23.10.2019
X - zbiór (przestrzeń)

1. Def. Dopełnieniem zbioru A w przestrzeni X nazywamy zbiór $-A = \{x \in X : x \notin A\}$ - na mocy aksjomatu wyróżniania
   (a) Własności dopełnienia:
      i. $-(A \cup B) = -A \cap -B$
         D: $x \in -(A \cap B) \overset{\text{def. dopełnienia}}{\iff} x \notin (A \cap B) \overset{\text{def.}\notin}{\iff} \neg x \in A \cap B \overset{\text{def. iloczynu}}{\iff} \neg(x \in A \wedge x \in B) \overset{\text{prawo de Morgana}}{\iff} /$
         $\iff x \notin A \vee x \notin B \iff x \in -A \cup -B$
      ii. $-(A \cap B) = -A \cup -B$
      iii. $\emptyset \subseteq A$
      iv. $A \cup \emptyset = A$
      v. $A \cap \emptyset = \emptyset$
      vi. $A \setminus \emptyset = A$
      vii. $\emptyset \setminus A = \emptyset$
      viii. $-\emptyset = X$
      ix. $-X = \emptyset$
      x. $A \cup -A = X$
      xi. $A \cap -A = \emptyset$
      xii. $-(-A) = A$
      xiii. $A \setminus B = A \cap -B$
      xiv. $A \cap X = A$
      xv. $A \cup X = X$
      xvi. $A \subseteq B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B$
      xvii. $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \iff A \cup B \subseteq C$
      xviii. $C \subseteq A \wedge C \subseteq B \iff C \subseteq A \cap B$
   (b) Przykład:
      i. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
      ii. $\emptyset \in \{\emptyset\}$
      iii. $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$
      iv. $\{\emptyset\} \notin \{\emptyset\}$
      v. $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
   (c) $\emptyset$ - jedyny element zbioru $\{\emptyset\}$,ale $\emptyset \neq \{\emptyset\}$

2. **Aksjomat zbioru potegowego:** Dla każdego zbioru istnieje zbiór (potegowy) wszystkich jego podzbiorów.
   A - zbiór, $P(A)$ (lub 2^A) - zbiór potęgowy
   $P(A) = \{B : B \subseteq A\}$
   $\emptyset, A \in P(A)$ zawsze
   (a) Przykład: $A = \{a, b\}$, $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

3. **Aksjomat pary nieuporządkowanej:** Dla dowolnych zbiorów A i B istnieje zbiór, którego elementami są dokładnie zbiory A oraz B
   $\{A, B\} = \{x : x = A \vee x = B\}$
   $\{A\} = \{A, A\}$ - Singleton, zbiór 1-elementowy
   (a) Def. **Parą uporządkowaną** $< a, b >$ nazywamy zbiór $\{\{a\}, \{a, b\}\}$
      i. $< a, a >= \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$
   (b) Twierdzenie: $< a, b >=< c, d > \iff a = c \wedge b = d$
      i. $\Longleftarrow :$ $a = c \wedge b = d$, więc $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ więc $< a, b >=< c, d >$
      ii. $\Longrightarrow :$ Dla $a = b$, $< a, b >= \{\{a\}\}, < c, d >= \{\{c\}, \{c, d\}\}$ więc $\{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ tylko gdy $c = d$, a wtedy $\{\{a\}\} = \{\{c\}\}$, więc z tego wynika że $a = c \wedge b = d$
         Dla $a \neq b$: $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ tylko gdy $(\{a\} = \{c\} \vee \{a\} = \{c, d\}) \wedge (\{a, b\} = \{c, d\} \vee \{a, b\} = \{d\})$.
         Ponieważ $\{a, b\}$ oraz $\{c, d\}$ są dwuelementowe, bo $a \neq b$, to $\{a\} = \{c\} \wedge \{a, b\} = \{c, d\}$ z czego $a = b$ oraz $c = d$
      iii. Implikacja zachodzi w dwie strony, więc jest równoważność

