

02.10.2019

prof. dr hab. inż. Zbigniew Lonc

zblonc@mini.pw.edu.pl

pokój 558, konsultacje 12.15-13.00

http://pages.mini.pw.edu.pl/~loncz/www

username:student

pass:elitmxy

32 punkty na ćwiczeniach zwalnia z części egzaminu

1. Rachunek zdań

(a) zdanie - wyrażenie któremu można przypisać jednoznacznie wartość prawdy lub fałszu

(b) zdania:

i. Paryż jest we Francji

ii. $-1 > 0$

(c) nie zdania:

i. Niebieski to ładny kolor

(d) Zmienne zdaniowe - p, q, r, s zazwyczaj - pod nie podstawiamy zdania

(e) X - zbiór zmiennych zdaniowych

(f) Ze zdań prostych budujemy zdania złożone za pomocą operatorów (spójników) logicznych

i. Negacja, zaprzeczenie, $\neg p$ - nieprawda że p , nie p (\neg / \sim)

ii. Alternatywa $p \vee q$ (p lub q)

iii. Koniunkcja $p \wedge q$ (p i q)

iv. Implikacja $p \implies q$ (jeśli p to q)

v. Równoważność $p \iff q$ (p jest równoważne q)

(g) Budujemy "język legalnych" formuł rachunku zdań (syntaktyka)

i. Def. Zbiór formuł rachunku zdań jest to najmniejszy zbiór Z taki, że

A. Każda zmienna zdaniowa należy do Z

B. Jeśli $\alpha, \beta \in Z$ to $\neg \alpha, \alpha \vee \beta, \alpha \wedge \beta, \alpha \implies \beta, \alpha \iff \beta \in Z$

ii. Konwencja:

A. Dla uproszczenia formuł przyjmujemy priorytet wykonywania operacji

\neg , potem \wedge / \vee , potem \implies / \iff

A. $((\neg q) \wedge p) \implies p \iff (p \vee q)$ sprowadza się do $(\neg q \wedge p \implies p) \iff p \vee q$

iii. X - zbiór zmiennych zdaniowych

A. Def. Wartościowanie jest to funkcja $V: X \rightarrow \{0, 1\}$ (prawda, fałsz) - przypisuje zmiennym zdaniowym wartości logiczne

p	$\neg p$
-----	----------

B.	<table><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	0	0	1
1	0				
0	1				

	p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \implies q$	$p \iff q$
	0	0	0	0	1	1
C.	1	0	1	0	0	0
	0	1	1	0	1	0
	1	1	1	1	1	1

iv. Rozszerzamy wartościowanie na zbiór Z formuł rachunku zdań

A. $\alpha, \beta \in Z$

B. $V: X \rightarrow \{0, 1\}$

C. $V(\neg \alpha) = \neg V(\alpha)$

D. $V(\alpha \vee \beta) = V(\alpha) \vee V(\beta)$

E. $V(\alpha \wedge \beta) = V(\alpha) \wedge V(\beta)$

F. $V(\alpha \implies \beta) = V(\alpha) \implies V(\beta)$

G. $V(\alpha \iff \beta) = V(\alpha) \iff V(\beta)$

H. Przykład: $X = \{p, q\}$, $V(p) = 1$, $V(q) = 0$

$V((\neg q \wedge p) \implies p) \iff p \vee q = 1$

(h) def. Tautologia rachunku zdań jest to formuła prawdziwa dla każdego wartościowania zmiennych zdaniowych

- i. $p \vee \neg p$ prawo wyłączonego środka
- ii. $\neg(p \wedge \neg p)$ prawo sprzeczności
- iii. $p \vee p \iff p$
- iv. $p \wedge p \iff p$ idempotentność alternatywy i koniunkcji
- v. $p \iff \neg(\neg p)$ podwójna negacja
- vi. $(p \vee q) \wedge r \iff (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
- vii. $(p \wedge q) \vee r \iff (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ prawo rozdzielności \wedge
- viii. $(p \vee q) \vee r \iff p \vee (q \vee r)$
- ix. $(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r)$ łączność \wedge
- x. $(p \implies q) \wedge (q \implies r) \implies (p \implies r)$ przechodność implikacji
- xi. $(p \implies q) \iff (\neg p \vee q)$ eliminacja implikacji
- xii. $(p \iff q) \iff (p \implies q) \wedge (q \implies p)$ eliminacja równoważności
- xiii. $\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$
- xiv. $\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$ prawa de Morgana \wedge
- xv. $\neg(p \implies q) \iff p \wedge \neg q$ negacja implikacji
- xvi. $(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p)$ kontrapozycja
- xvii. $p \implies (\neg p \implies q)$

A.

p	q	$\neg p \implies q$	$p \implies (\neg p \implies q)$
0	0	0	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

B. Przypuszcmy że przy pewnym wartościowaniu formuła jest fałszywa. Wtedy p musi być prawdziwe, a następnik fałszywy. Jeśli p jest prawdziwe, to następnik też jest prawdziwy, więc implikacja musi wartościować się do prawdy.

(i) Podejście aksjomatyczne do rachunku zdań

- i. Def. Aksjomat - formuła rachunku zdań ($\in Z$) o której przyjmujemy, że jest prawdziwa
- ii. Def. Dowód formalny formuły $\beta \in Z$ jest to ciąg formuł $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in Z$ taki, że
 - A. $\alpha_n = \beta$
 - B. dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ α_i jest aksjomatem, lub istnieją $j, k \in 1, 2, \dots, i-1$ takie że $j < k$ oraz $\alpha_k = (\alpha_j \implies \alpha_i)$
- iii. Def. Formułę nazywamy twierdzeniem rachunku zdań jeśli istnieje jej dowód formalny
- iv. Aksjomaty rachunku zdań (przykładowo) ($A, B, C \in Z$) (nie trzeba pamiętać)
 - A. $(A \implies (B \implies A))$
 - B. $(A \implies (B \implies C)) \implies ((A \implies B) \implies (A \implies C))$
 - C. $(\neg A \implies B) \implies ((\neg A \implies \neg B) \implies A)$
- v. Twierdzenie o pełności
 - A. Formuła rachunku zdań jest twierdzeniem \iff jest tautologią
- vi. Przykład dowodu formalnego formuły $\alpha \implies \alpha$ ($A = \alpha, B = \beta, C = \alpha$):
 - A. $\alpha_1 = (\alpha \implies (\beta \implies \alpha)) \implies \alpha$ - aksjomat 1
 - B. $\alpha_2 = (\alpha \implies (\beta \implies \alpha)) \implies ((\alpha \implies \beta) \implies (\alpha \implies \alpha))$ - aksjomat 2
 - C. α_3

(j) Tw. Każda formuła F zapisana w języku rachunku zdań sprowadza się do postaci dysjunktywno koniunktywnej (DNF). Czyli dla każdej F istnieje F' w DNF tak, że $F \iff F'$

