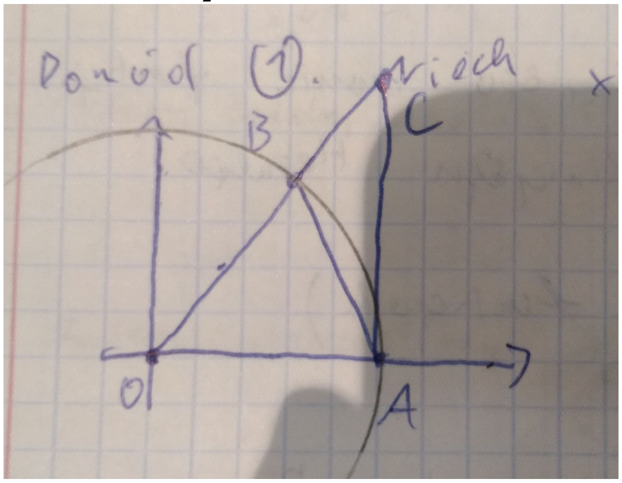
30.10.2019

1. Twierdzenie 4.6: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$-(a) oraz $\forall_{x\in\mathbb{R}}|\sin x| \leq |x|$ - (b)

   (a) D: Niech $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

   $P_{\triangle AOB} < P_{wycinekkołaAOB} < P_{\triangle OAC}$
   $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin x < \frac{x}{2\pi}\pi \cdot 1^2 < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x$
   $\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$
   Dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$,mamy $\frac{\sin x}{x} < 1$ oraz - $\cos x <\frac{\sin x}{x} < 1$
   Dla $-x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ mamy $\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1$
   Dla $y \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ mamy $\cos y < \frac{\sin y}{y} < 1$
   Stąd $\forall_{x\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})} \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \overset{\text{tw. o 3 funkcjach}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, bo $\lim_{x\to 0}\cos(x) = 1$

   (b) D: Weźmy,że $\forall_{x\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})}|\frac{\sin x}{x}| < 1$ z czego $\forall_{x\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})}|\sin x| < |x|$,
   Dla $x = 0$, $|\sin x| = 0 \leq |x|$
   Dla x takich, że $|x| \geq \frac{\pi}{2}$ mamy $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|$
   Z wszystkich poprzednich $\implies \forall_{x\in\mathbb{R}}|\sin x| \leq |x|$

5. Granice jednostronne, asymptopty i ciągłość funkcji

1. Przez cały wykład zakładamy,ż że $f : D \to \mathbb{R}$ gdzie $D \subset \mathbb{R}$

   (a) $y = \sqrt{x}$ - granicę w zerze możemy liczyć tylko z prawej strony.

   (b) $y = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$ $\lim_{x\to 0} f(x)$ nie istnieje. Ale możemy rozważać granicę lewostronną $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ i granicę prawostronną $\lim_{x\to 0^+}$

2. Def. (Heinego granic jednostronnych)

   (a) Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru $D \cap (-\infty, a)$ i niech $g \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Wtedy g jest granicą lewostronną funkcji f w punkcie a (co zapisujemy $\lim_{x\to a^-} f(x) = g$ lub $f(x) \overset{x\to a^-}{\longrightarrow} g$ lub $f(a^-) = g$)
   $\iff \forall_{\{x_n\}\subset D\cap(-\infty,a)} \lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$

   (b) Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru $D \cap (a, +\infty)$ i niech $g \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Wtedy g jest granicą prawostronną funkcji f w punkcie a (co zapisujemy $\lim_{x\to a^+} f(x) = g$ lub $f(x) \overset{x\to a^+}{\longrightarrow} g$ ub $f(a^+) = g$)
   $\iff \forall_{\{x_n\}\subset D\cap(a,+\infty)} \lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$

3. Twierdzenie 5.1 (def. Cauchy'ego granic jednostronnych funkcji) - podkreślone to zmiana od definicji zwykłej granicy

   (a) Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru $D \cap (-\infty, a)$

      i. Jesli $g \in \mathbb{R}$ to $\lim_{x\to a^-} f(x) = g \iff \forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}\underline{-\delta < x - a < 0} \implies |f(x) - g| < \epsilon$
      ii. Jeśli $g = +\infty \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \iff \forall_{G>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}\underline{-\delta < x - a < 0} \implies f(x) > G$
      iii. Jeśli $g = -\infty \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \iff \forall_{G>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}\underline{-\delta < x - a < 0} \implies f(x) < -G$

   (b) Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru $D \cap (a, +\infty)$

      i. Jesli $g \in \mathbb{R}$ to $\lim_{x\to a^-} f(x) = g \iff \forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}\underline{0 < x - a < \delta} \implies |f(x) - g| < \epsilon$
      ii. Jeśli $g = +\infty \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \iff \forall_{G>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}\underline{0 < x - a < \delta} \implies f(x) > G$

iii. Jeśli $g = -\infty \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \iff \forall_{G>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}\underline{0 < x-a < \delta} \implies f(x) < -G$

4. Twierdzenie 5.2: Jeśli $a \in \mathbb{R}$ jest punktem skupienia $D \cap (-\infty, a)$ i $D \cap (a, +\infty)$ oraz $g \in \widetilde{\mathbb{R}}$, to $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = g$
   (a) $[\frac{1}{0^+}] = +\infty, [\frac{1}{0^-}] = -\infty$

