## 0 CAŁKA RIEMANNA

1. $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ - funkcja ograniczona
   $\Pi_n = (x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_{kn}^{(n)})$ - ciąg podziałów odcinka $< a, b >$mówimy, że ten ciąg jest normalny, jeśli $\delta(\Pi_n) := \max_{i\in 1,\dots,kn}(x_i^{(n)}, -x$
   0
   $\omega_n = (\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_{kn}^{(n)})$ - ciąg wartościowań, tzn $\xi_i^{(n)} \in < x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)} >$
   (a) Def. Jeśli istnieje $\sigma \in \mathbb{R}$taka, że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $\{\Pi_n\}$ i dowolnego ciągu wartościowań $\{\omega_n\}$ mamy
   $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i^{(n)}) \cdot (x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = \sigma$, (lewa strona równania - suma całkowa Riemanna) )to wtedy mówimy, że $f$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $< a, b >$. W przypadku całkowalności $\sigma$ nazywamy całką Riemanna funkcji $f$ na $< a, b >$ i oznaczamy $\int_a^b f(x)dx$

2. Twierdzenie 0.5 (Podstawowy wzór rachunku całkowego). Jeśli $f :< a, b >\in \mathbb{R}$ jest ciągła i $F$ to dowolna funkcja pierwotna $f$, to (całka Riemanna) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$ (całka oznaczona)

3. **Własności całki Riemanna**
   (a) Def: Jeśli $-\infty < a < b < \infty$, to $\int_a^a f(x)dx = 0$ i $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
   (b) Własność 0.2: Jeśli $f, g :< a, b >\to \mathbb{R}$ są całkowalne w sensie Riemanna na $< a, b >$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,to $\alpha f + \beta g$ też jest całkowalna w sensie Riemanna na $< a, b >$i
   $\int_a^b(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$
   (c) Własność 0.4: Jeśli $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $< a, b >$ i $\forall_{x\in<a,b>} f(x) \geq 0$,to $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
   (d) Własność 0.5: Jeśli $f, g :< a, b >\to \mathbb{R}$ są całkowalne w sensie Riemanna i $\forall_{x\in<a,b>} f(x) \leq g(x)$, to
   $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
   D: Z założenia mamy $\forall_{x\in<a,b>} g(x) - f(x) \geq 0 \implies \int_a^b(g(x) - f(x))dx \geq 0 \implies \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0 \iff \int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$
   (e) Własność 0.6: Jeśli $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $< a, b >$, to $|f|$ też jest całkowalna w sensie Riemanna na $< a, b >$i
   $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b f(x)dx$
   (f) Własność 0.7: Jeśli $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $< a, b >$ i $M = \sup_{x\in<a,b>} f(x)$,to
   $\int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$
   D: $\forall_{x\in<a,b>} f(x) \leq M \implies \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx = M\int_a^b 1dx = M(b - a)$
   (g) Własność 0.8: Jeśli $g :< a, b >\to Y \subset \mathbb{R}$ jest klasy $C^1$ (ciągła pierwsza pochodna) i $f : Y \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to
   $$\int_a^b f(x)dx \cdot g'(x)dx = \begin{cases} t = g(x) \\ dt = g'(x)dx \\ a \to g(a) = \alpha \\ b \to g(b) = \beta \end{cases} = \int_\alpha^\beta f(t)dt$$
   D: Niech $F$ będzie funkcją pierwotną $f$, tzn $\forall_{x\in Y} F'(x) = f(x)$. Używając podstawowego wzoru rachunku całkowego, otrzymujemy
   $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, $\int_\alpha^\beta f(t)dt = F(\alpha) - F(\beta)$,(*) ponadto $(F(g(x))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x) \cdot g'(x)$, co oznacza, że $F(g(x))$ to funkcja pierwotna $f(g(x))g'(x)$. Z podstawowego wzoru rachunku całkowego otrzymujemy $\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(b)) - F(g(a)) = F(\beta) - F(\alpha)$. Z tego i z (*) otrzymujemy tezę
   (h) Własność 0.9: (całkowanie przez części): Jeśli $f, g :< a, b >\to \mathbb{R}$ są klasy $C^1$, to $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$ gdzie $[f(x)g'(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$
   D: Wzór ten wnynika ze wzoru na pochodną iloczynu. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ więc $[f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$ skąd
   $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$
   (i) Własność 0.10: (twierdzenie o wartości śreniej rachunku całkowego).
   Jeśli $f, g :< a, b >\to \mathbb{R}$ są ciągłe i $g$ jest nieujemna lub niedodatnia, to $\exists_{\xi\in<a,b>} \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$
   Dowód: (na ćwiczeniach)
   Wniosek: $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ - funkcja ciągła $\overset{g(x)\equiv 1}{\Longrightarrow} \exists_{\xi\in<a,b>} \int_a^b f(x)dx = f(\xi)\int_a^b 1dx \implies \exists_{\xi\in<a,b>} f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

# 1 CAŁKI NIEWŁAŚCIWE

1. Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju: $\int_a^\infty f(x)dx, \int_{-\infty}^b f(x)dx, \int_{-\infty}^\infty f(x)dx$

   (a) Def: Jeśli $f :< a, \infty) \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $< a, \beta >$ dla każdego $\beta > a$ i istnieje granica $\lim_{\beta\to\infty} \int_a^\beta f(x)dx$, to granicę tą nazywamy całką niewłaściwą pierwszego rodzaju i oznaczamy $\int_a^\infty f(x)dx$. $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\beta\to\infty} \int_a^\beta f(x)dx$. Ponadto jeśli powyższa granica istnieje i jest skończona, to całkę niewłaściwą nazywamy zbieżna; w pozostałych przypadkach nazywamy ją rozbieżną.