- i. DNF to drzewkowo alternatywy na samej górze, poziom niżej koniunkcja, dwa poziomy niżej zmienna lub jej negacja

09.10.2019

Rachunek predykatów

Na elitmie $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0$

1. Def: Wyrażenie $\phi(x)$, które po wstawieniu za x konkretnej wartości z ustalonego zbioru X nazywamy **funkcją zdaniową**

- (a) X - **zakres** zmiennej x
- (b) **Kwantyfikator ogólny** (uniwersalny)
 - i. $(\forall_{x \in X})\phi(x)$ oznacza, że dla każdego $x \in X$ zdanie $\phi(x)$ jest prawdziwe
 - ii. \wedge taki napis jest zdaniem
- (c) **Kwantyfikator szczegółowy** (egzystencjalny)
 - i. $(\exists_{x \in X})\phi(x)$ oznacza, że istnieje takie $x \in X$, dla którego zdanie $\phi(x)$ jest prawdziwe
- (d) Przykłady (b,c):
 - i. $\forall_{x \in \mathbb{R}} x^2 \geq 1$ - zdanie fałszywe
 - ii. $\exists_{x \in \mathbb{R}} x^2 = x + 1$ - zdanie prawdziwe

2. Def: $\phi(x)$ - funkcja zdaniowa, X - zakres zmiennej x , $A \subseteq X$, $\alpha(x)$ - funkcja zdaniowa:

- (a) :
 - i. $\forall_{x \in A} \phi(x) \iff \text{def} \forall_{x \in X} (x \in A \implies \phi(x))$
 - ii. $\exists_{x \in A} \phi(x) \iff \text{def} \exists_{x \in X} (x \in A \wedge \phi(x))$
- (b) A więc generalnie:
 - i. $\forall_{x: \alpha(x)} \phi(x) \iff \text{def} \forall_{x \in X} (\alpha(x) \implies \phi(x))$
 - ii. $\exists_{x: \alpha(x)} \phi(x) \iff \text{def} \exists_{x \in X} (\alpha(x) \wedge \phi(x))$
- (c) Niech $A = \emptyset$
 - i. $\forall_{x \in \emptyset} \phi(x) \iff \forall_{x \in X} (x \in \emptyset \implies \phi(x))$ - zdanie prawdziwe (zawsze)
 - ii. $\exists_{x \in \emptyset} \phi(x) \iff \exists_{x \in X} (x \in \emptyset \wedge \phi(x))$ - zdanie fałszywe (zawsze)
- (d) Jeśli nie prowadzi to do nieporozumień, to będziemy pisać $\forall_x \phi(x)$ zamiast $\forall_{x \in X} \phi(x)$ oraz $\exists_x \phi(x)$ zamiast $\exists_{x \in X} \phi(x)$

3. Funkcje zdaniowe wielu zmiennych

- (a) $\phi(x, y)$ - staje się zdaniem po wstawieniu za x, y konkretnych wartości z zakresu x, y
- (b) $\phi(x_1, \dots, x_n)$ - funkcja zdaniowa n zmiennych
- (c) Przykład:
 - i. $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{Z}: \phi(x, y) = (x \neq y)$ - funkcja zdaniowa 2 zmiennych
 - ii. $\forall_{x \in \mathbb{R}} x \neq y$ - nie zdanie, lecz funkcja zdaniowa - wartość zależy od y
 - iii. $\exists_{y \in \mathbb{Z}} \forall_{x \in \mathbb{R}} x \neq y$ - zdanie fałszywe

4. $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ - zbiór skończony

- (a) $\forall_{x \in X} \phi(x) \iff \phi(x_1) \wedge \dots \wedge \phi(x_n)$
- (b) $\exists_{x \in X} \phi(x) \iff \phi(x_1) \vee \dots \vee \phi(x_n)$

5. Def: **Zasięg kwantyfikatora** to funkcja zdaniowa, której ten kwantyfikator dotyczy

- (a) $\exists_{y \in \mathbb{Z}} \forall_{x \in \mathbb{R}} x \neq y$ - zasięg kwantyfikatora $\exists_{y \in \mathbb{Z}}$
- (b) Przykład: $\forall_x (\forall_y (x > y \implies (\exists_z) \underline{\underline{(x > z > y)}}))$ - odpowiednie podkreślenia to zasięgi kwantyfikatorów na lewo od nich
- (c) Notacja: Zamiast $\forall_x (\exists_y (\forall_z (\dots)))$ piszemy $\forall_x \exists_y \forall_z \dots$

6. Def: Zmienną x nazywamy **związaną** jeśli leży ona w zasięgu kwantyfikatora (w którym występuje!) dla \forall_x lub \exists_x . W przeciwnym wypadku x jest zmienną **wolną**

- (a) Przykłady:
 - i. $\exists_y \forall_x (x + y > z)$ - x, y - zmienna związana, z - zmienna wolna
 - ii. $z^2 \neq 1 \wedge \forall_y x^2 = y^2$ - y - zmienna związana, x, z - zmienne wolne
- (b) $\phi(x) = "x \text{ jest liczbą pierwszą}"$ - funkcja zdaniowa o zakresie $\mathbb{N} \setminus \{0\}$
 - i. $\phi(x) = x > 1 \wedge \forall_{n \in \mathbb{N}} (n|x \implies n = x \vee n = 1)$ ($n|x$ oznacza "n dzieli x")

7. Definicja rachunku predykatów

- (a) A - alfabet: zbiór stałych, (np liczby rzeczywiste), symbole funkcyjne i symbole relacyjne (**predykaty**)
- (b) x, y, z - symbole zmiennych
- (c) **Zbiór termów T** to najmniejszy zbiór taki, że
 - i. wszystkie stałe i zmienne należą do T
 - ii. jeśli $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ oraz $\alpha \in A$ jest symbolem funkcji m -argumentowej, to $\alpha(t_1, \dots, t_n) \in T$
 - iii. Elementy zbioru T nazywamy termami
- (d) **Predykat** to m -argumentowa funkcja, której wartościami jest prawda lub fałsz
 - i. Przykłady $x, y \in \mathbb{R}$:
 - A. $\beta(x, y) = (x < y)$ - predykat 2-argumentowy
 - B. $p(x) = (x \text{ jest liczbą pierwszą})$ $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- (e) t_1, \dots, t_m - termy, β - symbol m -argumentowego predykatu - wtedy wyrażenie $\beta(t_1, \dots, t_m)$ nazywamy **formułą atomową** rachunku predykatów
- (f) **Zbiór formuł rachunku predykatów** jest to najmniejszy zbiór Z taki, że
 - i. Wszystkie formuły atomowe należą do Z
 - ii. Jeśli $A, B \in Z$, to $(\neg A, A \vee B, A \wedge B, A \implies B, A \iff B) \in Z$
 - iii. Jeśli $A \in Z$ i x jest zmienną wolną (nie związaną kwantyfikatorem) w A , to $\forall_x A \exists_x A \in Z$

8. Tautologie rachunku predykatów:

- (a) Def: Formułę rachunku predykatów nazywamy **tautologią** jeśli jest prawdziwa dla wszystkich interpretacji symboli funkcyjnych, predykatów, i dla wszystkich wartościowań zmiennych wolnych występujących w tej formule.

