

23.10.2019

Granica górna i dolna ciągu

- Def. Mówimy, że $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$ jeśli istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}$ ciągu $\{a_n\}$ taki, że $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = g$

(a) Przykład: Wyznaczamy punkt skupienia ciągu $a_n = \sqrt{\frac{1+4n}{2+n}} \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

$$b_n = \sqrt{\frac{1+4n}{2+n}}, c_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sqrt{4} = 2 \text{ bo } s_n \rightarrow s \implies (s_n)^q \rightarrow s^q$$

pierwsze wyrazy $\{c_n\}$ - $c_1 = -1, c_2 = -1, c_3 = 1$ - może się powtarzać?

$$c_{4k} = (-1)^{2k(4k+1)} = 1, c_{4k+1} = (-1)^{\frac{(4k+1)(4k+2)}{2}} = (-1)^{(4k+1)(2k+1)} = -1,$$

$$c_{4k+2} = (-1)^{\frac{(4k+2)(4k+3)}{2}} = (-1)^{(2k+1)(4k+3)} = -1, c_{4k+3} = (-1)^{\frac{(4k+3)(4k+4)}{2}} = (-1)^{(4k+3)(2k+2)} = 1$$

$$\text{a więc } a_{4k} = b_{4k} c_{4k} = b_{4k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 2$$

$$a_{4k+1} = b_{4k+1} c_{4k+1} = b_{4k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -2$$

$$a_{4k+2} = b_{4k+2} c_{4k+2} = b_{4k+2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -2$$

$$a_{4k+3} = b_{4k+3} c_{4k+3} = b_{4k+3} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 2$$

Więc punkty skupienia ciągu $\{a_n\}$ to -2 i 2

- Def. Granicą dolną ciągu $\{a_n\}$, oznaczaną $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ lub $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ nazywamy kres dolny zbioru wszystkich punktów skupienia ciągu $\{a_n\}$:

$$\liminf_{a \rightarrow \infty} = \inf\{g : \exists_{\{a_{n_k}\}} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = g\}$$

- Def. Granicą górną ciągu $\{a_n\}$, oznaczaną $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ lub $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ nazywamy kres górny zbioru wszystkich punktów skupienia ciągu $\{a_n\}$:

$$\limsup_{a \rightarrow \infty} = \sup\{g : \exists_{\{a_{n_k}\}} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = g\}$$

(a) Wtedy, dla $a_n = \sqrt{\frac{1+4n}{2+n}} \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$: $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -2$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

- Twierdzenie 2.16: Dla dowolnego $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \iff \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = g$$

GRANICA FUNKCJI

Przez cały wykład będziemy zakładać, że $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}$. Ponadto, $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

- Def. Mówimy, że $a \in \tilde{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru D jeśli istnieje ciąg $\{a_n\}$ taki, że $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \in D \setminus \{a\}$ (inaczej $\{a_n\} \subset D \setminus \{a\}$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$)

(a) Przykłady:

i. $\{0\} \cup [1, 2)$ - punkty skupienia - $[1, 2]$

ii. \mathbb{N} - punkt skupienia $\{+\infty\}$

iii. \mathbb{Z} - punkty skupienia $\{-\infty, +\infty\}$

iv. $\{1, 2, 3\}$ - nie ma punktów skupienia

Ogólniej, dowolny zbiór skończony nie ma punktów skupienia

v. \mathbb{R} - punkty skupienia - $\tilde{\mathbb{R}}$

- Def. (Heinego granicy funkcji): Niech $a \in \tilde{\mathbb{R}}$ będzie punktem skupienia zbioru D i $g \in \tilde{\mathbb{R}}$. Mówimy, że g jest granicą funkcji f w punkcie a (jeśli $a \in \mathbb{R}$) lub w $\pm\infty$ (jeśli $a = \pm\infty$) i zapisujemy

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g \text{ lub } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} g \iff \forall_{\{a_n\} \subset D \setminus \{a\}} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = g \text{ - (H)}$$

(a) Przykład $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 1 \\ 1 & \text{dla } x \neq 1 \end{cases}$ - $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = 1$. W szczególności $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ nie zależy od wartości funkcji w punkcie $x_0 = 1$

- Twierdzenie 4.1: Granica funkcji jest wyznaczona jednoznacznie, tzn. jeśli $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g_1$ oraz $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g_2$, to $g_1 = g_2$

(a) Dowód: Zakładamy, że $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g_1$ i $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g_2$

$$\forall_{\{a_n\} \subset D \setminus \{a\}} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = g_1$$

Weźmy dowolny ciąg $\{a_n\} \subset D \setminus \{a\}$ taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = g_1$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = g_2$

Z tw 2.2, otrzymujemy, że $g_1 = g_2$

(b) Przykłady:

- i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{2x-1}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \propto k$
 Weźmy ciąg $\{a_n\} \subset D \setminus \{-\infty\} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$. Wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \frac{|a_n|}{a_n} \stackrel{a_n \leq 0}{=} -\frac{a_n}{2a_n} = -\frac{1}{2}$, więc $\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\frac{1}{2}$
- ii. Granica $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ nie istnieje. Weźmy dwa ciągi, $\{a_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}, \{x_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takie, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$
 $a_n = \frac{1}{2n\pi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Wtedy:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi) = 0$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$
 Granica musi być jednoznaczna - więc $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ nie istnieje

4. Def. (Cauchy'ego granicy skończonej (właściwej) funkcji w punkcie): Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D i niech $g \in \mathbb{R}$. Wtedy:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \ 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x)-g| < \epsilon - \textbf{(C)}$$

Dla x bliskich a i różnych od a odległość $f(x)$ od g jest dowolnie mała.

