07.12.2020

Do końca wykładu będziemy zakładać, że $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ i x_0 jest punktem wewnętrznym D.

1. Def. Punkt $(x_{0,} f(x_0))$ jest punktem przecięcia funkcji $f \iff$ funkcja f **ma styczną w tym punkcie** i zmienia się w nim ze ściśle wklęsłej na ścisle wypukłą lub na odwrót
   L(o zachowaniu znaku funkcji ciągłej): $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest ciągła w $x_0 \in (a, b)$ i $f(x) > 0 \Longrightarrow$ istnieje $(c, d) \subset (a, b)$ takie, że $x_0 \in (c, d)$ i $\forall_{x \in (c,d)} f(x) > 0$

2. Twierdzenie 11.8 (warunek konieczny punktu przegięcia):
   Jeśli f ma w $(x_{0,} f(x_0))$ punkt przegięcia i $f''(x)$ istnieje, to $f''(x_0) = 0$
   D: Przy założeniu, że istnieje $\delta > 0$ taka, że f jest dwukrotnie różniczkowalna w $(x_{0,} - \delta, x_0 + \delta)$ i f'' jest ciągła w x_0
   Dowód nie wprost. Zakładamy, że $(x_{0,} f(x_0))$ jest punktem przegięcia f i $f''(x_0) \neq 0$
   Dla ustalenia uwagi przyjmiemy, że $f''(x_0) > 0$
   $\begin{cases} f'' \text{ jest ciągła w } x_0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases} \overset{\text{lemat o zachowaniu znaku funkcji ciągłej}}{\Longrightarrow}$ istnieje $(c, d) \subset (x_{0,} - \delta, x_0 + \delta)$ taki,
   że $x_0 \in (c, d)$ i $\forall_{x \in (c,d)} f''(x) > 0$
   $\Longrightarrow$ f jest ściśle wypukła w (c, d) - sprzeczność z tym, że f zmienia się w $(x_{0,} f(x_0))$ na ściśle wklęsłą lub na odwrót
   Uwaga: Warunek $f''(x_0) = 0$ nie jest warunkiem wystarczającym pkt. przegięcia w pkt $(x_{0,} f(x_0))$. Tzn. Może być tak, że $f''(x) = 0$ i f nie ma punktu przegięcia w $(x_{0,} f(x_0))$, na przykład $f(x) = x^4$

3. Twierdzenie 11.9(warynek wystarczający punktu przegięcia):
   Jeśli funkcja f ma styczną w punkcie $(x_{0,} f(x_0))$ i istnieje $\delta > 0$ taka, że f jest dwukrotnie rózniczkowalna w $(x_{0,} - \delta, x_0 + \delta)$ przy czym
   $\begin{cases} \forall_{x \in (x_{0,} - \delta, x_0)} \quad f''(x) < 0 \\ \forall_{x \in (x_{0,}, x_0 + \delta)} \quad f''(x) > 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} \forall_{x \in (x_{0,} - \delta, x_0)} \quad f''(x) > 0 \\ \forall_{x \in (x_{0,}, x_0 + \delta)} \quad f''(x) < 0 \end{cases}$ to $(x_{0,} f(x_0))$ jest punktem przegięcia f
   D: Twierdzenie to wynika bezpośrednio z definicji punktu przegięcia i 11.5 oraz 11.6