8. Pochoda funkcji jednej zmiennej

1. Def. Punkt a jest punktem wewnętrznym zbioru $D \subset \mathbb{R} \iff \exists_{\delta>0}(a-\delta, a+\delta) \subset D$
   Przez cały wykład będziemy zakładać, że (o ile nie będzie powiedziane inaczej)
   $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ i x_0 jest punktem wewnętrzym zbioru D

2. Def. Jeśli istnieje skończona granica $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, - (tzw. iloraz różnicowy) to nazywamy ją pochodną funkcji f w punkcie x_0i oznaczamy $f'(x_0)$ lub $\frac{df}{dx}(x_0)$
   Wtedy funkcję f nazywamy różniczkowalną w punkcie x_0

3. **Interpretacja geometryczna pochodnej**
   Wartość pochodnej $f'(x_0)$ to nachylenie prostej stycznej do wykresu funkcji f w x_0 w postaci $f'(x_0) = \tan\alpha$ gdzie α to kąt nachylenia prostej do dodatniej półosi OX, gdzie styczna to graniczne położenie siecznej przechodzącej przez punkty $(x_0, f(x_0))$ i $(x_0+h, f(x_0+h))$ dla $h \to 0$, która istnieje jeśli iloraz różnicowy ma granicę.
   Jeśli granica istnieje i też jest skończona, to $f'(x_0) = \tan\alpha$
   Wyznaczymy równanie prostej stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$
   $y = ax + b$ gdzie $a = \tan\alpha = f'(x_0)$ i $f(x_0) = ax_0 + b$, z czego $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$
   $y = f'(x_0) + f(x_0) - f'(x_0)x_0 \iff y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) \iff y - y_0 = f'(x_0)(x-x_0)$ gdzie $y_0 = f(x_0)$

4. Twierdzenie 8.1: Warunek konieczny różniczkowalności
   Jeśli funkcja f jest rózniczkowalna w punkcie x_0, to jest też ciągła w x_0.
   f jest różniczkowalna w $x_0 \Longrightarrow f$ jest ciągła w x_0

   (a) D:(egzamin) Z założenia $x_0$jest punktem wewnętrznym $D \Longrightarrow x_0$ jest punktem skupienia zbioru $D \Longrightarrow$ (f jest ciągła w $x_0 \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
   Z różniczkowalnośći funkcji f w $x_0$mamy $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$. Stąd $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x-x_0) + f(x)) = 0 + f(x) = f(x)$

   (b) Uwaga 8.1: Twierdzenie odwrotne do 8.1 nie jest prawdziwe, tzn nie każda funkcja ciągła w x_0 jest różniczkowalna w x_0
   Przykład: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$ jest ciągła, ale nie jest różniczkowalna w $x_0 = 0$

5. Def: Funkcja f jest różniczkowalna w zbiorze $D \iff \forall_{x_0\in D} f$ jest różniczkowalna w x_0
   Wtedy możemy mówic o funkcji $f' : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$

6. Twierdzenie 8.2: (o działainach arytmetycznych na pochodnych)
   Jeśli $f, g : D \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne w x_0, to:

   (a) $f \pm g$ jest różniczkowalna w x_0 i $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

   (b) fg jest różniczkowalna w x_0 i $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

   (c) $\frac{f}{g}$ jest różniczkowalna w x_0 i $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x))^2}$ jeśli tylko $\forall_{x\in D} g(x) \neq 0$

   (d) D: Z założenia f, g są różniczkowalne w x_0. Z warunku koniecznego różniczkowalności f, g są ciągłe w x_0.
   Dowód (a) jest trywialny więc pomijam
   (b) $(fg)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} g(x)\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
   (c): $(\frac{f}{g})'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(\frac{f}{g})(x)-(\frac{f}{g})(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{(x-x_0)\cdot(g(x)g(x_0))} =$
   $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{(x-x_0)\cdot(g(x)g(x_0))} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)}\cdot(g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