4. Def. **Iloczynem kartezjańskim** zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \times B = \{< a, b >: a \in A \wedge b \in B\}$

(a) Przykłady

i. $\{1,2\} \times \{3,4\} = \{<1,3>, <1,4>, <2,3>, <2,4>\}$

ii. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ - płaszczyzna $\mathbb{R}^2$

iii. $[1,3] \times [1,2]$ - prostokąt o wierzchołkach $<1,1>, <1,2>, <3,1>, <3,2>$

5. Def. **Uporządkowaną trójką** $<a,b,c>$nazywamy zbiór $<<a,b>,c>$

6. Def. **Uporządkowaną n-tką** $<x_1,\ldots,x_n>$nazywamy zbiór $<<x_1,\ldots,x_{n-1}>,x_n>$

(a) Twierdzenie: Dla $n \geq 2$, $<x_1,\ldots,x_n> = <y_1,\ldots,y_n> \iff \forall_{i\in\{1,\ldots,n\}} x_i = y_i$

i. Dowód indukcyjny: Dla $n = 2$ prawda
Założenie indukcyjne: $<x_1,\ldots,x_{n-1}> = <y_1,\ldots,y_{n-1}> \iff \forall_{i\in\{1,\ldots,n-1\}} x_i = y_i$.
$a = <x_1,\ldots,x_{n-1}>, b = <y_1,\ldots,y_{n-1}>$.
Wtedy z definicji uporządkowanej n-tki $<x_1,\ldots,x_n> = <a,x_n>$,oraz $<y_1,\ldots,y_n> = <b,y_n>$
Z tego, że dla $n = 2$, to $<a,x_n> = <b,y_n> \iff a = b \wedge x_n = y_n$
Z założenia indukcyjnego, $a = b \iff \forall_{i\in\{1,\ldots,n-1\}} x_i = y_i$, więc $<a,x_n> = <b,y_n> \iff \forall_{i\in\{1,\ldots,n\}} x_i = y_i$ co kończy dowód.

7. **Aksjomat sumy zbiorów rodziny:** $\mathcal{A}-$rodzina zbiorów - zbiór którego elementami są zbiory

(a) Dla dowolnej rodziny zbiorów $\mathcal{A}$ istnieje zbiór:
$\bigcup \mathcal{A} := \{x : \exists_A (A \in \mathcal{A} \wedge x \in A)\}$
do którego należą te elementy, które należa do co najmniej jednego zbioru rodziny $\mathcal{A}$

(b) Iloczynem (przecięciem) rodziny zbiorów $\mathcal{A}$ nazywamy zbiór
$\bigcap \mathcal{A} := \{x \in \bigcup \mathcal{A} : \forall_A (A \in \mathcal{A} \implies x \in A)\}$
Istnieje na mocy aksjomatu wyróżniania i aksjomatu sumy rodziny zbiorów

8. I - zbiór indeksów, $X-$zbiór przestrzeni
Def. Funkcję $A : I \to P(X)$ i $\mapsto A(i) \subseteq X$ nazywamy **indeksowaną rodziną zbiorów** (będziemy pisać A_i zamiast $A(i)$)

(a) R - zbiór wartości funkcji A
$R = \{B \in P(X) : \exists_{i\in I} B = A(I)\} = \{A_i : i \in I\}$

9. Def. **Sumą indeksowanej rodziny zbiorów** $A : I \to P(X)$ nazywamy sumę rodziny R, czyli $\bigcup R = \bigcup \{A_i : i \in I\}$
Oznaczenie $\bigcup_{i\in I} A_i$
$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff \exists_{i\in I} x \in A_i$

10. Def. Iloczynem rodziny indeksowanej $A : I \to P(X)$ nazywamy zbiór $\bigcap R = \bigcap \{A_i : i \in I\}$
Oznaczamy $\bigcap_{i\in I} A_i$,
$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff \forall_{i\in I} x \in A_i$