09.10.2019
Rachunek predykatów
Na elitmie $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0$

1. Def: Wyrażenie $\phi(x)$, które po wstawieniu za x konkretnej wartości z ustalonego zbioru X nazywamy **funkcją zdaniową**
   (a) X - **zakres** zmiennej x
   (b) **Kwantyfikator ogólny** (uniwersalny)
      i. $(\forall_{x \in X})\phi(x)$ oznacza, że dla każdego $x \in X$ zdanie $\phi(x)$ jest prawdziwe
      ii. ^ taki napis jest zdaniem
   (c) **Kwantyfikator szczegółowy** (egzystencjalny)
      i. $(\exists_{x \in X})\phi(x)$ oznacza, że istnieje takie $x \in X$, dla którego zdanie $\phi(x)$ jest prawdziwe
   (d) Przykłady (b,c):
      i. $\forall_{x \in \mathbb{R}} x^2 \geq 1$ - zdanie fałszywe
      ii. $\exists_{x \in \mathbb{R}} x^2 = x + 1$- zdanie prawdziwe
2. Def: $\phi(x)$ - funkcja zdaniowa, X - zakres zmiennej x, $A \subseteq X$, $\alpha(x)$ - funkcja zdaniowa:
   (a) :
      i. $\forall_{x \in A}\phi(x) \iff {}^{def}\forall_{x \in X}(x \in A \implies \phi(x))$
      ii. $\exists_{x \in A}\phi(x) \iff {}^{def}\exists_{x \in X}(x \in A \wedge \phi(x))$
   (b) A więc generalniej:
      i. $\forall_{x \colon \alpha(x)}\phi(x) \iff {}^{def}\forall_{x \in X}(\alpha(x) \implies \phi(x))$
      ii. $\exists_{x \colon \alpha(x)}\phi(x) \iff {}^{def}\exists_{x \in X}(\alpha(x) \wedge \phi(x))$
   (c) Niech $A = \emptyset$
      i. $\forall_{x \in \emptyset}\phi(x) \iff \forall_{x \in X}(x \in \emptyset \implies \phi(x))$ - zdanie prawdziwe (zawsze)
      ii. $\exists_{x \in \emptyset}\phi(x) \iff \exists_{x \in X}(x \in \emptyset \wedge \phi(x))$ - zdanie fałszywe (zawsze)
   (d) Jeśli nie prowadzi to do nieporozumień, to będziemy pisać $\forall_x \phi(x)$ zamiast $\forall_{x \in X}\phi(x)$ oraz $\exists_x \phi(x)$ zamiast $\exists_{x \in X}\phi(x)$
3. Funkcje zdaniowe wielu zmiennych
   (a) $\phi(x, y)$ - staje się zdaniem po wstawieniu za x, y konkretnych wartości z zakresu x, y
   (b) $\phi(x_1, ..., x_n)$ - funkcja zdaniowa n zmiennych
   (c) Przykład:
      i. $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{Z}$: $\phi(x, y)$=$(x \neq y)$ - funkcja zdaniowa 2 zmiennych
      ii. $\forall_{x \in \mathbb{R}} x \neq y$ - nie zdanie, lecz funkcja zdaniowa - wartość zależy od y
      iii. $\exists_{y \in \mathbb{Z}}\forall_{x \in \mathbb{R}} x \neq y$ - zdanie fałszywe
4. $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ - zbiór skończony
   (a) $\forall_{x \in X}\phi(x) \iff \phi(x_1) \wedge \cdots \wedge \phi(x_n)$
   (b) $\exists_{x \in X}\phi(x) \iff \phi(x_1) \vee \cdots \vee \phi(x_n)$
5. Def: **Zasięg kwantyfikatora** to funkcja zdaniowa, której ten kwantyfikator dotyczy
   (a) $\exists_{y \in \mathbb{Z}}\underline{\forall_{x \in \mathbb{R}} x \neq y}$ - zasięg kwantyfikatora $\exists_{y \in \mathbb{Z}}$
   (b) Przykład: $\forall_x(\underline{\forall_y(\underline{x > y \implies (\exists_z)(\underline{x > z > y})})})$ - odpowiednie podkreślenia to zasięgi kwantyfikatorów na lewo od nich
   (c) Notacja: Zamiast $\forall_x(\exists_y(\forall_z(\ldots)))$ piszemy $\forall_x\exists_y\forall_z \ldots$
6. Def: Zmienną x nazywamy **związaną** jeśli leży ona w zasięgu kwantyfikatora (w którym występuje!) dla $\forall_x$ lub $\exists_x$. W przeciwnym wypadku x jest zmienną **wolną**
   (a) Przykłady:
      i. $\exists_y\forall_x(x + y > z)$ - x, y - zmienna związana, z - zmienna wolna
      ii. $z^2 \neq 1 \wedge \forall_y x^2 = y^2$- y - zmienna związana, x, z - zmienne wolne
   (b) $\phi(x)$ = "x jest liczbą pierwszą" - funkcja zdaniowa o zakresie $\mathbb{N} \setminus \{0\}$
      i. $\phi(x) = x > 1 \wedge \forall_{n \in \mathbb{N}}(n|x \implies n = x \vee n = 1)$ ($n|x$ oznacza "n dzieli x")

