02.10.2019
Dr hab. Anna Dembińska
mini.pw.edu.pl/~dembinsk
3 kolokwia 3 kartkowki
45+ punktów - zwolnienie z egzaminu (cz. zadaniowa)
Literatura:

1. Dembińska, Karpińska, Kotus - Analiza matematyczna I dla studentów informatyki PW
2. Gewert , Skoczylas - Analiza matematyczna I /Definicje twierdzenia wzory / Przykłady i zadania / Kolokwia i egzaminy GIS
3. Leja - Rachunek różniczkowy i całkowy PWN

OZNACZENIA

1. N :=$1, 2, 3...$
2. N_0 :=$0, 1, 2, 3...$
3. $\mathbb{Z} := ... - 1, 0, 1, ...$
4. $\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n}$ gdzie $n \in N$, m $\in Z\}$
5. $\mathbb{R}$:= rzeczywiste
6. $\forall$ - dla każdego - $\forall_{x \in R} x^2 \geq 0$
7. $\exists$- istnieje
8. $\iff$ - wtedy i tylko wtedy
9. $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} :$ a<x $\leq b\}$
10. $[x]$ - część całkowita x : $x - 1 < [x] \leq x$, $[7\frac{1}{3}]$= 7, $[-2\frac{1}{3}] = -3$

LICZBY RZECZYWISTE I ICH PODZBIORY.

1. Def. Zbiór $\mathbb{R}$, dwa wyróżnione w nim elementy 0 i 1, relacja < oraz dwa działania $+\times$ to tak zwane pojęcia pierwotne, które przyjmujemy bez definicji. Ponadto przyjmujemy bez dowodu, że te pojęcia pierwotne mają pewne własności zwane aksjomatami (lub pewnikami)
2. Def. Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z dołu $\iff \exists_{m \in \mathbb{R}} \forall_{a \in A} a \geq m$ Wtedy m nazywamy ograniczeniem dolnym zbioru A
   (a) Zbiór A$\subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry $\iff \exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{a \in A} a \leq M$ Wtedy M nazywamy ograniczeniem górnym zbioru
   (b) Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony $\iff$ jest ograniczony z góry i z dołu $\iff \exists_{m,M \in \mathbb{R}} \forall_{a \in A} m \leq a \leq M \iff \exists_{K \in \mathbb{R}} \forall_{a \in A} |a| \leq K$. Przykład: $A = (-1, 2]$- przykładowe ograniczenia dolne - $\{-10, -1.5, -1\}$,ograniczenia górne - $\{3, 100, 2\}$ $\implies$ zbiór A jest ograniczony
3. Def. Niech $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z dołu. Wtedy kresem dolnym zbioru A (oznaczanym inf A) nazywamy największe ograniczenie dolne zbioru A
   (a) To znaczy $infA = \alpha \iff (\forall_{a \in A} a \geq \alpha$ (α jest ograniczeniem dolnym) oraz $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{a_0 \in A} a_0 < \alpha + \epsilon$
4. Def. Niech $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z góry. Wtedy kresem górnym zbioru A (oznaczamy supA) nazywamy najmniejsze ograniczenie górne zbioru A.
   (a) supA= $\beta \iff (\forall_{a \in A} a \leq \beta$ oraz $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{a_0 \in A} a_0 > \beta - \epsilon)$
5. Jeśli zbiór A nie jest ograniczony z dołu, to infA $= -\infty$, jeśli nie jest ograniczony z góry, to supA= $+\infty$
   (a) inf($\emptyset$) $= +\infty$, sup($\emptyset$) $= -\infty$
   (b) Przykład: $A = (-1, 2]$
      i. $\inf(A) = -1$
      ii. $\sup(A) = 2$
6. Aksjomat ciągłości - Każdy zbiór $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ ograniczony z dołu/góry ma skonczony kres dolny/górny $\in \mathbb{R}$
   (a) dla $\mathbb{Q}$ tego nie ma: $B = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2$ i $q > 0\}$ kres górny to $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

(b) Twierdzenie: jeśli $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$ to

i. inf A $\geq$ inf B

A. Dowód: Jeśli B nie jest ograniczony z dołu, to inf B $= -\infty$,więc i. jest spełniona

B. Jeśli B jest ograniczony z dołu, to z aksojomatu ciagłości B ma skończony kres dolny. Ponadto A też jest ograniczony z dołu, więc też ma skończony kres dolny. Oznaczmy inf A$= \alpha$ i inf B $= \beta$. Wtedy mamy :

