23.10.2019
Granica górna i dolna ciągu

1. Def. Mówimy, że $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$ jeśli istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}$ ciągu $\{a_n\}$ taki, że $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = g$
   (a) Przykład: Wyznaczamy punkt skupienia ciagu $a_n = \sqrt{\frac{1+4n}{2+n}} \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

      $b_n = \sqrt{\frac{1+4n}{2+n}}$, $c_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$
      $\lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{4} = 2$ bo $s_n \to s \implies (s_n)^q \to s^q$
      pierwsze wyrazy $\{c_n\}$ - $c_1 = -1, c_2 = -1, c_3 = 1$ - może się powtarza?
      $c_{4k} = (-1)^{2k(4k+1)} = 1$, $c_{4k+1} = (-1)^{\frac{(4k+1)(4k+2)}{2}} = (-1)^{(4k+1)(2k+1)} = -1$,
      $c_{4k+2} = (-1)^{\frac{(4k+2)(4k+3)}{2}} = (-1)^{(2k+1)(4k+3)} = -1$, $c_{4k+3} = (-1)^{\frac{(4k+3)(4k+4)}{2}} = (-1)^{(4k+3)(2k+2)} = 1$
      a więc $a_{4k} = b_{4k}c_{4k} = b_{4k} \xrightarrow{k\to\infty} 2$
      $a_{4k+1} = b_{4k+1}c_{4k+1} = b_{4k+1} \xrightarrow{k\to\infty} -2$
      $a_{4k+2} = b_{4k+2}c_{4k+2} = b_{4k+2} \xrightarrow{k\to\infty} -2$
      $a_{4k+3} = b_{4k+3}c_{4k+3} = b_{4k+3} \xrightarrow{k\to\infty} 2$
      Więc punkty skupienia ciągu $\{a_n\}$ to -2 i 2

2. Def. Granicą dolną ciągu $\{a_n\}$, oznaczaną $\liminf_{n\to\infty} a_n$ lub $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ nazywamy kres dolny zbioru wszystkich punktów skupienia ciągu $\{a_n\}$:
   $\liminf_{a\to\infty} = inf\{g : \exists_{\{a_{n_k}\}} \lim_{n\to\infty} a_{n_k} = g\}$

3. Def. Granicą górną ciągu $\{a_n\}$, oznaczaną $\limsup_{n\to\infty} a_n$ lub $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ nazywamy kres górny zbioru wszystkich punktów skupienia ciągu $\{a_n\}$:
   $\limsup_{a\to\infty} = inf\{g : \exists_{\{a_{n_k}\}} \lim_{n\to\infty} a_{n_k} = g\}$
   (a) Wtedy, dla $a_n = \sqrt{\frac{1+4n}{2+n}} \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$: $\liminf_{n\to\infty} a_n = 2$, $\limsup_{n\to\infty} = -2$

4. Twierdzenie 2.16: Dla dowolnego $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ mamy
   $\lim_{n\to\infty} a_n = g \iff \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = g$

GRANICA FUNKCJI

Przez cały wykład będziemy zakładać, że $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}$. Ponadto, $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

1. Def. Mówimy, że $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru D jeśli istnieje ciąg $\{a_n\}$ taki,że $\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n \in D \setminus \{a\}$ (inaczej $\{a_n\} \subset D \setminus \{a\}$ i $\lim_{n\to\infty} a_n = a$
   (a) Przykłady:
      i. $\{0\} \cup [1, 2)$ - punkty skupienia - $[1, 2]$
      ii. $\mathbb{N}$ - punkt skupienia $\{+\infty\}$
      iii. $\mathbb{Z}$ - punkty skupienia $\{-\infty, +\infty\}$
      iv. $\{1, 2, 3\}$- nie ma punktów skupienia
      Ogólniej, dowolny zbiór skończony nie ma punktów skupienia
      v. $\mathbb{R}$ - punkty skupienia - $\widetilde{\mathbb{R}}$