7. **Definicja rachunku predykatów**
   (a) A - alfabet: zbiór stałych, (np liczby rzeczywiste), symbole funkcyjne i symbole relacyjne (**predykaty**)
   (b) x, y, z - symbole zmiennych
   (c) **Zbiór termów $\boldsymbol{T}$** to najmniejszy zbiór taki, że
      i. wszystkie stałe i zmienne należą do T
      ii. jeśli $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ oraz $\alpha \in A$ jest symbolem funkcji m-argumentowej, to $\alpha(t_1, \ldots t_n) \in T$
      iii. Elementy zbioru T nazywamy termami
   (d) **Predykat** to m-argumentowa funkcja, której wartościami jest prawda lub fałsz
      i. Przykłady $x, y \in \mathbb{R}$:
         A. $\beta(x, y) = (x < y)$ - predykat 2-argumentowy
         B. $p(x) =$(x jest liczbą pierwszą) $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
   (e) $t_1, \ldots, t_m$ - termy, β - symbol m-argumentowego predykatu - wtedy wyrażenie $\beta(t_1, \ldots, t_m)$ nazywamy **formułą atomową** rachunku predykatów
   (f) **Zbiór formuł rachunku predykatów** jest to najmniejszy zbiór Z taki, że
      i. Wszystkie formuły atomowe należą do Z
      ii. Jeśli $A, B \in Z$, to $(\neg A,\ A \vee B,\ A \wedge B,\ A \implies B,\ A \iff B) \in Z$
      iii. Jeśli $A \in Z$ i x jest zmienną wolną (nie związaną kwantyfikatorem) w A, to $\forall_x A \exists_x A \in Z$

8. Tautologie rachunku predykatów:
   (a) Def: Formułę rachunku predykatów nazywamy **tautologią** jeśli jest prawdziwa dla wszystkich interpretacji symboli funkcyjnych, predykatów, i dla wszystkich wartościowań zmiennych wolnych występujących w tej formule.
   (b) Przykłady:
      i. Formuły powstałe z tautologii rachunku zdań przez zastąpienie zmiennych formami rachunku predykatów (X - zakres x)
         A. $\alpha \vee \neg\alpha \longrightarrow \forall_x \phi(x) \vee \neg\forall_x \phi(x)$
      ii. $\forall_x \forall_y \phi(x, y) \iff \forall_y \forall_x \phi(x, y)$
      iii. $\exists_x \exists_y \phi(x, y) \iff \exists_y \exists_x \phi(x, y)$ - ^ przemienność kwantyfikatorów tego samego rodzaju
      iv. $\exists_x \forall_y \phi(x, y) \implies \forall_y \exists_x \phi(x, y)$ - ale nie w drugą stronę

         Dowód: X, Y - zakres zmiennych x, y
         $x_0 \in X$ będzie takie, że $\forall_y \phi(x_0, y)$ jest prawdą
         Weźmy dowolne $y \in Y$. Prawdą jest, że dla tego y, $\phi(x_0, y)$ jest prawdą
         Zatem rzeczywiście $\forall_y \exists_x \phi(x, y)$