   (b) Całkę $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ definiujemy analogicznie, tzn $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to-\infty} \int_\alpha^b f(x)dx$ jeśli tylko $f : (-\infty, b >\to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $< \alpha, b >$ dla dowolnego $\alpha < b$ i powyższa granica istnieje.

   (c) Def.: Jeśli $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $< \alpha, \beta >$dla wszystkich $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ i istnieje $c \in \mathbb{R}$ takie, że istnieje granica $\lim_{a\to-\infty} \int_\alpha^c f(x)dx$ oraz $\int_c^\beta f(x)dx$, to $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$ o ile wyrażenie po prawej stronie ma sens, tzn nie otrzymujemy $[\infty - \infty]$ lub $[-\infty + \infty]$. Ponadto o ile te granice istnieją i są skończone, to całkę nazywamy zbieżną; w pozostałych przypadkach - rozbieżną.

   Uwaga: Jeśli w powyższej definicji wstawimy $-\alpha = \beta \overset{\text{ozn}}{=} T$, to po prawej stronie otrzymamy $\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^c f(x)dx + \lim_{T\to\infty} \int_c^T f(x)dx = \underline{\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^T \text{f(x)dx}}$ - tzn wartośc główna całki, to NIE to samo co $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$

   Przykład: $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^3dx}{x^4+2} = \int_{-\infty}^0 \frac{x^3dx}{x^4+2} + \int_0^\infty \frac{x^3dx}{x^4+2} = \lim_{\alpha\to-\infty} \int_\alpha^0 \frac{x^3dx}{x^4+2} + \lim_{\beta\to\infty} \int_0^\beta \frac{x^3dx}{x^4+2} =$ (kilka prostych kroków) $= [-\infty + \infty]$ całka rozbieżna

   wartość głowna całki $= \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^T \frac{x^3dx}{x^4+2}dx =$ (znowu) $= 0$

2. Całki niewłaściwe drugiego rodzaju:
   $f :< a, b) \to \mathbb{R}$
   Def: Jeśli $f :< a, b) \to \mathbb{R}$ jest calkowalna w sensie Riemanna na $< a, \beta >$ dla każdej $a < \beta < b$ i istnieje granica $\lim_{\beta\to b^-} \int_a^\beta f(x)dx$, to granicę tą nazywamy całką niewłaściwą drugiego rodzaju i oznaczamy $\int_a^b f(x)dx$: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta\to b^-} \int_a^\beta f(x)dx$
   Dla $f : (a, b >\to \mathbb{R}$ definiujemy analogicznie $\int_a^b f(x)dx : \int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to a^+} \int_\alpha^b f(x)dx$ jeśli $f$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $< \alpha, b >$ dla każdej $a < \alpha < b$ i granica istnieje

3.

**KRYTERIA ZBIEŻNOŚCI CAŁEK NIEWŁAŚCIWYCH**

Niech $b = \infty$ lub $b \in \mathbb{R}$ i $a < b$

1. Twierdzenie 1.1: Niech $f, g :< a, b) \to \mathbb{R}$ będą całkowalne w sensie Riemanna na $< a, \beta >$dla każdego $a < \beta < b$ i $\forall_{x \in < a, b)} 0 \le f(x) \le g(x)$. Wtedy:
   (a) Jeśli $\int_a^b g(x)dx$ jest zbieżna, to $\int_a^b f(x)dx$ też jest zbieżna.
   (b) Jeśli $\int_a^b f(x)dx$ jest rozbieżna, to $\int_a^b g(x)dx$ też jest rozbieżna
2. Twierdzenie 1.2: Jeśli $f :< a, b) \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $< a, \beta >$ dla każdego $a < \beta < b$ i $\int_a^b |f(x)|dx$ jest zbieżna, to $\int_a^b f(x)dx$ też jest zbieżna. W przypadku zbieżności mamy $|\int_a^b f(x)dx| \le \int_a^b |f(x)|dx$
   Analogiczne twierdzenia są prawdziwe także dla funkcji $f, g : (a, b >\to \mathbb{R}$ gdzie $a = -\infty$ lub $a \in \mathbb{R}$ i $a < b$
3. 
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx \, \text{jest zbieżna} \iff p > 1$$
$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \, \text{jest zbieżna} \iff p < 1$$
   Z czego $\int_0^\infty \frac{1}{x^p}$ jest rozbieżna
4. Przykłady:
   (a) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[4]{5x^5+1}}$ jest zbieżna, bo $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{5/4}}$ jest zbieżna (bo $p = \frac{5}{4} > 1$) z twierdzenia 1.1(a)
   (b) $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{x^3}} dx$ jest rozbieżna, bo $\int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}}$ jest rozbieżna (bo $p = \frac{3}{2} \le 1$) z twierdzenia 1.1(b)
   (c) $\int_2^\infty \frac{x \cdot \sin x}{(x^2+4)^2} dx$ : $\forall_{x \in <2, \infty)} |\frac{x \cdot \sin x}{(x^2+4)^2}| = \frac{x \cdot |\sin x|}{(x^2+4)^2} \le \frac{x}{(x^2+4)^2} \le \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3}$