(b) Przykłady:

- i. Formuły powstałe z tautologii rachunku zdań przez zastąpienie zmiennych formami rachunku predykatów (X - zakres x)
 - A. $\alpha \vee \neg \alpha \implies \forall_x \phi(x) \vee \neg \forall_x \phi(x)$
- ii. $\forall_x \forall_y \phi(x, y) \iff \forall_y \forall_x \phi(x, y)$
- iii. $\exists_x \exists_y \phi(x, y) \iff \exists_y \exists_x \phi(x, y)$ - \wedge przemienność kwantyfikatorów tego samego rodzaju
- iv. $\exists_x \forall_y \phi(x, y) \implies \forall_y \exists_x \phi(x, y)$ - ale nie w drugą stronę

Dowód: X, Y - zakres zmiennych x, y

$x_0 \in X$ będzie takie, że $\forall_y \phi(x_0, y)$ jest prawdą

Weźmy dowolne $y \in Y$. Prawdą jest, że dla tego y , $\phi(x_0, y)$ jest prawdą

Zatem rzeczywiście $\forall_y \exists_x \phi(x, y)$

Przykład: Przykład, że implikacja odwrotna nie zachodzi

$X = Y = \mathbb{R}$

$\phi(x, y) = (x > y)$

$\exists_{x \in \mathbb{R}} \forall_{y \in \mathbb{R}} x > y$ - zdanie fałszywe

$\forall_{y \in \mathbb{R}} \exists_{x \in \mathbb{R}} x > y$ - zdanie prawdziwe, więc

$\forall_{y \in \mathbb{R}} \exists_{x \in \mathbb{R}} x > y \implies \exists_{x \in \mathbb{R}} \forall_{y \in \mathbb{R}} x > y$ jest fałszywe

- v. $\forall_x (\phi(x) \wedge \psi(x)) \iff \forall_x \phi(x) \wedge \forall_x \psi(x)$
- vi. $\exists_x (\phi(x) \vee \psi(x)) \iff \exists_x \phi(x) \vee \exists_x \psi(x)$ -forall-koniunkcja/ exists-alternatywa
- vii. $\exists_x (\phi(x) \wedge \psi(x)) \implies \exists_x \phi(x) \wedge \exists_x \psi(x)$
- viii. $\forall_x (\phi(x) \vee \psi(x)) \iff \forall_x \phi(x) \vee \forall_x \psi(x)$ - forall-alternatywa/ exists-koniunkcja
- ix. $\forall_x \phi(x) \implies \phi(x_0)$ gdzie $x_0 \in X$
- x. $\neg(\forall_x \phi(x)) \iff \exists_x \neg \phi(x)$
- xi. $\neg(\exists_x \phi(x)) \iff \forall_x \neg \phi(x)$
- xii. $(\forall_x (\phi(x) \implies \psi(x))) \implies ((\forall_x \phi(x)) \implies (\forall_x \psi(x)))$
- xiii. $\forall_x \phi(x) \vee \psi \iff (\forall_x \phi(x)) \vee \psi$ - x nie jest zmienną wolną w ψ
- xiv. $\forall_x (\phi(x) \wedge \psi) \iff (\exists_x \phi(x)) \wedge \psi$
- xv. $(\phi \implies \forall_x \psi(x)) \iff \forall_x (\phi \implies \psi(x))$
- xvi. $(\phi \implies \exists_x \psi(x)) \iff \exists_x (\phi \implies \psi(x))$
- xvii. $((\forall_x \phi(x)) \implies \psi) \iff \exists_x (\phi(x) \implies \psi)$

$$D: \quad ((\forall_x \psi(x)) \implies \phi) \iff \neg(\forall_x \psi(x)) \vee \phi \iff (\exists_x \neg \psi(x)) \vee \phi \iff \exists_x (\neg \psi(x) \vee \phi) \iff \exists_x (\psi(x) \implies \phi)$$

$$xviii. ((\exists_x \phi(x)) \implies \psi) \iff \forall_x (\phi(x) \implies \psi)$$

(c) Przykłady:

$$(vii) \quad \phi(x) = (x > 0), \psi(x) = (x < 0)$$

$$: \quad \exists_x \phi(x) \wedge \exists_x \psi(x) \iff \exists_x x > 0 \wedge \exists_x x < 0$$

: \wedge fałsz - w (vii) implikacja odwrotna nie zachodzi

$$(viii) \quad \phi(x) = (x \geq 0), \psi(x) = (x < 0)$$

$$: \quad \forall_x (\phi(x) \vee \psi(x)) \iff \forall_x (x \geq 0 \vee x < 0) - \text{prawda}$$

$$(xii) \quad \phi(x) = (x > 0), \psi(x) = (x > 1)$$

$$: \quad \forall_x (\phi(x) \implies \psi(x)) \iff \forall_x (x > 0 \implies x > 1) - \text{działa, bo weźmy } x = \frac{1}{2}$$

... W (viii) oraz (xii) implikacje odwrotne nie są tautologiami

9. Tautologia dla formuł z kwantyfikatorami:

(a) Logika pierwszego rzędu ma inną definicję tautologii - dla wszystkich wartościowań zdanie jest prawdziwe

(b) Dla rachunku predykatów tautologia jest formułą lub zdaniem - (formuła bez zmiennych wolnych),

i. Zdanie jest tautologią jeśli jest prawdziwe w każdym modelu

(c) W logice pierwszego rzędu też były modele, tylko nazywaliśmy je każdym możliwym wartościowaniem

$$10. \forall_{x_{\alpha(x)}} \phi(x) \stackrel{def.}{=} \forall_x \alpha(x) \implies \phi(x)$$

$$11. \exists_{x_{\alpha(x)}} \phi(x) \stackrel{def.}{=} \exists_x \phi(x) \wedge \alpha(x)$$

1. Zbiory - aksjomatyczna teoria zbiorów.

- (a) Zbiór - pojęcie pierwotne (nie definiujemy go)
- (b) bycie elementem zbioru - pojęcie pierwotne
- (c) $A, B, C, \dots X, \dots$ - zbiory
- (d) $a \in A$ - a jest elementem zbioru A (a należy do A)
- (e) $a \notin A \iff \neg(a \in A)$ - a nie należy do A
- (f) **Aksjomat ekstencjonalności**
 - i. Zbiory A i B są równe wtedy i tylko wtedy gdy mają te same elementy, czyli
 - ii. $A = B \iff \forall x(x \in A \iff x \in B)$
 - iii. **Uwaga** - aby pokazać, że $A = B$ wystarczy udowodnić dwie implikacje $\forall x(x \in A \implies x \in B) \wedge (x \in B \implies x \in A)$

