

09.10.2019

Rachunek predykatów

Na elitmie $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0$

1. Def: Wyrażenie $\phi(x)$, które po wstawieniu za x konkretnej wartości z ustalonego zbioru X nazywamy **funkcją zdaniową**

- (a) X - **zakres** zmiennej x
- (b) **Kwantyfikator ogólny** (uniwersalny)
 - i. $(\forall_{x \in X})\phi(x)$ oznacza, że dla każdego $x \in X$ zdanie $\phi(x)$ jest prawdziwe
 - ii. \wedge taki napis jest zdaniem
- (c) **Kwantyfikator szczegółowy** (egzystencjalny)
 - i. $(\exists_{x \in X})\phi(x)$ oznacza, że istnieje takie $x \in X$, dla którego zdanie $\phi(x)$ jest prawdziwe
- (d) Przykłady (b,c):
 - i. $\forall_{x \in \mathbb{R}} x^2 \geq 1$ - zdanie fałszywe
 - ii. $\exists_{x \in \mathbb{R}} x^2 = x + 1$ - zdanie prawdziwe

2. Def: $\phi(x)$ - funkcja zdaniowa, X - zakres zmiennej x , $A \subseteq X$, $\alpha(x)$ - funkcja zdaniowa:

- (a) :
 - i. $\forall_{x \in A} \phi(x) \iff \text{def} \forall_{x \in X} (x \in A \implies \phi(x))$
 - ii. $\exists_{x \in A} \phi(x) \iff \text{def} \exists_{x \in X} (x \in A \wedge \phi(x))$
- (b) A więc generalnie:
 - i. $\forall_{x: \alpha(x)} \phi(x) \iff \text{def} \forall_{x \in X} (\alpha(x) \implies \phi(x))$
 - ii. $\exists_{x: \alpha(x)} \phi(x) \iff \text{def} \exists_{x \in X} (\alpha(x) \wedge \phi(x))$
- (c) Niech $A = \emptyset$
 - i. $\forall_{x \in \emptyset} \phi(x) \iff \forall_{x \in X} (x \in \emptyset \implies \phi(x))$ - zdanie prawdziwe (zawsze)
 - ii. $\exists_{x \in \emptyset} \phi(x) \iff \exists_{x \in X} (x \in \emptyset \wedge \phi(x))$ - zdanie fałszywe (zawsze)
- (d) Jeśli nie prowadzi to do nieporozumień, to będziemy pisać $\forall_x \phi(x)$ zamiast $\forall_{x \in X} \phi(x)$ oraz $\exists_x \phi(x)$ zamiast $\exists_{x \in X} \phi(x)$

3. Funkcje zdaniowe wielu zmiennych

- (a) $\phi(x, y)$ - staje się zdaniem po wstawieniu za x, y konkretnych wartości z zakresu x, y
- (b) $\phi(x_1, \dots, x_n)$ - funkcja zdaniowa n zmiennych
- (c) Przykład:
 - i. $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{Z}: \phi(x, y) = (x \neq y)$ - funkcja zdaniowa 2 zmiennych
 - ii. $\forall_{x \in \mathbb{R}} x \neq y$ - nie zdanie, lecz funkcja zdaniowa - wartość zależy od y
 - iii. $\exists_{y \in \mathbb{Z}} \forall_{x \in \mathbb{R}} x \neq y$ - zdanie fałszywe

4. $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ - zbiór skończony

- (a) $\forall_{x \in X} \phi(x) \iff \phi(x_1) \wedge \dots \wedge \phi(x_n)$
- (b) $\exists_{x \in X} \phi(x) \iff \phi(x_1) \vee \dots \vee \phi(x_n)$

5. Def: **Zasięg kwantyfikatora** to funkcja zdaniowa, której ten kwantyfikator dotyczy

- (a) $\exists_{y \in \mathbb{Z}} \forall_{x \in \mathbb{R}} x \neq y$ - zasięg kwantyfikatora $\exists_{y \in \mathbb{Z}}$
- (b) Przykład: $\forall_x (\forall_y (x > y \implies (\exists_z) \underline{\underline{(x > z > y)}}))$ - odpowiednie podkreślenia to zasięgi kwantyfikatorów na lewo od nich
- (c) Notacja: Zamiast $\forall_x (\exists_y (\forall_z (\dots)))$ piszemy $\forall_x \exists_y \forall_z \dots$

