Własności funkcji ciągłych:

1. Twierdzenie 7.1 : Każda funkcja ciągła $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ ma własność Darboux, to znaczy
   $f(a) \neq f(b) \implies \forall_{c \text{ między } f(a),f(b)} \exists_{x_0 \in (a,b)} f(x_0) = c$
2. Twierdzenie 7.1: (twierdzenie Weierstrassa I)
   Jeśli funkcja $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ jest ciągła, to jest ograniczona
3. Twierdzenie 7.2: (twierdzenie Weierstrassa II)
   Jeśli funkcja $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ jest ciągła, to przyjmuje wartość najmniejszą i największą - osiąga swoje kresy
   $\exists_{x_m, x_M \in <a,b>} f(x_m) = \inf_{x\in<a,b>} f(x)\ i\ f(x_M) = \sup_{x\in<a,b>} f(x)$
   Uwaga - z przedziału otwartego to niekoniecznie prawda
   (a) Dowód: $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ - funkcja ciągła $\overset{\text{tw.Weierstrassa I}}{\Longrightarrow} f$ jest ograniczona, tzn ograniczony jest zbiór wartości tej funkcji $Y = \{f(x) : x \in< a, b >\}$. Ponadto $Y \neq \emptyset$. Zatem istnieją skończone kresy zbioru Y. Oznaczmy $m = \inf Y = \inf_{x\in<a,b>} f(x)$ i $M = \sup Y = \sup_{x\in<a,b>} f(x)$. Pokażemy, że $\exists_{x_M \in<a,b>} f(x_m) = M$. Dowód tego, że $\exists_{x_m\in<a,b>} f(x_m) = m$ przebiega analogicznie.
   Dowód nie wprost: Zakładamy, że $\forall_{x\in<a,b>} f(x) \neq M$, więc $f(x) < M$ bo $M = \sup_{x\in<a,b>} f(x)$
   Zdefiniujmy funkcję $F :< a, b >\to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{M-f(x)}$. Funkcja ta jest dobrze zdefiniowana, bo mianownik się nie zeruje.
   $F :< a, b >\to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą $\overset{\text{tw. Weierstrassa I}}{\Longrightarrow}$ jest ograniczona, tzn. $\exists_{K>0}\forall_{x\in<a,b>} 0 < F(x) < K$ tzn $\exists_{K>0}\forall_{x\in<a,b>} 0 < \frac{1}{M-f(x)} < K \implies \exists_{K>0}\forall_{x\in<a,b>} M - f(x) > \frac{1}{K}$
   $\implies \exists_{K>0}\forall_{x\in<a,b>} f(x) < M - \frac{1}{K}$, co oznacza że M nie jest największym ograniczeniem Y, czyli $M \neq \sup_{x\in<a,b>} f(x)$ - sprzeczność

Jednostajna ciągłość funkcji

Do końca wykładu będziemy zakładać, że $D \subset \mathbb{R}$.

Przypomnienie:

Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest ciągła $\iff \forall_{a\in D}$funkcja f jest ciągła w $a \iff \forall_{a\in D}\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}|x-a| < \delta \implies |f(x)-f(a)| < \epsilon$ - δ może zależeć od a.

Jeśli δ nie zależy od a, tzn jest taka sama dla każdego a, to wtedy mówimy, że funkcja f jest jednostajnie ciągła, tzn spełnia warunek:

