

02.10.2019

Dr hab. Anna Dembińska

mini.pw.edu.pl/~dembinska

3 kolokwia 3 kartkówki

45+ punktów - zwolnienie z egzaminu (cz. zadaniowa)

Literatura:

1. Dembińska, Karpińska, Kotus - Analiza matematyczna I dla studentów informatyki PW
2. Gewert, Skoczylas - Analiza matematyczna I /Definicje twierdzenia wzory / Przykłady i zadania / Kolokwia i egzaminy GIS
3. Leja - Rachunek różniczkowy i całkowy PWN

OZNACZENIA

1. $N := 1, 2, 3, \dots$
2. $N_0 := 0, 1, 2, 3, \dots$
3. $\mathbb{Z} := \dots - 1, 0, 1, \dots$
4. $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \text{ gdzie } n \in N, m \in Z \right\}$
5. $\mathbb{R} :=$ rzeczywiste
6. \forall - dla każdego - $\forall_{x \in R} x^2 \geq 0$
7. \exists - istnieje
8. \iff - wtedy i tylko wtedy
9. $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
10. $[x]$ - część całkowita x : $x - 1 < [x] \leq x$, $[7\frac{1}{3}] = 7$, $[-2\frac{1}{3}] = -3$

LICZBY RZECZYWISTE I ICH PODZBIORY.

1. Def. Zbiór \mathbb{R} , dwa wyróżnione w nim elementy 0 i 1, relacja $<$ oraz dwa działania $+ \times$ to tak zwane pojęcia pierwotne, które przyjmujemy bez definicji. Ponadto przyjmujemy bez dowodu, że te pojęcia pierwotne mają pewne własności zwane aksjomatami (lub pewnikiem)
2. Def. Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z dołu $\iff \exists_{m \in \mathbb{R}} \forall_{a \in A} a \geq m$ Wtedy m nazywamy ograniczeniem dolnym zbioru A
 - (a) Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry $\iff \exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{a \in A} a \leq M$ Wtedy M nazywamy ograniczeniem górnym zbioru
 - (b) Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry i z dołu $\iff \exists_{m, M \in \mathbb{R}} \forall_{a \in A} m \leq a \leq M \iff \exists_{K \in \mathbb{R}} \forall_{a \in A} |a| \leq K$. Przykład: $A = (-1, 2]$ - przykładowe ograniczenia dolne - $\{-10, -1.5, -1\}$, ograniczenia górne - $\{3, 100, 2\} \Rightarrow$ zbiór A jest ograniczony
3. Def. Niech $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z dołu. Wtedy kresem dolnym zbioru A (oznaczanym $\inf A$) nazywamy największe ograniczenie dolne zbioru A
 - (a) To znaczy $\inf A = \alpha \iff (\forall_{a \in A} a \geq \alpha \text{ } (\alpha \text{ jest ograniczeniem dolnym}) \text{ oraz } \forall_{\epsilon > 0} \exists_{a_0 \in A} a_0 < \alpha + \epsilon)$
4. Def. Niech $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z góry. Wtedy kresem górnym zbioru A (oznaczamy $\sup A$) nazywamy najmniejsze ograniczenie górne zbioru A.
 - (a) $\sup A = \beta \iff (\forall_{a \in A} a \leq \beta \text{ oraz } \forall_{\epsilon > 0} \exists_{a_0 \in A} a_0 > \beta - \epsilon)$
5. Jeśli zbiór A nie jest ograniczony z dołu, to $\inf A = -\infty$, jeśli nie jest ograniczony z góry, to $\sup A = +\infty$
 - (a) $\inf(\emptyset) = +\infty, \sup(\emptyset) = -\infty$
 - (b) Przykład: $A = (-1, 2]$
 - i. $\inf(A) = -1$
 - ii. $\sup(A) = 2$
6. Aksjomat ciągłości - Każdy zbiór $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ ograniczony z dołu/górą ma skonczony kres dolny/górny $\in \mathbb{R}$
 - (a) dla \mathbb{Q} tego nie ma: $B = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2 \text{ i } q > 0\}$ kres górnego to $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

(b) Twierdzenie: jeśli $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$ to

i. $\inf A \geq \inf B$

A. Dowód: Jeśli B nie jest ograniczony z dołu, to $\inf B = -\infty$, więc i. jest spełniona

B. Jeśli B jest ograniczony z dołu, to z aksojomatu ciągłości B ma skończony kres dolny. Ponadto A też jest ograniczony z dołu, więc też ma skończony kres dolny. Oznaczmy $\inf A = \alpha$ i $\inf B = \beta$. Wtedy mamy :

$$\forall a \in A a \geq \alpha$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists a_0 \in A a_0 < \alpha + \epsilon$$

$$\forall b \in B b \geq \beta$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists b_0 \in B b_0 < \beta + \epsilon$$

Chcemy pokazać że $\alpha \geq \beta$

$A \subset B \implies (a \in A \implies a \in B) \implies \alpha \geq \beta$, czyli β jest ograniczeniem dolnym zbioru A

ii. $\sup A \leq \sup B$

A. Dowodzimy analogicznie

7. LICZBY NATURALNE I ZASADA INDUKCJI MATEMATYCZNEJ

(a) Zdefiniowaliśmy $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Definicja ta nie jest matematycznie precyzyjna, bo nie zdefiniowaliśmy "...". Podamy definicję liczb naturalnych odwołującą się jedynie do pojęć pierwotnych i do pojęć zdefiniowanych wcześniej. Def. Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ nazywamy induktywnym jeśli spełnia następujące dwa warunki

i. $1 \in A$

ii. $\forall a \in A a + 1 \in A$

A. $[1, \infty)$

B. \mathbb{R}

C. \mathbb{Q}

D. \mathbb{N}

iii. Def. Zbiór liczb naturalnych \mathbb{N} to zbiór zawarty w każdym zbiorze induktywnym tzn. $\mathbb{N} = \cap_{A \in I} A$ gdzie I to rodzina wszystkich zbiorów induktywnych

(b) Twierdzenie - Zasada indukcji matematycznej

i. Jeśli $A \subset \mathbb{N}$ spełnia warunki

$$1 \in A$$

$$\forall n \in \mathbb{N} (n \in A \implies n + 1 \in A)$$

ii. to $A = \mathbb{N}$

iii. Zbiór A jest induktywny, bo $1 \in A$ oraz $\forall n \in A n + 1 \in A$ Zatem $\mathbb{N} \subset A$

iv. Skoro $A \subset \mathbb{N}$ oraz $\mathbb{N} \subset A$ to $A = \mathbb{N}$

(c) Przykład - dowód tego, że $\forall n \in \mathbb{N} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$ (**)

i. Niech $A = \{n \in \mathbb{N} : 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}\}$

ii. Potrzebujemy pokazać, że $1 \in A$ oraz, że $\forall n \in \mathbb{N} (n \in A \implies n + 1 \in A)$ To znaczy, że

A. Dla $n=1$ wzór (**) jest spełniony ($1 + 1 \geq \sqrt{1}$)

B. Zakładamy, że wzór (**) jest prawdziwy dla n i dowodzimy jego prawdziwości dla $n+1$

Zakładamy, że $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$. Chcemy pokazać, że $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \stackrel{\text{zat.ind.}}{\geq} \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} \text{ co kończy dowód.}$$

(d) Twierdzenie:

i. Zbiór \mathbb{N} nie jest ograniczony z góry

A. Dowód nie wprost. Zakładamy, że zbiór \mathbb{N} jest ograniczony z góry. Wtedy $\exists M \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \leq M \implies n + 1 \leq M \implies n \leq M - 1 \implies M - 1$ też jest ograniczeniem górnym \implies zbiór \mathbb{N} nie ma najmniejszego ograniczenia górnego. Z drugiej strony. \mathbb{N} jako zbiór niepusty i ograniczony z góry ma kres górny, czyli najmniejsze ograniczenie górne. Skoro założenie implikuje sprzeczność to założenie jest nieprawdziwe więc zbiór \mathbb{N} nie jest ograniczony z góry

ii. Zbiór \mathbb{Q} jest gęsty w \mathbb{R} , to znaczy $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \exists q \in \mathbb{Q} x < q < y$ (pomiędzy dowolnymi dwoma rzeczywistymi istnieje liczba wymierna)

iii. Zbiór $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (zbiór liczb niewymiernych) jest gęsty w \mathbb{R} , to znaczy $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \exists z \notin \mathbb{Q} x < z < y$

(e) Dowód indukcyjny tego, że wszystkie koty są tego samego koloru. Indukcja e względem na n-liczba kotów.

i. Dla $n=1$ OK

ii. Zakładamy, że fakt jest prawdziwy dla n, i dowodzimy dla $n+1$

09.10.2019

CIĄGI LICZBOWE

Ważne: $\forall_{x,y \in \mathbb{R}} |x+y| \leq |x| + |y|$ oraz $||x| - |y|| \leq |x-y|$

1. Def. Ciągiem $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ lub $\{a_n\}_{n \geq 1}$ lub $\{a_n\}$ nazywamy funkcję $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Ponadto a_n nazywamy n-tym wyrazem ciągu

(a) Przykłady:

i. $a_n = \sqrt[n]{n}$

ciąg zdefiniowany przez podanie wzoru na n-tym wyraz tego ciągu

A. $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}$ itp

ii. $b_1 = 1$

$b_2 = 1$

$b_{n+1} = b_n + b_{n-1}, n \geq 2$

ciąg zdefiniowany rekurencyjnie

A. Pierwsze wyrazy ciągu - 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Fibonacci

2. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony z dołu $\iff \exists_{m \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \geq m$

3. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony z góry $\iff \exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \leq M$

4. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony $\iff (\exists_{m \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \geq m) \wedge (\exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \leq M)$ czyli $\exists_{K \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \leq K$

(a) Przykład:

i. Ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ jest ograniczony z dołu, bo $\exists_{m \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \geq m$ ($m = 0$)

ii. Ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ jest ograniczony z góry, bo $\exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \leq M$ ($m = 1$)

iii. Skoro ciąg jest ograniczony z góry i z dołu to możemy powiedzieć że ciąg ten jest ograniczony

5. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący $\iff \forall_{n \in \mathbb{N}} a_{n+1} > a_n \iff \forall_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

6. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest niemalejący $\iff \forall_{n \in \mathbb{N}} a_{n+1} \geq a_n \iff \forall_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$

7. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest malejący $\iff \forall_{n \in \mathbb{N}} a_{n+1} < a_n \iff \forall_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

8. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest nierosnący $\iff \forall_{n \in \mathbb{N}} a_{n+1} \leq a_n \iff \forall_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$

(a) Ciągi rosnące, niemalejące, malejące i nierosnące nazywamy monotonicznymi

i. np $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow a_1 - 1 < a_2 = \frac{1}{2} > a_3 = -\frac{1}{3}$

ii. $b_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

A. Ze wzrostem n, n+1 rośnie, więc $\frac{1}{n+1}$ maleje, więc $1 - \frac{1}{n+1}$ rośnie

B. Zatem ciąg b_n jest rosnący

9. Def. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do granicy $g \in \mathbb{R} \iff \forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} |a_n - g| < \epsilon$