(g) **Aksjomat zbioru pustego**

- i. Istnieje zbiór pusty czyli taki, który nie ma żadnego elementów
- ii. \emptyset - zbiór pusty, $\forall x x \notin \emptyset$
- iii. Twierdzenie - istnieje tylko jeden zbiór pusty

D: A, B - zbiory puste, $\neg(A = B)$ czyli $A \neq B$

: Z aksjomatu ekstencjonalności zbiory są różne $\iff \exists x \neg((x \in A \implies x \in B) \wedge (x \in B \implies x \in A)) \iff \exists x \neg(x \in A \implies x \in B) \vee \neg(x \in B \implies x \in A) \iff$

: $\iff \exists x(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$

: $x \in A \wedge x \notin B$ zdanie fałszywe, bo A jest zbiorem pustym

: $x \in B \wedge x \notin A$ zdanie fałszywe, bo B jest zbiorem pustym

: Sprzeczność - istnieje tylko jeden zbiór pusty

(h) **Aksjomat wyróżniania**

- i. Jeśli A jest zbiorem, a $\phi(x)$ funkcją zdaniową o zakresie A ($x \in A$), to istnieje zbiór $\{x : x \in A \wedge \phi(x)\} = \{x \in A : \phi(x)\}$

: Czyli $a \in \{x \in A : \phi(x)\} \iff a \in A \wedge \phi(a)$

(i) **Uwaga:** nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów

D: V - zbiór wszystkich zbiorów

: $A = \{X \in V : X \notin X\}$ - zbiór na mocy aksjomatu wyróżnienia

: $A \in A \implies A \notin A$ - sprzeczność. Stąd $A \notin A \implies \neg(A \in A) \iff \neg(A \notin A) \implies A \in A$ - też sprzeczność

: Stąd nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów

(j) **Antynomia (paradoks) Russella**

: $Z = \{X : X \notin X\}$. Czy $Z \in Z$?

: $Z \in Z = \{X : X \notin X\} \iff Z \notin Z$ - sprzeczność

(k) Sposoby definiowania zbiorów

- i. $A = \{1, 3, \sqrt{2}\}, \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

- ii. $\phi(x)$ - funkcja zdaniowa - $A = \{x : \phi(x)\}$ - na przykład $P = \{x : x \text{ jest liczbą parzystą}\}$

A. $a \in \{x : \phi(x)\} \iff \phi(a)$

(l) **Def.** Zbiór A zawiera się w zbiorze B (A jest podzbiorem B) wtedy i tylko wtedy gdy każdy element z A jest elementem B

: $A \subseteq B \iff \forall x(x \in A \implies x \in B)$

(m) **Def.** A jest właściwym podzbiorem B jeśli $A \subseteq B \wedge A \neq B$ (oznaczenie $A \subsetneq B$)(n) **Proste własności**

- i. $A = A$
 - ii. $(A = B \wedge B = C) \implies A = C$
 - iii. $A = B \iff B = A$
 - iv. $A \subseteq A$
 - v. $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \implies A \subseteq C$
- D: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$ (Z)

- : $A \subseteq C?$
- : $x \in A \implies ?x \in C$
- : $x \in A \implies x \in B \implies x \in C$ - z Z
- vi. $A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

(o) **Aksjomat sumy**

- i. Jeśli A i B są zbiorami, to istnieje zbiór $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

(p) **Def.** Iloczyn (przecięcie) zbiorów to zbiór $A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$ (jest to zbiór na mocy aksjomatu wyróżniania)

(q) **Def.** Różnica zbiorów A i B to zbiór $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$

(r) **Prawa rachunku zbiorów** - A, B, C - zbiory

- i. $A \cup B = B \cup A$
- ii. $A \cap B = B \cap A$
- iii. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
- iv. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- v. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- vi. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

D: Trzeba pokazać, że implikacje zachodzą w obie strony. Aksjomat sumy, definicja iloczynu, rachunek zdań, aksjomat sumy

- vii. $A \cap B \subseteq A$
- viii. $A \subseteq A \cup B$
- ix. $A \cap A = A = A \cup A$

2. $A \div B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

23.10.2019

X - zbiór (przestrzeń)

1. Def. Dopełnieniem zbioru A w przestrzeni X nazywamy zbiór $-A = \{x \in X : x \notin A\}$ - na mocy aksjomatu wyróżniania

(a) Własności dopełnienia:

- i. $-(A \cup B) = -A \cap -B$
D: $x \in -(A \cup B) \stackrel{\text{def. dopełnienia}}{\iff} x \notin (A \cup B) \stackrel{\text{def.}}{\iff} \neg(x \in A \cup B) \stackrel{\text{def. iloczynu}}{\iff} \neg(x \in A \wedge x \in B) \stackrel{\text{prawo de Morgana}}{\iff} x \notin A \vee x \notin B \iff x \in -A \cap -B$
- ii. $-(A \cap B) = -A \cup -B$
- iii. $\emptyset \subseteq A$
- iv. $A \cup \emptyset = A$
- v. $A \cap \emptyset = \emptyset$
- vi. $A \setminus \emptyset = A$
- vii. $\emptyset \setminus A = \emptyset$
- viii. $-\emptyset = X$
- ix. $-X = \emptyset$
- x. $A \cup -A = X$
- xi. $A \cap -A = \emptyset$
- xii. $-(-A) = A$
- xiii. $A \setminus B = A \cap -B$
- xiv. $A \cap X = A$
- xv. $A \cup X = X$
- xvi. $A \subseteq B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B$
- xvii. $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \iff A \cup B \subseteq C$
- xviii. $C \subseteq A \wedge C \subseteq B \iff C \subseteq A \cap B$

(b) Przykład:

- i. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
- ii. $\emptyset \in \{\emptyset\}$
- iii. $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$
- iv. $\{\emptyset\} \notin \{\emptyset\}$
- v. $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

(c) \emptyset - jedyny element zbioru $\{\emptyset\}$, ale $\emptyset \neq \{\emptyset\}$

2. **Aksjomat zbioru potęgowego:** Dla każdego zbioru istnieje zbiór (potęgowy) wszystkich jego podzbiorów.

