07.01.2020 13 i 14 Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona

Przez cały wykład p będzie oznaczać przedział

1. Def. Funkcja $F : P \to \mathbb{R}$ jest funkcją pierwotną funkcji $f : P \to \mathbb{R} \iff F$ jest różniczkowalna i $\forall_{x\in P} F'(x) = f(x)$
   np x^2 jest funkcją pierwotną funkcji x

2. Twierdzenie 13.1:
   Jeśli $F_0 : P \to \mathbb{R}$ jest funkcją pierwotną $f : P \to \mathbb{R}$ to $F : P \to \mathbb{R}$ też jest funkcją pierwotną $f : P \to \mathbb{R} \iff \exists_{C\in\mathbb{R}} \forall_{x\in P} F(x) = F_0(x) + C$
   D: $\Longrightarrow$ Zakładamy, że $F_0, F : P \to \mathbb{R}$ to funkcje pierwotne f,
   tzn. $\begin{cases} \forall_{x\in P} F_0'(x) = f(x) \\ \forall_{x\in P} F'(x) = f(x) \end{cases} \implies \forall_{x\in P} (F(x) - F_0(x))' = 0 \implies$ funkcja $F(x) - F_0(xb)$ jest stała na P czyli $\exists_{C\in\mathbb{R}} \forall_{x\in P} F(x) = F_0(x) + C$
   D: $\Longleftarrow$ Zakładamy, że $\exists_{C\in\mathbb{R}} \forall_{x\in P} F(x) = F_0(x) + C$ i F_0 jest funkcją pierwotną f. Wtedy $F' = f + 0 = f$ więc F też jest funkcją pierwotną f

3. Nie każda funkcja ma funkcję pierwotną, na przykład $f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$. Można poprowadzić dowód nie wprost z którego wynika że F musiałaby być stała ale wtedy F' musiałoby być wszędzie 0 skąd sprzeczność

4. Twierdzenie 13.2: Każda funkcja ciągła $f : P \to \mathbb{R}$ ma funkcję pierwotną

5. Def: Całką nieoznaczoną funkcji $f : P \to \mathbb{R}$ oznaczaną $\int f(x)dx$ nazywamy zbiór wszystkich funkcji pierwotncy funkcji f. Zapisujemy $\int f(x)dx = F(x) + C$ gdzie F to dowolna funkcja pierwotna f.

6. **Podstawowe wzory na całki:**
   (a) $\int 0dx = C$
   (b) $\int 1dx = x + C$
   (c) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ dla $n \neq= 1$
   (d) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
   (e) $\int e^x dx = e^x + C$
   (f) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
   (g) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
   (h) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
   (i) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
   (j) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
   (k) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arccot}\ x + C$
   (l) Jeśli f i g mają funkcje pierwotne, to $f + g$ też ma funkcję pierwotną i $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
   D: Niech F i G to funkcje pierwotne odpowiednio f i g. Wtedy $(F + G)' = F' + G' = f + g \implies \int (f(x) + g(x))dx = F + G + C = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
   (m) Jeśli f ma funkcję pierwotną i $A \in \mathbb{R}$, to Af też ma funkcję pierwotną i $\int Af(x)dx = \begin{cases} A\int f(x)dx + C & A \neq 0 \\ C & A = 0 \end{cases}$
   (n) Przykłady:
      i. $\int \frac{3\sqrt{x}+8}{x} dx = 3\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx + 8\int \frac{1}{x} dx = 3\int x^{-1/2} + 8\int \frac{1}{x} dx = 8\ln|x| + 6x^{1/2} + C$
      ii. $\int (\cot^2 x + 1)dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

7. Twierdzenie 13.3(o całkowaniu przez części)
   Jeśli $f, g : P \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne i $f'g$ ma funkcje pierwotną, to fg' też ma funkcję pierwotną i $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ z wzoru na pochodną iloczynu
   D: $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
   $\int (f(x)g(x))'dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$
   $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx = \int f(x)g'(x)dx$

