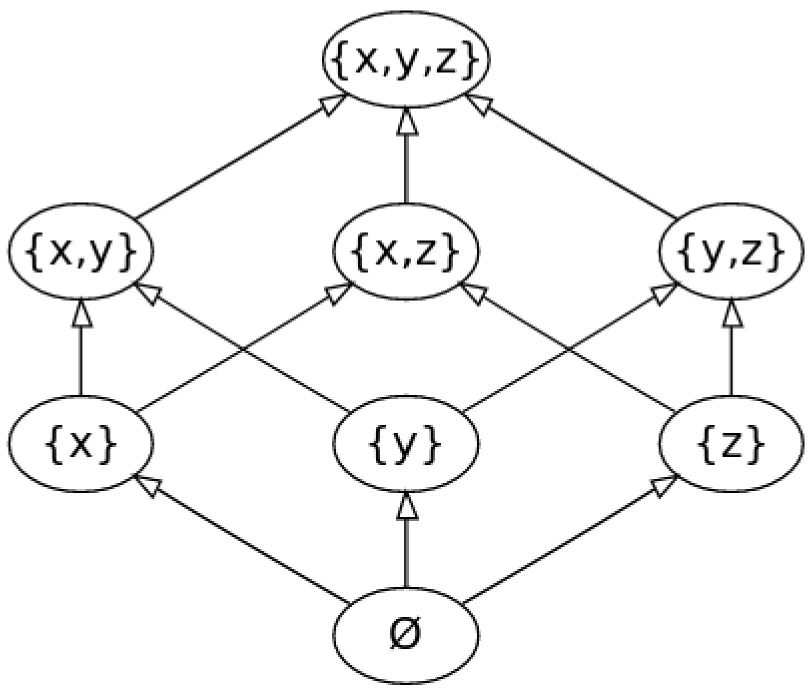
Zbiory częściowo uporządkowane

1. Def: Relację $R \subseteq X \times X$ ($X \neq \emptyset$) nazywamy **relacją częściowego porządku** ,jeśli R jest zwrotna, przechodnia i antysymetryczna.

2. **Zbiór częściowo uporządkowany** jest to para (X, R) gdzie X jest niepustym zbiorem a $R \subseteq X^2$ jest relacją częściowego porządku
Przykłady:
   (a) $(\mathbb{R}, \leq), (P(X), \subseteq)$ dla niepustego X
   (b) $(\mathbb{N}, |)$ $a|b$ - a jest podzielne przez b
   (c) $(\mathbb{R}^X, \preceq)$ - $\mathbb{R}^X = \{f : f : X \to \mathbb{R}\}, f \preceq g \iff \forall_{x \in X} f(x) \leq g(x)$
   (d) $(\mathbb{R}^2, \preceq)$ - $\forall_{x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}} (x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2 \land y_1 \leq y_2$
   (e) $(P, \preceq)$ - zbiór częściowo uporządkowany
   Definiujemy relację $\prec \subseteq P \times P$ i $\prec_\bullet \subseteq P \times P$ następująco
   $x \prec y \iff x \preceq y \land x \neq y$
   $x \prec_\bullet y \iff x \prec y \land \neg(\exists_{z \in P} x \prec z \prec y)$
   Jeśli $x \prec_\bullet y$ to mówimy, że **x jest poprzednikiem y**, oraz **y jest następnikiem x**
   Na przykład $(\mathbb{N}, \leq), n \in \mathbb{N}, n <_\bullet n + 1$

3. Def: **Diagramem Hassego** zbioru częsciowo uporządkowanego $(P, \preceq)$ nazywamy graf, którego wierzchołakmi są elementy zbioru P. Jeśli dla $x, y \in P$ zachodzi $x \prec y$, to x rysujemy niżej niż y. Ponadto dwa wierzchołki $x, y \in P$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy $x <_\bullet y$



4. Def: Niech $(P, \preceq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym
Element $a \in p$ nazywamy:
   (a) **maksymalnym**, jeśli $\neg(\exists_{x \in P} a \prec x)$
   (b) **minimalnym**, jeśli $\neg(\exists_{x \in P} x \prec a)$
   (c) **największym**, jeśli $\forall_{x \in P} x \preceq a$
   (d) **najmniejszym**, jeśli $\forall_{x \in P} a \preceq x$
   (e) Maksymalne elementy to wierzchołki diagramu Hassego bez połączeń z góry
   Minimalne - wierzchołki bez połączeń w dół
   Największy $\implies$ jedyny element maksymalny (równoważność dla skończonych zbiorów)
   Najmniejszy $\implies$ jedyny element minimalny
   (f) Dowód (e): a - element najmniejszy. Pokażemy, że a jest minimalny. Załóżmy, że a nie jest minimalny. Stąd $\exists_{y \in P} y \prec a$. Wtedy nieprawdą jest, że $\forall_{x \in \mathbb{R}} a \preceq x$ (bo $y \prec a$)
   Załóżmy, że w P jest inny element $b \neq a$, który jest minimalny. a- najmniejszy, $\begin{cases} a \preceq b \\ a \neq b \end{cases} \implies a \prec b \implies \exists_{x \in P} x \prec b \implies b$ nie jest minimalny

(g) W $(P, \preceq)$ istnieje co najwyżej jeden element najmniejszy
D(nie wprost): a, b elemeny najmniejsze, $a \neq b$
$$\begin{cases} \forall_{x \in P} a \preceq x \implies a \preceq b \\ \forall_{x \in P} b \preceq x \implies b \preceq a \end{cases} \quad a \neq b, \text{ sprzeczność}$$

5. Def: $(P, \preceq)$ - zbiór częściowo uporządkowany, $X \subseteq P$
Element $a \in P$ jest **ograniczeniem górnym** zbioru X, jeśli $\forall_{x \in X} x \preceq a$
Element $a \in P$ jest **ograniczeniem dolnym** zbioru X, jeśli $\forall_{x \in X} a \preceq x$
$X^* \stackrel{\text{def.}}{=} \{a \in P : \forall_{x \in X} x \preceq a\}$ - zbiór wszystkich ograniczeń górnych zbioru X
$X_* \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in P : \forall_{x \in X} a \preceq X\}$ - zbiór wszystkich ograniczeń dolnych zbioru X

6. Def: $(P, \preceq)$ - zbiór częsciowo uporządkoany, $X \subseteq P$
Element $a \in P$ jest **kresem górnym** zbioru X jeśli jest najmniejszym ograniczeniem górnym dla X (tzn. jest elementem najmniejszym w X^*)
Oznaczenie: $\sup X$
Element $a \in P$ jest **kresem dolnym** zbioru X jeśli jest największym ograniczeniem dolnemy dla X (tzn. jest elementem największym w X_*)
Oznaczenie: $\inf X$

7. Zbiór częściowo uporządkowany $(P, \preceq)$ jest **kratą**, jeśli $\forall_{x,y \in P} \sup\{x, y\}$ i $\forall_{x,y \in P} \inf\{x, y\}$ istnieją