2. Def. (Heinego granicy funkcji): Niech $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$ będzie punktem skupienia zbioru D i $g \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Mówimy, że g jest granicą funkcji f w punkcie a (jeśli $a \in \mathbb{R}$) lub w $\pm\infty$(jeśli $a = \pm\infty$) i zapisujemy
   $\lim_{x\to a} f(x) = g$ lub $f(x) \xrightarrow{x\to a} g \iff \underline{\forall_{\{a_n\}\subset D\setminus\{a\}} \lim_{n\to\infty} a_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(a_n) = g}$ - **(H)**
   (a) Przykład $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 1 \\ 1 & \text{dla } x \neq 1 \end{cases}$ - $\lim_{n\to\infty} f(x) = 1$. W szczególności $\lim_{x\to 1} f(x)$ nie zależy od wartości funkcji w punkcie $x_0 = 1$

3. Twierdzenie 4.1: Granica funkcji jest wyznaczona jednoznacznie, tzn. jeśli $\lim_{x\to a} f(g) = g_1$ oraz $\lim_{x\to a} f(x) = g_2$, to $g_1 = g_2$
   (a) Dowód: Zakładamy, że $\lim_{x\to a} f(x) = g_1$ i $\lim_{x\to a} f(x) = g_2$
   $\forall_{\{a_n\}\subset D\setminus\{a\}} \lim_{n\to\infty} a_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(a_n) = g_1$
   Weźmy dowolny ciąg $\{a_n\} \subset D \setminus \{a\}$ taki, że $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Wtedy $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = g_1$ oraz $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = g_2$
   Z tw 2.2, otrzymujemy, że $g_1 = g_2$

(b) Przykłady:

i. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{2x-1}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}\infty k$
Weźmy ciąg $\{a_n\} \subset D\setminus\{-\infty\} = \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$ taki, że $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Wtedy $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ oraz $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \frac{|a_n|}{a_n} \overset{a_n<0}{=} \frac{-a_n}{2a_n} = -\frac{1}{2}$, więc $\lim_{x\to-\infty} = -\frac{1}{2}$

ii. Granica $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ nie istnieje. Weźmy dwa ciągi, $\{a_n\} \subset \mathbb{R}\setminus\{0\}$,$\{x_n\} \subset \mathbb{R}\setminus\{0\}$ takie, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ oraz $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$
$a_n = \frac{1}{2n\pi} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $x_n = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Wtedy:
$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sin(2n\pi) = 0$
$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$
Granica musi być jednoznaczna - więc $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ nie istnieje

4. Def. (Cauchy'ego granicy skonczonej (właściwej) funkcji w punkcie): Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia D i niech $g \in \mathbb{R}$. Wtedy:
$\lim_{x\to a} f(x) = g \iff \underline{\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D} 0<|x-a|<\delta \implies |f(x)-g|<\epsilon}$ - **(C)**
Dla x bliskich a i różnych od a odległość $f(x)$ od g jest dowolnie mała.

5. Twierdzenie 4.2 : Definicje Cauchy'ego i Heinego granicy włąściwej funkcji w punkcie są równoważne.

(a) Dowód: (H) $\implies$ (C) Dowód nie wprost. Zakładamy, że (H) i $\neg$(C)
$\exists_{\epsilon>0}\forall_{\delta>0}\exists_{x\in D} 0 < |x-a| < \delta \wedge |f(x)-g| \geq \epsilon$ $\neg$(C)
W szczególności dla $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy $\exists_{\epsilon>0}\forall_{n\in\mathbb{N}}\exists_{x_n\in D} 0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - g| \geq \epsilon$
Z tw. o trzech ciągach $\lim_{n\to\infty} |x_n - a| = 0 \iff \lim_{n\to\infty}(x_n - a) = 0 \iff \lim_{n\to\infty} x_n = a$
Pokazaliśmy, że $\exists_{\epsilon>0}\exists_{\{x_n\}\subset D\setminus\{a\}} \lim_{n\to\infty} x_n \wedge \forall_{n\in\mathbb{N}}|f(x) - g| \geq \epsilon$
$\exists_{\{x_n\}\subset D\setminus\{a\}} \lim_{n\to\infty} x_n = a \wedge \lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq g \iff \neg(H)$ - sprzecznosc z zał. że zachodzi (H)

