16.10.2019
Nierówność Bernoulliego: $\forall_{x>-1,n\in\mathbb{N}}(1+x)^n \geq 1+nx$

1. Twierdzenie 2.8: Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.
   (a) $\{a_n\}$ jest monotoniczny i ograniczony $\implies$ (nie $\impliedby$)$\{a_n\}$ zbieżny
   (b) Ciąg, który jest zbieżny, nie musi być monotoniczny. Na przykład $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Ciąg ten jest zbieżny z twierdzenia o trzech ciągach, bo $\forall_{n\in\mathbb{N}}\frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n} \implies \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0$. Ale ciąg ten nie jest monotoniczny, bo $a_1 = -1 < a_2 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2} > a_3 = \frac{-1}{3}$
2. Granice niewłaściwe
   (a) Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny do $+\infty$ (co zapisujemy $\lim_{n\to\infty} = +\infty$ lub $a_n \to +\infty$) $\iff \forall_{D>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}a_n > D$
   (b) Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny do $-\infty$ (co zapisujemy $\lim_{n\to\infty} = -\infty$ lub $a_n \to -\infty$) $\iff \forall_{D>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}a_n < -D$
   (c) Przykład:
      i. $\lim_{n\to\infty} n = \infty$,bo $\forall_{D>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N},n_0=\lceil D\rceil}\forall_{n\geq n_0}a_n > D$
3. Twierdzenie 2.9 (o dwóch ciągach): Jeśli $\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}a_n \leq b_n$ i $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, to $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$
   (a) Jeśli $\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}a_n \leq b_n$ i $\lim_{n\to\infty} b = -\infty$, to $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$
4. Twierdzenie 2.10:
   (a) Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, to $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$
   (b) Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ i ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony z dołu, to $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$
   (c) Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ i ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony z góry, to $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$
   (d) Przykład:
      i. Niech $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ oraz $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$. Co możemy powiedzieć o zbieżności ciągu $\{a_nb_n\}$?
      ii. Nic, bo na przykład $a_n = \frac{1}{n} \to 0$, $b_n = n \to \infty$, $a_nb_n = 1 \to 1$, ale dla $a_n = \frac{1}{n^2}$ $a_nb_n \to 0$, lub $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $a_nb_n \to \infty$
      iii. $[0 \cdot \infty]$ to symbol nieoznaczony
      iv. Inne symbole nieoznaczone:
         A. $[\infty - \infty]$
         B. $[\frac{0}{0}]$
         C. $[\frac{\infty}{\infty}]$
         D. $[\infty^0]$
         E. $[0^0]$
         F. $[1^\infty]$
      v. Ale dla $a \in \mathbb{R}$:
         A. $[a + \infty] = \infty$
         B. $[a \cdot \infty] = (\infty$ jeśli $a > 0$, $-\infty$ jeśli $a < 0)$
         C. $[\frac{a}{\infty}] = 0$ jeśli $a \in \mathbb{R}$
   (e) Twierdzenie 2.11:
      i. $|a| < 1 \implies \lim_{n\to\infty} |a|^n = 0$

D:	1. przypadek: $a = 0$. Wtedy $\lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} 0^n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$
2.:	$a \neq 0$. Wtedy $\frac{1}{\lvert a\rvert} > 1$ więc istnieje $\delta > 0$ taka, że $\frac{1}{\lvert a\rvert} = 1 + \delta$
:	$\frac{1}{\lvert a\rvert^n} = (\frac{1}{\lvert n\rvert})^n = (1+\delta)^n \geq^{nier.Bern} 1 + n\delta \geq n\delta$
:	$\forall_{n\in\mathbb{N}}0 \leq \lvert a\rvert^n \leq \frac{1}{n\delta} \implies^{tw. o\, 3\, ciągach} \lim_{n\to\infty} \lvert a\rvert = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \lvert a^n\rvert = 0 \implies^{uwaga\, 2.1} \lim_{n\to\infty} a^n = 0$