         Przykład: Przykład, że implikacja odwrotna nie zachodzi
         $X = Y = \mathbb{R}$
         $\phi(x, y) = (x > y)$
         $\exists_{x \in \mathbb{R}} \forall_{y \in \mathbb{R}} x > y$ - zdanie fałszywe
         $\forall_{y \in \mathbb{R}} \exists_{x \in \mathbb{R}} x > y$ - zdanie prawdziwe, więc
         $\forall_{y \in \mathbb{R}} \exists_{x \in \mathbb{R}} x > y \implies \exists_{x \in \mathbb{R}} \forall_{y \in \mathbb{R}} x > y$ jest fałszywe
      v. $\forall_x (\phi(x) \wedge \psi(x)) \iff \forall_x \phi(x) \wedge \forall_x \psi(x)$
      vi. $\exists_x (\phi(x) \vee \psi(x)) \iff \exists_x \phi(x) \vee \exists_x \psi(x)$ -forall-koniuncja/ exists-alternatywa
      vii. $\exists_x (\phi(x) \wedge \psi(x)) \implies \exists_x \phi(x) \wedge \exists_x \psi(x)$
      viii. $\forall_x (\phi(x) \vee \psi(x)) \impliedby \forall_x \phi(x) \vee \forall_x \psi(x)$ - forall-alternatywa/ exists-koniunkcja
      ix. $\forall_x \phi(x) \implies \phi(x_0)$ gdzie $x_0 \in X$
      x. $\neg(\forall_x \phi(x)) \iff \exists_x \neg\phi(x)$
      xi. $\neg(\exists_x \phi(x)) \iff \forall_x \neg\phi(x)$
      xii. $(\forall_x (\phi(x) \implies \psi(x))) \implies ((\forall_x \phi(x)) \implies (\forall_x \psi(x)))$
      xiii. $\forall_x \phi(x) \vee \psi \iff (\forall_x \phi(x)) \vee \psi$- x nie jest zmienną wolną w ψ
      xiv. $\forall_x (\phi(x) \wedge \psi) \iff (\exists_x \phi(x)) \wedge \psi$
      xv. $(\phi \implies \forall_x \psi(x)) \iff \forall_x (\phi \implies \psi(x))$
      xvi. $(\phi \implies \exists_x \psi(x)) \iff \exists_x (\phi \implies \psi(x))$
      xvii. $((\forall_x \phi(x)) \implies \psi) \iff \exists_x (\phi(x) \implies \psi)$

D: $((\forall_x \psi(x)) \implies \phi) \iff \neg(\forall_x \psi(x)) \vee \phi \iff (\exists_x \neg\psi(x)) \vee \phi \iff \exists_x(\neg\psi(x) \vee \phi) \iff \exists_x(\psi(x) \implies \phi)$

xviii. $((\exists_x \phi(x)) \implies \psi) \iff \forall_x(\phi(x) \implies \psi)$

(c) Przykłady:

(vii) $\phi(x) = (x > 0), \psi(x) = (x < 0)$

: $\exists_x \phi(x) \wedge \exists_x \psi(x) \iff \exists_x x > 0 \wedge \exists_x x < 0$

: ^ fałsz - w (vii) implikacja odwrotna nie zachodzi

(viii) $\phi(x) = (x \geq 0)$, $\psi(x) = (x < 0)$

: $\forall_x(\phi(x) \vee \psi(x)) \iff \forall_x(x \geq 0 \vee x < 0)$ - prawda

(xii) $\phi(x) = (x > 0)$, $\psi(x) = (x > 1)$

: $\forall_x(\phi(x) \implies \psi(x)) \iff \forall_x(x > 0 \implies x > 1)$- działa, bo weźmy $x = \frac{1}{2}$

... W (viii) oraz (xii) implikacje odwrotne nie są tautologiami

9. Tautologia dla formuł z kwantyfikatorami:
   (a) Logika pierwszego rzędu ma inną definicję tautologii - dla wszystkich wartościowań zdanie jest prawdziwe
   (b) Dla rachunku predykatów tautologia jest formułą lub zdaniem - (formuła bez zmiennych wolnych),
      i. Zdanie jest tautologią jeśli jest prawdziwe w każdym modelu
   (c) W logice pierwszego rzędu też były modele, tylko nazywaliśmy je każdym możliwym wartościowaniem

10. $\forall_{x_{\alpha(x)}} \phi(x) \stackrel{def.}{=} \forall_x \alpha(x) \implies \phi(x)$

11. $\exists_{x_{\alpha(x)}} \phi(x) \stackrel{def.}{=} \exists_x \phi(x) \wedge \alpha(x)$