(a) Dla dowolnie małego $\epsilon > 0$ dla wyrazów ciągu o dostatecznie dużych wartościach, odległość pomiędzy dowolnym wyrazem ciągu spełniającym warunki a g jest mniejsza od ϵ

(b) Wtedy g nazywamy granicą i zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ lub $a_n \rightarrow g$

i. Przykład: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ bo $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon$

$\frac{1}{n} < \epsilon$

$\frac{1}{\epsilon} < n \rightarrow n_0 = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$

10. Def. Jeśli ciąg $\{a_n\}$ nie jest zbieżny to nazywamy go rozbieżnym;

11. Twierdzenie 2.1: Każdy ciąg stały jest zbieżny: $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

(a) Dowód: $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} |a_n - a| < \epsilon$. Ponieważ $\forall_{n_0 \in \mathbb{N}} a_n - a = 0$, to zawsze $0 < \epsilon$

12. Twierdzenie 2.2: Ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę

(a) Dowód: Zakładamy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b$ i $a \neq b$

(b) Niech $\epsilon = \frac{1}{2}|a-b|$. Wtedy $\epsilon > 0$ bo $a \neq b$

(c) Z założenia $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_1 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_1} |a_n - a| < \epsilon$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \implies \forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_2 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_2} |a_n - b| < \epsilon$

(d) Ponieważ $\forall_{x,y \in \mathbb{R}} |x+y| \leq |x|+|y|$, to $2\epsilon = |a-b| = |a-a_n+a_n-b| \leq |a-a_n|+|a_n-b| = |a_n-a|+|a_n-b| <^{n \geq n_1, n \geq n_2} \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$

(e) Otrzymaliśmy $2\epsilon > 2\epsilon$ oraz $\epsilon > 0 \implies 2 > 2$ sprzeczność

13. Twierdzenie 2.3: Jeśli ciąg jest zbieżny, to jest ograniczony.

(a) Dowód: Niech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, tzn $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_1 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_1} |a_n - g| < \epsilon$

(b) W szczególności dla $\epsilon = 1$ otrzymujemy $\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} |a_n - g| < 1$, czyli $-1 < a_n - g < 1$, czyli $\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} g - 1 < a_n < g + 1$

(c) Stąd $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \leq \max\{g + 1, a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}\} \implies \{a_n\}$ jest ograniczony z góry

(d) $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \geq \min\{g - 1, a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}\} \implies \{a_n\}$ jest ograniczony z dołu

(e) Zatem $\{a_n\}$ jest ograniczony.

(f) UWAGA: $\{a_n\}$ jest zbieżny $\implies \{a_n\}$ jest ograniczony

i. NIE DZIAŁA W DRUGĄ STRONĘ

ii. np $a_n = (-1)^n$ daje nam $-1, 1, -1, 1, \dots$ ciąg jest ograniczony, ale nie jest zbieżny

14. Twierdzenie 2.4 (o ciągłości działań arytmetycznych): Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, to

(a) Dowód: Wiemy, że $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_1 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_1} |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ oraz $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_2 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_2} |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$

i. Chcemy pokazać, że $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} |a_n + b_n - (a+b)| < \epsilon$

ii. $|a_n + b_n - a - b| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| <^{n \geq n_1, n \geq n_2} \frac{\epsilon}{2}$

iii. $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} |a_n + b_n - (a+b)| < \epsilon$ jeśli $n_0 = \max(n_1, n_2)$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$

i. Ciąg pomocniczy $\forall_{n \in \mathbb{N}} c_n = -b_n$, wtedy wystarczy pokazać że $c_n \rightarrow -b$, i leci pierwszy dowód

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$

i. Dowód: Skoro z $\{a_n\}$ jest zbieżny, to z twierdzenia 2.3 jest ograniczony, tzn $\exists_{K \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \leq K$ (dodatkowo, $K \neq 0$)

ii. Wiemy to samo co w dowodzie z (a).

iii. Chcemy pokazać, że $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} |a_n b_n - ab| < \epsilon$

iv. $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)| = |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \leq K|b_n - b| + |b||a_n - a|$

v. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \iff \forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_2 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_2} |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2K}$

vi. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_1 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_1} |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2(|b| + 1)}$

vii. $K|b_n - b| + |b||a_n - a| \leq K|b_n - b| + (|b| + 1)|a_n - a|$

viii. Stąd $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} |a_n b_n - ab| < \epsilon$ - $n_0 = \max(n_1, n_2)$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$ jeśli $b \neq 0$ i $\forall_{n \in \mathbb{N}} b_n \neq 0$

(e) Przykład:

i. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3}{4n^2 - n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n^2}}{4 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{4 - \frac{1}{n} + 5 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}} = \frac{1 + 3 \cdot 0 \cdot 0}{4 - 0 + 5 \cdot 0 \cdot 0} = \frac{1}{4}$

15. Twierdzenie 2.5 (o ciągłości wartości bezwzględnej): Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$

(a) Dowód: Wiemy, że $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_1 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_1} |a_n - a| < \epsilon$

(b) Chcemy pokazać, że $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} ||a_n| - |a|| < \epsilon$

(c) Mamy $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$

(d) Stąd $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} ||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \epsilon$

(e) Uwaga 2.1: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$

i. $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} |a_n - 0| < \epsilon$ z lewej strony oraz

ii. $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} ||a_n| - 0| < \epsilon$ z prawej strony. $|x| = ||x||$, więc strony są równoważne

16. Twierdzenie 2.6 (o przechodzeniu do granicy w nierównościach): Jeśli $\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} a_n \leq b_n$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ to $a \leq b$

(a) Uwaga 2.2: Twierdzenie 2.6 nie będzie prawdziwe jeśli zamienimy na $<$

i. np $a_n = \frac{1}{n^2}, b_n = \frac{1}{n}$

ii. $\forall_{n \geq 2} a_n < b_n$ ale $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

17. Twierdzenie 2.7 (o trzech ciągach): Jeśli $\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} a_n \leq b_n \leq c_n$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$

- (a) Dowód: Chcemy pokazać, że $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_3 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_3} |b_n - g| < \epsilon \iff \forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_3 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_3} -\epsilon < b_n - g < \epsilon$
- (b) Wiemy, że $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_1 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_1} |a_n - g| < \epsilon \iff \forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_1 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_1} \epsilon < a_n - g < \epsilon$ oraz $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_2 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_2} \epsilon < c_n - g < \epsilon$
- (c) $(n \geq n_2 \wedge n \geq n_0) \implies b_n - g \leq c_n - g < \epsilon$
- (d) $(n \geq n_1 \wedge n \geq n_0) \implies b_n - g \geq a_n - g > -\epsilon$
- (e) Zatem pokazaliśmy, że $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} -\epsilon < b_n - g < \epsilon$ ($n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$)
- (f) Wniosek z twierdzenia o trzech ciągach: Jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$
 - i. Na mocy uwagi 2.1 wystarczy pokazać, że $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n b_n| = 0$
 - ii. Z założenia $\exists_{K \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \leq K$
 - iii. $\forall_{n \in \mathbb{N}} 0 \leq |a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq K \cdot |b_n|, K \cdot |b_n| \rightarrow 0$, więc z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n b_n| = 0$

18. Twierdzenie 2.8: Jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest niemalejący i ograniczony z góry, to jest zbieżny

19. Twierdzenie 2.8.1: Jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest nierosnący i ograniczony z dołu, to jest zbieżny

20. 2.8 oraz 2.8.1 razem: Jeśli ciąg jest monotoniczny i ograniczony, to jest zbieżny

21. Twierdzenie 2.11 (z przyszości):

- (a) $|a| < 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |a|^n = 0$
 - (b) $a > 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$
 - (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
22. def. $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$ jest rosnące, jeśli $\forall_{x_1, x_2 \in A} : (x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2))$
23. def $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją okresową jeśli $\exists_{r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \forall_{a \in A} x + r \in A \wedge x - r \in A \wedge f(a) = f(a + r)$

16.10.2019

Nierówność Bernoulliego: $\forall_{x>-1, n \in \mathbb{N}} (1+x)^n \geq 1 + nx$

1. Twierdzenie 2.8: Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

(a) $\{a_n\}$ jest monotoniczny i ograniczony \Rightarrow (nie \Leftarrow) $\{a_n\}$ zbieżny

(b) Ciąg, który jest zbieżny, nie musi być monotoniczny. Na przykład $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Ciąg ten jest zbieżny z twierdzenia o trzech ciągach, bo $\forall_{n \in \mathbb{N}} \frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. Ale ciąg ten nie jest monotoniczny, bo $a_1 = -1 < a_2 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2} > a_3 = -\frac{1}{3}$

2. Granice niewłaściwe

(a) Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny do $+\infty$ (co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} = +\infty$ lub $a_n \rightarrow +\infty$) $\Leftrightarrow \forall_{D>0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} a_n > D$

(b) Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny do $-\infty$ (co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} = -\infty$ lub $a_n \rightarrow -\infty$) $\Leftrightarrow \forall_{D>0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} a_n < -D$

(c) Przykład:

i. $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$, bo $\forall_{D>0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}, n_0 = \lceil D \rceil} \forall_{n \geq n_0} a_n > D$

3. Twierdzenie 2.9 (o dwóch ciągach): Jeśli $\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} a_n \leq b_n$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$

(a) Jeśli $\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} a_n \leq b_n$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b = -\infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

4. Twierdzenie 2.10:

(a) Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$

(b) Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ i ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony z dołu, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$

(c) Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ i ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony z góry, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = -\infty$

(d) Przykład:

i. Niech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pm\infty$. Co możemy powiedzieć o zbieżności ciągu $\{a_n b_n\}$?

ii. Nic, bo na przykład $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0, b_n = n \rightarrow \infty, a_n b_n = 1 \rightarrow 1$, ale dla $a_n = \frac{1}{n^2}, a_n b_n \rightarrow 0$, lub $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, a_n b_n \rightarrow \infty$

iii. $[0 \cdot \infty]$ to symbol nieoznaczony

iv. Inne symbole nieoznaczone:

A. $[\infty - \infty]$

B. $[\frac{0}{0}]$

C. $[\frac{\infty}{\infty}]$

D. $[\infty^0]$

E. $[0^0]$

F. $[1^\infty]$

v. Ale dla $a \in \mathbb{R}$:

A. $[a + \infty] = \infty$

B. $[a \cdot \infty] = (\infty \text{ jeśli } a > 0, -\infty \text{ jeśli } a < 0)$

C. $[\frac{a}{\infty}] = 0 \text{ jeśli } a \in \mathbb{R}$

(e) Twierdzenie 2.11:

i. $|a| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a|^n = 0$

D: 1. przypadek: $a = 0$. Wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$

2.: $a \neq 0$. Wtedy $\frac{1}{|a|} > 1$ więc istnieje $\delta > 0$ taka, że $\frac{1}{|a|} = 1 + \delta$

