

23.10.2019

$X$  - zbiór (przestrzeń)

1. Def. Dopełnieniem zbioru  $A$  w przestrzeni  $X$  nazywamy zbiór  $-A = \{x \in X : x \notin A\}$  - na mocy aksjomatu wyróżniania

(a) Własności dopełnienia:

- i.  $-(A \cup B) = -A \cap -B$   
D:  $x \in -(A \cup B) \stackrel{\text{def. dopełnienia}}{\iff} x \notin (A \cup B) \stackrel{\text{def.}}{\iff} \neg(x \in A \cup B) \stackrel{\text{def. iloczynu}}{\iff} \neg(x \in A \wedge x \in B) \stackrel{\text{prawo de Morgana}}{\iff} x \notin A \vee x \notin B \iff x \in -A \cap -B$
- ii.  $-(A \cap B) = -A \cup -B$
- iii.  $\emptyset \subseteq A$
- iv.  $A \cup \emptyset = A$
- v.  $A \cap \emptyset = \emptyset$
- vi.  $A \setminus \emptyset = A$
- vii.  $\emptyset \setminus A = \emptyset$
- viii.  $-\emptyset = X$
- ix.  $-X = \emptyset$
- x.  $A \cup -A = X$
- xi.  $A \cap -A = \emptyset$
- xii.  $-(-A) = A$
- xiii.  $A \setminus B = A \cap -B$
- xiv.  $A \cap X = A$
- xv.  $A \cup X = X$
- xvi.  $A \subseteq B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B$
- xvii.  $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \iff A \cup B \subseteq C$
- xviii.  $C \subseteq A \wedge C \subseteq B \iff C \subseteq A \cap B$

(b) Przykład:

- i.  $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
- ii.  $\emptyset \in \{\emptyset\}$
- iii.  $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$
- iv.  $\{\emptyset\} \notin \{\emptyset\}$
- v.  $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

(c)  $\emptyset$  - jedyny element zbioru  $\{\emptyset\}$ , ale  $\emptyset \neq \{\emptyset\}$

2. **Aksjomat zbioru potęgowego:** Dla każdego zbioru istnieje zbiór (potęgowy) wszystkich jego podzbiorów.

$A$  - zbiór,  $P(A)$  (lub  $2^A$ ) - zbiór potęgowy

$P(A) = \{B : B \subseteq A\}$

$\emptyset, A \in P(A)$  zawsze

(a) Przykład:  $A = \{a, b\}$ ,  $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

3. **Aksjomat pary nieuporządkowanej:** Dla dowolnych zbiorów  $A$  i  $B$  istnieje zbiór, którego elementami są dokładnie zbiory  $A$  oraz  $B$

$\{A, B\} = \{x : x = A \vee x = B\}$

$\{A\} = \{A, A\}$  - Singleton, zbiór 1-elementowy

(a) Def. **Parą uporządkowaną**  $\langle a, b \rangle$  nazywamy zbiór  $\{\{a\}, \{a, b\}\}$

i.  $\langle a, a \rangle = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$

(b) Twierdzenie:  $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \iff a = c \wedge b = d$

i.  $\Leftarrow$  :  $a = c \wedge b = d$ , więc  $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$  więc  $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$

ii.  $\Rightarrow$  : Dla  $a = b$ ,  $\langle a, b \rangle = \{\{a\}\}$ ,  $\langle c, d \rangle = \{\{c\}, \{c, d\}\}$  więc  $\{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$  tylko gdy  $c = d$ , a wtedy  $\{\{a\}\} = \{\{c\}\}$ , więc z tego wynika że  $a = c \wedge b = d$

Dla  $a \neq b$  :  $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$  tylko gdy  $(\{a\} = \{c\} \vee \{a\} = \{c, d\}) \wedge (\{a, b\} = \{c, d\} \vee \{a, b\} = \{d\})$ .  
Ponieważ  $\{a, b\}$  oraz  $\{c, d\}$  są dwuelementowe, bo  $a \neq b$ , to  $\{a\} = \{c\} \wedge \{a, b\} = \{c, d\}$  z czego  $a = b$  oraz  $c = d$

iii. Implikacja zachodzi w dwie strony, więc jest równoważność

4. Def. **Iloczynem kartezjańskim** zbiorów  $A$  i  $B$  nazywamy zbiór  $A \times B = \{\langle a, b \rangle : a \in A \wedge b \in B\}$

