06.11.2019

Własności funkcji ciągłych. Jednostajna ciągłość funkcji

1. Def. Mówimy, że funkcja $f :< a, b >\rightarrow \mathbb{R}$ ma własnosć Darboux jeśli $f(a) \neq f(b) \implies \forall_{c \text{ leżącego pomiedzy } f(a) \text{i } f(b)} \exists_{x_0 \in (a,b)} f(x_0) = c$

2. Twierdzenie 7.1: Każda funkcja ciągła $f :< a, b >\rightarrow \mathbb{R}$ ma własnosć Darboux

3. Twierdzenie 7.2 (Weierstrassa I)
   Każda funkcja ciągła $f; < a, b >\rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona, tzn $\exists_{K\in\mathbb{R}} \forall_{x\in<a,b>} |f(x)| \leq K$
   Uwaga - W powyższym twierdzeniu założenie, że dziedzina funkcji jest przedziałem domkniętym i ograniczonem - musi być przedziałem domkniętym

   (a) Dowód nie wprost. Zakładamy, że $f :< a, b >\rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła ale nie jest ograniczona, tzn $\forall_{K\in\mathbb{R}} \exists_{x\in<a,b>} |f(x)| > K$. W szczególności biorąc $K = n$ gdzie $n \in \mathbb{R}$ otrzymujemy $\forall_{n\in\mathbb{N}} \exists_{x_n\in<a,b>} |x_n| > n$.Zatem mamy ciąg $\{x_n\}$, który jest ograniczony (bo $x_n \in< a, b >$)
   $\overset{\text{tw. B-W}}{\implies}$ ciąg $\{x_n\}$ zawiera podciąg zbieżny, oznaczmy $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Wtedy $x_0 \in< a, b >$, bo $\forall_{k\in\mathbb{N}} a \leq x_{n_k} \leq b$ i z tw. o przechodzeniu do granicy w nierównościach otrzymujemy $\lim_{x\to\infty} x_{n_k} \in< a, b >$
   Funkcja f jest ciągła na $< a, b > \implies$ w szczególności jest ciągła w pkt $x_0 \in< a, b > \overset{\text{(CH)}}{\iff} \forall_{\{\tilde{x}_n\}\subset<a,b>} \lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(\tilde{x_j}) = f(x_0)$
   W szczególności $\{x_n\} \subset< a, b >\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \implies \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) \iff \forall_{\epsilon>0} \exists_{k_0\in\mathbb{N}} \forall_{k\geq k_0} |f(x_{n_k}) - f(x_0)| < \epsilon$
   Dla $\epsilon = 1$ mamy $\exists_{k_0\in\mathbb{N}} \forall_{k\geq k_0} |f(x_{n_k}) - f(x_0)| < 1$ (*)
   $\forall_{k\geq k_0} |f(x_{n_k})| = |f(x_{n_k}) - f(x_0) + f(x_0)| \leq |f(x_{n_k}) - f(x_0)| + |f(x_0)| \overset{(*)}{<} 1 + |f(x_0)|$
   Sprzeczność z $\forall_{n\in\mathbb{N}} |f(x_n)| > n \implies \forall_{k\in\mathbb{N}} |f(x_{n_k})| > n_k$
   Dla dostatecznie dużych k otrzymamy $1 + |f(x_0)| < n_k$