: $\frac{1}{|a|^n} = \left(\frac{1}{|a|}\right)^n = (1 + \delta)^n \stackrel{\text{nier.Bern}}{\geq} 1 + n\delta \geq n\delta$

: $\forall_{n \in \mathbb{N}} 0 \leq |a|^n \leq \frac{1}{n\delta} \Rightarrow \text{tw.o 3 ciągach} \lim_{n \rightarrow \infty} |a|^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a^n| = 0 \Rightarrow \text{uwaga 2.1} \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$

ii. $a > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

D: 1. przypadek: $a = 1$. Wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$

: 2. przypadek: $a > 1$. Wtedy $\forall_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{a} > 1$

: $a = (\sqrt[n]{a})^n = (1 + \sqrt[n]{a} - 1)^n \stackrel{\text{nier.Bern}}{\geq} 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1)$

: $\forall_{n \in \mathbb{N}} a \geq 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1)$

: $\forall_{n \in \mathbb{N}} \frac{a-1}{n} \geq \sqrt[n]{a} - 1$

: $\forall_{n \in \mathbb{N}} \frac{a-1}{n} + 1 \geq \sqrt[n]{a} \geq 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

- : 3. przypadek: $a \in (0, 1)$. Wtedy $\frac{1}{a} > 1 \implies$ przypadek 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$
 : stąd $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1$
- iii. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- (f) $\forall_{a,b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}} (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

5. Liczba e

(a) Rozważmy ciąg Eulera $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Pokażemy, że $\{e_n\}$ jest rosnący i ograniczony z góry, zatem zbieżny. Liczba e to granica tego ciągu $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2,71828$

(b) Twierdzenie 2.12: Ciąg Eulera jest rosnący i ograniczony z góry, więc zbieżny.

D: Najpierw pokażemy, że $\{e_n\}$ jest rosnący

$$\begin{aligned} : \quad \frac{e_{n+1}}{e_n} &= \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{(\frac{n+2}{n+1})^n \cdot (\frac{n+2}{n+1})}{(\frac{n+1}{n})^n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} = \left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} = \\ &\quad (1 + \frac{-1}{n^2+2n+1})^n \cdot \frac{n+2}{n+1} \geq^n \text{Bern} \quad (1 - \frac{n}{n^2+2n+1})^{\frac{n+2}{n+1}} = \frac{n^2+2n+1-n}{n^2+2n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{(n^2+n+1)(n+2)}{(n+1) \cdot (n+1)} = \\ &\quad \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1 \end{aligned}$$

Zatem $\forall_{n \in \mathbb{N}} \frac{e_{n+1}}{e_n} > 1 \implies e_n > 0 \forall_{n \in \mathbb{N}} e_{n+1} > e_n$ czyli $\{e_n\}$ jest rosnący

Teraz pokażemy, że $\{e_n\}$ jest ograniczony z góry.

$$\begin{aligned} : \quad e_n &= (1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = n \geq 2 + n \cdot \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{(n-k+1)(n-k+2)\dots(n)}{k! \cdot n^k} < \\ &\quad 2 + \sum_{k=2}^n \frac{n^k}{k! \cdot n^k} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n-2}}{1 - \frac{1}{2}} < 2 + 1 = 3 \\ : \quad \forall_{n \geq 2} e_n &> 3 \text{ i } e_1 = 2 \implies \forall_{n \in \mathbb{N}} e_n < 3, \text{ czyli ciąg } \{e_n\} \text{ jest ograniczony z góry} \end{aligned}$$

(c) Def. Liczba e to granica ciągu Eulera: $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$

i. Pokazaliśmy, że $\forall_{n \in \mathbb{N}} e_n < 3 \implies e = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n \leq 3$

ii. Pokazaliśmy, że $\{e_n\}$ jest rosnący $\implies \forall_{n \in \mathbb{N}} e_n \geq e_1 = 2 \implies e = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n \geq 2$

iii. Więc $2 \leq e \leq 3$

iv. Uwaga: to jest przykład na to, że $[1^\infty]$ to symbol nieoznaczony, bo $a_n = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$, $b_n = n \rightarrow \infty \implies a_n^{b_n} = (1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$
 A. $a_n = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$, $b_n = 2n \rightarrow \infty \implies a_n^{b_n} = (1 + \frac{1}{n})^{2n} \rightarrow 2e$

6. Podciągi

(a) Def. Niech $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem, zaś n_1, n_2, n_3, \dots liczbami naturalnymi, takimi, że $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ Wtedy ciąg $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ o wyrazach $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$ nazywamy podciągiem ciągu $\{a_n\}_{n=1}^\infty$

i. Przykład: $a_n = \frac{1}{n}$, wyrazy tego ciągu: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \dots$

: $b_n = \frac{1}{n^2}$, wyrazy tego ciągu: $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots$ Ciąg $\{b_n\}$ to podciąg ciągu $\{a_n\}$: $b_k = a_{k^2}$

: $c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, wyrazy tego ciągu: $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \dots$ Ciąg $\{c_n\}$ nie jest podciągiem $\{a_n\}$ (ale $\{a_n\}$ jest podciągiem $\{c_n\}$)

(b) Twierdzenie 2.13: Każdy podciąg ciągu zbieżnego do g też zbiega do g :

i. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ i $\{a_{n_k}\}$ jest podciągiem ciągu $\{a_n\} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = g$

ii. Wniosek: Jeśli ciąg $\{a_n\}$ zawiera co najmniej dwa podciągi zbieżne do różnych granic, to nie jest zbieżny

iii. Przykład: Ciąg $a_n = (-1)^n$ nie jest zbieżny, bo $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{2n} = 1$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{2n+1} = -1$, oba są podciągami $\{a_n\}$ i są zbieżne do innych granic, więc a_n nie jest zbieżny

iv. Przykład: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{2n+3}{2n+2})^{4n-3} (= [1^\infty]) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2n+2})^{4n-3} = \lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{m})^{2m-7} = \frac{(\lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{m})^m)^2}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^7} = \frac{e^2}{1} = e^2$

(c) Twierdzenie 2.14: (Bolzano-Weierstrassza)

i. Każdy ciąg ograniczony zawiera podciąg zbieżny.

(d) Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest ciągiem Cauchyego (podstawowym) $\iff \forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n,m \geq n_0} |a_n - a_m| < \epsilon$

(e) Twierdzenie 2.15 (warunek równoważny zbieżności ciągu)

i. Ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny $\iff \{a_n\}$ jest ciągiem Cauchyego

D \implies Zakładamy, że $\{a_n\}$ jest zbieżny, tzn. $\exists_{g \in \mathbb{R}} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} |a_n - g| < \frac{\epsilon}{2}$

: Pokażemy, że $\{a_n\}$ jest ciągiem Cauchyego, tzn. $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n,m \geq n_0} |a_n - a_m| < \epsilon$

: $|a_n - a_m| = |a_n - g + (-a_n + g)| \leq |a_n - g| + |a_m - g| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

: Zatem pokazaliśmy, że $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n_1 \in \mathbb{N}, n_1 = n_0} \forall_{n,m \geq n_1} |a_n - a_m| \leq \epsilon$

\Leftarrow pomijamy bo dlugi dowód

- i. Przykład: Ciąg $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ nie jest zbieżny, bo nie jest ciągiem Cauchyego.
- : $\neg(\forall_{\epsilon>0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n,m \geq n_0} |a_n - a_m| < \epsilon)$
- : Chcemy pokazać, że $\exists_{\epsilon>0} \forall_{n_0 \in \mathbb{N}} \exists_{n,m \geq n_0} |a_n - a_m| \geq \epsilon$
- : $|a_{2n} - a_n| = |1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n}| = |\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}| = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$
- : Zatem pokazaliśmy, że $\exists_{\epsilon>0} \forall_{n_0 \in \mathbb{N}} \exists_{n,m \geq n_0} |a_n - a_m| \geq \epsilon$ - zachodzi dla $\epsilon = \frac{1}{2}$, $n = 2n_0$, $m = n_0$

23.10.2019

Granica górska i dolna ciągu

- Def. Mówimy, że $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$ jeśli istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}$ ciągu $\{a_n\}$ taki, że $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = g$

(a) Przykład: Wyznaczamy punkt skupienia ciągu $a_n = \sqrt{\frac{1+4n}{2+n}} \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

$$b_n = \sqrt{\frac{1+4n}{2+n}}, c_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sqrt{4} = 2 \text{ bo } s_n \rightarrow s \implies (s_n)^q \rightarrow s^q$$

pierwsze wyrazy $\{c_n\}$ - $c_1 = -1, c_2 = -1, c_3 = 1$ - może się powtarzać?

$$c_{4k} = (-1)^{2k(4k+1)} = 1, c_{4k+1} = (-1)^{\frac{(4k+1)(4k+2)}{2}} = (-1)^{(4k+1)(2k+1)} = -1,$$

$$c_{4k+2} = (-1)^{\frac{(4k+2)(4k+3)}{2}} = (-1)^{(2k+1)(4k+3)} = -1, c_{4k+3} = (-1)^{\frac{(4k+3)(4k+4)}{2}} = (-1)^{(4k+3)(2k+2)} = 1$$

$$\text{a więc } a_{4k} = b_{4k}c_{4k} = b_{4k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 2$$

$$a_{4k+1} = b_{4k+1}c_{4k+1} = b_{4k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -2$$

$$a_{4k+2} = b_{4k+2}c_{4k+2} = b_{4k+2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -2$$

$$a_{4k+3} = b_{4k+3}c_{4k+3} = b_{4k+3} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 2$$

Więc punkty skupienia ciągu $\{a_n\}$ to -2 i 2

- Def. Granicą dolną ciągu $\{a_n\}$, oznaczaną $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ lub $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ nazywamy kres dolny zbioru wszystkich punktów skupienia ciągu $\{a_n\}$:

$$\liminf_{a \rightarrow \infty} = \inf\{g : \exists_{\{a_{n_k}\}} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = g\}$$

- Def. Granicą górną ciągu $\{a_n\}$, oznaczaną $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ lub $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ nazywamy kres górny zbioru wszystkich punktów skupienia ciągu $\{a_n\}$:

$$\limsup_{a \rightarrow \infty} = \inf\{g : \exists_{\{a_{n_k}\}} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = g\}$$

(a) Wtedy, dla $a_n = \sqrt{\frac{1+4n}{2+n}} \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$: $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 2, \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = -2$

- Twierdzenie 2.16: Dla dowolnego $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \iff \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = g$$

GRANICA FUNKCJI

Przez cały wykład będziemy zakładać, że $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}$. Ponadto, $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

- Def. Mówimy, że $a \in \tilde{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru D jeśli istnieje ciąg $\{a_n\}$ taki, że $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \in D \setminus \{a\}$ (inaczej $\{a_n\} \subset D \setminus \{a\}$) i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