8. Twierdzenie 13.4(o całkowaniu przez podstawienie)
   Jeśli $g : P_1 \to P_2$ jest różniczkowalna i $f : P_2 \to \mathbb{R}$ ma funkcję pierwotną, to $f \circ g \cdot g'$ też ma funkcję pierwotną i $\int f(g(x))g'(x)dx$, (wtedy wstawiamy $t = g(x), dt = g'(x)dx) = \int f(t)dt$
   D: Niech F oznacza funkcję pierwotną f, tzn $\forall_{x\in P_2} F'(x) = f(x)$. Chcemy pokazać, że $F(t) = F(g(x))$ to funkcja pierwotna $f(g(x))g'(x)$
   Rzeczywiście $\forall_{x\in P_2} (F(g(x)))' = F'(g(x)g'(x) = f(g(x)g'(x)$

9. Przykłady:

(a) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = t = \begin{cases} t = \arctan x \\ dt = \frac{1}{1+x^2}dx \end{cases} = \int tdt = \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}\arctan^2 x + C$ (dla uproszczenia zapisu $+C$ tylko na końcu)

(b) $\int x^2 \arcsin x\, dx = \begin{cases} f(x) = \arcsin x & f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ g'(x) = x^2 & g(x) = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \end{cases} = \frac{1}{3}x^3 \arcsin x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{x^2 \cdot x}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} t = 1-x^2 \implies x^2 = 1-5 \\ dt = -2xdx \implies -\frac{1}{2}dt = xdx \end{cases} = -\frac{1}{2}\int \frac{1-t}{\sqrt{t}}dt = -\frac{1}{2}(\int t^{-\frac{1}{2}}dt - \int t^{\frac{1}{2}}dt) = -\frac{1}{2}(2t^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}) = \frac{1}{3}\sqrt{t^3} - \sqrt{t} = \frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} - \sqrt{1-x^2} + C$

Więc: $\int x^2 \arcsin x\, dx = \frac{1}{3}x^3 \arcsin x - \frac{1}{9}\sqrt{(1-x^2)^3} + \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} + C$

10. Całki $\int e^{x^2}dx, \int \frac{1}{\ln x}dx, \int \frac{\sin x}{x}dx.\ \int \frac{\cos x}{x}dx, \int \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx$ nie dadzą się wyrasić za pomocą funkcji elementarnych

11. Całkowanie funkcji wymiernych $\int \frac{\text{wielomian}_1(x)}{\text{wielomian}_2(x)}\text{dx}$

(a) Jeśli stopień wielomianu w liczniku jest większy od stopnia jest $\geq$stopniowi wielomianu w mianowniku, to wykonujemy dzielenie.

(b) Wielomian w mianowniku rozkładamy na iloczyn wielomianów nierozkładalnych stopnia pierwszego i drugiego

(c) Ułamek zamieniamy na sumę ułamków prostych:
np. $\frac{x^2-3x-5}{(x-2)^3(x^2+1)^2} = \frac{A}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} + \frac{Fx+G}{x^2+1}$ (nad liniowymi piszemy stałe, nad kwadratowymi liniowe)

(d) $\frac{x^3-2}{(x+1)x^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x^3} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x}$

(e) Liczymy całki z ułamków prostych

i. $\int \frac{dx}{x+a} = \begin{cases} t = x+a \\ dt = dx \end{cases} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|x+a| + C$

ii. $\int \frac{dx}{(x+a)^3} = \begin{cases} t = x+a \\ dt = dx \end{cases} = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3}dt = -\frac{1}{2}t^{-2} = \frac{1}{-2(x+a)^2} + C$

iii. $\int \frac{1}{x^2+6x+13}dx = \int \frac{dx}{(x+3)^2+4} = \begin{cases} t = x+3 \\ dt = dx \end{cases} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(\frac{t}{2})^2+1} = \begin{cases} w = \frac{t}{2} \\ dw = \frac{1}{2}dt \end{cases} = \frac{1}{2}\int \frac{dw}{w^2+1} = \frac{1}{2}\arctan w = \frac{1}{2}\arctan \frac{x+3}{2} + C$

iv. $\int \frac{3x+5}{x^2+6x+13}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+13}dx - 4\int \frac{1}{x^2+6x+13}dx$

$\int \frac{2x+6}{x^2+6x+13} = \begin{cases} t = x^2+6x+13 \\ dt = (2x+6)dx \end{cases} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln(x^2+6x+13) + C$

v. $\int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx = \begin{cases} \arctan x & \text{dla } n = 1 \\ \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}dx & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$

Szkic dowodu: $\int \frac{1}{(x^2+1)^n} = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^n} = \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}dx$