A - zbiór, $P(A)$ (lub 2^A) - zbiór potęgowy

$P(A) = \{B : B \subseteq A\}$

$\emptyset, A \in P(A)$ zawsze

(a) Przykład: $A = \{a, b\}$, $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

3. **Aksjomat pary nieuporządkowanej:** Dla dowolnych zbiorów A i B istnieje zbiór, którego elementami są dokładnie zbiory A oraz B

$\{A, B\} = \{x : x = A \vee x = B\}$

$\{A\} = \{A, A\}$ - Singleton, zbiór 1-elementowy

(a) Def. **Parą uporządkowaną** $\langle a, b \rangle$ nazywamy zbiór $\{\{a\}, \{a, b\}\}$

i. $\langle a, a \rangle = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$

(b) Twierdzenie: $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \iff a = c \wedge b = d$

i. \Leftarrow : $a = c \wedge b = d$, więc $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ więc $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$

ii. \Rightarrow : Dla $a = b$, $\langle a, b \rangle = \{\{a\}\}$, $\langle c, d \rangle = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ więc $\{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ tylko gdy $c = d$, a wtedy $\{\{a\}\} = \{\{c\}\}$, więc z tego wynika że $a = c \wedge b = d$

Dla $a \neq b$: $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ tylko gdy $(\{a\} = \{c\} \vee \{a\} = \{c, d\}) \wedge (\{a, b\} = \{c, d\} \vee \{a, b\} = \{d\})$.
Ponieważ $\{a, b\}$ oraz $\{c, d\}$ są dwuelementowe, bo $a \neq b$, to $\{a\} = \{c\} \wedge \{a, b\} = \{c, d\}$ z czego $a = b$ oraz $c = d$

iii. Implikacja zachodzi w dwie strony, więc jest równoważność

4. Def. **Iloczynem kartezjańskim** zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \times B = \{\langle a, b \rangle : a \in A \wedge b \in B\}$

(a) Przykłady

- i. $\{1, 2\} \times \{3, 4\} = \{< 1, 3 >, < 1, 4 >, < 2, 3 >, < 2, 4 >\}$
- ii. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ - płaszczyzna \mathbb{R}^2
- iii. $[1, 3] \times [1, 2]$ - prostokąt o wierzchołkach $< 1, 1 >, < 1, 2 >, < 3, 1 >, < 3, 2 >$

5. Def. **Uporządkowaną trójką** $< a, b, c >$ nazywamy zbiór $< < a, b >, c >$

6. Def. **Uporządkowaną n-tką** $< x_1, \dots, x_n >$ nazywamy zbiór $< < x_1, \dots, x_{n-1} >, x_n >$

(a) Twierdzenie: Dla $n \geq 2$, $< x_1, \dots, x_n > = < y_1, \dots, y_n > \iff \forall_{i \in \{1, \dots, n\}} x_i = y_i$

i. Dowód indukcyjny: Dla $n = 2$ prawda

Założenie indukcyjne: $< x_1, \dots, x_{n-1} > = < y_1, \dots, y_{n-1} > \iff \forall_{i \in \{1, \dots, n-1\}} x_i = y_i$.

$a = < x_1, \dots, x_{n-1} >, b = < y_1, \dots, y_{n-1} >$.

Wtedy z definicji uporządkowanej n-tki $< x_1, \dots, x_n > = < a, x_n >$, oraz $< y_1, \dots, y_n > = < b, y_n >$

Z tego, że dla $n = 2$, to $< a, x_n > = < b, y_n > \iff a = b \wedge x_n = y_n$

Z założenia indukcyjnego, $a = b \iff \forall_{i \in \{1, \dots, n-1\}} x_i = y_i$, więc $< a, x_n > = < b, y_n > \iff \forall_{i \in \{1, \dots, n\}} x_i = y_i$ co kończy dowód.

7. **Aksjomat sumy zbiorów rodziny**: \mathcal{A} – rodzina zbiorów - zbiór którego elementami są zbiory

(a) Dla dowolnej rodziny zbiorów \mathcal{A} istnieje zbiór:

$$\bigcup \mathcal{A} := \{x : \exists A (A \in \mathcal{A} \wedge x \in A)\}$$

do którego należą te elementy, które należą do co najmniej jednego zbioru rodziny \mathcal{A}

(b) Iloczynem (przecięciem) rodziny zbiorów \mathcal{A} nazywamy zbiór

$$\bigcap \mathcal{A} := \{x \in \bigcup \mathcal{A} : \forall A (A \in \mathcal{A} \implies x \in A)\}$$

Istnieje na mocy aksjomatu wyróżniania i aksjomatu sumy rodziny zbiorów

8. I - zbiór indeksów, X – zbiór przestrzeni

Def. Funkcję $A : I \rightarrow P(X)$ i $i \mapsto A(i) \subseteq X$ nazywamy **indeksowaną rodziną zbiorów** (będziemy pisać A_i zamiast $A(i)$)

(a) R - zbiór wartości funkcji A

$$R = \{B \in P(X) : \exists_{i \in I} B = A(i)\} = \{A_i : i \in I\}$$

9. Def. **Sumą indeksowanej rodziny zbiorów** $A : I \rightarrow P(X)$ nazywamy sumę rodziny R , czyli $\bigcup R = \bigcup \{A_i : i \in I\}$

