9 Wyznaczniki macierzy

Niech $A \in M_n^n(K)$. Symbolem A_{ij} bedziemy oznaczali macierz powstałą z macierzy A przez usunięcie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny. Dla kazdej macierzy $A \in M_n^n(K)$ przyporzadkujemy element ciała K zwany wyznacznikiem macierzy.

Definicja 9.1. *Wyznacznikiem nazywamy funkcję, która przyporządkowuje każdej macierzy kwadratowej o wyrazach z ciała K pewien element tego ciała, oznaczany $detA$, tak że*

1. *Jeśli $A = [a] \in M_1^1(K)$, to $detA = a$,*
2. *Jeśli $A = [a_{ij}] \in M_n^n(K)$, gdzie $n > 1$, to $detA = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} detA_{1j}$.*

Twierdzenie 9.2. *(Własności wyznaczników) Niech $A, B, C \in M_n^n(K)$.*

1. *Jesli $c^j(C) = c^j(A) + c^j(B)$ dla $0 \leq j \leq n$ oraz $c^i(A) = c^i(B) = c^i(C)$ dla $i \neq j$, to*
$$detC = detA + detB.$$
2. *Jeśli macierz B powstała z A przez zamianę miejscami dwóch kolumn to $detB = -detA$.*
3. *Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez pomnożenie jednej (dowolnej) kolumny przez element $c \in K$ to $detB = cdetA$.*

W powyższym twierdzeniu możemy kolumny zastąpić wierszami. Wynika to natychmiast z jeszcze jednej własności wyznaczników. Aby ją sformułować przypomnijmy oznaczenie. Dla dowolnej macierzy $A \in M_m^n(K)$ symbolem A^T oznaczamy macierz należacą do $M_n^m(K)$ taką, ze $r_i(A^T) = c^i(A)$ dla $i = 1, \ldots, n$. Inaczej mówiac wiersze macierzy A^T to kolumny macierzy A i odwrotnie. Oczywiste jest, że $(A^T)^T = A$.

Twierdzenie 9.3. *Niech $A \in M_n^n(K)$. Wówczas $detA^T = detA$.*

Twierdzenie 9.4. *Niech $A \in M_n^n(K)$. Wówczas dla każdego $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$*
$$detA = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} detA_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} detA_{ij}.$$

Wzory z powyższego twierdzenia nazywamy *rozwinięciem Laplace'a*, pierwszy względem j-tej kolumny, drugi wzgledem i-tego wiersza.

Wniosek 9.5. *Niech* $A \in M_n^n(K)$

1. *Jeśli w macierzy A wiersz (lub kolumna) jest zerowy to* $det A = 0$.
2. *Jeśli w macierzy A dwa wiersze (dwie kolumny) są równe to* $det A = 0$.

Zbadamy teraz jak zmienia się wyznacznik macierzy A gdy wykonujemy operacje elementarne na wierszach lub kolumnach macierzy. Przypomnijmy, ze mamy elementarne operacje trzech typów:

- typu 1: dodanie do dowolnego wiersza (kolumny) innego (innej) pomnożonego przez stałą.
- typu2: zamiana kolejności wierszy (kolumn)
- typu 3 : pomnożenie wiersza (kolumny) przez niezerowy element ciała K.

Wniosek 9.6. *Niech* $A \in M_n^n(K)$

1. *Operacje elementarne typu 1 nie zmieniają wyznacznika macierzy A .*
2. *Operacje elementarne typu 2 zmieniają znak wyznacznika A. item Operacje elementarne typu 3 mnożą wyznacznik macierzy A przez element ciała* K.

Twierdzenie 9.7. ***(Twierdzenie Cauchy'ego)*** *Niech* $A, B \in M_n^n(K)$. *Wówczas*

$$det AB = det A det B.$$

Twierdzenie 9.8. *Niech* $A = [a_{ij}] \in M_n^n(K)$.

1. *Macierz A jest odwracalna wtedy i tylko wtedy gdy* $det A \neq 0$.
2. *Niech A będzie macierzą odwracalną i ponadto niech* $B = [b_{ij}] \in M_n^n(K)$ *oraz* $b_{ij} = (-1)^{j+i} \frac{det A_{ji}}{det A}$. *Wówczas* $B = A^{-1}$.

Twierdzenie 9.9. *(**Twierdzenie Cramera**) Niech U będzie układem n-równań z n-niewiadomymi o macierzy współczynników A i kolumnie wyrazów wolnych B. Załóżmy, żę $detA \neq 0$. Wówczas układ ma dokładnie jedno rozwiązanie $(x_1, \ldots, x_n)$ takie że dla dowolnego i,*

$$x_i = \frac{detA_i}{detA},$$

gdzie macierz A_i powstała z macierzy A przez zastąpienie i-tej kolumny kolumną B.