      ii. $a > 0 \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

D:	1.przypadek: $a = 1$. Wtedy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$
:	2. przypadek: $a > 1$. Wtedy $\forall_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{a} > 1$
:	$a = (\sqrt[n]{a})^n = (1 + \sqrt[n]{a} - 1)^n \geq^{n.Bern} 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1)$
:	$\forall_{n\in\mathbb{N}}a \geq 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1)$
:	$\forall_{n\in\mathbb{N}}\frac{a-1}{n} \geq \sqrt[n]{a} - 1$
:	$\forall_{n\in\mathbb{N}}\frac{a-1}{n} + 1 \geq \sqrt[n]{a} \geq 1 \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

: 3. przypadek: $a \in (0,1)$. Wtedy $\frac{1}{a} > 1 \implies^{przpadek\,2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$

: stąd $1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$ oraz $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}} = 1$

iii. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(f) $\forall_{a,b\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}} (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

5. Liczba e

(a) Rozważmy ciąg Eulera $e_n = (1+\frac{1}{n})^n$. Pokażemy, że $\{e_n\}$ jest rosnący i ograniczony z góry, zatem zbieżny. Liczba e to granica tego ciągu $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \approx 2,71828$

(b) Twierdzenie 2.12: Ciąg Eulera jest rosnący i ograniczony z góry, więc zbieżny.

D: Najpierw pokażemy, że $\{e_n\}$ jest rosnący

: $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{(\frac{n+2}{n+1})^n \cdot (\frac{n+2}{n+1})}{(\frac{n+1}{n})^n} = (\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}})^n \cdot \frac{n+2}{n+1} = (\frac{n(n+2)}{(n+1)^2})^n \cdot \frac{n+2}{n+1} = (\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1})^n \cdot \frac{n+2}{n+1} = (1+\frac{-1}{n^2+2n+1})^n \cdot \frac{n+2}{n+1} \geq^{n.Bern} (1-\frac{n}{n^2+2n+1})\frac{n+2}{n+1} = \frac{n^2+2n+1-n}{n^2+2n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{(n^2+n+1)(n+2)}{(n+1)\cdot(n+1)} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1$

: Zatem $\forall_{n\in\mathbb{N}} \frac{e_{n+1}}{e_n} > 1 \implies^{e_n>0} \forall_{n\in\mathbb{N}} e_{n+1} > e_n$ czyli $\{e_n\}$ jest rosnący

: Teraz pokażemy, że $\{e_n\}$ jest ograniczony z góry.

: $e_n = (1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} =^{n\geq 2} 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdot\dots\cdot n}{k!\cdot n^k} < 2+\sum_{k=2}^{n} \frac{n^k}{k!\cdot n^k} = 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} = 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot k} = 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^{n-2}}{1-\frac{1}{2}} < 2+1 = 3$

: $\forall_{n\geq 2} e_n > 3$ i $e_1 = 2 \implies \forall_{n\in\mathbb{N}} e_n < 3$, czyli ciąg $\{e_n\}$ jest ograniczony z góry

(c) Def. Liczba e to granica ciągu Eulera: $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

i. Pokazaliśmy, że $\forall_{n\in\mathbb{N}} e_n < 3 \implies e = \lim_{n\to\infty} e_n \leq 3$

ii. Pokazaliśmy, że $\{e_n\}$jest rosnący $\implies \forall_{n\in\mathbb{N}} e_n \geq e_1 = 2 \implies e = \lim_{n\to\infty} e_n \geq 2$

iii. Więc $2 \leq e \leq 3$

iv. Uwaga: to jest przykład na to, że $[1^\infty]$ to symbol nieoznaczony, bo $a_n = 1+\frac{1}{n} \to 1$, $b_n = n \to \infty \implies a_n^{b_n} = (1+\frac{1}{n})^n \to e$