(b) (C) $\implies$ (H): Zakładamy, że zachodzi (C), tzn $\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D} 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - g| < \epsilon$
Chcemy pokazać, że (H), czyli $\forall_{\{a_n\}\subset D\setminus\{a\}} \lim_{n\to\infty} a_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(a_n) = g$
$\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|f(a_n) - g| < \epsilon$
Weźmy dowolny ciąg $\{a_n\} \subset D \setminus \{a\}$ taki, że $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ i weźmy dowolny $\epsilon > 0$. Wtedy
$\exists_{n_1\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_1} 0 < |a_n - a| < \delta \overset{(C)}{\implies} |f(a_n) - g| < \epsilon$

(c) Zatem pokazalismy $\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|f(a_n) - g| < \epsilon$ $(n_0 = n_1)$

6. Def. Cauchy'ego niewłaściwych granic funkcji w punkcie: Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru D
$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \iff \forall_{G>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D} 0 < |x-a| < \delta \implies f(x) > G$
$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \iff \forall_{G>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D} 0 < |x-a| < \delta \implies f(x) < -G$

7. Def. Cauchy'ego właściwej granicy w $\pm\infty$: Niech $\pm\infty$ będzie punktem skupienia zbioru D i $g \in \mathbb{R}$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = g \iff \forall_{\epsilon>0}\exists_{G>0}\forall_{x\in D} x > G \implies |f(x) - g| < \epsilon$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = g \iff \forall_{\epsilon>0}\exists_{G>0}\forall_{x\in D} x < -G \implies |f(x) - g| < \epsilon$

8. Def Cauchy'ego niewłaściwych granic funkcji w $\pm\infty$: Niech $\pm\infty$ będzie punktem skupienia zbioru D
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff \forall_{G>0}\exists_{L>0}\forall_{x\in D} x > L \implies f(x) > G$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \iff \forall_{G>0}\exists_{L>0}\forall_{x\in D} x > L \implies f(x) < -G$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \iff \forall_{G>0}\exists_{L>0}\forall_{x\in D} x < -L \implies f(x) > G$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \iff \forall_{G>0}\exists_{L>0}\forall_{x\in D} x < -L \implies f(x) < -G$

9. Twierdzenie 4.3: Powyższe dwie definicje Cauchy'ego grainc funkcji są równowazne odpowiednim definicjom Heinego

10. Twierdzenie 4.4: (tw. o trzech funkcjach): Jeśli:

(a) $f, p, h : D \to \mathbb{R}$

(b) $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia D

(c) $g \in \mathbb{R}$ i $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = g$

(d) $\forall_{x\in D \text{ i x bliskiego a}} f(x) \leq p(x) \leq h(x)$

To $\lim_{x\to a} p(x) = g$ - (dowód z def Heinego i tw o trzech ciągach)

11. Twierdzenie 4.5 (tw o dwóch funkcjach): Jeśli:

(a) $f, h : D \to \mathbb{R}$

(b) $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia D

(c) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ (ewentualnie $\lim_{x\to a} h(x) = -\infty$)

(d) $\forall_{x\in D \text{ i x bliskie a}} f(x) \leq h(x)$

To $\lim_{x\to a} h(x) = +\infty$ (ewentualnie $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$)

(a) Przykład: $\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x}$
$0 \leq |x\cdot \sin\frac{1}{x}| = |x||\sin\frac{1}{x}| \leq |x|$ dla $x \neq 0$
$\overset{\text{tw.o 3 funkcjach}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} |x\cdot\sin\frac{1}{x}| = 0 \iff \lim_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x} = 0$