

09.10.2019

Rachunek predykatów

Na elitmie  $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0$

1. Def: Wyrażenie  $\phi(x)$ , które po wstawieniu za  $x$  konkretnej wartości z ustalonego zbioru  $X$  nazywamy **funkcją zdaniową**

- (a)  $X$  - **zakres** zmiennej  $x$
- (b) **Kwantyfikator ogólny** (uniwersalny)
  - i.  $(\forall_{x \in X})\phi(x)$  oznacza, że dla każdego  $x \in X$  zdanie  $\phi(x)$  jest prawdziwe
  - ii.  $\wedge$  taki napis jest zdaniem
- (c) **Kwantyfikator szczegółowy** (egzystencjalny)
  - i.  $(\exists_{x \in X})\phi(x)$  oznacza, że istnieje takie  $x \in X$ , dla którego zdanie  $\phi(x)$  jest prawdziwe
- (d) Przykłady (b,c):
  - i.  $\forall_{x \in \mathbb{R}} x^2 \geq 1$  - zdanie fałszywe
  - ii.  $\exists_{x \in \mathbb{R}} x^2 = x + 1$  - zdanie prawdziwe

2. Def:  $\phi(x)$  - funkcja zdaniowa,  $X$  - zakres zmiennej  $x$ ,  $A \subseteq X$ ,  $\alpha(x)$  - funkcja zdaniowa:

- (a) :
  - i.  $\forall_{x \in A} \phi(x) \iff \text{def} \forall_{x \in X} (x \in A \implies \phi(x))$
  - ii.  $\exists_{x \in A} \phi(x) \iff \text{def} \exists_{x \in X} (x \in A \wedge \phi(x))$
- (b) A więc generalnie:
  - i.  $\forall_{x: \alpha(x)} \phi(x) \iff \text{def} \forall_{x \in X} (\alpha(x) \implies \phi(x))$
  - ii.  $\exists_{x: \alpha(x)} \phi(x) \iff \text{def} \exists_{x \in X} (\alpha(x) \wedge \phi(x))$
- (c) Niech  $A = \emptyset$ 
  - i.  $\forall_{x \in \emptyset} \phi(x) \iff \forall_{x \in X} (x \in \emptyset \implies \phi(x))$  - zdanie prawdziwe (zawsze)
  - ii.  $\exists_{x \in \emptyset} \phi(x) \iff \exists_{x \in X} (x \in \emptyset \wedge \phi(x))$  - zdanie fałszywe (zawsze)
- (d) Jeśli nie prowadzi to do nieporozumień, to będziemy pisać  $\forall_x \phi(x)$  zamiast  $\forall_{x \in X} \phi(x)$  oraz  $\exists_x \phi(x)$  zamiast  $\exists_{x \in X} \phi(x)$

3. Funkcje zdaniowe wielu zmiennych

- (a)  $\phi(x, y)$  - staje się zdaniem po wstawieniu za  $x, y$  konkretnych wartości z zakresu  $x, y$
- (b)  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  - funkcja zdaniowa  $n$  zmiennych
- (c) Przykład:
  - i.  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{Z}: \phi(x, y) = (x \neq y)$  - funkcja zdaniowa 2 zmiennych
  - ii.  $\forall_{x \in \mathbb{R}} x \neq y$  - nie zdanie, lecz funkcja zdaniowa - wartość zależy od  $y$
  - iii.  $\exists_{y \in \mathbb{Z}} \forall_{x \in \mathbb{R}} x \neq y$  - zdanie fałszywe

4.  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  - zbiór skończony

- (a)  $\forall_{x \in X} \phi(x) \iff \phi(x_1) \wedge \dots \wedge \phi(x_n)$
- (b)  $\exists_{x \in X} \phi(x) \iff \phi(x_1) \vee \dots \vee \phi(x_n)$

5. Def: **Zasięg kwantyfikatora** to funkcja zdaniowa, której ten kwantyfikator dotyczy

- (a)  $\exists_{y \in \mathbb{Z}} \forall_{x \in \mathbb{R}} x \neq y$  - zasięg kwantyfikatora  $\exists_{y \in \mathbb{Z}}$
- (b) Przykład:  $\forall_x (\forall_y (x > y \implies (\exists_z) \underline{\underline{(x > z > y)}}))$  - odpowiednie podkreślenia to zasięgi kwantyfikatorów na lewo od nich
- (c) Notacja: Zamiast  $\forall_x (\exists_y (\forall_z (\dots)))$  piszemy  $\forall_x \exists_y \forall_z \dots$

