

1. Zbiory - aksjomatyczna teoria zbiorów.

- (a) Zbiór - pojęcie pierwotne (nie definiujemy go)
- (b) bycie elementem zbioru - pojęcie pierwotne
- (c) $A, B, C, \dots X, \dots$ - zbiory
- (d) $a \in A$ - a jest elementem zbioru A (a należy do A)
- (e) $a \notin A \iff \neg(a \in A)$ - a nie należy do A
- (f) **Aksjomat ekstencjonalności**
 - i. Zbiory A i B są równe wtedy i tylko wtedy gdy mają te same elementy, czyli
 - ii. $A = B \iff \forall x(x \in A \iff x \in B)$
 - iii. **Uwaga** - aby pokazać, że $A = B$ wystarczy udowodnić dwie implikacje $\forall x(x \in A \implies x \in B) \wedge (x \in B \implies x \in A)$

(g) **Aksjomat zbioru pustego**

- i. Istnieje zbiór pusty czyli taki, który nie ma żadnego elementów
- ii. \emptyset - zbiór pusty, $\forall x x \notin \emptyset$
- iii. Twierdzenie - istnieje tylko jeden zbiór pusty

D: A, B - zbiory puste, $\neg(A = B)$ czyli $A \neq B$

: Z aksjomatu ekstencjonalności zbiory są różne $\iff \exists x \neg((x \in A \implies x \in B) \wedge (x \in B \implies x \in A)) \iff \exists x \neg(x \in A \implies x \in B) \vee \neg(x \in B \implies x \in A) \iff$

: $\iff \exists x(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$

: $x \in A \wedge x \notin B$ zdanie fałszywe, bo A jest zbiorem pustym

: $x \in B \wedge x \notin A$ zdanie fałszywe, bo B jest zbiorem pustym

: Sprzeczność - istnieje tylko jeden zbiór pusty

(h) **Aksjomat wyróżniania**

- i. Jeśli A jest zbiorem, a $\phi(x)$ funkcją zdaniową o zakresie A ($x \in A$), to istnieje zbiór $\{x : x \in A \wedge \phi(x)\} = \{x \in A : \phi(x)\}$

: Czyli $a \in \{x \in A : \phi(x)\} \iff a \in A \wedge \phi(a)$

(i) **Uwaga:** nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów

D: V - zbiór wszystkich zbiorów

: $A = \{X \in V : X \notin X\}$ - zbiór na mocy aksjomatu wyróżnienia

: $A \in A \implies A \notin A$ - sprzeczność. Stąd $A \notin A \implies \neg(A \in A) \iff \neg(A \notin A) \implies A \in A$ - też sprzeczność

: Stąd nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów

(j) **Antynomia (paradoks) Russella**

: $Z = \{X : X \notin X\}$. Czy $Z \in Z$?

: $Z \in Z = \{X : X \notin X\} \iff Z \notin Z$ - sprzeczność

(k) Sposoby definiowania zbiorów

- i. $A = \{1, 3, \sqrt{2}\}, \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

- ii. $\phi(x)$ - funkcja zdaniowa - $A = \{x : \phi(x)\}$ - na przykład $P = \{x : x \text{ jest liczbą parzystą}\}$

A. $a \in \{x : \phi(x)\} \iff \phi(a)$

(l) **Def.** Zbiór A zawiera się w zbiorze B (A jest podzbiorem B) wtedy i tylko wtedy gdy każdy element z A jest elementem B

: $A \subseteq B \iff \forall x(x \in A \implies x \in B)$

(m) **Def.** A jest właściwym podzbiorem B jeśli $A \subseteq B \wedge A \neq B$ (oznaczenie $A \subsetneq B$)(n) **Proste własności**

- i. $A = A$
 - ii. $(A = B \wedge B = C) \implies A = C$
 - iii. $A = B \iff B = A$
 - iv. $A \subseteq A$
 - v. $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \implies A \subseteq C$
- D: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$ (Z)

- : $A \subseteq C?$
- : $x \in A \implies ?x \in C$
- : $x \in A \implies x \in B \implies x \in C$ - z Z
- vi. $A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

(o) **Aksjomat sumy**

- i. Jeśli A i B są zbiorami, to istnieje zbiór $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

(p) **Def.** Iloczyn (przecięcie) zbiorów to zbiór $A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$ (jest to zbiór na mocy aksjomatu wyróżniania)

(q) **Def.** Różnica zbiorów A i B to zbiór $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$

(r) **Prawa rachunku zbiorów** - A, B, C - zbiory

- i. $A \cup B = B \cup A$
- ii. $A \cap B = B \cap A$
- iii. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
- iv. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- v. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- vi. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

D: Trzeba pokazać, że implikacje zachodzą w obie strony. Aksjomat sumy, definicja iloczynu, rachunek zdań, aksjomat sumy

- vii. $A \cap B \subseteq A$
- viii. $A \subseteq A \cup B$
- ix. $A \cap A = A = A \cup A$