(a) Przykłady:

i. $\{0\} \cup [1, 2]$ - punkty skupienia - $[1, 2]$

ii. \mathbb{N} - punkt skupienia $\{+\infty\}$

iii. \mathbb{Z} - punkty skupienia $\{-\infty, +\infty\}$

iv. $\{1, 2, 3\}$ - nie ma punktów skupienia

Ogólniej, dowolny zbiór skończony nie ma punktów skupienia

v. \mathbb{R} - punkty skupienia - $\tilde{\mathbb{R}}$

- Def. (Heinego granicy funkcji): Niech $a \in \tilde{\mathbb{R}}$ będzie punktem skupienia zbioru D i $g \in \tilde{\mathbb{R}}$. Mówimy, że g jest granicą funkcji f w punkcie a (jeśli $a \in \mathbb{R}$) lub w $\pm\infty$ (jeśli $a = \pm\infty$) i zapisujemy

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g \text{ lub } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} g \iff \underline{\lim}_{\{a_n\} \subset D \setminus \{a\}} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = g - (\mathbf{H})$$

(a) Przykład $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 1 \\ 1 & \text{dla } x \neq 1 \end{cases}$ - $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = 1$. W szczególności $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ nie zależy od wartości funkcji w punkcie $x_0 = 1$

- Twierdzenie 4.1: Granica funkcji jest wyznaczona jednoznacznie, tzn. jeśli $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g_1$ oraz $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g_2$, to $g_1 = g_2$

(a) Dowód: Zakładamy, że $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g_1$ i $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g_2$

$$\underline{\lim}_{\{a_n\} \subset D \setminus \{a\}} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = g_1$$

Weźmy dowolny ciąg $\{a_n\} \subset D \setminus \{a\}$ taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = g_1$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = g_2$

Z tw. 2.2, otrzymujemy, że $g_1 = g_2$

(b) Przykłady:

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{2x-1}, D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

Weźmy ciąg $\{a_n\} \subset D \setminus \{-\infty\} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$. Wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \frac{|a_n|}{a_n} \stackrel{a_n < 0}{=} \frac{-a_n}{2a_n} = -\frac{1}{2}$, więc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$

ii. Granica $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ nie istnieje. Weźmy dwa ciągi, $\{a_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}, \{x_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takie, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

$$a_n = \frac{1}{2n\pi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \text{ Wtedy:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$$

Granica musi być jednoznaczna - więc $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ nie istnieje

4. Def. (Cauchy'ego granicy skonczonej (właściwej) funkcji w punkcie): Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D i niech $g \in \mathbb{R}$. Wtedy:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x)-g| < \epsilon - (\mathbf{C})$$

Dla x bliskich a i różnych od a odległość $f(x)$ od g jest dowolnie mała.

5. Twierdzenie 4.2 : Definicje Cauchy'ego i Heinego granicy właściwej funkcji w punkcie są równoważne.

(a) Dowód: (H) \implies (C) Dowód nie wprost. Zakładamy, że (H) i $\neg(\mathbf{C})$

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D 0 < |x-a| < \delta \wedge |f(x)-g| \geq \epsilon \quad \neg(\mathbf{C})$$

W szczególności dla $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy $\exists \epsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in D 0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - g| \geq \epsilon$

Z tw. o trzech ciągach $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - a| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

Pokazaliśmy, że $\exists \epsilon > 0 \exists \{x_n\} \subset D \setminus \{a\} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \wedge \forall n \in \mathbb{N} |f(x_n) - g| \geq \epsilon$

$\exists \{x_n\} \subset D \setminus \{a\} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq g \iff \neg(H)$ - sprzeczność z zał. że zachodzi (H)

(b) (C) \implies (H): Zakładamy, że zachodzi (C), tzn $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x)-g| < \epsilon$

Chcemy pokazać, że (H), czyli $\forall \{a_n\} \subset D \setminus \{a\} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = g$

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 |f(a_n) - g| < \epsilon$$

Weźmy dowolny ciąg $\{a_n\} \subset D \setminus \{a\}$ taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i weźmy dowolny $\epsilon > 0$. Wtedy

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_1 0 < |a_n - a| < \delta \stackrel{(\mathbf{C})}{\implies} |f(a_n) - g| < \epsilon$$

(c) Zatem pokazaliśmy $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 |f(a_n) - g| < \epsilon$ ($n_0 = n_1$)

6. Def. Cauchy'ego niewłaściwych granic funkcji w punkcie: Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru D

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \iff \forall G > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D 0 < |x-a| < \delta \implies f(x) > G$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \iff \forall G > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D 0 < |x-a| < \delta \implies f(x) < -G$$

7. Def. Cauchy'ego właściwej granicy w $\pm\infty$: Niech $\pm\infty$ będzie punktem skupienia zbioru D i $g \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g \iff \forall \epsilon > 0 \exists G > 0 \forall x \in D x > G \implies |f(x)-g| < \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g \iff \forall \epsilon > 0 \exists G > 0 \forall x \in D x < -G \implies |f(x)-g| < \epsilon$$

8. Def Cauchy'ego niewłaściwych granic funkcji w $\pm\infty$: Niech $\pm\infty$ będzie punktem skupienia zbioru D

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall G > 0 \exists L > 0 \forall x \in D x > L \implies f(x) > G$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall G > 0 \exists L > 0 \forall x \in D x > L \implies f(x) < -G$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall G > 0 \exists L > 0 \forall x \in D x < -L \implies f(x) > G$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall G > 0 \exists L > 0 \forall x \in D x < -L \implies f(x) < -G$$

9. Twierdzenie 4.3: Powyższe dwie definicje Cauchy'ego granic funkcji są równoważne odpowiednim definicjom Heinego

10. Twierdzenie 4.4: (tw. o trzech funkcjach): Jeśli:

(a) $f, p, h : D \rightarrow \mathbb{R}$

(b) $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia D

(c) $g \in \mathbb{R}$ i $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = g$

(d) $\forall x \in D$ i x bliskiego a $f(x) \leq p(x) \leq h(x)$

To $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = g$ - (dowód z def Heinego i tw o trzech ciągach)

11. Twierdzenie 4.5 (tw o dwóch funkcjach): Jeśli:

(a) $f, h : D \rightarrow \mathbb{R}$

(b) $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia D

(c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (ewentualnie $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = -\infty$)

(d) $\forall_{x \in D} \text{ i } x \text{ bliskie } a, f(x) \leq h(x)$

To $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = +\infty$ (ewentualnie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$)

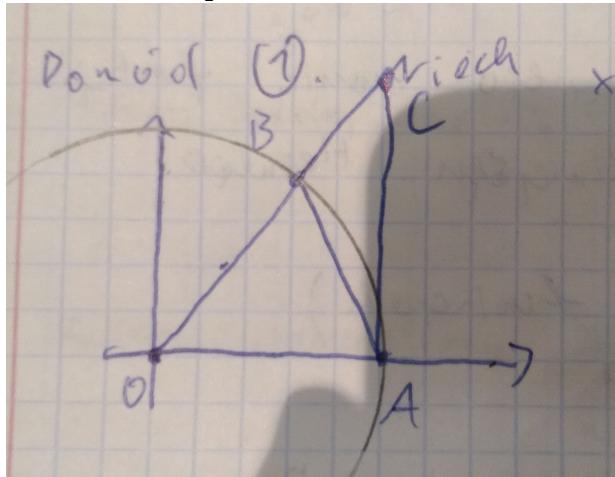
(a) Przykład: $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x}$

$$0 \leq |x \cdot \sin \frac{1}{x}| = |x| |\sin \frac{1}{x}| \leq |x| \text{ dla } x \neq 0$$

$$\stackrel{\text{tw.o 3 funkcjach}}{\implies} \lim_{x \rightarrow 0} |x \cdot \sin \frac{1}{x}| = 0 \iff \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$$

1. Twierdzenie 4.6: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ - (a) oraz $\forall x \in \mathbb{R} |\sin x| \leq |x|$ - (b)

(a) D: Niech $x \in (0, \frac{\pi}{2})$



$$P_{\triangle AOB} < P_{\text{wycinekkola}AOB} < P_{\triangle OAC}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2\pi} \pi \cdot 1^2 < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

Dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, mamy $\frac{\sin x}{x} < 1$ oraz $-\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

Dla $-x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ mamy $\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1$

Dla $y \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ mamy $\cos y < \frac{\sin y}{y} < 1$

Stąd $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}) \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ tw. o 3 funkcjach $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, bo $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$

(b) D: Weźmy, że $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}) |\frac{\sin x}{x}| < 1$ z czego $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}) |\sin x| < |x|$,

Dla $x = 0$, $|\sin x| = 0 \leq |x|$

Dla x takich, że $|x| \geq \frac{\pi}{2}$ mamy $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|$

Z wszystkich poprzednich $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} |\sin x| \leq |x|$

5. Granice jednostronne, asymptopy i ciągłość funkcji

1. Przez cały wykład zakładamy, że $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ gdzie $D \subset \mathbb{R}$

(a) $y = \sqrt{x}$ - granicę w zerze możemy liczyć tylko z prawej strony.

(b) $y = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nie istnieje. Ale możemy rozważać granicę lewostronną $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ i granicę prawostronną $\lim_{x \rightarrow 0^+}$

2. Def. (Heinego granic jednostronnych)

(a) Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru $D \cap (-\infty, a)$ i niech $g \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Wtedy g jest granicą lewostronną funkcji f w punkcie a (co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = g$ lub $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} g$ lub $f(a^-) = g$)
 $\Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset D \cap (-\infty, a) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$

(b) Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru $D \cap (a, +\infty)$ i niech $g \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Wtedy g jest granicą prawostronną funkcji f w punkcie a (co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g$ lub $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} g$ lub $f(a^+) = g$)
 $\Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset D \cap (a, +\infty) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$

3. Twierdzenie 5.1 (def. Cauchy'ego granic jednostronnych funkcji) - podkreślone to zmiana od definicji zwykłej granicy

(a) Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru $D \cap (-\infty, a)$

i. Jesli $g \in \mathbb{R}$ to $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = g \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \cap (-\infty, a) \delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon$

ii. Jeśli $g = +\infty \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall G > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \cap (-\infty, a) \delta < x - a < 0 \Rightarrow f(x) > G$

iii. Jeśli $g = -\infty \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall G < 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \cap (-\infty, a) \delta < x - a < 0 \Rightarrow f(x) < G$

(b) Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru $D \cap (a, +\infty)$

i. Jesli $g \in \mathbb{R}$ to $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \cap (a, +\infty) 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon$

ii. Jeśli $g = +\infty \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall G > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \cap (a, +\infty) 0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) > G$

