

08.10.2019

Barbara Roszkowska-Lech

www.mini.pw.edu.pl/~barosz

barosz@mini.pw.edu.pl

521-

2 kolokwia - po 16 punktów

24 pkt z kolokwiów zwalnia z części zadaniowej egzaminu - 60pkt zadaniowa, 20pkt teoretyczna
zadania weekendowe

kolokwia - piątek 18.00 29.11, 24.01

1. $(f \circ g)(i) = f(g(i))$

(a) $f \circ id = f = id \circ f$

(b) $f^{-1} \circ f = id$

2. Grupa (X, \circ)

(a) $\forall x, y \in X \ x \circ y \in G$

i. Wewnętrzność

(b) $\forall a, b, c \in G \ (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

i. Łączność

(c) $\exists e \in X \ \forall x \in X \ x \circ e = e \circ x = x$

i. Element neutralny

(d) $\forall x \in X \ \exists x' \in X \ x \circ x' = x' \circ x = e$

i. Odwracalność

3. Rozwiązywanie układów n równań z n niewiadomymi

(a) Na razie - współczynniki układów równań to liczby rzeczywiste

(b) Def. Układ m równań z niewiadomymi x_1, \dots, x_n

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

na przykład

$$2x + 3y - 5z = 2$$

$$x + 2y - 3z = 1$$

(c) Rozwiązanie to taki zbiór $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$, tj $\forall_i a_{i1}s_1 + \dots + a_{in}s_n = b_i$

i. Definicja n -iloczynu kartezjańskiego

ii. $(\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$

A. $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

(d) Układ sprzeczny - układ który nie ma rozwiązań

(e) $\begin{vmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{vmatrix}$ - kolumna wyrazów wolnych

i. Jeśli $\forall_i b_i = 0 \rightarrow$ układ U nazywamy jednorodnym - układ jednorodny zawsze ma rozwiązania zerowe

$$2x + 3y = 8$$

$$x + 2y = 7$$

potem

$$r_1 - 2r_2 \quad : x + 2y = 7$$

$$r_1 - r_2 \quad : -y = -6$$

potem

$$r_1 + 2r_2 \quad : x = -5$$

$$-r_2 \quad : y = 6$$

(f) Dwa układy równań są równoważne gdy mają te same zbiory rozwiązań

i. Lemat: Następujące operacje przekształcają układ równań na układ równoważny.

A. Zamiana kolejności dwóch równań

B. Do jakiegoś równania dodajemy inne równanie pomnożone przez stałą

C. Mnożenie równania przez stałą inną od zera

$$x + 2y - 3z + t = 1$$

$$2x - y + z - t = 5$$

potem

$$r_1 - 2r_2 \quad x + 2y - 3z + t = 1$$

$$: \quad -5y + 7z - 3t = 3$$

potem

$$: \quad -5y + 7z - 3t = 3$$

$$\frac{r_2}{5} \quad -y + \frac{7}{5}z - \frac{3}{5}t = \frac{3}{5}$$

potem

$$: \quad \text{itd itp każdy umie}$$

potem

$$x = \frac{11}{5} + \frac{z}{5} + \frac{t}{5}$$

$$y = \frac{-3}{5} + \frac{7}{5}z + \frac{3}{5}t$$

$$z, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Rozw} \quad \left\{ \left(\frac{11}{5} + \frac{z}{5} + \frac{t}{5}; \frac{-3}{5} + \frac{7}{5}z + \frac{3}{5}t, z, t \right) \mid z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

(g) U' :

$$x_{j_1} = c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n + d_1$$

...

$$x_{j_k} = c_{k1}x_1 + \dots + c_{kn}x_n + d_k$$

dla $j_1 < \dots < j_k$ oraz x_1, \dots, x_{j_k} nie występują po prawej stronie U'

(h) x_1, \dots, x_{j_k} - zmienne zależne, $x_i : i \notin \{j_1, \dots, j_k\}$ - zmienne niezależne (parametry)

(i) Jeśli U' jest równoważny U to U' nazywamy rozwiązaniem ogólnym układu U

i. Każde podstawienie ciągu $n - k$ liczb za parametry i wyliczeniu pozostałych x_j daje rozwiązanie

ii. Różnym ciągom parametrów odpowiadają różne rozwiązania

iii. Każde rozwiązanie można otrzymać w ten sposób