8. Pochoda funkcji jednej zmiennej

1. Def. Punkt a jest punktem wewnętrznym zbioru $D \subset \mathbb{R} \iff \exists_{\delta>0}(a-\delta, a+\delta) \subset D$
   Przez cały wykład będziemy zakładać, że (o ile nie będzie powiedziane inaczej)
   $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ i x_0 jest punktem wewnętrzym zbioru D

2. Def. Jeśli istnieje skończona granica$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, - (tzw. iloraz różnicowy) to nazywamy ją pochodną funkcji f w punkcie x_0i oznaczamy $f'(x_0)$ lub $\frac{df}{dx}(x_0)$
   Wtedy funkcję f nazywamy różniczkowalną w punkcie x_0

3. **Interpretacja geometryczna pochodnej**
   Wartość pochodnej $f'(x_0)$ to nachylenie prostej stycznej do wykresu funkcji f w x_0 w postaci $f'(x_0) = \tan\alpha$ gdzie α to kąt nachylenia prostej do dodatniej półosi OX, gdzie styczna to graniczne położenie siecznej przechodzącej przez punkty $(x_0, f(x_0))$ i $(x_0+h, f(x_0+h))$ dla $h \to 0$, która istnieje jeśli iloraz różnicowy ma granicę.
   Jeśli granica istnieje i też jest skończona, to $f'(x_0) = \tan\alpha$
   Wyznaczymy równanie prostej stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$
   $y = ax + b$ gdzie $a = \tan\alpha = f'(x_0)$ i $f(x_0) = ax_0 + b$, z czego $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$
   $y = f'(x_0) + f(x_0) - f'(x_0)x_0 \iff y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \iff y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ gdzie $y_0 = f(x_0)$

4. Twierdzenie 8.1: Warunek konieczny różniczkowalności)
   Jeśli funkcja f jest rózniczkowalna w punkcie x_0, to jest też ciągła w x_0.
   f jest różniczkowalna w $x_0 \Longrightarrow f$ jest ciągła w x_0