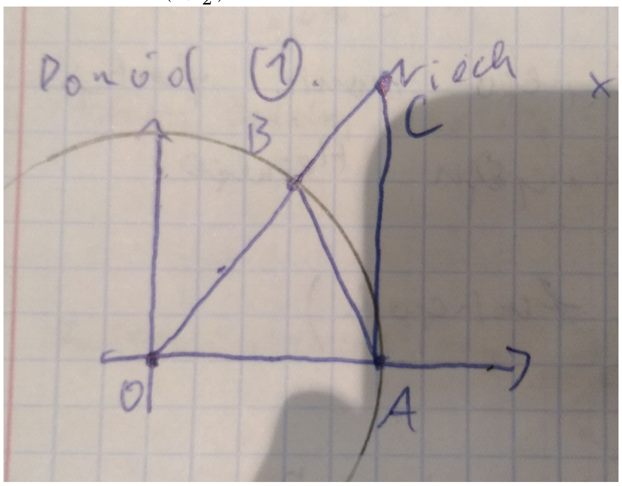
30.10.2019

1. Twierdzenie 4.6: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$-(a) oraz $\forall_{x\in\mathbb{R}}|\sin x|\leq|x|$ - (b)

   (a) D: Niech $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

   $P_{\triangle AOB}<P_{wycinekkołaAOB}<P_{\triangle OAC}$
   $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin x<\frac{x}{2\pi}\pi\cdot 1^2<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x$
   $\sin x<x<\frac{\sin x}{\cos x}$
   Dla $x\in(0,\frac{\pi}{2})$,mamy $\frac{\sin x}{x}<1$ oraz - $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$
   Dla $-x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ mamy $\cos(-x)<\frac{\sin(-x)}{-x}<1$
   Dla $y\in(-\frac{\pi}{2},0)$ mamy $\cos y<\frac{\sin y}{y}<1$
   Stąd $\forall_{x\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})}\cos x<\frac{\sin x}{x}<1\overset{\text{tw. o 3 funkcjach}}{\Longrightarrow}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, bo $\lim_{x\to 0}\cos(x)=1$

   (b) D: Weźmy,że $\forall_{x\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})}|\frac{\sin x}{x}|<1$ z czego $\forall_{x\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})}|\sin x|<|x|$,
   Dla $x=0$, $|\sin x|=0\leq|x|$
   Dla x takich, że $|x|\geq\frac{\pi}{2}$ mamy $|\sin x|\leq 1<\frac{\pi}{2}\leq|x|$
   Z wszystkich poprzednich $\implies\forall_{x\in\mathbb{R}}|\sin x|\leq|x|$

5. **Granice jednostronne, asymptopty i ciągłość funkcji**

1. Przez cały wykład zakładamy,ż że $f:D\to\mathbb{R}$ gdzie $D\subset\mathbb{R}$

   (a) $y=\sqrt{x}$ - granicę w zerze możemy liczyć tylko z prawej strony.

   (b) $y=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ 1 & x<0\end{cases}$ $\lim_{x\to 0}f(x)$ nie istnieje. Ale możemy rozważać granicę lewostronną $\lim_{x\to 0^-}f(x)$ i granicę prawostronną $\lim_{x\to 0^+}$

2. Def. (Heinego granic jednostronnych)

   (a) Niech $a\in\mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru $D\cap(-\infty,a)$ i niech $g\in\widetilde{\mathbb{R}}$. Wtedy g jest granicą lewostronną funkcji f w punkcie a (co zapisujemy $\lim_{x\to a^-}f(x)=g$ lub $f(x)\overset{x\to a^-}{\longrightarrow}g$ lub $f(a^-)=g$)
   $\iff\forall_{\{x_n\}\subset D\cap(-\infty,a)}\lim_{n\to\infty}x_n=a\implies\lim_{n\to\infty}f(x_n)=g$

   (b) Niech $a\in\mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru $D\cap(a,+\infty)$ i niech $g\in\widetilde{\mathbb{R}}$. Wtedy g jest granicą prawostronną funkcji f w punkcie a (co zapisujemy $\lim_{x\to a^+}f(x)=g$ lub $f(x)\overset{x\to a^+}{\longrightarrow}g$ ub $f(a^+)=g$)
   $\iff\forall_{\{x_n\}\subset D\cap(a,+\infty)}\lim_{n\to\infty}x_n=a\implies\lim_{n\to\infty}f(x_n)=g$

3. Twierdzenie 5.1 (def. Cauchy'ego granic jednostronnych funkcji) - podkreślone to zmiana od definicji zwykłej granicy

   (a) Niech $a\in\mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru $D\cap(-\infty,a)$
      i. Jesli $g\in\mathbb{R}$ to $\lim_{x\to a^-}f(x)=g\iff\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}\underline{-\delta<x-a<0}\implies|f(x)-g|<\epsilon$
      ii. Jeśli $g=+\infty\lim_{x\to a^-}f(x)=+\infty\iff\forall_{G>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}\underline{-\delta<x-a<0}\implies f(x)>G$
      iii. Jeśli $g=-\infty\lim_{x\to a^-}f(x)=-\infty\iff\forall_{G>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}\underline{-\delta<x-a<0}\implies f(x)<-G$

   (b) Niech $a\in\mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru $D\cap(a,+\infty)$
      i. Jesli $g\in\mathbb{R}$ to $\lim_{x\to a^-}f(x)=g\iff\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}\underline{0<x-a<\delta}\implies|f(x)-g|<\epsilon$
      ii. Jeśli $g=+\infty\lim_{x\to a^-}f(x)=+\infty\iff\forall_{G>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}\underline{0<x-a<\delta}\implies|f(x)-g|>G$
      iii. Jeśli $g=-\infty\lim_{x\to a^-}f(x)=-\infty\iff\forall_{G>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}\underline{0<x-a<\delta}\implies|f(x)-g|<-G$