(a) Przykłady

- i.  $\{1, 2\} \times \{3, 4\} = \{< 1, 3 >, < 1, 4 >, < 2, 3 >, < 2, 4 >\}$
- ii.  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  - płaszczyzna  $\mathbb{R}^2$
- iii.  $[1, 3] \times [1, 2]$  - prostokąt o wierzchołkach  $< 1, 1 >, < 1, 2 >, < 3, 1 >, < 3, 2 >$

5. Def. **Uporządkowaną trójką**  $< a, b, c >$  nazywamy zbiór  $< < a, b >, c >$

6. Def. **Uporządkowaną n-tką**  $< x_1, \dots, x_n >$  nazywamy zbiór  $< < x_1, \dots, x_{n-1} >, x_n >$

(a) Twierdzenie: Dla  $n \geq 2$ ,  $< x_1, \dots, x_n > = < y_1, \dots, y_n > \iff \forall_{i \in \{1, \dots, n\}} x_i = y_i$

i. Dowód indukcyjny: Dla  $n = 2$  prawda

Założenie indukcyjne:  $< x_1, \dots, x_{n-1} > = < y_1, \dots, y_{n-1} > \iff \forall_{i \in \{1, \dots, n-1\}} x_i = y_i$ .

$a = < x_1, \dots, x_{n-1} >, b = < y_1, \dots, y_{n-1} >$ .

Wtedy z definicji uporządkowanej n-tki  $< x_1, \dots, x_n > = < a, x_n >$ , oraz  $< y_1, \dots, y_n > = < b, y_n >$

Z tego, że dla  $n = 2$ , to  $< a, x_n > = < b, y_n > \iff a = b \wedge x_n = y_n$

Z założenia indukcyjnego,  $a = b \iff \forall_{i \in \{1, \dots, n-1\}} x_i = y_i$ , więc  $< a, x_n > = < b, y_n > \iff \forall_{i \in \{1, \dots, n\}} x_i = y_i$  co kończy dowód.

7. **Aksjomat sumy zbiorów rodziny**:  $\mathcal{A}$ -rodzina zbiorów - zbiór którego elementami są zbiory

(a) Dla dowolnej rodziny zbiorów  $\mathcal{A}$  istnieje zbiór:

$$\bigcup \mathcal{A} := \{x : \exists A (A \in \mathcal{A} \wedge x \in A)\}$$

do którego należą te elementy, które należą do co najmniej jednego zbioru rodziny  $\mathcal{A}$

(b) Iloczynem (przecięciem) rodziny zbiorów  $\mathcal{A}$  nazywamy zbiór

$$\bigcap \mathcal{A} := \{x \in \bigcup \mathcal{A} : \forall A (A \in \mathcal{A} \implies x \in A)\}$$

Istnieje na mocy aksjomatu wyróżniania i aksjomatu sumy rodziny zbiorów

8.  $I$  - zbiór indeksów,  $X$ -zbiór przestrzeni

Def. Funkcję  $A : I \rightarrow P(X)$  i  $i \mapsto A(i) \subseteq X$  nazywamy **indeksowaną rodziną zbiorów** (będziemy pisać  $A_i$  zamiast  $A(i)$ )

(a)  $R$  - zbiór wartości funkcji  $A$

$$R = \{B \in P(X) : \exists_{i \in I} B = A(i)\} = \{A_i : i \in I\}$$

9. Def. **Sumą indeksowanej rodziny zbiorów**  $A : I \rightarrow P(X)$  nazywamy sumę rodziny  $R$ , czyli  $\bigcup R = \bigcup \{A_i : i \in I\}$

Oznaczenie  $\bigcup_{i \in I} A_i$

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists_{i \in I} x \in A_i$$

10. Def. Iloczynem rodziny indeksowanej  $A : I \rightarrow P(X)$  nazywamy zbiór  $\bigcap R = \bigcap \{A_i : i \in I\}$

Oznaczamy  $\bigcap_{i \in I} A_i$ ,

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall_{i \in I} x \in A_i$$