16.10.2019

1. Zbiory - aksjomatyczna teoria zbiorów.
   (a) Zbiór - pojęcie pierwotne (nie definiujemy go)
   (b) bycie elementem zbioru - pojęcie pierwotne
   (c) $A, B, C, \dots X, \dots$ - zbiory
   (d) $a \in A$ - a jest elementem zboiru A (a należy do A)
   (e) $a \notin A \iff \neg(a \in A)$ - a nie należy do A
   (f) **Aksjomat ekstencjonalności**
      i. Zbiory A i B są równe wtedy i tylko wtedy gdy mają te same elementy, czyli
      ii. $A = B \iff \forall_x (x \in A \iff x \in B)$
      iii. **Uwaga** - aby pokazać, że $A = B$ wystarczy udowodnić dwie implikacje $\forall_x (x \in A \implies x \in B) \wedge (x \in B \implies x \in A)$
   (g) **Aksjomat zbioru pustego**
      i. Istnieje zbiór pusty czyli taki, który nie ma żadnego elementów
      ii. $\emptyset$−zbiór pusty, $\forall_x x \notin \emptyset$
      iii. Twierdzenie - istnieje tylko jeden zbiór pusty

      D: A, B - zbiory puste, $\neg(A = B)$ czyli $A \neq B$
      : Z aksjomatu ekstencjonalności zbiory są rózne $\iff \exists_x \neg((x \in A \implies x \in B) \wedge (x \in B \implies x \in A)) \iff \exists_x \neg(x \in A \implies x \in B) \vee \neg(x \in B \implies x \in A) \iff$
      : $\iff \exists_x (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge a \notin B)$
      : $x \in A \wedge x \notin B$ zdanie fałszywe, bo A jest zbiorem pustym
      : $x \in B \wedge a \notin B$ zdanie fałszywe, bo B jest zbiorem pustym
      : Sprzeczność - istnieje tylko jeden zbiór pusty
   (h) **Aksjomat wyróżniania**
      i. Jeśli A jest zbiorem, a $\phi(x)$ funkcją zdaniową o zakresie A ($x \in A$), to istnieje zbiór $\{x : x \in A \wedge \phi(x)\} = \{x \in A : \phi(x)\}$

      : Czyli $a \in \{x \in A : \phi(x)\} \iff a \in A \wedge \phi(x)$
   (i) **Uwaga:** nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów

      D: V- zbiór wszystkich zbiorów
      : $A = \{X \in V : X \notin X\}$ - zbiór na mocy aksjomatu wyróżnienia
      : $A \in A \implies A \notin A$ - sprzeczność. Stąd $A \notin A \implies \neg\phi(A) \iff \neg(A \notin A) \implies A \in A$ - też sprzeczność
      : Stąd nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów
   (j) **Antynomia (paradoks) Russella**

      : $Z = \{X : X \notin X\}$.Czy $Z \in Z$?
      : $Z \in Z = \{X : X \notin X\} \iff Z \notin Z$ - sprzeczność
   (k) Sposoby definiowania zbiorów
      i. $A = \{1, 3, \sqrt{2}\}$,$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
      ii. $\phi(x)$ - funkcja zdaniowa - $A = \{x : \phi(x)\}$ - na przyklad $P = \{x :$ x jest liczbą parzystą$\}$
         A. $a \in \{x : \phi(x)\} \iff \phi(a)$
   (l) **Def.** Zbiór A zawiera się w zbiorze B (A jest podzbiorem B) wtedy i tylko wtedy gdy każdy element z A jest elementem B

      : $A \subseteq B \iff \forall_x (x \in A \implies x \in B)$
   (m) **Def.** A jest właściwym podzbiorem B jeśli $A \subseteq B \wedge A \neq B$ (oznaczenie $A \subsetneq B$)
   (n) **Proste własności**
      i. $A = A$
      ii. $(A = B \wedge B = C) \implies A = C$
      iii. $A = B \iff B = A$
      iv. $A \subseteq A$
      v. $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \implies A \subseteq C$

         D: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C$ (Z)

: $A \subseteq C$?

: $x \in A \implies {}^{?} x \in C$

: $x \in A \implies x \in B \implies x \in C$ - z Z

vi. $A = B \iff A \subseteq B \land B \subseteq A$

(o) **Aksjomat sumy**

i. Jeśli A i B są zbiorami, to istnieje zbiór $A \cup B = \{x : x \in A \lor x \in B\}$

(p) **Def.** Iloczyn (przecięcie) zbiorów to zbiór $A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$ (jest to zbiór na mocy aksjomatu wyróżniania)

(q) **Def.** Różnica zbiorów A i B to zbiór $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$

(r) **Prawa rachunku zbiorów** - A, B, C - zbiory

i. $A \cup B = B \cup A$

ii. $A \cap B = B \cap A$

iii. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

iv. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B)$∩C

v. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

vi. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

D: Trzeba pokazać, że implikacje zachodzą w obie strony. Aksjomat sumy, definicja iloczynu, rachunek zdań, aksjomat sumy

vii. $A \cap B \subseteq A$

viii. $A \subseteq A \cup B$

ix. $A \cap A = A = A \cup A$

2. $A \div B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$