6. Def: Zmienną x nazywamy **związaną** jeśli leży ona w zasięgu kwantyfikatora (w którym występuje!) dla \forall_x lub \exists_x . W przeciwnym wypadku x jest zmienną **wolną**

- (a) Przykłady:
 - i. $\exists_y \forall_x (x + y > z)$ - x, y - zmienna związana, z - zmienna wolna
 - ii. $z^2 \neq 1 \wedge \forall_y x^2 = y^2$ - y - zmienna związana, x, z - zmienne wolne
- (b) $\phi(x) = "x \text{ jest liczbą pierwszą}"$ - funkcja zdaniowa o zakresie $\mathbb{N} \setminus \{0\}$
 - i. $\phi(x) = x > 1 \wedge \forall_{n \in \mathbb{N}} (n|x \implies n = x \vee n = 1)$ ($n|x$ oznacza "n dzieli x")

7. Definicja rachunku predykatów

- (a) A - alfabet: zbiór stałych, (np liczby rzeczywiste), symbole funkcyjne i symbole relacyjne (**predykaty**)
- (b) x, y, z - symbole zmiennych
- (c) **Zbiór termów T** to najmniejszy zbiór taki, że
 - i. wszystkie stałe i zmienne należą do T
 - ii. jeśli $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ oraz $\alpha \in A$ jest symbolem funkcji m -argumentowej, to $\alpha(t_1, \dots, t_n) \in T$
 - iii. Elementy zbioru T nazywamy termami
- (d) **Predykat** to m -argumentowa funkcja, której wartościami jest prawda lub fałsz
 - i. Przykłady $x, y \in \mathbb{R}$:
 - A. $\beta(x, y) = (x < y)$ - predykat 2-argumentowy
 - B. $p(x) = (x \text{ jest liczbą pierwszą})$ $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- (e) t_1, \dots, t_m - termy, β - symbol m -argumentowego predykatu - wtedy wyrażenie $\beta(t_1, \dots, t_m)$ nazywamy **formułą atomową** rachunku predykatów
- (f) **Zbiór formuł rachunku predykatów** jest to najmniejszy zbiór Z taki, że
 - i. Wszystkie formuły atomowe należą do Z
 - ii. Jeśli $A, B \in Z$, to $(\neg A, A \vee B, A \wedge B, A \implies B, A \iff B) \in Z$
 - iii. Jeśli $A \in Z$ i x jest zmienną wolną (nie związaną kwantyfikatorem) w A , to $\forall_x A \exists_x A \in Z$

8. Tautologie rachunku predykatów:

- (a) Def: Formułę rachunku predykatów nazywamy **tautologią** jeśli jest prawdziwa dla wszystkich interpretacji symboli funkcyjnych, predykatów, i dla wszystkich wartościowań zmiennych wolnych występujących w tej formule.

(b) Przykłady:

- i. Formuły powstałe z tautologii rachunku zdań przez zastąpienie zmiennych formami rachunku predykatów (X - zakres x)
 - A. $\alpha \vee \neg \alpha \implies \forall_x \phi(x) \vee \neg \forall_x \phi(x)$
- ii. $\forall_x \forall_y \phi(x, y) \iff \forall_y \forall_x \phi(x, y)$
- iii. $\exists_x \exists_y \phi(x, y) \iff \exists_y \exists_x \phi(x, y)$ - \wedge przemienność kwantyfikatorów tego samego rodzaju
- iv. $\exists_x \forall_y \phi(x, y) \implies \forall_y \exists_x \phi(x, y)$ - ale nie w drugą stronę

Dowód: X, Y - zakres zmiennych x, y

$x_0 \in X$ będzie takie, że $\forall_y \phi(x_0, y)$ jest prawdą

Weźmy dowolne $y \in Y$. Prawdą jest, że dla tego y , $\phi(x_0, y)$ jest prawdą

Zatem rzeczywiście $\forall_y \exists_x \phi(x, y)$

Przykład: Przykład, że implikacja odwrotna nie zachodzi

$X = Y = \mathbb{R}$

$\phi(x, y) = (x > y)$

$\exists_{x \in \mathbb{R}} \forall_{y \in \mathbb{R}} x > y$ - zdanie fałszywe

$\forall_{y \in \mathbb{R}} \exists_{x \in \mathbb{R}} x > y$ - zdanie prawdziwe, więc

