1. Twierdzenie 3.4:
Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\iff$ spełnia warunek Cauchy'ego zbieżności szeregu, tzn $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{m>n\geq n_0}|a_{n+1}+\cdots+a_m| < \epsilon$
D: Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\overset{\text{def.}}{\iff}$ ciąg sum częs=ściowych $\{S_n\}$ jest zbieżny $\iff$ ciąg $\{S_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego, tzn
$\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{m,n\geq n_0}|S_m - S_n| < \epsilon \iff \forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{m>n\geq n_0}|$(po rozwinięciu i poskreślaniu) $a_{n+1}+\cdots+a_m| < \epsilon$
Uwaga 3.1: Dwa szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ różniące się skończoną liczbą wyrazów są albo jednocześnie zbieżne albo jednocześnie rozbieżne. Wynika to z warunku Cauchy'ego zbieżności szeregu, w którym n_0 możemy wziąć na tyle duże, żeby $\forall_{n\geq n_0} a_n = b_n$

2. Twierdzenie 3.5: Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ to szeregi zbieżne i $\lambda \in \mathbb{R}$ Wówczas
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ jest zbieżny i $= \lambda\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
   D:$\lim_{n\to\infty}(\lambda a_1+\cdots+\lambda a_n) = \lambda\lim_{n\to\infty}(a_1+\cdots+a_n) = \lambda\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ jest zbieżny i $= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
   D: $\lim_{n\to\infty}(a_1+b_1+\cdots+a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_1+\cdots+a_n+b_1+\cdots+b_n) \overset{\text{bo szeregi zbieżne}}{=} \lim_{n\to\infty}(a_1+\cdots+a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_1+\cdots+b_n)$

3. **Szeregi o wyrazach nieujemnych:**
Zakładamy, że $\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n \geq 0$, co oznacza, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ma wyrazy nieujemne. Wówczas $\forall_{n\in\mathbb{N}} S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0$, co oznacza, że ciąg $\{S_n\}$ jest niemalejący $\implies$
Ciąg $\{S_n\}$ jest zbieżny $\iff \{S_n\}$ jest ograniczon z góry, skąd $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\iff$ $\{S_n\}$ jest ograniczony z góry.
W przypadku gdy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ma wyrazy nieujemne, możliwe są tylko dwie sytuacje:
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, co zapisujemy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$
Nie jest możliwy przypadek, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny i $\lim_{n\to\infty} S_n$ nie istnieje

4. Twierdzenie 3.6 (kryterium porównawcze): Jeśli $\forall_{n\in\mathbb{N}} 0 \leq a_n \leq b_n$,to
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny
   D: Z założenia $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny $\implies \{b_1+\cdots+b_n\}$ jest ograniczony z góry, tzn $\exists_{M\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}} b_1+\cdots+b_n \leq M$
   Stąd $\forall_{n\in\mathbb{N}} a_1+\cdots+a_n \leq b_1+\cdots+b_n < M$, co oznacza, że ciąg $\{a_1+\cdots+a_n\}$ jest ograniczony z góry $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny $\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny
   D: Zakładamy, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozbieżny $\implies \lim_{n\to\infty}(a_1+\cdots+a_n) = \infty$
   $\forall_{n\in\mathbb{N}} a_1+\cdots+a_n \leq b_1+\cdots+b_n$,więc z tw. o 2 ciągach, otrzymujemy, że $\lim_{n\to\infty}(b_1+\cdots+b_n) = \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny
   (c) Kryterium porównawcze pozostaje prawdziwy, gdy $\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0} 0 \leq a_n \leq b_n$