$\forall_{a \in A} a \geq \alpha$

$\forall_{\epsilon > 0} \exists_{a_0 \in A} a_0 < \alpha + \epsilon$

$\forall_{b \in B} b \geq \beta$

$\forall_{\epsilon > 0} \exists_{b_0 \in B} b_0 < \beta + \epsilon$

Chcemy pokazać że $\alpha \geq \beta$

$A \subset B \implies (a \in A \implies a \in B) \implies \alpha \geq \beta,$ czyli β jest ograniczeniem dolnym zbioru A

ii. sup A $\leq$sup B

A. Dowodzimy analogicznie

7. LICZBY NATURALNE I ZASADA INDUKCJI MATEMATYCZNEJ

(a) Zdefiniowaliśmy $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$.Definicja ta nie jest matematycznie precyzyjna, bo nie zdefiniowaliśmy "...". Podamy definicję liczb naturalnych odwołującą się jedynie do pojęć pierwotnych i do pojęć zdefiniowanych wcześniej. Def. Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ nazywamy induktywnym jeśli spełnia następujące dwa warunki

i. $1 \in A$

ii. $\forall_{a \in A} a + 1 \in A$

A. $[1, \infty)$

B. $\mathbb{R}$

C. $\mathbb{Q}$

D. $\mathbb{N}$

iii. Def. Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ to zbiór zawarty w każdym zbiorze induktywnym tzn. $\mathbb{N} = \cap_{A \in I} A$ gdzie I to rodzina wszystkich zbiorów induktywnych

(b) Twierdzenie - Zasada indukcji matematycznej

i. Jeśli $A \subset \mathbb{N}$ spełnia warunki

$1 \in A$

$\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \implies n + 1 \in A)$

ii. to $A = \mathbb{N}$

iii. Zbiór A jest induktywny, bo $1 \in A$ oraz $\forall_{n \in A} n + 1 \in A$ Zatem $\mathbb{N} \subset A$

iv. Skoro $A \subset \mathbb{N}$ oraz $\mathbb{N} \subset A$ to $A = \mathbb{N}$

(c) Przykład - dowód tego, że $\forall_{n \in \mathbb{N}} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$ (**)

i. Niech $A = \{n \in \mathbb{N} : 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}\}$

ii. Potrzebujemy pokazać,że $1 \in A$ oraz, że $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \implies n + 1 \in A)$ To znaczy,że

A. Dla n=1 wzór (**) jest spełniony $(1 + 1 \geq \sqrt{1})$

B. Zakładamy,że wzór (**) jest prawdziwy dla n i dowodzimy jego prawdziwości dla n+1

Zakładamy, że $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$. Chcemy pokazać,że $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$

$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq^{zal.ind.} \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n^2+n}+1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{\sqrt{n^2}+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}$ co kończy dowód.

(d) Twierdzenie:

i. Zbiór $\mathbb{N}$ nie jest ograniczony z góry

A. Dowód nie wprost. Zakładamy,że zbiór $\mathbb{N}$ jest ograniczony z góry. Wtedy $\exists_{M \in \mathbb{N}} \forall_{n \in \mathbb{N}} n \leq M \implies n + 1 \leq M \implies n \leq M - 1 \implies M - 1$ też jest ograniczeniem górnym $\implies$ zbiór $\mathbb{N}$ nie ma najmniejszego ograniczenia górnego. Z drugiej strony. $\mathbb{N}$ jako zbiór niepusty i ograniczony z góry ma kres górny, czyli najmniejsze ograniczenie górne. Skoro założenie implikuje sprzeczność to założenie jest nieprawdziwe więc zbiór $\mathbb{N}$ nie jest ograniczony z góry

ii. Zbiór $\mathbb{Q}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$,to znaczy $\forall_{x,y \in \mathbb{R}, x<y} \exists_{q \in \mathbb{Q}} x < q < y$ (pomiędzy dowolnymi dwoma rzeczywistymi istnieje liczba wymierna)

iii. Zbiór $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (zbiór liczb niewymiernych) jest gęsty w $\mathbb{R}$, to znaczy $\forall_{x,y \in \mathbb{R}, x<y} \exists_{z \notin \mathbb{Q}} x < z < y$

(e) Dowód indukcyjny tego, że wszystkie koty są tego samego koloru. Indukcja e względu na n-liczba kotów.

i. Dla n=1 OK

ii. Zakładamy że fakt jest prawdziwy dla n, i dowodzimy dla n+1