5 Sumy i sumy proste podprzestrzeni liniowych

Niech V bedzie przestrzenią liniową nad ciałem K a V_1 oraz V_2 będą podprzestrzeniami V. Pokazaliśmy w poprzednich rozdziałach, że $V_1 \cap V_2$ jest podprzestrzenią przestrzeni V. Pokazaliśmy, tez że $V_1 \cup V_2$ jest podprzestrzenią V wtedy i tylko wtedy gdy $V_1 \subseteq V_2$ lub $V_2 \subseteq V_1$.

Definicja 5.1. *Niech V bedzie przetrzenią liniową nad ciałem K a $V_1, V_2, \ldots, V_k$ będą podprzestrzeniami V. Definiujemy*

$$V_1 + \ldots + V_k = \{v \in V; v = v_1 + \cdots + v_k, v_i \in V_i\}.$$

Zauważmy, że jeśli $V_1, V_2, \ldots, V_k$ będą podprzestrzeniami V to $V_1 + \ldots + V_k$ jest podprzestrzenią V. Nazywamy ją sumą podprzestrzeni $V_1, V_2, \ldots, V_k$.

Lemat 5.2. $V_1 + \ldots + V_k = \mathcal{L}(V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k$.

Niech teraz $V_i = \mathcal{L}(\mathcal{B}_i)$. Wtedy oczywiste jest, że $V_1 + \ldots + V_k = \mathcal{L}(\mathcal{B}_1 | \ldots | \mathcal{B}_k)$.

Twierdzenie 5.3. *Niech V_1, V_2 bedą skończenie wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni V. Wówczas*

$$dim(V_1 + V_2) = dimV_1 + dimV_2 - dim(V_1 \cap V_2.)$$

Definicja 5.4. *Przestrzeń V jest sumą prostą swoich podprzestrzeni $V_1, V_2, \ldots, V_k$, jesli każdy wektor $v \in V$ daje się jednoznacznie przedstawić jako $v = v_1 + \cdots + v_k, \quad v_i \in V_i$. Piszemy wówczas $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$.*

Oczywiście każda suma prosta jest sumą podprzestrzeni.

Twierdzenie 5.5. *Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni V. Wówczas*

$$V = V_1 \oplus V_2 \quad \Leftrightarrow \quad V = V_1 + V_2, \quad V_1 \cap V_2 = 0.$$

W przypadku sumy więcej niz dwu podprzestrzeni warunek po prawej stronie jest bardziej skomplikowany.

Wniosek 5.6. *Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami skończenie wymiarowej przestrzeni V. Załóżmy, ze $V_1 \cap V_2 = 0$. Wówczas*

$$V = V_1 \oplus V_2 \quad \Leftrightarrow \quad V = V_1 + V_2.$$

Twierdzenie 5.7. *Niech* $V = V_1 + \cdots + V_k$ *oraz niech* $\mathcal{B}_i$ *będzie bazą przestrzeni* V_i*, dla* $i = 1, \cdots, k$*. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

1. $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$.
2. *Układ* $(\mathcal{B}_1| \quad \ldots \quad |\mathcal{B}_k)$ *jest bazą przestrzeni* V*.*
3. *Układ* $(\mathcal{B}_1| \quad \ldots \quad |\mathcal{B}_k)$ *jest liniowo niezależny.*

Niech teraz W będzie podprzestrzenią skończenie wymiarowej przestrzeni V. Istnieje podprzestrzeń $U < V$, taka że $V = W \oplus U$. Podprzestrzeń taką nazywamy *podprzestrzenią dopełniającą*. Nie jest ona wyznaczona jednoznacznie, ale wszystkie podprzestrzenie dopełniające mają ten sam wymiar równy $dimV - dimW$. Róznicę wymiarów $dimV - dimW$ nazywamy *kowymiarem* podprzestrzeni W i oznaczamy $codimW$.