$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}dx = \int \frac{x \cdot xdx}{(x^2+1)^n} = \begin{cases} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g'(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n} & g(x) = \int \frac{x}{(x^2+1)^n}dx = ... \end{cases}$

vi. $\int \frac{3x+5}{(x^2+6x+13)^2}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+6)-4}{(x^2+6x+13)^2}dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x+6)dx}{(x^2+6x+13)^2} - 4\int \frac{1}{(x^2+6x+13)^2}dx$ (*)

$\int \frac{(2x+6)dx}{(x^2+6x+13)^2} = \begin{cases} t = x^2+6x+13 \\ dt = (2x+6)dx \end{cases} = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}dt = -1 \cdot t^{-1} = -\frac{1}{x^2+6x+13} + C$

$\int \frac{1}{(x^2+6x+13)^2}dx = \int \frac{1}{((x+3)^2+4)^2}dx = \frac{1}{16}\int \frac{dx}{(\frac{(X+3)^2}{4}+1)^2} = \frac{1}{16}\int \frac{dx}{((\frac{x+3}{2})^2+1)^2} = \begin{cases} t = \frac{x+3}{2} \\ dt = \frac{1}{2}dx \end{cases} = \frac{1}{16} \cdot 2\int \frac{dt}{(t^2+1)} = \frac{1}{8}(\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt) = \frac{1}{16}\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{16}\arctan t = \frac{1}{16}\frac{\frac{x+3}{2}}{(\frac{x+3}{2})+1} + \frac{1}{16}\arctan \frac{x+3}{2} + C$

Z tego łatwo policzyć (*)

(f) przykład: $\int \frac{x^5+3x^4+3x^3+3x^2+x+2}{x^4+x^3+x^2}dx = \int(x+2+\frac{x^2+x+2}{x^4+x^3+x^2})dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \int \frac{x^2+x+2}{x^4+x^3+x^2}dx$
$\frac{x^2+x+2}{x^4+x^3+x^2} = \frac{x^2+x+2}{x^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$ rozwiązujemy żeby otrzymać $A = 2, B = -1, C = 1, D = 0$ i dalej:
$\int \frac{x^2+x+2}{x^4+x^3+x^2}dx = \int(\frac{2}{x} - \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+x+1})dx = 2\int x^{-2}dx - \int x^{-1}dx + \int \frac{x}{x^2+x+1}dx = 2 \cdot (-1 \cdot x^{-1}) - \ln|x| + \int \frac{x}{x^2+x+1}dx = \frac{-2}{x} - \ln|x| + ...$

$\int \frac{x}{x^2+x+1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{1}{2}}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$
$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \begin{cases} t = x^2+x+1 \\ dt = (2x+1)dx \end{cases} = \int t^{-1}dt = \ln|t| = ln(x^2+x+1)+C$
$\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{3/4}+1}dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}))^2+1}dx = \begin{cases} t = \frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}) \\ dt = \frac{2}{\sqrt{3}}dx \end{cases} = \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} +$
C
I już mamy całki ułamków prostych i dalej mi się nie chce pisać bo to tylko wpisanie ich sumy

12. Całkowanie wyrażeń trygonometrycznych

(a) potęga nieparzysta:
$\int \cos^5 x\, dx = \int \cos^4 \cdot \cos x\, dx = \int (\cos^2 x)^2 \cos x\, dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x\, dx = \begin{cases} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \end{cases} = \int (1-t^{2)^2} dt =$
$\int (1-2t^2+t^4)dt = t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin x + C$

(b) $\int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int (\frac{1-\cos 2x}{2})^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx = \frac{1}{4}(x-2\int \cos 2x dx + \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)dx) =$
$\frac{1}{4}(x-2\int \cos 2x dx + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\int \cos 4x dx) = \frac{1}{4}(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$
$\int \cos 2x dx = \begin{cases} t = 2x \\ dt = 2dx \end{cases} = \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t = \frac{1}{2}\sin 2x + C$

(c) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$

(d) $\int G(\sin x, \cos x)dx$
jeśli $G(-\sin x, \cos x) = -G(\sin x, \cos x)$ podstawiamy $t = \cos x$
jeśli $G(\sin x, -\cos x) = -G(\sin x, \cos x)$ podstawiamy $t = \sin x$
jeśli $G(-\sin x, -\cos x) = -G(\sin x, \cos x)$ podstawiamy $t = \tan x$
podstawienie uniwersalne: $t = \tan\frac{x}{2}$