- iii. Jeśli $g = -\infty \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \iff \forall_{G>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x \in D} 0 < x - a < \delta \implies f(x) < -G$
4. Twierdzenie 5.2: Jeśli $a \in \mathbb{R}$ jest punktem skupienia $D \cap (-\infty, a)$ i $D \cap (a, +\infty)$ oraz $g \in \tilde{\mathbb{R}}$, to $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g$
- (a) $[\frac{1}{0^+}] = +\infty, [\frac{1}{0^-}] = -\infty$
5. Asymptoty
- (a) Def. Prosta $x = a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ jest
- Asymptotą pionową lewostronną (wykresu) funkcji $y = f(x) \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$
 - Asymptotą pionową prawostronną (wykresu) funkcji $y = f(x) \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$
 - Asymptotą pionową obustronną gdy jest asymptotą pionową lewostronną i prawostronną
- (b) Def. Prosta $y = b$, gdzie $b \in \mathbb{R}$ jest
- Asymptotą poziomą lewostronną (wykresu) funkcji $y = f(x) \iff \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g$
 - Asymptotą poziomą prawostronną (wykresu) funkcji $y = f(x) \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g$
 - Asymptotą poziomą obustronną gdy jest asymptotą poziomą lewostronną i prawostronną
- (c) Def. Prosta $y = mx + k$, gdzie $m, k \in \mathbb{R}$ jest
- Asymptotą ukośną lewostronną (wykresu) funkcji $y = f(x) \iff \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + k)] = 0$
 - Asymptotą ukośną prawostronną (wykresu) funkcji $y = f(x) \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + k)] = 0$
 - Asymptotą ukośną obustronną gdy jest asymptotą poziomą lewostronną i prawostronną
 - Twierdzenie 5.3: Prosta $y = mx + k$, gdzie $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $k \in \mathbb{R}$ jest asymptotą ukośną prawo/lewostronną
 $\iff m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \wedge k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$ - (dowód na ćwiczeniach)
- A. Przykład: Wyznaczmy asymptoty funkcji $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = [\frac{1}{0^-}] = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = [\frac{1}{0^+}] = +\infty$, Więc $x = 0$ to asymptota pionowa obustronna
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = -1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = 1$ - asymptota pozioma lewostronna to $y = -1$, prawostronna $y = 1$
Brak asymptot ukośnych, bo są asymptoty poziome
6. Ciągłość
- (a) Przypomnienie: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g \stackrel{(H)}{\iff} \forall_{\{x_n\} \subset D \setminus \{a\}} \lim_{x \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g \stackrel{(C)}{\iff} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - g| < \epsilon$
- (b) Def. (Heinego ciągłości funkcji w punkcie):
Funkcja f jest ciągła w punkcie a ∈ D (musi być w dziedzinie) $\iff \forall_{\{x_n\} \subset D} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ - (CH)
i. W przypadku funkcji ciągłej f mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$, tzn. z granicą można wejść pod symbol funkcji.
ii. Uwaga: Jeśli $a \in D$ nie jest punktem skupienia zbioru D , to
 $\forall_{\{x_n\} \subset D} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ - (*) jest spełnione jedynie przez ciągi $\{x_n\}$ takie, że dla wszystkich dalszych $n : x_n = a$
 \implies dla wszystkich dużych $n : f(x_n) = f(a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a)$
Zatem warunek (CH) jest spełniony i funkcja jest ciągła w a . Na przykład każda $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w każdym punkcie z $D = \mathbb{N}$, bo każdy taki punkt nie jest punktem skupienia dziedziny
- (c) Twierdzenie 5.4 (def. Cauchy'ego ciągłości funkcji w punkcie).
Funkcja $f(x)$ jest ciągła w pkt. $a \in D \iff \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$ - (CC)
- i. D (gdy a jest punktem skupienia zbioru D): Chcemy pokazać, że (CH) \iff (CC)
(CH) $\iff \forall_{\{x_n\} \subset D} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) \iff \forall_{\{x_n\} \subset D \setminus \{a\}} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \iff \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon \iff$ (CC)
- ii. Przy okazji udowodniliśmy następujące twierdzenie:
- (d) Twierdzenie 5.5: Jeśli $a \in D$ jest punktem skupienia zbioru D , to $f(x)$ jest ciągła w punkcie $a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- (e) Def. Funkcja $f(x)$ jest ciągła $\iff f(x)$ jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny, tzn.
 $\forall_{a \in D} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon \iff f(x)$ jest ciągła w a
Przykłady:

- i. Funkcja stała $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$ gdzie $c \in \mathbb{R}$
 $\forall_{a \in D} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies |c - c| = 0 < \epsilon$ więc jest ciągła
- ii. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ jest ciągła:
 $\forall_{a \in D} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies |x - a| < \epsilon$, co zachodzi dla $\delta = \epsilon$
- iii. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ jest ciągła:
 $\forall_{a \in D} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies ||x| - |a|| \leq |x - a| < \epsilon$, co zachodzi dla $\delta = \epsilon$
- iv. $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ - przydatne do nastepnego
 $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
 $\sin \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$
 $\sin \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$
- v. $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$ są ciągłe, bo:
 $\forall_{a \in D} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies |\sin x - \sin a| = 2 |\sin \frac{x-a}{2}| \cdot |\cos \frac{x+a}{2}| \leq 2 \cdot |\frac{x-a}{2}| \cdot |1| \leq |x - a| < \epsilon$ ($\delta = \epsilon$)
 $\forall_{a \in D} \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies |\cos x - \cos a| = 2 |\sin \frac{x-a}{2}| \cdot |\sin \frac{x+a}{2}| \leq 2 \cdot |\frac{x-a}{2}| \cdot |1| \leq |x - a| < \epsilon$ ($\delta = \epsilon$)

6 Funkcje Ciągłe

1. Def. Funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ gdzie $D \subset \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $a \in D \iff \forall_{\{x_n\} \in D} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) \iff \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$

- (a) T: Jeśli $a \in D$ jest punktem skupienia D , to f jest ciągła w punkcie $a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \iff \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

Funkcje $c, x, |x|, \sin x, \cos x$ są ciągłe

2. Twierdzenie 6.1: Jeśli funkcje $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}$ są ciągłe w punkcie $a \in D$, to $f + g, f - g, fg$ też są ciągłe w punkcie a

$\frac{f}{g}$ też jest ciągła w punkcie a jeśli $\forall_{x \in D} g(x) \neq 0$

D: Twierdzenie to wynika z def. Heinego ciągłości funkcji i z tw. o ciągłości działań arytmetycznych
Wnioski:

- (a) Każdy wielomian $w(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ jest funkcją ciągłą
(b) Każda funkcja wymierna $\frac{w_1(x)}{w_2(x)}$ jest funkcją ciągłą
(c) Funkcje $\tan x$ i $\cot x$ są ciągłe

3. Twierdzenie 6.2: Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. Dokładniej, jeśli $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$ i $f : D_1 \rightarrow D_2$ jest ciągła w punkcie $a \in D_1$ i $g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $f(a)$, to złożenie $g \circ f$ ($g \circ f(x) := g(f(x))$) jest ciągłe w punkcie a

Przykład Funkcja $f(x) = \sin |x|$ jest ciągła

Funkcja odwrotna do funkcji ciągłej nie musi być funkcją ciągłą - musi być odwracalna

4. Twierdzenie 6.3 (o ciągłości funkcji odwrotnej): Jeśli P to przedział i $f : P \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$ jest ciągła i odwracalna, to funkcja odwrotna $f^{-1} : Y \rightarrow P$ też jest funkcją ciągłą.

Wniosek: Funkcja cyklometryczne, tzn $\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \text{arccot } x$ to funkcje ciągłe jako funkcje odwrotne

5. Def. Do funkcji elementarnych będziemy zaliczać:

- (a) wielomiany $w(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$
(b) funkcje wymierne $\frac{w_1(x)}{w_2(x)}$
(c) funkcja pierwiastek $\sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$
(d) funkcje trygonometryczne i cyklometryczne
(e) funkcje wykładniczą a^x gdzie $a > 0$

Jak rozumieć a^x gdy $a > 0$ i $x \in \mathbb{R}$?

i. Dla $x = 0, a^x = a^0 = 1$

ii. Dla $x \in \mathbb{N}, a^x = a \cdot \dots \cdot a$ (x czynników)

iii. Jeśli $x \in \mathbb{Z}$ i $x < 0$ to $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$

iv. Jeśli $x \in \mathbb{Q}$, czyli $x = \frac{n}{m}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, to $a^x = a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

v. A co jeśli $x \notin \mathbb{Q}$?

Def. Jeśli $a \in [1, \infty)$, to $a^x := \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q} \wedge q \leq x\}$ - zbiór niepusty i ograniczony z góra, np. przez $a^{\lfloor x \rfloor + 1}$
 \implies ma skończony kres górnny

Jeśli $a \in (0, 1)$, to $a^x := \frac{1}{(\frac{1}{a})^x}$

- (f) funkcję logarytmiczną $\log_a x$

6. Twierdzenie 6.4 (własności potęgowania):

- (a) Jesli $a, b > 0, x, y \in \mathbb{R}$, to $a^{x+y} = a^x \cdot a^y, (a^x)^y = a^{xy}, (ab)^x = a^x \cdot b^x$
(b) Jeśli $a \in (1, \infty)$, to funkcja $f(x) = a^x$ jest rosnąca i jej zbiór wartości to $(0, \infty)$
(c) Jeśli $a \in (0, 1)$, to funkcja $f(x) = a^x$ jest malejąca i jej zbiór wartości to $(0, \infty)$

7. Twierdzenie 6.5: Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ jest ciągła, tzn

$$\forall_{x_0 \in \mathbb{R}} \lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$$

8. Def. Niech $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$. Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcję $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, która jest funkcją odwrotną do funkcji $g : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $g(x) = a^x$

Uwaga: Funkcja logarytmiczna jest funkcją ciągłą jako funkcja odwrotna do funkcji ciągłej określonej na przedziale

9. Funkcja pierwiastek: Na ćwiczeniach, pokazaliśmy, że $\forall g \geq 0 \forall \{x_n\} \in [0, \infty) \lim_{x \rightarrow \infty} x_n = g \iff \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[4]{x_n} = \sqrt[4]{g}$
 Analogicznie można wykazać, że powyższy fakt zachodzi nie tylko dla pierwiastka stopnia 4 ale dowolnego stopnia $k \in \mathbb{N}$
 Warunek ten oznacza, że $f(x) = \sqrt[k]{x}$ jest funkcją ciągłą w dowolnym punkcie g

10. Twierdzenie 6.6: Każda funkcja elementarna jest funkcją ciągłą.

11. Def (funkcje hiperboliczne):

$$(a) \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$$

$$(b) \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$$

$$(c) \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, x \in \mathbb{R}$$

$$(d) \coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(e) Uwagi:

i. Pomiędzy funkcjami hiperbolicznymi zachodzą **podobne** związki jak pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi,
 np:

$$\sinh 2x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 2 \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1$$

ii. Funkcje hiperboliczne są ciągłe, np $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

Własności funkcji ciągły. Jednostajna ciągłość funkcji

1. Def. Mówimy, że funkcja $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ ma własność Darboux jeśli $f(a) \neq f(b) \implies \forall c \text{ leżącego pomiędzy } f(a) \text{ i } f(b) \exists x_0 \in (a, b) f(x_0) = c$

