06.11.2019

6 Funkcje Ciągłe

1. Def. Funkcja $f: D \to \mathbb{R}$ gdzie $D \subset \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $a \in D \overset{(CH)}{\iff} \forall_{\{x_n\} \in D} \lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a) \overset{(CC)}{\iff} \forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}|x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$

   (a) T: Jeśli $a \in D$ jest punktem skupienia D , to f jest ciągła w punkcie $a \iff \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \iff \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

   Funkcje $c, x, |x|, \sin x, \cos x$ są ciągłe

2. Twierdzenie 6.1: Jeśli funkcje $f, g: D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}$ są ciągłe w punkcie $a \in D$, to
   $f+g, f-g, fg$ też są ciągłe w punkcie a
   $\frac{f}{g}$ też jest ciągła w punkcie a jeśli $\forall_{x\in D} g(x) \neq 0$
   D: Twierdzenie to wynika z def. Heinego ciągłości funkcji i z tw. o ciągłości działań arytmetycznych
   Wnioski:

   (a) Każdy wielomian $w(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ jest funkcją ciągłą

   (b) Każda funkcja wymierna $\frac{w_1(x)}{w_2(x)}$ jest funkcją ciągłą

   (c) Funkcje $\tan x$ i cotx są ciągłe

3. Twierdzenie 6.2: Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. Dokładniej, jeśli $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$ i $f: D_1 \to D_2$ jest ciągła w punkcie $a \in D_1$ i $g: D_2 \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $f(a)$, to złożenie $g \circ f$ $(g \circ f(x) := g(f(x)))$ jest ciągłe w punkcie a
   Przykład Funkcja $f(x) = \sin|x|$ jest ciągła
   Funkcja odwrotna do funkcji ciągłej nie musi być funkcją ciągłą - musi być odwracalna

4. Twierdzenie 6.3 (o ciągłości funkcji odwrotnej): Jeśli P to przedział i $f: P \to Y \subset \mathbb{R}$ jest ciągła i odwracalna, to funkcja odwrotna $f^{-1}: Y \to P$ też jest funkcją ciągłą.
   Wniosek: Funkcja cyklometryczne, tzn $\arcsin x, \arccos x, \arctan x$,arccot$x$ to funkcje ciągłe jako funkcje odwrotne

5. Def. Do funkcji elementarnych będziemy zaliczać:

   (a) wielomiany $w(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

   (b) funkcje wymierne $\frac{w_1(x)}{w_2(x)}$

   (c) funkcja pierwiastek $\sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$

   (d) funkcje trygonometryczne i cyklometryczne

   (e) funkcje wykładniczą a^x gdzie $a > 0$
   Jak rozumieć a^x gdy $a > 0$ i $x \in \mathbb{R}$?

      i. Dla $x = 0, a^x = a^0 = 1$

      ii. Dla $x \in \mathbb{N}$,$a^x = a \cdot \dots \cdot a$ (x czynników)

      iii. Jeśli $x \in \mathbb{Z}$ i $x < 0$ to $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$

      iv. Jeśli $x \in \mathbb{Q}$, czyli $x = \frac{n}{m}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, to $a^x = a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

      v. A co jeśli $x \notin \mathbb{Q}$?
      Def. Jeśli $a \in [1, \infty)$,to $a^x := \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q} \wedge q \leq x\}$ - zbiór niepusty i ograniczony z góry, np. przez $a^{\lfloor x \rfloor + 1}$
      $\implies$ ma skończony kres górny
      Jeśli $a \in (0, 1)$,to $a^x := \frac{1}{(\frac{1}{a})^x}$

   (f) funkcję logarytmiczną $\log_a x$

6. Twierdzenie 6.4 (własności potęgowania):

   (a) Jesli $a, b > 0$, $x, y, \in \mathbb{R}$, to $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $(ab)^x = a^x \cdot b^x$

   (b) Jeśli $a \in (1, \infty)$, to funkcja $f(x) = a^x$ jest rosnąca i jej zbiór wartości to $(0, \infty)$

   (c) Jeśli $a \in (0, 1)$, to funkcja $f(x) = a^x$ jest malejąca i jej zbiór wartości to $(0, \infty)$

7. Twierdzenie 6.5: Funkcja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ jest ciągła, tzn
   $\forall_{x_0 \in \mathbb{R}} \lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$

8. Def. Niech $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$. Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcję $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, która jest funkcją odwrotną do funkcji $g: \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $g(x) = a^x$
   Uwaga: Funkcja logarytmiczna jest funkcją ciągłą jako funkcja odwrotna do funkcji ciągłej określonej na przedziale

9. Funkcja pierwiastek: Na ćwiczeniach, pokazalismy, że $\forall_{g \geq 0} \forall_{\{x_n\} \in [0,\infty)} \lim_{x\to\infty} x_n = g \iff \lim_{x\to\infty} \sqrt[4]{x_n} = \sqrt[4]{g}$
Analogicznie mozna wykazać, że powyższy fakt zachodzi nie tylko dla pierwiastka stopnia 4 ale dowolnego stopnia $k \in \mathbb{N}$
Warunek ten oznacza, że $f(x) = \sqrt[k]{x}$ jest funkcją ciągłą w dowolnym punkcie g

10. Twierdzenie 6.6: Każda funkcja elementarna jest funkcją ciągłą.

11. Def (funkcje hyperboliczne):

    (a) $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$
    (b) $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$
    (c) $\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $x \in \mathbb{R}$
    (d) $\coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
    (e) Uwagi:
        i. Pomiędzy funkcjami hiberbolicznymi zachodzą **podobne** związki jak pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi, np:
        $\sinh 2x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 2 \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 2 \sinh x \cosh x$
        $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1$
        ii. Funkcje hiperboliczne są ciągłe, np $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$