Oznaczenie $\bigcup_{i \in I} A_i$

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists_{i \in I} x \in A_i$$

10. Def. Iloczynem rodziny indeksowanej $A : I \rightarrow P(X)$ nazywamy zbiór $\bigcap R = \bigcap \{A_i : i \in I\}$

Oznaczamy $\bigcap_{i \in I} A_i$,

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall_{i \in I} x \in A_i$$

1. Własności dla X - przestrzeń, $A : I \rightarrow P(X)$, $B : I \rightarrow P(X)$, C - zbiór(a) Jeśli $i_0 \in I$, to $A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ (b) Jeśli $i_0 \in I$, to $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_{i_0}$ (c) Jeżeli $\forall_{i \in I} A_i \subseteq C$, to $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq C$ (d) Jeżeli $\forall_{i \in I} C \subseteq A_i$, to $C \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$ i. D: Niech $x \in C \implies \forall_{i \in I} x \in A_i \implies x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ (e) $\bigcup_{i \in I} (A_i \cup B_i) = (\bigcup_{i \in I} A_i) \cup (\bigcup_{i \in I} B_i)$ (f) $\bigcap_{i \in I} (A_i \cap B_i) \subseteq (\bigcap_{i \in I} A_i) \cap (\bigcap_{i \in I} B_i)$ i. D: $x \in \bigcap_{i \in I} (A_i \cap B_i) \iff \forall_{i \in I} x \in A_i \cap B_i \iff \forall_{i \in I} (x \in A_i \wedge x \in B_i) \iff (x \in \bigcap_{i \in I} A_i) \wedge (x \in \bigcap_{i \in I} B_i) \iff x \in (\bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{i \in I} B_i)$ (g) $\bigcup_{i \in I} (A_i \cap B_i) \subseteq (\bigcup_{i \in I} A_i) \cap (\bigcup_{i \in I} B_i)$ i. D: $x \in \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B_i) \implies \exists_{i \in I} x \in A_i \cap B_i \implies \exists_{i \in I} (x \in A_i \wedge x \in B_i) \implies (\exists_{i \in I} x \in A_i) \wedge (\exists_{i \in I} x \in B_i) \implies x \in \bigcup_{i \in I} A_i \wedge x \in \bigcup_{i \in I} B_i \implies x \in (\bigcup_{i \in I} A_i) \cap (\bigcup_{i \in I} B_i)$ (h) $(\bigcap_{i \in I} A_i) \cup (\bigcap_{i \in I} B_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B_i)$, Inkluzja przeciwna nie zachodzi(i) $-\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} -A_i$ i. D: $x \in -\bigcup_{i \in I} A_i \iff x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \iff \neg(x \in \bigcup_{i \in I} A_i) \iff \neg(\exists_{i \in I} x \in A_i) \iff \forall_{i \in I} \neg(x \in A_i) \iff x \in \bigcap_{i \in I} -A_i$ (j) $-\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} -A_i$ (k) Jeżeli $\forall_{i \in I} A_i \subseteq B_i$ to $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$ oraz $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i$ (l) $\bigcup_{i \in I} (C \cap A_i) = C \cap \bigcup_{i \in I} A_i$ i. D: $x \in \bigcup_{i \in I} (C \cap A_i) \iff \exists_{i \in I} x \in C \cap A_i \iff \exists_{i \in I} (x \in C \wedge x \in A_i) \iff x \in C \wedge \exists_{i \in I} x \in A_i \iff x \in C \cap \bigcup_{i \in I} A_i$ (m) $\bigcap_{i \in I} (C \cup A_i) = C \cup (\bigcap_{i \in I} A_i)$ (n) Jeżeli $J \subseteq I$ to $\bigcup_{j \in J} A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ oraz $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{j \in J} A_j$ i. D: $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \implies \forall_{i \in I} x \in A_i \implies \forall_{j \in J} x \in A_j \implies x \in \bigcap_{j \in J} A_j$ (o) $\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset$ i. D: Przypuśćmy, że istnieje $x \in \bigcup_{i \in \emptyset} A_i$, to $\exists_{i \in \emptyset} x \in A_i \iff \exists_{i \in \emptyset} i \wedge x \in A_i$, ale $i \in \emptyset$ to zdanie fałszywe stąd sprzeczność(p) $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = X$ D: $x \in \bigcap_{i \in \emptyset} A_i \iff \forall_{i \in \emptyset} x \in A_i \iff \forall_{i \in \emptyset} i \implies x \in A_i \iff x \in X$ 2. Indeksowanie dwoma indeksami I, J - zbiory indeksów $C : I \times J \rightarrow P(X)$, $(i, j) \mapsto c_{ij} = C(i, j)$

$$x \in \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} C_{ij} \iff \exists_{j \in J} x \in \bigcap_{i \in I} C_{ij} \iff \exists_{j \in J} \forall_{i \in I} x \in C_{ij}$$

Analogicznie definiujemy $\bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} C_{ij}$ oraz $\bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I} C_{ij}$ oraz $\bigcap_{j \in J} \bigcap_{i \in I} C_{ij}$ Własności: $C : I \times J \rightarrow P(X)$

$$(a) \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I} C_{ij} = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} C_{ij} \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} C_{ij}$$

$$(b) \bigcap_{j \in J} \bigcap_{i \in I} C_{ij} = \bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J} C_{ij} \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} C_{ij}$$

$$(c) \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} C_{ij} \subseteq \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} C_{ij}$$

$$i. x \in \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} C_{ij} \iff \exists_{i \in I} \forall_{j \in J} x \in C_{ij} \implies \forall_{j \in J} \exists_{i \in I} x \in C_{ij} \iff x \in \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} C_{ij}$$

3. nieskończone rodziny indeksowane. $I = J = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}^2$ (a) Dla każdego $a, b \in \mathbb{R}$, niech $C_{ab} = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : y \leq ax + b \}$

$$\bigcup_{a \in \mathbb{R}} C_{ab} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times (b, +\infty)$$

$$\bigcap_{b \in \mathbb{R}} C_{ab} = \mathbb{R}^2$$

$$\bigcap_{a \in \mathbb{R}} C_{ab} = \{0\} \times (-\infty, b)$$

$$\bigcap_{b \in \mathbb{R}} C_{ab} = \emptyset$$

$$\bigcap_{b \in \mathbb{R}} \bigcup_{a \in \mathbb{R}} C_{ab} = \bigcap_{b \in \mathbb{R}} (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times (b, +\infty)) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$$

$$\bigcup_{b \in \mathbb{R}} \bigcap_{a \in \mathbb{R}} C_{ab} = \bigcup_{b \in \mathbb{R}} (\{0\} \times (-\infty, b)) = \{0\} \times \mathbb{R}$$

Relacje

1. X, Y - zbiory

Def: **Relacją dwuargumentową** nazywamy podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$

Zamiast $\langle x, y \rangle \in R$ piszemy $x R y$

2. Def: $R \subseteq X \times Y$

Zbiór $D_R = \{x \in X : \exists y \in Y \langle x, y \rangle \in R\}$ nazywamy dziedziną relacji R

Na przykład $R = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ to koło

3. Jeśli $X = Y$, to mówimy, że relacja $R \subseteq X^2$ jest **określona** na zbiorze X

4. Relacja R jest **pusta** jeśli jest zbiorem pustym

pełna, jeśli $R = X \times Y$

5. Def: Relacja **odwrotna** do relacji $R \subseteq X \times Y$ to relacja $R^{-1} = \{\langle y, x \rangle \in Y \times X : \langle x, y \rangle \in R\}$

6. Def: **Złożeniem** relacji $R \subseteq X \times Y$ oraz relacji $S \subseteq Y \times Z$ nazywamy relację $S \circ R = \{\langle x, z \rangle \in X \times Z : \exists y \in Y \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in S\}$

7. Def:

(a) R jest **zwrotna**, jeśli $\forall x \in X x R x$

(b) R jest **symetryczna**, jeśli $\forall x, y \in X x R y \implies y R x$

(c) R jest **przechodnia**, jeśli $\forall x, y, z \in X (x R y \wedge y R z) \implies x R z$

(d) R jest **antysymetryczna**, jeśli $\forall x, y \in X (x R y \wedge y R x) \implies x = y$

(e) R jest **przeciwzwrotna**, jeśli $\forall x \in X \neg(x R x)$

(f) R jest **przeciwsymetryczna**, jeśli $\forall x, y \in X x R y \implies \neg(y R x)$

(g) R jest **spójna**, jeśli $\forall x, y \in X x R y \wedge y R x \vee x = y$

8. Def: Relację $R \subseteq X^2$ nazywamy relację **równoważności** jeśli R jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, na przykład

Relacja równości

Relacja równoległości

Relacja pełna $R = X^2$ dla dowolnego zbioru x

Relacja \equiv_n - przystawanie modulo

Relacja $R \subseteq \mathbb{R}^2, x R y \iff \exists q \in \mathbb{Q} x + q = y$