6. Def: Zmienną  $x$  nazywamy **związaną** jeśli leży ona w zasięgu kwantyfikatora (w którym występuje!) dla  $\forall_x$  lub  $\exists_x$ . W przeciwnym wypadku  $x$  jest zmienną **wolną**

- (a) Przykłady:
  - i.  $\exists_y \forall_x (x + y > z)$  -  $x, y$  - zmienna związana,  $z$  - zmienna wolna
  - ii.  $z^2 \neq 1 \wedge \forall_y x^2 = y^2$  -  $y$  - zmienna związana,  $x, z$  - zmienne wolne
- (b)  $\phi(x) = "x \text{ jest liczbą pierwszą}"$  - funkcja zdaniowa o zakresie  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ 
  - i.  $\phi(x) = x > 1 \wedge \forall_{n \in \mathbb{N}} (n|x \implies n = x \vee n = 1)$  ( $n|x$  oznacza " $n$  dzieli  $x$ ")

## 7. Definicja rachunku predykatów

- (a)  $A$  - alfabet: zbiór stałych, (np liczby rzeczywiste), symbole funkcyjne i symbole relacyjne (**predykaty**)
- (b)  $x, y, z$  - symbole zmiennych
- (c) **Zbiór termów  $T$**  to najmniejszy zbiór taki, że
  - i. wszystkie stałe i zmienne należą do  $T$
  - ii. jeśli  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$  oraz  $\alpha \in A$  jest symbolem funkcji  $m$ -argumentowej, to  $\alpha(t_1, \dots, t_n) \in T$
  - iii. Elementy zbioru  $T$  nazywamy termami
- (d) **Predykat** to  $m$ -argumentowa funkcja, której wartościami jest prawda lub fałsz
  - i. Przykłady  $x, y \in \mathbb{R}$ :
    - A.  $\beta(x, y) = (x < y)$  - predykat 2-argumentowy
    - B.  $p(x) = (x \text{ jest liczbą pierwszą})$   $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- (e)  $t_1, \dots, t_m$  - termy,  $\beta$  - symbol  $m$ -argumentowego predykatu - wtedy wyrażenie  $\beta(t_1, \dots, t_m)$  nazywamy **formułą atomową** rachunku predykatów
- (f) **Zbiór formuł rachunku predykatów** jest to najmniejszy zbiór  $Z$  taki, że
  - i. Wszystkie formuły atomowe należą do  $Z$
  - ii. Jeśli  $A, B \in Z$ , to  $(\neg A, A \vee B, A \wedge B, A \implies B, A \iff B) \in Z$
  - iii. Jeśli  $A \in Z$  i  $x$  jest zmienną wolną (nie związaną kwantyfikatorem) w  $A$ , to  $\forall_x A \exists_x A \in Z$

## 8. Tautologie rachunku predykatów:

- (a) Def: Formułę rachunku predykatów nazywamy **tautologią** jeśli jest prawdziwa dla wszystkich interpretacji symboli funkcyjnych, predykatów, i dla wszystkich wartościowań zmiennych wolnych występujących w tej formule.

### (b) Przykłady:

- i. Formuły powstałe z tautologii rachunku zdań przez zastąpienie zmiennych formami rachunku predykatów ( $X$  - zakres  $x$ )
  - A.  $\alpha \vee \neg \alpha \implies \forall_x \phi(x) \vee \neg \forall_x \phi(x)$
- ii.  $\forall_x \forall_y \phi(x, y) \iff \forall_y \forall_x \phi(x, y)$
- iii.  $\exists_x \exists_y \phi(x, y) \iff \exists_y \exists_x \phi(x, y)$  -  $\wedge$  przemienność kwantyfikatorów tego samego rodzaju
- iv.  $\exists_x \forall_y \phi(x, y) \implies \forall_y \exists_x \phi(x, y)$  - ale nie w drugą stronę

Dowód:  $X, Y$  - zakres zmiennych  $x, y$

$x_0 \in X$  będzie takie, że  $\forall_y \phi(x_0, y)$  jest prawdą

Weźmy dowolne  $y \in Y$ . Prawdą jest, że dla tego  $y$ ,  $\phi(x_0, y)$  jest prawdą

Zatem rzeczywiście  $\forall_y \exists_x \phi(x, y)$

Przykład: Przykład, że implikacja odwrotna nie zachodzi

$X = Y = \mathbb{R}$

$\phi(x, y) = (x > y)$

$\exists_{x \in \mathbb{R}} \forall_{y \in \mathbb{R}} x > y$  - zdanie fałszywe

$\forall_{y \in \mathbb{R}} \exists_{x \in \mathbb{R}} x > y$  - zdanie prawdziwe, więc