1. Def: Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła $\iff \forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{a\in D}\forall_{x\in D}|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$
   (a) Uwaga 7.1: Każda funkcja jednostajnie ciagła jest ciągła.
   (b) Przykłady:
      i. $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ nie jest jednostajnie ciągła
      Dowód nie wprost. Zakładamy, że f jest jednostajnie ciągła, czyli $\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{a\in D}\forall_{x\in D}|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$
      W szczególności dla $\epsilon = 1$ ptrzymujemy $\exists_{\delta>0}\forall_{x,y\in(0,\infty)}|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < 1$
      Weżmy $x_n = \frac{1}{n}, t_n = \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}$. Wtedy $|x_n - y_n| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Stąd dla dostatecznie dużego n mamy $|x_n - y_n| < \delta \implies |f(x_n) - f(y_n)| < 1$
      Z drugiej strony, $|f(x_n) - f(y_n)| = |n - n - 1| = 1$ - skąd sprzeczność.
      ii. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$, jest jednostajnie ciągła - $\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{a\in D}\forall_{x\in D}|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| = |\cos x - \cos a| = | - 2 \sin \frac{x-a}{2} \sin \frac{x+a}{2}| = 2|sin\frac{x-y}{2}||\sin \frac{x+y}{2}| \leq 2|\frac{x+y}{2}| \cdot 1 = |x - y| < \epsilon$
      Więc wystarczy wybrać $\delta = \epsilon$
2. Twierdzenie 7.4: (twierdzenie Cantora):
   Jeśli $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ jest ciągła, to jest jednostajnie ciągła.

   Dowód nie wprost: Zakładamy, że $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ jest ciągła ale nie jest jednostajnie ciągła. Wtedy $\exists_{\epsilon>0}\forall_{\delta>0}\exists_{a\in D}\exists_{x\in D}|x-y| < \delta\wedge|f(x)-f(y)| \geq \epsilon$. W szczególności biorąc $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy$\exists_{\epsilon>0}\forall_{n\in\mathbb{N}}\exists_{x_n,y_n\in<a,b>}|x_n-y_n| < \frac{1}{n}$ i $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$
   W ten sposób otrzymaliśmy dwa ciągi $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$. Ciąg $\{x_n\}$ jest ograniczony, bo $\forall_{n\in\mathbb{N}} x_n \in [a, b] \overset{\text{tw.Bolzano-Weierstrassa}}{\Longrightarrow} \{x_n\}$ zawiera podciąg zbieżny; oznaczmy $x_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0$
   Z twierdzenia o przechodzeniu do granicy w nierównościach, mamy $x_0 \in [a, b]$
   $\forall_{n\in\mathbb{N}}|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \implies \forall_{n\in\mathbb{N}} x_n - \frac{1}{n} < y_n < x_n + \frac{1}{n} \implies \forall_{k\in\mathbb{N}} x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < y_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k}$ lewa i prawa strona zbiegają do x_0, więc z tw o 3 ciągach $y_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0$

Z ciągłości funkcji f w punkcie x_0, $f(x_{n_k}) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$ i $f(y_{n_k}) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$
Stąd $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$,co jest sprzeczne z $\boldsymbol{\exists_{\epsilon>0}}\forall_{n\in\mathbb{N}}\exists_{x_n,y_n\in<a,b>}\boldsymbol{|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon}$, bo z drugiej strony $\exists_{\epsilon>0}\forall_{n\in\mathbb{N}}\exists_{x_n,y_n\in<a,b>}|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon \implies \exists_{\epsilon>0}\forall_{n\in\mathbb{N}}\exists_{x_n,y_n\in<a,b>}|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \epsilon$

3. Def: Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza na $D \iff \exists_{L>0}\forall_{x,y\in D}|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$
   Przykład: Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ spełnia warunek Lipschitza, bo już dzisiaj pokazaliśmy, że $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}|f(x)-f(y)| = |\cos x - \cos y| \leq |x-y|$, tzn istnieje L spełniające warunek Lipschitza $(L = 1)$

4. Twierdzenie 7.5: Jeśli $f : D \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza, to jest jednostajnie ciągła.
   Dowód: Niech $f : D \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza. Wtedy $\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{a\in D}\forall_{x\in D}|x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq L|x-y| < \epsilon$ $(\delta = \frac{\epsilon}{L})$, co oznacza, że f jest jednostajnie ciągła.