A. $a_n = 1+\frac{1}{n} \to 1$, $b_n = 2n \to \infty \implies a_n^{b_n} = (1+\frac{1}{n})^{2n} \to 2e$

6. Podciągi

(a) Def. Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$będzie ciągiem, zaś $n_1, n_2, n_3, \dots$ liczbami naturalnymi, takimi, że $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$Wtedy ciąg $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ o wyrazach $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$nazywamy podciągiem ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

i. Przykład: $a_n = \frac{1}{n}$,wyrazy tego ciągu: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \dots$

: $b_n = \frac{1}{n^2}$, wyrazy tego ciągu: $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots$ Ciąg $\{b_n\}$to podciąg ciągu $\{a_n\} : b_k = a_{k^2}$

: $c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, wyrazy tego ciągu: $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \dots$ Ciąg $\{c_n\}$nie jest podciągiem $\{a_n\}$(ale $\{a_n\}$ jest podciągiem $\{c_n\}$)

(b) Twierdzenie 2.13: Każdy podciąg ciągu zbieżnego do g też zbiega do g:

i. $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ i $\{a_{n_k}\}$ jest podciągiem ciągu $\{a_n\} \implies \lim_{n\to\infty} a_{n_k} = g$

ii. Wniosek: Jeśli ciąg $\{a_n\}$ zawiera co najmniej dwa podciągi zbieżne do różnych granic, to nie jest zbieżny

iii. Przykład: Ciąg $a_n = (-1)^n$ nie jest zbieżny, bo $\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n} = 1$ oraz $\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n+1} = -1$, oba są podciągami $\{a_n\}$ i są zbieżne do innych granic, więc a_n nie jest zbieżny

iv. Przykład: $\lim_{n\to\infty}(\frac{2n+3}{2n+2})^{4n-3}(= [1^\infty]) = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n+2})^{4n-3} = \lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^{2m-7} = \frac{(\lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^m)^2}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^7} = \frac{e^2}{1} = e^2$

(c) Twierdzenie 2.14: (Bolzano-Weierstrassa)

i. Każdy ciąg ograniczony zawiera podciąg zbieżny.

(d) Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest ciągiem Cauchyego (podstawowym) $\iff \forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n,m\geq n_0}|a_n - a_m| < \epsilon$

(e) Twierdzenie 2.15 (warunek równoważny zbieżności ciągu)

i. Ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny $\iff$ $\{a_n\}$ jest ciągiem Cauchyego

D $\implies$ Zakładamy, że $\{a_n\}$ jest zbieżny, tzn. $\exists_{g\in\mathbb{R}}\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|a_n - g| < \frac{\epsilon}{2}$

: Pokażemy, że $\{a_n\}$jest ciągiem Cauchyego, tzn $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n,m\geq n_0}|a_n - a_m| < \epsilon$

: $|a_n - a_m| = |a_n - g + (-a_n + g)| \leq |a_n - g| + |a_m - g| <^{n,m\geq n_0} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

: Zatem pokazaliśmy, że $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_1\in\mathbb{N},n_1=n_0}\forall_{n,m\geq n_1}|a_n - a_m| \leq \epsilon$

$\Longleftarrow$ pomijamy bo długi dowód

i. Przykład: Ciąg $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ nie jest zbieżny, bo nie jest ciągiem Cauchyego.

: $\neg(\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n,m\geq n_0}|a_n - a_m| < \epsilon)$

: Chcemy pokazać, że $\exists_{\epsilon>0}\forall_{n_0\in\mathbb{N}}\exists_{n,m\geq n_0}|a_n - a_m| \geq \epsilon$

: $|a_{2n}-a_n| = |1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n}| = |\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}| = \frac{1}{n+1}+\ldots\frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n}+\ldots\frac{1}{2n} = n\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

: Zatem pokazaliśmy, że $\exists_{\epsilon>0}\forall_{n_0\in\mathbb{N}}\exists_{n,m\geq n_0}|a_n - a_m| \geq \epsilon$ - zachodzi dla $\epsilon = \frac{1}{2}$, $n = 2n_0$, $m = n_0$