5. Asymptoty
   (a) Def. Prosta $x = a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ jest
      i. Asymptotą pionową lewostronną (wykresu) funkcji $y = f(x) \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$
      ii. Asymptotą pionową prawostronną (wykresu) funkcji $y = f(x) \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$
      iii. Asymptotą pionową obustronną gdy jest asymptotą pionową lewostronną i prawostronną
   (b) Def. Prosta $y = b$, gdzie $b \in \mathbb{R}$ jest
      i. Asymptotą poziomą lewostronną (wykresu) funkcji $y = f(x) \iff \lim_{x\to -\infty} f(x) = g$
      ii. Asymptotą poziomą prawostronną (wykresu) funkcji $y = f(x) \iff \lim_{x\to +\infty} f(x) = g$
      iii. Asymptotą poziomą obustronną gdy jest asymptotą poziomą ^lewostronną i prawostronną
   (c) Def. Prosta $y = mx + k$, gdzie $m, k \in \mathbb{R}$ jest
      i. Asymptotą ukośną lewostronną (wykresu) funkcji $y = f(x) \iff \lim_{x\to -\infty}[f(x) - (mx + k)] = 0$
      ii. Asymptotą ukośną prawostronną (wykresu) funkcji $y = f(x) \iff \lim_{x\to +\infty}[f(x) - (mx + k)] = 0$
      iii. Asymptotą ukośną obustronną gdy jest asymptotą poziomą lewostronną i prawostronną
      iv. Twierdzenie 5.3: Prosta $y = mx + k$, gdzie $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $k \in \mathbb{R}$ jest asymptotą ukośną prawo/lewostronnną $\iff m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \wedge k = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - mx]$ - (dowód na ćwiczeniach)
         A. Przykład: Wyznaczmy asymptoty funkcji $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
         $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = [\frac{1}{0^-}] = -\infty, \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = [\frac{1}{0^+}] = +\infty$, Więc $x = 0$ to asymptota pionowa obustronna
         $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = -1, \lim_{x\to +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = 1$ - asymptota pozioma lewostronna to $y = -1$, prawostronna $y = 1$
         Brak asymptot ukośnych, bo są asymptoty poziome

6. Ciągłość
   (a) Przypomnienie: $\lim_{x\to a} f(x) = g \overset{(H)}{\iff} \forall_{\{x_n\}\subset D\setminus\{a\}} \lim_{x\to\infty} x_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g \overset{(C)}{\iff} \forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D} 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - g| < \epsilon$
   (b) Def. (Heinego ciągłości funkcji w punkcie):
   Funkcja f jest ciągła w punkcie <u>a∈D (musi być w dziedzinie)</u> $\iff \forall_{\{x_n\}\subset D} \lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ - **(CH)**
      i. W przypadku funkcji ciągłej f mamy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$, tzn. z granicą można wejść pod symbol funkcji.
      ii. Uwaga: Jeśli $a \in D$ nie jest punktem skupienia zbioru D, to
      $\underbrace{\forall_{\{x_n\}\subset D} \lim_{n\to\infty} x_n = a}_{*} \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ - (*) jest spełnione jedynie przez ciągi $\{x_n\}$ takie, że dla wszystkich dalszych $n : x_n = a$
      $\implies$ dla wszystkich dużych n $f(x_n) = f(a) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$
      Zatem warunek (CH) jest spełniony i funkcja jest ciągła w a. Na przykład każda $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jest ciągła w każdym punkcie z $D = \mathbb{N}$, bo każdy taki punkt nie jest punktem skupienia dziedziny
   (c) Twierdzenie 5.4 (def. Cauchy'ego ciągłości funkcji w punkcie).
   Funkcja $f(x)$ jest ciągła w pkt. $a \in D \iff \forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$ - **(CC)**
      i. D (gdy a jest punktem skupienia zbioru D): Chcemy pokazać, że (CH) $\iff$ (CC)
      (CH) $\iff \forall_{\{x_n\}\subset D} \lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a) \iff \forall_{\{x_n\}\subset D\setminus\{a\}} \lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a) \iff \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \iff$
      $\iff \forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D} 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon \iff$ (CC)
      ii. Przy okazji udowodniliśmy nastepujące twierdzenie:
   (d) Twierdzenie 5.5: Jeśli $a \in D$ jest punktem skupienia zbioru D, to $f(x)$ jest ciagła w punkcie $a \iff \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
   (e) Def. Funkcja $f(x)$ jest ciągła $\iff$ $f(x)$ jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny, tzn.
   $\forall_{a\in D}\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon \iff f(x)$ jest ciągła w a
   Przykłady:

i. Funkcja stała $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ gdzie $c \in \mathbb{R}$
$\forall_{a \in D} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies |c - c| = 0 < \epsilon$ więc jest ciagła

ii. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ jest ciągła:
$\forall_{a \in D} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies |x - a| < \epsilon$, co zachodzi dla $\delta = \epsilon$

iii. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ jest ciągła:
$\forall_{a \in D} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies ||x| - |a|| \leq |x - a| < \epsilon$,co zachodzi dla $\delta = \epsilon$

iv. $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + b}{2}$ - przydatne do nastepnego
$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha - b}{2}$
$\sin \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + b}{2}$
$\sin \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + b}{2}$

v. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = \sin(x)$,$g(x) = \cos(x)$ są ciągłe, bo:
$\forall_{a \in D} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies |\sin x - \sin a| = 2 |\sin \frac{x-a}{2}| \cdot |\cos \frac{x+a}{2}| \leq 2 \cdot |\frac{x-a}{2}| \cdot |1| \leq |x - a| < \epsilon \ (\delta = \epsilon)$
$\forall_{a \in D} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies |\cos x - \cos a| = 2 |\sin \frac{x-a}{2}| \cdot |\sin \frac{x+a}{2}| \leq 2 \cdot |\frac{x-a}{2}| \cdot |1| \leq |x - a| < \epsilon \ (\delta = \epsilon)$