5. Twierdzenie 3.7 (kryterium d' Alemberta):
Jeśli $\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n > 0$ i istnieje granica $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{\text{ozn}}{=} g$,to
$g < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$
$g > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n <= \infty$
$g = 1 \implies ???$
D:
1: Niech $g < 1$. Wówczas $\exists_{\epsilon_1>0} g + \epsilon_1 < 1$
Z założenia $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = g \iff \forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|\frac{a_{n+1}}{a_n} - g| < \epsilon$. W szczególności biorąc $\epsilon = \epsilon_1$otrzymjemy
$\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|\frac{a_{n+1}}{a_n} - g| < \epsilon_1 \implies \forall_{n\geq n_0}\frac{a_{n+1}}{a_n} < \epsilon_1 + g$. Stąd $a_{n_0+1} < a_{n_0}(\epsilon_1+g)$ i $a_{n_0+2} < a_{n_0+1}(\epsilon_1+g) < a_{n_0}(\epsilon_1+g)^2$, itd więc
$\forall_{p\in\mathbb{N}} a_{n_0+p} < a_{n_0}(\epsilon_1+g)^p \implies \sum_{p=1}^{\infty} a_{n_0+p}$ jest zbieżny z kryterium porównawczego, bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_0}(\epsilon_1+g)^p$ jest zbieżny jako szereg geometryczny o ilorazie $q = \epsilon_1 + g, |q| < 1$
Skoro $\sum_{p=1}^{\infty} a_{n_0+p}$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ też jest zbieżny, bo opuszczamy skończoną liczbę wyrazów.
2: Niech $g > 1$ wtedy $\exists_{\epsilon_2>0} g - \epsilon_2 > 1$. $\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|\frac{a_{n+1}}{a_n} - g| < \epsilon_2 \implies \forall_{n\geq n_0}\frac{a_{n+1}}{a_n} > -\epsilon_2 + g > 1$
Stąd $a_{n_0+1} > a_{n_0}, a_{n_0+2} > a_{n_0+1} > a_{n_0}$, itp
$\forall_{p\in\mathbb{N}} a_{n_0+p} > a_{n_0} > 0 \implies \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, bo gdyby granica ta istniała, to mielibyśmy $\lim_{n\to\infty} a_n \geq a_{n_0} > 0$ co oznacza, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nie spełnia podstawowego warunku zbieżności szeregu, więc jest rozbieżny

6. Twierdzenie 3.8 (kryterium Cauchy'ego)
Załóżmy, ze $\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n \geq 0$ i oznaczmy, że $g = \limsup \sqrt[n]{a_n}$ Wówczas
$g < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$
$g > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n <= \infty$
$g = 1 \implies ???$

7. Twierdzenie 3.9 (kryterium całkowe)
Jeśli $f :< 1, \infty) \to \mathbb{R}$ jest nieujemna i nierosnąca, to $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest zbieżny $\iff$ $\int_1^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna
D: $f(2) + \cdots + f(n) \leq \int_1^n f(x)dx \leq f(1) + \cdots + f(n-1)$
$S_n - f(1) \leq \int_1^n f(x)dx \leq S_{n-1}$
$\Longleftarrow$ :: Zakładamy, że $\int_1^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna $\implies$ $\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx = g$ $\implies$ ciąg $b_n = \int_1^n f(x)dx$ jest zbieżny, więc jest też ograniczony, tzn $\exists_{M\in\mathbb{R}} \forall_{n\in\mathbb{N}} \int_1^n f(x)dx \leq M$
Zatem $\forall_{n\geq 2} S_n \leq \int_1^n f(x)dx + f(1) \leq M + f(1)$ $\implies$ $\{S_n\}$ jest ograniczony z góry, a ponieważ $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ to szereg wyrażeń nieujemnych, to $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest zbieżny
$\implies$ ::Pokazanie że implikacja jest prawdziwa, jest równoważne pokazaniu, że $\int_1^{\infty} f(x)dx$ jest rozbieżna $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest rozbieżna
Załóżmy, że $\int_1^{\infty} f(x)dx$ jest rozbieżna, tzn $\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx = \infty$
$\forall_{n\geq 2} \int_1^n f(x)dx \leq S_{n-1}$ więc z tw o 2 ciągach otrzymujemy $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \infty$ czyli $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$