Relacja dla par wektorów R taka że $\langle a, b \rangle R \langle c, d \rangle$ gdy $b - a = d - c$

Relacja \iff , relacja $a R b := a \implies b \wedge b \implies a$

9. Def: Niech $\sim \subseteq X \times X$ będzie relacją równoważności i $a \in X$

Zbiór $[a]_{\sim} = \{x \in X : x \sim a\}$ nazywamy klasą **abstrakcji (równoważności)** dla elementu a

Element a nazywamy reprezentantem klasy abstrakcji $[a]_{\sim}$

10. Własności klas abstrakcji

(a) $\forall a \in X a \in [a]_{\sim}$

(b) $\forall a, b \in X b \in [a]_{\sim} \implies a \in [b]_{\sim}$

(c) $\forall a, b \in X [a]_{\sim} = [b]_{\sim} \iff a \sim b$

(d) $\forall a, b \in X ([a]_{\sim} = [b]_{\sim}) \vee [a]_{\sim} \cap [b]_{\sim} = \emptyset$

(e) $\bigcup_{a \in X} [a]_{\sim} = X$

11. **Podziałem zbioru** X nazywamy rodzinę $\{A_i : i \in I\}$ taką, że

$\forall i \in I A_i \neq \emptyset$

$\forall i, j \in I (i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset)$

$\bigcup_{i \in I} A_i = X$

(a) Wniosek : Rodzina klas abstrakcji relacji równoważności $\sim \subseteq X^2$ jest podziałem X

12. Def: \sim - relacja równoważności na X

Zbiór klas abstrakcji relacji \sim nazywamy **zbiorem ilorazowym** i oznaczamy $X/{\sim}$

13. Twierdzenie: Niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie podziałem zbioru X . Wtedy istnieje relacja równoważności \sim na X taka, że $X/{\sim} = \{A_i : i \in I\}$

Funkcje

1. Def: **Relację** $R \subseteq X \times Y$ nazywamy **funkcją**, jeśli $\forall_{x \in X} \forall_{y_1, y_2 \in Y} xRy_1 \wedge xRy_2 \implies y_1 = y_2$
Gdy relacja jest funkcją często zamiast xRy piszemy $y = R(x)$. Element x nazywamy **argumentem funkcji** R , zaś y **wartością R dla argumentu x**
2. Def: Zbiór $D_r = \{x \in X : \exists_{y \in Y} R(x) = y\}$ nazywamy **dziedzina** funkcji R . Jeśli $D_R = X$, to oznaczamy $R : X \rightarrow Y$
3. Def: Jeśli przeciwdziedzina jest równa zbiorowi wartości, to mówimy, że funkcja jest “na”, lub że jest **surjekcją**
4. Twierdzenie - Złożenie dwóch funkcji jest funkcją
5. Uwaga: Relacja odwrotna do funkcji nie musi być funkcją
6. Def: Funkcję $f : X \rightarrow Y$ nazywamy **różnowartościową**, lub **iniekcją**, jeśli $\forall_{x_1, x_2 \in X} x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$
7. Twierdzenie: Jeśli $f : X \rightarrow Y$ jest iniekcją to jej relacja odwrotna jest funkcją
8. Uwaga: Jeśli funkcja f jest **na** zbiór Y , to piszemy $f^{-1} : Y \rightarrow X$
9. Twierdzenie: Niech $f : X \rightarrow Y$ oraz $f^{-1} : Y \rightarrow X$. Wtedy $f \circ f^{-1} = id_Y = \{(y, y) : y \in Y\}$, $f^{-1} \circ f = id_X = \{(x, x) : x \in X\}$
10. Funkcja która jest iniekcją i surjekcją nazywamy **bijekcją**
11. Niech $f : X \rightarrow Y$ oraz $Z \subseteq X$. Funkcję $g = f|_Z = f \cap Z \times Y$ nazywamy obcięciem funkcji f do zbioru Z
12. Niech $f_i : X_i \rightarrow Y$ dla $i \in I$ oraz dla każdego $i \neq j \in I$ $X_i \cap X_j = \emptyset$. Wtedy $f = f_1 \cup \dots \cup f_n$ jest funkcją i $f : \bigcup_{i \in I} X_i \rightarrow Y$
13. Niech X, Y, Z, T - zbiory oraz $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z, h : Z \rightarrow T$ - funkcje
 - (a) $f : X \xrightarrow{1-1} Y, g : Y \xrightarrow{1-1} Z \implies g \circ f : X \xrightarrow{1-1} Z$ - (1-1) - różnowartościowe
 - (b) $f : X \xrightarrow{na} Y, g : Y \xrightarrow{na} Z \implies g \circ f : X \xrightarrow{na} Z$
 - (c) $f : X \xrightarrow{bijekcja} Y, g : Y \xrightarrow{bijekcja} Z \implies g \circ f : X \xrightarrow{bijekcja} Z$
 - (d) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
 - (e) Składanie funkcji nie jest przemienne
 - (f) $f \circ id_x = f, id_y \circ f = f$
 - (g) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
14. Def: Niech $f : X \rightarrow Y, A \subseteq X, B \subseteq Y$. Zbiór $f[A] = \{y \in Y : \exists_{x \in A} y = f(x)\} = \{f(x) : x \in A\} \subseteq Y$ nazywamy **obrazem** zbioru A funkcji f
Zbiór $f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$ nazywamy **przeciwoobrazem** funkcji f
15. Twierdzenie: $f : X \rightarrow Y, A_1, A_2 \subseteq X, I \rightarrow P(X)$ (rodzina indeksowana). Wtedy:
 - (a) $f[\emptyset] = \emptyset$
 - (b) $A_1 \subseteq A_2 \implies f[A_1] \subseteq f[A_2]$
 - (c) $f[\bigcup_{i \in I} A_i] = \bigcup_{i \in I} f[A_i]$
 - (d) $f[\bigcap_{i \in I} A_i] \subseteq \bigcap_{i \in I} f[A_i]$
 - (e) Jeśli f jest iniekcją to we własności (d) mamy równość
16. Twierdzenie: $f : X \rightarrow Y, B_1, B_2 \subseteq Y, I \rightarrow P(Y)$ (rodzina indeksowana). Wtedy:
 - (a) $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$
 - (b) $B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}[B_1] \subseteq f^{-1}[B_2]$
 - (c) $f^{-1}[\bigcup_{i \in I} B_i] = \bigcup_{i \in I} f^{-1}[B_i]$
 - (d) $f^{-1}[\bigcap_{i \in I} B_i] = \bigcap_{i \in I} f^{-1}[B_i]$
17. Twierdzenie: $f : X \rightarrow Y, A \subseteq X, B \subseteq Y$
 - (a) $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$
 - (b) $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$
 - (c) Jeśli f jest iniekcją to w 1 zachodzi równość
 - (d) Jeśli f jest surjekcją to w 2 zachodzi równość