2. Twierdzenie 7.1: Każda funkcja ciągła $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ ma własność Darboux

3. Twierdzenie 7.2 (Weierstrassa I)

Każda funkcja ciągła $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona, tzn $\exists K \in \mathbb{R} \forall x \in < a, b > |f(x)| \leq K$

Uwaga - W powyższym twierdzeniu założenie, że dziedzina funkcji jest przedziałem domkniętym i ograniczonem - musi być przedziałem domkniętym

(a) Dowód nie wprost. Zakładamy, że $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła ale nie jest ograniczona, tzn

$\forall K \in \mathbb{R} \exists x \in < a, b > |f(x)| > K$. W szczególności biorąc $K = n$ gdzie $n \in \mathbb{R}$ otrzymujemy $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in < a, b > |x_n| > n$. Zatem mamy ciąg $\{x_n\}$, który jest ograniczony (bo $x_n \in < a, b >$)

$\stackrel{\text{tw. B-W}}{\implies}$ ciąg $\{x_n\}$ zawiera podciąg zbieżny, oznaczmy $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$. Wtedy $x_0 \in < a, b >$, bo $\forall k \in \mathbb{N} a \leq x_{n_k} \leq b$ i z tw. o przechodzeniu do granicy w nierównościach otrzymujemy $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in < a, b >$

Funkcja f jest ciągła na $< a, b > \implies$ w szczególności jest ciągła w pkt $x_0 \in < a, b > \stackrel{(\text{CH})}{\iff} \forall \{\tilde{x}_n\} \subset < a, b > \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n) = f(x_0)$

W szczególności $\{x_n\} \subset < a, b > \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) \iff \forall \epsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq k_0 |f(x_{n_k}) - f(x_0)| < \epsilon$

Dla $\epsilon = 1$ mamy $\exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq k_0 |f(x_{n_k}) - f(x_0)| < 1$ (*)

$\forall k \geq k_0 |f(x_{n_k})| = |f(x_{n_k}) - f(x_0) + f(x_0)| \leq |f(x_{n_k}) - f(x_0)| + |f(x_0)| \stackrel{(*)}{<} 1 + |f(x_0)|$

Sprzecznośc z $\forall n \in \mathbb{N} |f(x_n)| > n \implies \forall k \in \mathbb{N} |f(x_{n_k})| > n_k$

Dla dostatecznie dużych k otrzymamy $1 + |f(x_0)| < n_k l$

Własności funkcji ciągły:

1. Twierdzenie 7.1 : Każda funkcja ciągła $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ ma własność Darboux, to znaczy

$$f(a) \neq f(b) \implies \forall_{c \text{ między } f(a), f(b)} \exists_{x_0 \in (a, b)} f(x_0) = c$$

2. Twierdzenie 7.1: (twierdzenie Weierstrassa I)

Jeśli funkcja $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to jest ograniczona

3. Twierdzenie 7.2: (twierdzenie Weierstrassa II)

Jeśli funkcja $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to przyjmuje wartość najmniejszą i największą - osiąga swoje kresy

$$\exists_{x_m, x_M \in < a, b >} f(x_m) = \inf_{x \in < a, b >} f(x) \text{ i } f(x_M) = \sup_{x \in < a, b >} f(x)$$

Uwaga - z przedziału otwartego to niekoniecznie prawda

(a) Dowód: $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ - funkcja ciągła $\xrightarrow{\text{tw. Weierstrassa I}}$ jest ograniczona, tzn ograniczony jest zbiór wartości tej funkcji $Y = \{f(x) : x \in < a, b >\}$. Ponadto $Y \neq \emptyset$. Zatem istnieją skończone kresy zbioru Y . Oznaczmy $m = \inf Y = \inf_{x \in < a, b >} f(x)$ i $M = \sup Y = \sup_{x \in < a, b >} f(x)$. Pokażemy, że $\exists_{x_M \in < a, b >} f(x_m) = M$. Dowód tego, że $\exists_{x_m \in < a, b >} f(x_m) = m$ przebiega analogicznie.

Dowód nie wprost: Zakładamy, że $\forall_{x \in < a, b >} f(x) \neq M$, więc $f(x) < M$ bo $M = \sup_{x \in < a, b >} f(x)$

Zdefiniujmy funkcję $F : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{M-f(x)}$. Funkcja ta jest dobrze zdefiniowana, bo mianownik się nie zeruje.

$F : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą $\xrightarrow{\text{tw. Weierstrassa I}}$ jest ograniczona, tzn. $\exists_{K>0} \forall_{x \in < a, b >} 0 < F(x) < K$ tzn $\exists_{K>0} \forall_{x \in < a, b >} 0 < \frac{1}{M-f(x)} < K \implies \exists_{K>0} \forall_{x \in < a, b >} M - f(x) > \frac{1}{K}$

$\implies \exists_{K>0} \forall_{x \in < a, b >} f(x) < M - \frac{1}{K}$, co oznacza że M nie jest największym ograniczeniem Y , czyli $M \neq \sup_{x \in < a, b >} f(x)$ - sprzeczność

Jednostajna ciągłość funkcji

Do końca wykładu będziemy zakładać, że $D \subset \mathbb{R}$.

Przypomnienie:

Funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła $\iff \forall_{a \in D} \text{funkcja } f \text{ jest ciągła w } a \iff \forall_{a \in D} \forall_{\epsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x \in D} |x-a| < \delta \implies |f(x)-f(a)| < \epsilon$ - δ może zależeć od a .

Jeśli δ nie zależy od a , tzn jest taka sama dla każdego a , to wtedy mówimy, że funkcja f jest jednostajnie ciągła, tzn spełnia warunek:

1. Def: Funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła $\iff \forall_{\epsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{a \in D} \forall_{x \in D} |x-a| < \delta \implies |f(x)-f(a)| < \epsilon$

(a) Uwaga 7.1: Każda funkcja jednostajnie ciągła jest ciągła.

(b) Przykłady:

i. $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ nie jest jednostajnie ciągła

Dowód nie wprost. Zakładamy, że f jest jednostajnie ciągła, czyli $\forall_{\epsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{a \in D} \forall_{x \in D} |x-a| < \delta \implies |f(x)-f(a)| < \epsilon$

W szczególności dla $\epsilon = 1$ ptrzymujemy $\exists_{\delta>0} \forall_{x,y \in (0, \infty)} |x-y| < \delta \implies |f(x)-f(y)| < 1$

Weźmy $x_n = \frac{1}{n}$, $t_n = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $|x_n - y_n| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Stąd dla dostatecznie dużego n mamy $|x_n - y_n| < \delta \implies |f(x_n) - f(y_n)| < 1$

Z drugiej strony, $|f(x_n) - f(y_n)| = |n - n - 1| = 1$ - skąd sprzeczność.

ii. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, jest jednostajnie ciągła - $\forall_{\epsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{a \in D} \forall_{x \in D} |x-a| < \delta \implies |f(x)-f(a)| = |\cos x - \cos a| = |-2 \sin \frac{x-a}{2} \sin \frac{x+a}{2}| = 2|\sin \frac{x-y}{2}| |\sin \frac{x+y}{2}| \leq 2|\frac{x-y}{2}| \cdot 1 = |x-y| < \epsilon$

Więc wystarczy wybrać $\delta = \epsilon$

2. Twierdzenie 7.4: (twierdzenie Cantora):

Jeśli $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to jest jednostajnie ciągła.

Dowód nie wprost: Zakładamy, że $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła ale nie jest jednostajnie ciągła. Wtedy

$\exists_{\epsilon>0} \forall_{\delta>0} \exists_{a \in D} \exists_{x \in D} |x-a| < \delta \wedge |f(x)-f(a)| \geq \epsilon$. W szczególności biorąc $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy $\exists_{\epsilon>0} \forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{x_n, y_n \in < a, b >} |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ i } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$

W ten sposób otrzymaliśmy dwa ciągi $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$. Ciąg $\{x_n\}$ jest ograniczony, bo $\forall_{n \in \mathbb{N}} x_n \in [a, b]$ $\xrightarrow{\text{tw. Bolzano-Weierstrassa}} \{x_n\}$ zawiera podciąg zbieżny; oznaczmy $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0$

Z twierdzenia o przechodzeniu do granicy w nierównościach, mamy $x_0 \in [a, b]$

$\forall_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \implies \forall_{n \in \mathbb{N}} x_n - \frac{1}{n} < y_n < x_n + \frac{1}{n} \implies \forall_{k \in \mathbb{N}} x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < y_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k}$ lewa i prawa strona zbiegają do x_0 , więc z tw o 3 ciągach $y_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0$

Z ciągłości funkcji f w punkcie x_0 , $f(x_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x_0)$ i $f(y_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x_0)$
 Stąd $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, co jest sprzeczne z $\exists_{\epsilon > 0} \forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{x_n, y_n \in (a, b)} |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$, bo z drugiej strony
 $\exists_{\epsilon > 0} \forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{x_n, y_n \in (a, b)} |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon \implies \exists_{\epsilon > 0} \forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{x_n, y_n \in (a, b)} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \epsilon$

3. Def: Funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza na $D \iff \exists_{L > 0} \forall_{x, y \in D} |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$
 Przykład: Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ spełnia warunek Lipschitza, bo już dzisiaj pokazaliśmy, że $\forall_{x, y \in \mathbb{R}} |f(x) - f(y)| = |\cos x - \cos y| \leq |x - y|$, tzn istnieje L spełniające warunek Lipschitza ($L = 1$)
4. Twierdzenie 7.5: Jeśli $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza, to jest jednostajnie ciągła.
 Dowód: Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza. Wtedy $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{a \in D} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq L|x - a| < \epsilon$ ($\delta = \frac{\epsilon}{L}$), co oznacza, że f jest jednostajnie ciągła.

