

06.11.2019

### Własności funkcji ciągłych. Jednostajna ciągłość funkcji

1. Def. Mówimy, że funkcja  $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$  ma własność Darboux jeśli  $f(a) \neq f(b) \implies \forall_c \text{ leżącego pomiędzy } f(a) \text{ i } f(b) \exists_{x_0 \in (a,b)} f(x_0) = c$

2. Twierdzenie 7.1: Każda funkcja ciągła  $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$  ma własność Darboux

3. Twierdzenie 7.2 (Weierstrassa I)

Każda funkcja ciągła  $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$  jest ograniczona, tzn  $\exists_{K \in \mathbb{R}} \forall_{x \in < a, b >} |f(x)| \leq K$

Uwaga - W powyższym twierdzeniu założenie, że dziedziła funkcji jest przedziałem domkniętym i ograniczonym - musi być przedziałem domkniętym

(a) Dowód nie wprost. Zakładamy, że  $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła ale nie jest ograniczona, tzn

$\forall_{K \in \mathbb{R}} \exists_{x \in < a, b >} |f(x)| > K$ . W szczególności biorąc  $K = n$  gdzie  $n \in \mathbb{R}$  otrzymujemy  $\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{x_n \in < a, b >} |x_n| > n$ . Zatem mamy ciąg  $\{x_n\}$ , który jest ograniczony (bo  $x_n \in < a, b >$ )

$\xrightarrow{\text{tw. B-W}}$  ciąg  $\{x_n\}$  zawiera podciąg zbieżny, oznaczmy  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$ . Wtedy  $x_0 \in < a, b >$ , bo  $\forall_{k \in \mathbb{N}} a \leq x_{n_k} \leq b$  i z tw. o przechodzeniu do granicy w nierównościach otrzymujemy  $\lim_{x \rightarrow \infty} x_{n_k} \in < a, b >$

Funkcja  $f$  jest ciągła na  $< a, b > \implies$  w szczególności jest ciągła w pkt  $x_0 \in < a, b > \xLeftrightarrow{(\text{CH})} \forall_{\{\tilde{x}_n\} \subset < a, b >} \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_j) = f(x_0)$

W szczególności  $\{x_n\} \subset < a, b > \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) \iff \forall_{\epsilon > 0} \exists_{k_0 \in \mathbb{N}} \forall_{k \geq k_0} |f(x_{n_k}) - f(x_0)| < \epsilon$

Dla  $\epsilon = 1$  mamy  $\exists_{k_0 \in \mathbb{N}} \forall_{k \geq k_0} |f(x_{n_k}) - f(x_0)| < 1$  (\*)

$\forall_{k \geq k_0} |f(x_{n_k})| = |f(x_{n_k}) - f(x_0) + f(x_0)| \leq |f(x_{n_k}) - f(x_0)| + |f(x_0)| \stackrel{(*)}{<} 1 + |f(x_0)|$

Sprzeczność z  $\forall_{n \in \mathbb{N}} |f(x_n)| > n \implies \forall_{k \in \mathbb{N}} |f(x_{n_k})| > n_k$

Dla dostatecznie dużych  $k$  otrzymamy  $1 + |f(x_0)| < n_k$