Zbiory częściowo uporządkowane

1. Def: Relację $R \subseteq X \times X$ ($X \neq \emptyset$) nazywamy **relacją częściowego porządku**, jeśli R jest zwrotna, przechodnia i antysymetryczna.
2. **Zbiór częściowo uporządkowany** jest to para (X, R) gdzie X jest niepustym zbiorem a $R \subseteq X^2$ jest relacją częściowego porządku
Przykłady:

- (a) $(\mathbb{R}, \leq), (P(X), \subseteq)$ dla niepustego X
- (b) $(\mathbb{N}, |)$ $a|b$ - a jest podzielne przez b
- (c) (\mathbb{R}^X, \preceq) - $\mathbb{R}^X = \{f : f : X \rightarrow \mathbb{R}\}, f \preceq g \iff \forall_{x \in X} f(x) \leq g(x)$
- (d) (\mathbb{R}^2, \preceq) - $\forall_{x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}} (x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2$
- (e) (P, \preceq) - zbiór częściowo uporządkowany

Definiujemy relację $\prec \subseteq P \times P$ i $\prec_\bullet \subseteq P \times P$ następująco

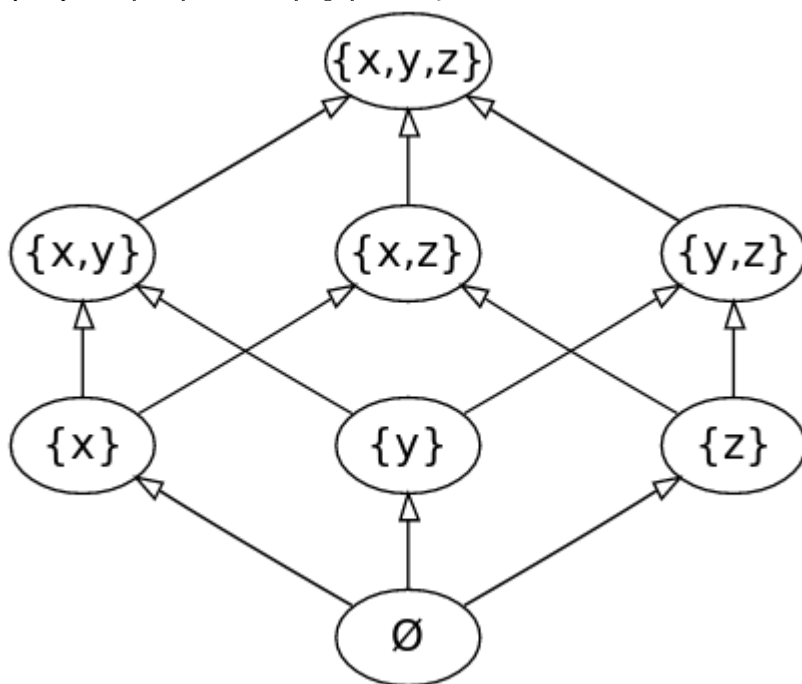
$$x \prec y \iff x \preceq y \wedge x \neq y$$

$$x \prec_\bullet y \iff x \prec y \wedge \neg(\exists_{z \in P} x \prec z \prec y)$$

Jeśli $x \prec_\bullet y$ to mówimy, że **x jest poprzednikiem y** , oraz **y jest następnikiem x**

Na przykład $(\mathbb{N}, \leq), n \in \mathbb{N}, n <_\bullet n+1$

3. Def: **Diagramem Hassego** zbioru częściowo uporządkowanego (P, \preceq) nazywamy graf, którego wierzchołkami są elementy zbioru P . Jeśli dla $x, y \in P$ zachodzi $x \prec y$, to x rysujemy niżej niż y . Ponadto dwa wierzchołki $x, y \in P$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy $x <_\bullet y$



4. Def: Niech (P, \preceq) będzie zbiorem częściowo uporządkowanym
Element $a \in P$ nazywamy:

- (a) **maksymalnym**, jeśli $\neg(\exists_{x \in P} a \prec x)$
- (b) **minimalnym**, jeśli $\neg(\exists_{x \in P} x \prec a)$
- (c) **największym**, jeśli $\forall_{x \in P} x \preceq a$
- (d) **najmniejszym**, jeśli $\forall_{x \in P} a \preceq x$
- (e) Maksymalne elementy to wierzchołki diagramu Hassego bez połączeń z góry
Minimalne - wierzchołki bez połączeń w dół
Największy \implies jedyny element maksymalny (równoważność dla skończonych zbiorów)
Najmniejszy \implies jedyny element minimalny
- (f) Dowód (e): a - element najmniejszy. Pokażemy, że a jest minimalny. Załóżmy, że a nie jest minimalny. Stąd $\exists_{y \in P} y \prec a$. Wtedy nieprawdą jest, że $\forall_{x \in P} a \preceq x$ (bo $y \prec a$)

Założmy, że w P jest inny element $b \neq a$, który jest minimalny. a - najmniejszy, $\begin{cases} a \preceq b \\ a \neq b \end{cases} \implies a \prec b \implies \exists_{x \in P} x \prec a$
 $b \implies b$ nie jest minimalny

(g) W (P, \preceq) istnieje co najwyżej jeden element najmniejszy

D(nie wprost): a, b elementy najmniejsze, $a \neq b$

$$\begin{cases} \forall_{x \in P} a \preceq x \implies a \preceq b \\ \forall_{x \in P} b \preceq x \implies b \preceq a \end{cases} \quad a \neq b, \text{ sprzeczność}$$

5. Def: (P, \preceq) - zbiór częściowo uporządkowany, $X \subseteq P$

Element $a \in P$ jest **ograniczeniem górnym** zbioru X , jeśli $\forall_{x \in X} x \preceq a$

Element $a \in P$ jest **ograniczeniem dolnym** zbioru X , jeśli $\forall_{x \in X} a \preceq x$

$X^* \stackrel{\text{def.}}{=} \{a \in P : \forall_{x \in X} x \preceq a\}$ - zbiór wszystkich ograniczeń górnych zbioru X

$X_* \stackrel{\text{def.}}{=} \{a \in P : \forall_{x \in X} a \preceq x\}$ - zbiór wszystkich ograniczeń dolnych zbioru X

6. Def: (P, \preceq) - zbiór częściowo uporządkowany, $X \subseteq P$

Element $a \in P$ jest **kresem górnym** zbioru X jeśli jest najmniejszym ograniczeniem górnym dla X (tzn. jest elementem najmniejszym w X^*)

Oznaczenie: $\sup X$

Element $a \in P$ jest **kresem dolnym** zbioru X jeśli jest największym ograniczeniem dolnym dla X (tzn. jest elementem największym w X_*)