8. Pochoda funkcji jednej zmiennej

- Def. Punkt a jest punktem wewnętrznym zbioru $D \subset \mathbb{R} \iff \exists_{\delta>0} (a-\delta, a+\delta) \subset D$
Przez cały wykład będziemy zakładać, że (o ile nie będzie powiedziane inaczej)
 $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ i x_0 jest punktem wewnętrznym zbioru D
- Def. Jeśli istnieje skończona granica $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, - (tzw. iloraz różnicowy) to nazywamy ją pochodną funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy $f'(x_0)$ lub $\frac{df}{dx}(x_0)$
Wtedy funkcję f nazywamy różniczkowalną w punkcie x_0
- Interpretacja geometryczna pochodnej**
Wartość pochodnej $f'(x_0)$ to nachylenie prostej stycznej do wykresu funkcji f w x_0 w postaci $f'(x_0) = \tan \alpha$ gdzie α to kąt nachylenia prostej do dodatniej półosi OX , gdzie styczna to graniczne położenie siecznej przechodzącej przez punkty $(x_0, f(x_0))$ i $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ dla $h \rightarrow 0$, która istnieje jeśli iloraz różnicowy ma granicę.
Jeśli granica istnieje i też jest skończona, to $f'(x_0) = \tan \alpha$
Wyznaczmy równanie prostej stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$
 $y = ax + b$ gdzie $a = f'(x_0)$ i $f(x_0) = ax_0 + b$, z czego $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$
 $y = f'(x_0) + f(x_0) - f'(x_0)x_0 \iff y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \iff y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ gdzie $y_0 = f(x_0)$
- Twierdzenie 8.1:** Warunek konieczny różniczkowalności
Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to jest też ciągła w x_0 .
 f jest różniczkowalna w $x_0 \implies f$ jest ciągła w x_0
 - D: (egzamin) Z założenia x_0 jest punktem wewnętrznym $D \implies x_0$ jest punktem skupienia zbioru $D \implies (f$ jest ciągła w $x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
Z różniczkowalności funkcji f w x_0 mamy $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$. Stąd $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x-x_0) + f(x_0) \right) = 0 + f(x_0) = f(x_0)$.
 - Uwaga 8.1: Twierdzenie odwrotne do 8.1 nie jest prawdziwe, tzn nie każda funkcja ciągła w x_0 jest różniczkowalna w x_0
Przykład: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$ jest ciągła, ale nie jest różniczkowalna w $x_0 = 0$
- Def: Funkcja f jest różniczkowalna w zbiorze $D \iff \forall_{x_0 \in D} f$ jest różniczkowalna w x_0
Wtedy możemy mówić o funkcji $f' : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$
- Twierdzenie 8.2:** (o działaniach arytmetycznych na pochodnych)
Jeśli $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ są różniczkowalne w x_0 , to:
 - $f \pm g$ jest różniczkowalna w x_0 i $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
 - fg jest różniczkowalna w x_0 i $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
 - $\frac{f}{g}$ jest różniczkowalna w x_0 i $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$ jeśli tylko $\forall_{x \in D} g(x) \neq 0$
 - D: Z założenia f, g są różniczkowalne w x_0 . Z warunku koniecznego różniczkowalności f, g są ciągłe w x_0 .
Dowód (a) jest trywialny więc pomijam
(b) $(fg)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x_0) \cdot \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
(c): $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{(x-x_0) \cdot (g(x)g(x_0))} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot (g(x_0) \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- Twierdzenie 8.3 (o różniczkowaniu złożenia):**
jeśli $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$ i $f : D_1 \rightarrow D_2$ jest różniczkowalna w $x_0 \in D_1$ i $g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $f(x_0) \in D_2$, to złożenie $g \circ f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalne w punkcie x_0 i $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$
 - D: $(g \circ f)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0))-g(f(x_0))}{h}$ oznaczmy $\Delta = f(x_0 + h) - f(x_0) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x_0) - f(x_0) = 0$ bo f jest ciągła w x_0
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0)+\Delta)-g(f(x_0))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0)+\Delta)-g(f(x_0))}{\Delta} \cdot \frac{\Delta}{h} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0)+\Delta)-g(f(x_0))}{\Delta} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$
- Twierdzenie 8.4 (o różniczkowaniu funkcji odwrotnej):**
Jeśli f jest ciągła i ściśle monotoniczna w pewnym **otoczeniu punktu x_0** (tzn w zbiorze $(x-\delta, x+\delta)$, gdzie $\delta > 0$) i istnieje pochodna $f'(x_0) \neq 0$, to funkcja odwrotna f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $y_0 = f(x_0)$ i $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

(a) Dowód: Wiemy, że $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow (y_0 - \eta_1, y_0 + \eta_2)$ ($\delta, \eta_1, \eta_2 > 0$) jest ciągła i ścisłe monotoniczna ($\Rightarrow 1 - 1 \implies$ odwrotna)

$f^{-1} : (y_0 - \eta_1, y_0 + \eta_2) \rightarrow (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ Z tw o ciągłości funkcji odwrotnej wynika, że f^{-1} jest funkcją ciągłą.

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

9. Twierdzenie 8.5 (o pochodnych funkcji elementarnych):

(a) f : funkcja stała, tzn $\forall_{x \in D} f(x) = c, c \in \mathbb{R} \implies \forall_{x \in D} f'(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0$$

Wniosek: Z twierdzenia 8.2 i (a), $(cf(x))' = c'f(x) + cf'(x) = 0 + cf'(x) = f'(x)$

(b) $(x^n) = nx^{n-1}$, dla $(x, n) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{N}) \setminus (0, 1)$ (dla $n = 1$ definiujemy $x' = 1$ bo $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1$)

$$(x^n)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} = nx^{n-1} + 0 = nx^{n-1}$$

(c) $(x^{-n})'$ dla $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$(x^{-n})' = ((\frac{1}{x})^n)' = \frac{0 \cdot x^{n-1} \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

(d) $(\sin x)' = \cos x$ dla $x \in \mathbb{R}$

$$(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos \frac{2x+h}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos(x+h) = \cos(x)$$

(e) $(\cos x)' = -\sin x$ dla $x \in \mathbb{R}$

(f) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$$(\tan x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

(g) $(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

(h) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ dla $x \in (0, \infty)$

$$(\ln x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \ln(1 + \frac{h}{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \ln(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}})^{\frac{1}{h}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

Ogólniej: $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

D: Dla $x < 0$, $(\ln |x|)' = (\ln -x)' = \frac{1}{-x} \cdot -1 = \frac{1}{x}$

(i) $(e^x)' = e^x$

$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x)$ - funkcja ciągła i ścisłe rosnąca i $\forall_{x \in (0, \infty)} f'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$

Z tw o pochodnej funkcji odwrotnej, $(e^{\ln x})' = x \implies (e^{\ln e^x})' = e^x \implies (e^x)' = e^x$

(j) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ dla $x \in (0, \infty), \alpha \in \mathbb{R}$

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

(k) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $x \in (-1, 1)$

(l) $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $x \in (-1, 1)$

(m) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$

(n) $(\text{arccot } x)' = \frac{-1}{1+x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$

Dowody (k)-(n) wynikają bezpośrednio z twierdzenia o różniczkowaniu funkcji odwrotnej

9. Pochodne jednostronne

- Na poprzednim wykładzie zakładaliśmy, że $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ i x_0 jest punktem wewnętrznym D . W pozostałych dwóch definicjach **nie** wymagamy by x_0 był punktem wewnętrznym D
 - Def. (pochodnej lewostronnej):
Jeśli $\exists_{\delta>0}(x_0 - \delta, x_0] \subset D$ i istnieje skończona granica $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ to nazywamy ją pochodną lewostronną f w x_0 i oznaczamy $f'_-(x_0)$
 - Def. (pochodnej prawostronej):
Jeśli $\exists_{\delta>0}[x_0, x_0 + \delta] \subset D$ i istnieje skończona granica $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ to nazywamy ją pochodną prawostrońską f w x_0 i oznaczamy $f'_+(x_0)$
- Twierdzenie 9.1 (warunek konieczny i dostateczny różniczkowalności):
Funkcja f jest różniczkowalna w $x_0 \iff$ istnieją $f'_-(x_0)$ i $f'_+(x_0)$ oraz $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. W przypadku różniczkowalności $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

Pochodne wyższych rzędów

- Def. Pochodną n -tego rzędu funkcji f w x_0 definiujemy rekurencyjnie:

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= f(x) \\ f^{(n)}(x_0) &= (f^{(n-1)})'(x_0) \end{aligned}$$

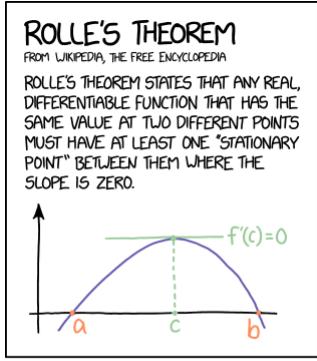
Aby istniała pochodna n -tego rzędu f w x_0 musi istnieć pochodna rzędu $n-1$ w pewnym otoczeniu $x_0 \implies$ muszą istnieć wszystkie poprzednie pochodne w pewnym otoczeniu punktu x_0
Do oznaczania $f^{(n)}(x_0)$ używa się także $\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$ lub $D^n f(x_0)$
Funkcje, która ma n -tą pochodną w pewnym przedziale będziemy nazywać n -krotnie różniczkowalną w tym przedziale

Twierdzenie Rolle'a i twierdzenie Lagrange'a

- Twierdzenie 9.2 (Rolle'a):

Jeśli funkcja f jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna w (a, b) i $f(a) = f(b)$ to $\exists_{c \in (a, b)} f'(c) = 0$

- Interpretacja geometryczna:



EVERY NOW AND THEN, I FEEL LIKE THE MATH EQUIVALENT OF THE CLUELESS ART MUSEUM VISITOR SQUINTING AT A PAINTING AND SAYING "C'MON, MY KID COULD MAKE THAT."

- Z założenia f jest ciągła na $[a, b] \stackrel{\text{tw. Weierstrassa II}}{\implies} f$ osiąga swoje kresy na $[a, b]$, tzn $\exists_{x_m \in [a, b]} f(x_m) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ oraz

$$\exists_{x_M \in [a, b]} f(x_M) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

$$\implies \forall_{x \in [a, b]} f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$$

- Jeśli $f(x_m) = f(x_M)$, to $\forall_{x \in [a, b]} f(x_m) = f(x) = f(x_M)$, tzn f jest stała w na $[a, b] \implies \forall_{x \in (a, b)} f'(x) = 0 \implies$ za c możemy взять dowolny punkt z (a, b)

- Jeśli $f(x_m) \neq f(x_M)$ to $f(x_m) \neq f(a)$ lub $f(x_m) \neq f(b) \implies f(x_m) < f(a)$ lub $f(x_m) > f(b)$

Załóżmy, że $f(x_m) < f(a)$, (dowód gdy $f(x_M) > f(a)$ przebiega analogicznie)

Mamy zatem $f(x_m) < f(a) = f(b) \implies x_m \in (a, b) \implies f$ jest różniczkowalna w punkcie $x_m \stackrel{\text{tw. 9.1}}{\implies}$ istnieją $f'_-(x_m)$ i $f'_+(x_m)$ i $f'(x_m) = f'_-(x_m) = f'_+(x_m)$

$$f'_-(x_m) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \text{ bo "góra" jest zawsze } \geq 0 \text{ a dół } < 0$$

$$f'_+(x_m) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \text{ bo "góra" jest zawsze } \geq 0 \text{ a dół } > 0$$

Wtedy $f'(x_m) = 0$ bo $0 \leq f'_+(x_m) = f'(x_m) = f'_-(x_m) \leq 0$

2. Twierdzenie 9.3 (tw. Lagrange'a o wartości średniej). Jeżeli f jest ciągła w $[a, b]$ i różniczkowalna w (a, b) to $\exists_{c \in (a, b)} f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

D: Weźmy $g(x) = f(x - f(a) - \frac{f(x) - f(a)}{b-a}(x - a))$. $g(a) = 0, g(b) = 0 \implies g(a) = g(b)$

