

29.10.2019

$A(\text{row}, \text{column}), A \in M_{\text{rows}}^{\text{columns}}$

1. $A \in M_m^n(K), B \in M_n^p(K)$

(a) $AB \in M_m^p(K)$

(b) $A \cdot B(i, j) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{k=1}^n A(i, k) \cdot B(k, j)$

i. $c^j(A \cdot B) = A c^j(B)$

ii. $r_i(A \cdot B) = r_i(A) \cdot B$

(c) Mnożenie macierzy nie musi być przemienne - zazwyczaj nie jest

(d) Przykład - $A, B \in M_2^2(K), A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A \cdot B \neq B \cdot A$

2. Własności sumy i iloczynu - Niech $A, A', A'' \in M_m^n(K), B, B' \in M_n^p(K), C \in M_p^r(K), \lambda \in K$

(a) $(A + A') + A'' = A + (A' + A'')$

(b) $A + A' = A' + A$

(c) $A + (-A) = 0_m^n$

(d) $A + 0_m^n = A$

(e) $(AB)C = A(BC)$

(f) $(A + A')B = AB + A'B$

$A(B + B') = AB + AB'$

i. D: $[(A + A')B](i, j) = \sum_{k=1}^n (A + A')(i, k) \cdot B(k, j) = \sum_{k=1}^n (A(i, k) + A'(i, k)) \cdot B(k, j) = \sum_{k=1}^n A(i, k) \cdot B(k, j) + \sum_{k=1}^n A'(i, k) \cdot B(k, j) = AB(i, j) + A'B(i, j) = (AB + A'B)(i, j)$

(g) $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$

(h) $I_m A = A = A I_n$

3. Macierz transponowaną do $A \in M_m^n(K)$ nazywamy macierz $A^\top \in M_n^m(K)$, taką że $A^\top(i, j) = A(j, i)$

(a) Przykład $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $(A^\top)^\top = A$

(c) Def. Jeśli $A \in M_m^n(K)$ i $A = A^\top$ to A nazywamy macierzą symetryczną. Jeśli $A = -A^\top$, to A nazywamy macierzą antysymetryczną

i. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ - macierz symetryczna

ii. $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ - macierz antysymetryczna (muszą być zera na przekątnej)

4. Własności operacji transponowania. $A, B \in M_m^n(K), C \in M_n^p(K), \lambda \in K$

(a) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$

(b) $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$

(c) $(A^\top)^\top = A$

(d) $I_n^\top = I_n$

(e) $(AC)^\top = C^\top A^\top$

i. D: $(AC)^\top(i, j) = (AC)(j, i) = \sum_{k=1}^n A(j, k) \cdot C(k, i) = \sum_{k=1}^n A^\top(k, j) \cdot C^\top(i, k) = \sum_{k=1}^n C^\top(i, k) \cdot A^\top(k, j) = (C^\top A^\top)(i, j)$

A teraz pora przejść do prawdziwej algebry liniowej: Przestrzenie wektorowe.

Przestrzenie wektorowe (liniowe)

1. Def. Przestrzeń wektorową nad ciałem K nazywamy zbiór $V \neq \emptyset$ z odwzorowaniami:

$V \times V \rightarrow V : (u, v) \mapsto u + v$ - dodawanie wektorów

$K \times V \rightarrow V (a, v) \mapsto a \cdot v$ - mnożenie wektora przez skalar

Oraz z wyróżnionym elementem $\mathbb{O} \in V$ (wektor zerowy), to znaczy dla każdych $u, v, u \in V, a, b \in K$

$$(a) \quad u + (v + u) = (u + w) + v$$

$$(b) \quad u + v = v + u$$

$$(c) \quad \mathbb{O} + u = u$$

$$(d) \quad \forall u \in V \exists u' u + u' = \mathbb{O}$$

$$(e) \quad a \cdot (b \cdot u) = (a \cdot b) \cdot u$$

$$(f) \quad (a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$$

$$a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$$

$$(g) \quad 1 \cdot v = v$$

Oznaczamy $V[K]$

Przykłady przestrzeni liniowych:

$$(a) \quad \mathbb{R}^2 = \{[x, y] : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$(b) \quad \mathbb{R}^n = \{[x_1, \dots, x_n] : \forall_i x_i \in \mathbb{R}\} - \text{wtedy } [x_1, \dots, x_n] + [y_1, \dots, y_n] = [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n] \text{ oraz } \lambda[x_1, \dots, x_n] = [\lambda x_1, \dots, \lambda x_n]$$

$$(c) \quad K^n - \text{przestrzeń liniowa nad } K$$

$$(d) \quad L < K - L \text{ podciało } K: \mathbb{R} \text{ jest przestrzenią liniową nad } \mathbb{Q}, \mathbb{C} \text{ nad } \mathbb{R}, K \text{ nad } L$$

$$(e) \quad \mathbb{R} \text{ jest przestrzenią liniową nad } \mathbb{R}, K \text{ nad } K$$

$$(f) \quad V = M_m^n(K) - \text{przestrzeń liniowa nad } K$$

$$(g) \quad \text{Wielomiany: } K[x] = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in K\}$$

$$\lambda(a_0 + \dots + a_nx^n) = \lambda a_0 + \dots + \lambda a_nx^n$$

$$K[x] \text{ to przestrzeń liniowa nad ciałem } K$$

$$(h) \quad \text{Map}(X, K) = \{f : f : X \rightarrow K\} - K \text{ ciało, } X \text{ niepusty zbiór}$$

2. Def. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K

Niepusty podzbiór $U \subset V$ nazywamy podprzestrzenią przestrzeni V , jeśli dla każdych $u, v \in U$ oraz dla dowolnego $a \in K$ $u + v \in U, au \in U$

$$(a) \quad U < V : \text{Jeśli } U < V \text{ to } \mathbb{O} \in U$$

$$(b) \quad \text{Trywialne podprzestrzenie } \{\mathbb{O}\} < V, V < V$$

$$(c) \quad \mathbb{R}^2 < \mathbb{R}^3, K_{n-a}[x] < K_n \text{ dla } n, a \in \mathbb{N}_+, n > a$$

$$(d) \quad \text{Rozwiązania układu równań są przestrzenią wektorową}$$

3. V - przestrzeń liniowa nad K

$$(a) \quad a \cdot v = \mathbb{O} \iff a = 0 \vee v = 0$$