$\forall_{y \in \mathbb{R}} \exists_{x \in \mathbb{R}} x > y \implies \exists_{x \in \mathbb{R}} \forall_{y \in \mathbb{R}} x > y$  jest fałszywe

- v.  $\forall_x (\phi(x) \wedge \psi(x)) \iff \forall_x \phi(x) \wedge \forall_x \psi(x)$
- vi.  $\exists_x (\phi(x) \vee \psi(x)) \iff \exists_x \phi(x) \vee \exists_x \psi(x)$  -forall-koniunkcja/ exists-alternatywa
- vii.  $\exists_x (\phi(x) \wedge \psi(x)) \implies \exists_x \phi(x) \wedge \exists_x \psi(x)$
- viii.  $\forall_x (\phi(x) \vee \psi(x)) \iff \forall_x \phi(x) \vee \forall_x \psi(x)$  - forall-alternatywa/ exists-koniunkcja
- ix.  $\forall_x \phi(x) \implies \phi(x_0)$  gdzie  $x_0 \in X$
- x.  $\neg(\forall_x \phi(x)) \iff \exists_x \neg \phi(x)$
- xi.  $\neg(\exists_x \phi(x)) \iff \forall_x \neg \phi(x)$
- xii.  $(\forall_x (\phi(x) \implies \psi(x))) \implies ((\forall_x \phi(x)) \implies (\forall_x \psi(x)))$
- xiii.  $\forall_x \phi(x) \vee \psi \iff (\forall_x \phi(x)) \vee \psi$  -  $x$  nie jest zmienną wolną w  $\psi$
- xiv.  $\forall_x (\phi(x) \wedge \psi) \iff (\exists_x \phi(x)) \wedge \psi$
- xv.  $(\phi \implies \forall_x \psi(x)) \iff \forall_x (\phi \implies \psi(x))$
- xvi.  $(\phi \implies \exists_x \psi(x)) \iff \exists_x (\phi \implies \psi(x))$
- xvii.  $((\forall_x \phi(x)) \implies \psi) \iff \exists_x (\phi(x) \implies \psi)$

$$D: ((\forall_x \psi(x)) \implies \phi) \iff \neg(\forall_x \psi(x)) \vee \phi \iff (\exists_x \neg \psi(x)) \vee \phi \iff \exists_x (\neg \psi(x) \vee \phi) \iff \exists_x (\psi(x) \implies \phi)$$

$$xviii. ((\exists_x \phi(x)) \implies \psi) \iff \forall_x (\phi(x) \implies \psi)$$

(c) Przykłady:

$$(vii) \quad \phi(x) = (x > 0), \psi(x) = (x < 0)$$

$$: \quad \exists_x \phi(x) \wedge \exists_x \psi(x) \iff \exists_x x > 0 \wedge \exists_x x < 0$$

:  $\wedge$  fałsz - w (vii) implikacja odwrotna nie zachodzi

$$(viii) \quad \phi(x) = (x \geq 0), \psi(x) = (x < 0)$$

$$: \quad \forall_x (\phi(x) \vee \psi(x)) \iff \forall_x (x \geq 0 \vee x < 0) - \text{prawda}$$

$$(xii) \quad \phi(x) = (x > 0), \psi(x) = (x > 1)$$

$$: \quad \forall_x (\phi(x) \implies \psi(x)) \iff \forall_x (x > 0 \implies x > 1) - \text{działa, bo weźmy } x = \frac{1}{2}$$

... W (viii) oraz (xii) implikacje odwrotne nie są tautologiami

9. Tautologia dla formuł z kwantyfikatorami:

(a) Logika pierwszego rzędu ma inną definicję tautologii - dla wszystkich wartościowań zdanie jest prawdziwe

(b) Dla rachunku predykatów tautologia jest formułą lub zdaniem - (formuła bez zmiennych wolnych),

i. Zdanie jest tautologią jeśli jest prawdziwe w każdym modelu

(c) W logice pierwszego rzędu też były modele, tylko nazywaliśmy je każdym możliwym wartościowaniem

$$10. \forall_{x_{\alpha(x)}} \phi(x) \stackrel{def.}{=} \forall_x \alpha(x) \implies \phi(x)$$

$$11. \exists_{x_{\alpha(x)}} \phi(x) \stackrel{def.}{=} \exists_x \phi(x) \wedge \alpha(x)$$