(k+l) &= j(k) \oplus j(l) \\ j(k \cdot l) &= j(k) \odot j(l) \\ k \leqslant l \;\Rightarrow\; j(k) &\preceq j(l) \end{aligned}$$

Dzięki temu możemy utożsamiać liczbę wymierną $\frac{k}{1} = [(k,1)]_\varrho = j(k)$ z odpowiadającą jej liczbą całkowitą k oraz liczbę $l^{-1} := \frac{1}{l}$, dla $l \in \mathbb{Z}^*$, z liczbą odwrotną do $\frac{l}{1}$. Przy takich oznaczeniach

$$\mathbb{Q} := \{pq^{-1} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*\}.$$

Twierdzenie 14 *Relacja $\preceq$ jest gęstym porządkiem liniowym zbioru $\mathbb{Q}$.*