$\forall_{y \in \mathbb{R}} \exists_{x \in \mathbb{R}} x > y \implies \exists_{x \in \mathbb{R}} \forall_{y \in \mathbb{R}} x > y$ jest fałszywe

- v. $\forall_x (\phi(x) \wedge \psi(x)) \iff \forall_x \phi(x) \wedge \forall_x \psi(x)$
- vi. $\exists_x (\phi(x) \vee \psi(x)) \iff \exists_x \phi(x) \vee \exists_x \psi(x)$ -forall-koniunkcja/ exists-alternatywa
- vii. $\exists_x (\phi(x) \wedge \psi(x)) \implies \exists_x \phi(x) \wedge \exists_x \psi(x)$
- viii. $\forall_x (\phi(x) \vee \psi(x)) \iff \forall_x \phi(x) \vee \forall_x \psi(x)$ - forall-alternatywa/ exists-koniunkcja
- ix. $\forall_x \phi(x) \implies \phi(x_0)$ gdzie $x_0 \in X$
- x. $\neg(\forall_x \phi(x)) \iff \exists_x \neg \phi(x)$
- xi. $\neg(\exists_x \phi(x)) \iff \forall_x \neg \phi(x)$
- xii. $(\forall_x (\phi(x) \implies \psi(x))) \implies ((\forall_x \phi(x)) \implies (\forall_x \psi(x)))$
- xiii. $\forall_x \phi(x) \vee \psi \iff (\forall_x \phi(x)) \vee \psi$ - x nie jest zmienną wolną w ψ
- xiv. $\forall_x (\phi(x) \wedge \psi) \iff (\exists_x \phi(x)) \wedge \psi$
- xv. $(\phi \implies \forall_x \psi(x)) \iff \forall_x (\phi \implies \psi(x))$
- xvi. $(\phi \implies \exists_x \psi(x)) \iff \exists_x (\phi \implies \psi(x))$
- xvii. $((\forall_x \phi(x)) \implies \psi) \iff \exists_x (\phi(x) \implies \psi)$

$$D: ((\forall_x \psi(x)) \implies \phi) \iff \neg(\forall_x \psi(x)) \vee \phi \iff (\exists_x \neg \psi(x)) \vee \phi \iff \exists_x (\neg \psi(x) \vee \phi) \iff \exists_x (\psi(x) \implies \phi)$$

$$xviii. ((\exists_x \phi(x)) \implies \psi) \iff \forall_x (\phi(x) \implies \psi)$$

(c) Przykłady:

$$(vii) \quad \phi(x) = (x > 0), \psi(x) = (x < 0)$$

$$: \quad \exists_x \phi(x) \wedge \exists_x \psi(x) \iff \exists_x x > 0 \wedge \exists_x x < 0$$

: \wedge fałsz - w (vii) implikacja odwrotna nie zachodzi

$$(viii) \quad \phi(x) = (x \geq 0), \psi(x) = (x < 0)$$

$$: \quad \forall_x (\phi(x) \vee \psi(x)) \iff \forall_x (x \geq 0 \vee x < 0) - \text{prawda}$$

$$(xii) \quad \phi(x) = (x > 0), \psi(x) = (x > 1)$$

$$: \quad \forall_x (\phi(x) \implies \psi(x)) \iff \forall_x (x > 0 \implies x > 1) - \text{działa, bo weźmy } x = \frac{1}{2}$$

... W (viii) oraz (xii) implikacje odwrotne nie są tautologiami

9. Tautologia dla formuł z kwantyfikatorami:

(a) Logika pierwszego rzędu ma inną definicję tautologii - dla wszystkich wartościowań zdanie jest prawdziwe

(b) Dla rachunku predykatów tautologia jest formułą lub zdaniem - (formuła bez zmiennych wolnych),

i. Zdanie jest tautologią jeśli jest prawdziwe w każdym modelu

(c) W logice pierwszego rzędu też były modele, tylko nazywaliśmy je każdym możliwym wartościowaniem

$$10. \forall_{x_{\alpha(x)}} \phi(x) \stackrel{def.}{=} \forall_x \alpha(x) \implies \phi(x)$$

$$11. \exists_{x_{\alpha(x)}} \phi(x) \stackrel{def.}{=} \exists_x \phi(x) \wedge \alpha(x)$$