Funkcja g jest ciągła w $[a, b]$ i różniczkowalna w (a, b) . Zatem g spełnia założenia tw. Rolle'a i używając tego twierdzenia otrzymujemy $\exists_{c \in (a, b)} g'(c) = 0$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot 1$$

$$\implies \exists_{c \in (a, b)} f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Wnioski:

$$(a) \forall_{x \in (a, b)} f'(x) = 0 \iff f \text{ jest funkcją stałą na } (a, b)$$

\iff Już na poprzednim wykładzie udowodniliśmy że pochodna stałej = 0

\implies Zakładamy, że $\forall_{x \in (a, b)} f'(x) = 0$. Weźmy dowolne $x_1, x_2 \in (a, b)$ takie, że $x_1 < x_2$. Pokażemy, że $f(x_1) = f(x_2)$, a z tego już będzie łatwo wykazać że f jest stała na (a, b)

Z założenia f jest różniczkowalna na $(a, b) \implies$ jest ciągła na (a, b)

W szczególności f jest ciągła na $[x_1, x_2]$. Wtedy $\exists_{c \in (x_1, x_2)} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0 \implies f(x_2) - f(x_1) = 0 \implies f(x_1) = f(x_2)$ co zachodzi dla dowolnego x_1, x_2 , więc f jest stała.

$$(b) \forall_{x \in (a, b)} f'(x) > 0 \implies f \text{ jest rosnąca na } (a, b) \text{ (nie zachodzi w drugą stronę, bo na przykład } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} x \mapsto x^3)$$

D: Weźmy dowolne $x_1, x_2 \in (a, b)$ takie, że $x_1 < x_2$. Powtarzamy rozumowanie z dowodu powyżej, otrzymujemy $\exists_{c \in (x_1, x_2)} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0 \implies f(x_2) - f(x_1) > 0 \implies f(x_2) > f(x_1)$

$$(c) \forall_{x \in (a, b)} f'(x) < 0 \implies f \text{ jest malejąca na } (a, b) \text{ (nie zachodzi w drugą stronę, bo na przykład } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} x \mapsto -x^3)$$

D: Analogicznie do poprzedniego.

3. Twierdzenie 9.4: $\forall_{x \in (a, b)} f'(x) \geq 0 \iff f \text{ jest rosnąca (niemalejąca) i różniczkowalna na } (a, b)$

D: Niech $x \in (a, b)$. Z założenia f jest różniczkowalna w $x_0 \xrightarrow{\text{tw. 9.1}}$ istnieje $f'_+(x)$ i $f'(x) = f'_{+(x)}$

$$f'(x) = f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \text{ bo góra i dół} > 0$$

$$\begin{cases} f \text{ jest rosnąca} \\ h > 0 \implies x + h > x \end{cases} \implies f(x+h) > f(x)$$

4. Twierdzenie 9.5: $\forall_{x \in (a, b)} f'(x) \leq 0 \iff f \text{ jest malejąca (niersosnąca) i różniczkowalna na } (a, b)$

Wnioski 2.(a-c) oraz twierdzenia 3,4 pozostają prawdziwe, gdy przedział ograniczone (a, b) zamienimy na nieograniczone $(a, +\infty), (-\infty, b), (-\infty, +\infty)$

5. Reguła De L'Hospitala

Twierdzenie 9.6 (tw. de l'Hospitala):

Jeśli

$$1. x_0 \in (a, b)$$

$$2. f, g : (a, b) \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$3. \forall_{x \in (a, b) \setminus \{x_0\}} g(x) \neq 0 \text{ i } g'(x) \neq 0$$

$$4. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ lub } \lim_{x \rightarrow x_0} = \pm\infty$$

$$5. \text{istnieje granica (skończona lub nie) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

To istnieje granica $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

W skrócie $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = [\frac{0}{0} \text{ lub } \frac{\cos 0}{\pm\infty}] \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ jeśli $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ istnieje

Uwaga: Twierdzenie de l'Hostpitala jest także prawdziwe dla granic jednostronnych i granic w $\pm\infty$, z tym że w przypadku granicy w $+\infty$ musimy założyć $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ są różniczkowalne w $(0, +\infty)$. $\forall_{x \in (0, \infty)} g(x) \neq 0 \text{ i } g'(x) \neq 0$

10. Wzór Taylora

Przypomnienie tw. Lagrange'a : Jeśli funkcja f jest ciągła na $[x_0, x]$ i różniczkowalna na (x_0, x) to $\exists_{c \in (x_0, x)} f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \implies \exists_{c \in (x_0, x)} f(x) = f(x_0) + f'(x - x_0)$ - wzór ten można uogólnić

1. Twierdzenie 10.1 (wzór Taylora z resztą Lagrange'a):

Jeśli $f^{(n)}$ jest ciągła na $[x_0, x]$ i istnieje $f^{(n+1)}$ na (x_0, x) to

$$\exists_{c \in (x_0, x)} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Ostatni wyraz to $R_n(x)$ -reszta w postaci Lagrange'a, suma resztą wyrazów to wielomian Taylor'a $T_n(x)$

Szkic dowodu: Korzystamy z tw. Rolle'a dla funkcji $h : < x_0, x > \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(t) = f(x) - (f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x - t)^1 + \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n) - \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} \cdot (x - t)^{n+1}$$

h spełnia założenia tw. Rolle'a : $h(x_0) = f(x) - T_n(x) - (f(x) - T_n(x)) = 0$, $h(x) = f(x) - f(x) = 0$ - $h(x_0) = h(x)$

h jest ciągła na $< x_0, x >$, bo z założenia $f^{(n+1)}$ jest ciągła na $[x_0, x]$, więc wszystkie poprzednie pochodne muszą być różniczkowalne - a więc ciągłe

h jest różniczkowalna na (x_0, x) bo każdy wyraz sumowania jest różniczkowalny na (x_0, x) - z założenia istnieją pochodne $f', \dots, f^{(n+1)}$

$$h'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n + \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} \cdot (n+1)(x - t)^n$$

$$\text{Z tw Rolle'a otrzymujemy } \exists_{c \in (x_0, x)} h'(c) = 0 \implies \exists_{c \in (x_0, x)} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} (n+1)(x - t)^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - t)^n \implies \exists_{c \in (x_0, x)} f(x) = T_n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Uwaga: Wzór Taylora jest także prawdziwy dla przedziału $< x, x_0 >$

Uwaga: Jeśli we wzorze Taylora podstawimy $x_0 = 0$ to dostaniemy wzór Maclaurina.

Wzór Taylora jest przydatny do liczenia przybliżonych wartości wyrażeń

(a) Przykład: Wyznaczmy przybliżenie e wzorem Maclaurina:

$f(x) = e^x$ - ma pochodne dowolnego rzędu, ciągła na $[0, \infty)$

Wtedy $f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x}{2!} + \dots + R_n(x)$

Stąd $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$

Dla pierwszych 6 wyrazów suma wynosi ~ 2.717

2. Twierdzenie 10.2 (wzór Taylora z resztą Peano):

Jeśli istnieje $f^{(n)}(x_0)$ ($\implies \exists_{\delta > 0} f', \dots, f^{(n-1)}$ istnieją w $(x - \delta, x + \delta)$), to

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \text{ gdzie } R_n(x) \text{ to reszta w postaci Peano, gdzie } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0, \text{ co zapisujemy } R_n(x) = o((x - x_0)^n)$$

Dowód: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = [0]_0$ - lecimy l'Hopitala aż do $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - (f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x - x_0))}{n(n-1) \cdot 2 \cdot (x - x_0)} =$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{n(n-1)} \cdot \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - f^{(n)}(x_0) \right) = \frac{1}{n(n-1)} (f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)) = 0$$

Wzór Taylora z resztą Peano może być wygodniejszy do liczenia granic niż tw. de l'Hopitala.

Rozwijamy wtedy wielomian Taylor'a odpowiednio żeby skorzystać z faktu, że $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$

Badanie przebiegu zmienności funkcji

W tej części wykładu będziemy zakładać, że $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ i x_0 jest punktem wewnętrznym D

1. Def (ekstremów lokalnych):

Funkcja f ma w punkcie x_0 :

- (a) maksimum lokalne, jeśli $\exists_{\delta > 0} \forall_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} f(x_0) \geq f(x)$
- (b) maksimum lokalne właściwe, jeśli $\exists_{\delta > 0} \forall_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}} f(x_0) > f(x)$
- (c) minimum lokalne, jeśli $\exists_{\delta > 0} \forall_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} f(x_0) \leq f(x)$
- (d) minimum lokalne właściwe, jeśli $\exists_{\delta > 0} \forall_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}} f(x_0) < f(x)$

2. Twierdzenie 11.1 (warunek konieczny ekstremum lokalnego):

Jeśli funkcja f osiąga w punkcie x_0 ekstremum lokalne i jest w tym punkcie różniczkowalna, to $f'(x_0) = 0$

D: Przeprowadzamy dla maksimum lokalnego, dla minimum dowód przebiega analogicznie)

Zakładamy, że f osiąga w x_0 maksimum lokalne. Wtedy $f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$

Z założenia f jest różniczkowalna w x_0 , więc $0 \leq f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0 \implies f'(x_0) = 0$

Uwaga - to nie jest warunek dostateczny ekstremum lokalnego - przykładowo x^3 nie osiąga ekstremum w $x = 0$

3. Twierdzenie 11.3 (coś się zepsuło w numeracji)(drugi warunek dostateczny istnienia ekstremum lokalnego)

Jeśli $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) \neq 0$ to w punkcie x_0 jest osiągane ekstremum lokalne właściwe.

Ponadto, jeśli $f''(x_0) > 0$ to jest to minimum lokalne właściwe, a jeśli $f''(x_0) < 0$ to jest to maksimum lokalne właściwe

D: Korzystając ze wzoru Taylora z resztą Peano i $n = 2$, otrzymujemy $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + R_2(x)$
gdzie $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_2(x)}{(x - x_0)^2} = 0$

Pokażemy, że $f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + R_2(x) > f(x_0)$ dla $x \in (x - \delta, x + \delta) \setminus \{x_0\}$

Wystarczy pokazać, że $\frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + R_2(x) > 0$, czyli $\frac{f''(x_0)}{2} + \frac{R_2(x)}{(x - x_0)^2} > 0$

$$\frac{R_2(x)}{(x - x_0)^2} > 0 \iff \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} 0 < |x - x_0| < \delta \implies \left| \frac{R_2(x)}{(x - x_0)^2} - 0 \right| < \epsilon$$

W szczególności dla $\epsilon = \frac{f''(x_0)}{4}$ $\exists_{\delta > 0} \forall_{x \in (x - \delta, x + \delta) \setminus \{x_0\}} -\frac{f''(x_0)}{4} < \frac{R_2(x)}{(x - x_0)^2} < \frac{f''(x_0)}{4}$, więc $\frac{f''(x_0)}{2} - \frac{R_2(x)}{(x - x_0)^2} > \frac{f''(x_0)}{2} - \frac{f''(x_0)}{4} = \frac{f''(x_0)}{4} > 0$