5. Twierdzenie 4.2 : Definicje Cauchy'ego i Heinego granicy właściwej funkcji w punkcie są równoważne.

- (a) Dowód: (H) \implies (C) Dowód nie wprost. Zakładamy, że (H) i \neg (C)
 $\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D \ 0 < |x-a| < \delta \wedge |f(x)-g| \geq \epsilon \neg$ (C)
 W szczególności dla $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy $\exists \epsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in D \ 0 < |x_n-a| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n)-g| \geq \epsilon$
 Z tw. o trzech ciągach $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n-a| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n-a) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$
 Pokazaliśmy, że $\exists \epsilon > 0 \exists \{x_n\} \subset D \setminus \{a\} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \wedge \forall n \in \mathbb{N} |f(x_n)-g| \geq \epsilon$
 $\exists \{x_n\} \subset D \setminus \{a\} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq g \iff \neg$ (H) - sprzeczność z zał. że zachodzi (H)
- (b) (C) \implies (H): Zakładamy, że zachodzi (C), tzn $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \ 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x)-g| < \epsilon$
 Chcemy pokazać, że (H), czyli $\forall \{a_n\} \subset D \setminus \{a\} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = g$
 $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 |f(a_n)-g| < \epsilon$
 Weźmy dowolny ciąg $\{a_n\} \subset D \setminus \{a\}$ taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i weźmy dowolny $\epsilon > 0$. Wtedy
 $\exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_1 0 < |a_n-a| < \delta \stackrel{(C)}{\implies} |f(a_n)-g| < \epsilon$
- (c) Zatem pokazaliśmy $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 |f(a_n)-g| < \epsilon$ ($n_0 = n_1$)

6. Def. Cauchy'ego niewłaściwych granic funkcji w punkcie: Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru D

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \iff \forall G > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \ 0 < |x-a| < \delta \implies f(x) > G$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \iff \forall G > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \ 0 < |x-a| < \delta \implies f(x) < -G$$

7. Def. Cauchy'ego właściwej granicy w $\pm\infty$: Niech $\pm\infty$ będzie punktem skupienia zbioru D i $g \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g \iff \forall \epsilon > 0 \exists G > 0 \forall x \in D \ x > G \implies |f(x)-g| < \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g \iff \forall \epsilon > 0 \exists G > 0 \forall x \in D \ x < -G \implies |f(x)-g| < \epsilon$$

8. Def Cauchy'ego niewłaściwych granic funkcji w $\pm\infty$: Niech $\pm\infty$ będzie punktem skupienia zbioru D

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall G > 0 \exists L > 0 \forall x \in D \ x > L \implies f(x) > G$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall G > 0 \exists L > 0 \forall x \in D \ x > L \implies f(x) < -G$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall G > 0 \exists L > 0 \forall x \in D \ x < -L \implies f(x) > G$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall G > 0 \exists L > 0 \forall x \in D \ x < -L \implies f(x) < -G$$

9. Twierdzenie 4.3: Powyższe dwie definicje Cauchy'ego granic funkcji są równoważne odpowiednim definicjom Heinego

10. Twierdzenie 4.4: (tw. o trzech funkcjach): Jeśli:

- (a) $f, p, h : D \rightarrow \mathbb{R}$
- (b) $a \in \tilde{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia D
- (c) $g \in \mathbb{R}$ i $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = g$
- (d) $\forall x \in D$ i x bliskiego a $f(x) \leq p(x) \leq h(x)$

To $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = g$ - (dowód z def Heinego i tw o trzech ciągach)

11. Twierdzenie 4.5 (tw o dwóch funkcjach): Jeśli:

- (a) $f, h : D \rightarrow \mathbb{R}$
- (b) $a \in \tilde{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia D

(c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (ewentualnie $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = -\infty$)

(d) $\forall x \in D$ i x bliskie a $f(x) \leq h(x)$

To $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = +\infty$ (ewentualnie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$)

(a) Przykład: $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x}$

$$0 \leq |x \cdot \sin \frac{1}{x}| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \text{ dla } x \neq 0$$

$$\text{tw.o 3 funkcjach} \implies \lim_{x \rightarrow 0} |x \cdot \sin \frac{1}{x}| = 0 \iff \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$$