7. Twierdzenie 8.3 (o różniczkowaniu złożenia):
   jeśli $D_1, D_2 \in \mathbb{R}$ i $f : D_1 \to D_2$ jest różniczkowalna w $x_0 \in D_1$ i $g : D_2 \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $f(x_0) \in D_2$,to złożenie $g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$ jest rózniczkowalne w punkcie x_0 i $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

   (a) D: $(g \circ f)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x_0+g))-g(f(x_0))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x_0+g)-f(x_0)+f(x_0))-g(f(x_0))}{h}$ oznaczmy $\Delta = f(x_0+h) - f(x_0) \xrightarrow{h\to 0} f(x_0) - f(x_0) = 0$ bo f jest ciągła w x_0
   $= \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x_0)+\Delta)-g(f(x_0))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x_0)+\Delta)-g(f(x_0))}{\Delta}\cdot\frac{\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}^{\Delta}}{h} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{g(f(x_0)+\Delta)-g(f(x_0)}{\Delta}\cdot\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

8. Twierdzenie 8.4 (o różniczkowaniu funkcji odwrotnej):
   Jeśli f jest ciągła i ściśle monotiniczna w pewnym **otoczeniu punktu x_0** (tzn w zbiorze $(x-\delta, x+\delta)$, gdzie $\delta > 0$) i istnieje pochodna $f'(x_0) \neq 0$, to funkcja odwrotna f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $y_0 = f(x_0)$ i $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

(a) Dowód: Wiemy, że $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to (y_0 - \eta_1, y_0 + \eta_2)$ $(\delta, \eta_1, \eta_2 > 0)$ jest ciągła i ściśle monotoniczna ($\implies$ $1-1 \implies$ odwracalna)
$f^{-1} : (y_0 - \eta_1, y_0 + \eta_2) \to (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ Z tw o ciągłości funkcji odwrotnej wynika, że f^{-1}jest funkcją ciągłą.
$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$

9. Twierdzenie 8.5 (o pochodnych funkcji elementarnych):

(a) f :funkcja stała, tzn $\forall_{x \in D} f(x) = c, c \in \mathbb{R} \implies \forall_{x \in D} f'(x) = 0$
$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0$
Wniosek: Z twierdzenia 8.2 i (a), $(cf(x))' = c' f(x) + cf'(x) = 0 + cf'(x) = f'(x)$

(b) $(x^n) = nx^{n-1}$, dla $(x, n) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{N}) \setminus (0, 1)$(dla $n = 1$ definiujemy $x' = 1$ bo $\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1$)
$(x^n)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k \ - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} = nx^{n-1} + 0 = nx^{n-1}$

(c) $(x^{-n})'$ dla $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$(x^{-n})' = ((\frac{1}{x})^n)' = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$

(d) $(\sin x)' = \cos x$ dla $x \in \mathbb{R}$
$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos \frac{2x+h}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos(x + h) = \cos(x)$

(e) $(\cos x)' = -\sin x$ dla $x \in \mathbb{R}$

(f) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos x}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$(\tan x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x}$

(g) $(\cot x)' = \frac{-1}{\sin x}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

(h) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ dla $x \in (0, \infty)$
$(\ln x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \ln(1 + \frac{h}{x}) = \lim_{h \to 0} \ln(1 + \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{h}})^{\frac{1}{h}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$
Ogólniej: $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
D: Dla $x < 0$, $(\ln |x|)' = (\ln -x)' = \frac{1}{-x} \cdot -1 = \frac{1}{x}$

(i) $(e^x)' = e^x$
$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(x)$ - funkcja ciągła i ściśle rosnąca i $\forall_{x \in (0, \infty)} f'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$
Z tw o pochodnej funkcji odwrotnej, $(e^{\ln x})' = x \implies (e^{\ln e^x})' = e^x \implies (e^x)' = e^x$

(j) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$ dla $x \in (0, \infty), \alpha \in \mathbb{R}$
$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$

(k) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ dla $x \in (-1, 1)$

(l) $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$ dla $x \in (-1, 1)$

(m) $(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$

(n) $(\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1 + x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$
Dowody (k)-(n) wynikają bezpośrednio z twierdzenia o różniczkowaniu funkcji odwrotnej