02.10.2019
Dr hab. Anna Dembińska
mini.pw.edu.pl/~dembinsk
3 kolokwia 3 kartkowki
45+ punktów - zwolnienie z egzaminu (cz. zadaniowa)
Literatura:

1. Dembińska, Karpińska, Kotus - Analiza matematyczna I dla studentów informatyki PW
2. Gewert , Skoczylas - Analiza matematyczna I /Definicje twierdzenia wzory / Przykłady i zadania / Kolokwia i egzaminy GIS
3. Leja - Rachunek różniczkowy i całkowy PWN

OZNACZENIA

1. $N$ :=$1, 2, 3...$
2. $N_0$ :=$0, 1, 2, 3...$
3. $\mathbb{Z} := ... - 1, 0, 1, ...$
4. $\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n}$ gdzie $n \in N$, m $\in Z\}$
5. $\mathbb{R}$ := rzeczywiste
6. $\forall$ - dla każdego - $\forall_{x \in R} x^2 \geq 0$
7. $\exists$- istnieje
8. $\iff$ - wtedy i tylko wtedy
9. $(a, b] := \{x \in \mathbb{R}$ : a<x $\leq b\}$
10. $[x]$ - część całkowita x : $x - 1 < [x] \leq x$, $[7\frac{1}{3}]$= 7, $[-2\frac{1}{3}] = -3$

LICZBY RZECZYWISTE I ICH PODZBIORY.

1. Def. Zbiór $\mathbb{R}$, dwa wyróżnione w nim elementy 0 i 1, relacja $<$ oraz dwa działania $+ \times$ to tak zwane pojęcia pierwotne, które przyjmujemy bez definicji. Ponadto przyjmujemy bez dowodu, że te pojęcia pierwotne mają pewne własności zwane aksjomatami (lub pewnikami)
2. Def. Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z dołu $\iff \exists_{m \in \mathbb{R}} \forall_{a \in A} a \geq m$ Wtedy m nazywamy ograniczeniem dolnym zbioru A
   (a) Zbiór A$\subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry $\iff \exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{a \in A} a \leq M$ Wtedy M nazywamy ograniczeniem górnym zbioru
   (b) Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony $\iff$ jest ograniczony z góry i z dołu $\iff \exists_{m,M \in \mathbb{R}} \forall_{a \in A} m \leq a \leq M \iff \exists_{K \in \mathbb{R}} \forall_{a \in A} |a| \leq K$. Przykład: $A = (-1, 2]$- przykładowe ograniczenia dolne - $\{-10, -1.5, -1\}$,ograniczenia górne - $\{3, 100, 2\} \implies$ zbiór A jest ograniczony
3. Def. Niech $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z dołu. Wtedy kresem dolnym zbioru A (oznaczanym inf A) nazywamy największe ograniczenie dolne zbioru A
   (a) To znaczy $infA = \alpha \iff (\forall_{a \in A} a \geq \alpha$ ($\alpha$ jest ograniczeniem dolnym) oraz $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{a_0 \in A} a_0 < \alpha + \epsilon$
4. Def. Niech $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z góry. Wtedy kresem górnym zbioru A (oznaczamy supA) nazywamy najmniejsze ograniczenie górne zbioru A.
   (a) supA= $\beta \iff (\forall_{a \in A} a \leq \beta$ oraz $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{a_0 \in A} a_0 > \beta - \epsilon)$
5. Jeśli zbiór A nie jest ograniczony z dołu, to infA $= -\infty$, jeśli nie jest ograniczony z góry, to supA= $+\infty$
   (a) $\inf(\emptyset) = +\infty$, $\sup(\emptyset) = -\infty$
   (b) Przykład: $A = (-1, 2]$
      i. $\inf(A) = -1$
      ii. $\sup(A) = 2$
6. Aksjomat ciągłości - Każdy zbiór $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ ograniczony z dołu/góry ma skonczony kres dolny/górny $\in \mathbb{R}$
   (a) dla $\mathbb{Q}$ tego nie ma: $B = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2$ i $q > 0\}$ kres górny to $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

(b) Twierdzenie: jeśli $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$ to

i. inf A $\geq$ inf B

A. Dowód: Jeśli B nie jest ograniczony z dołu, to inf B $= -\infty$,więc i. jest spełniona

B. Jeśli B jest ograniczony z dołu, to z aksojomatu ciagłości B ma skończony kres dolny. Ponadto A też jest ograniczony z dołu, więc też ma skończony kres dolny. Oznaczmy inf A$= \alpha$ i inf B $= \beta$. Wtedy mamy :

$\forall_{a \in A} a \geq \alpha$

$\forall_{\epsilon > 0} \exists_{a_0 \in A} a_0 < \alpha + \epsilon$

$\forall_{b \in B} b \geq \beta$

$\forall_{\epsilon > 0} \exists_{b_0 \in B} b_0 < \beta + \epsilon$

Chcemy pokazać że $\alpha \geq \beta$

$A \subset B \implies (a \in A \implies a \in B) \implies \alpha \geq \beta$, czyli $\beta$ jest ograniczeniem dolnym zbioru A

ii. sup A $\leq$sup B

A. Dowodzimy analogicznie

7. LICZBY NATURALNE I ZASADA INDUKCJI MATEMATYCZNEJ

(a) Zdefiniowaliśmy $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$.Definicja ta nie jest matematycznie precyzyjna, bo nie zdefiniowaliśmy "...". Podamy definicję liczb naturalnych odwołującą się jedynie do pojęć pierwotnych i do pojęć zdefiniowanych wcześniej. Def. Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ nazywamy induktywnym jeśli spełnia następujące dwa warunki

i. $1 \in A$

ii. $\forall_{a \in A} a + 1 \in A$

A. $[1, \infty)$

B. $\mathbb{R}$

C. $\mathbb{Q}$

D. $\mathbb{N}$

iii. Def. Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ to zbiór zawarty w każdym zbiorze induktywnym tzn. $\mathbb{N} = \cap_{A \in I} A$ gdzie I to rodzina wszystkich zbiorów induktywnych

(b) Twierdzenie - Zasada indukcji matematycznej

i. Jeśli $A \subset \mathbb{N}$ spełnia warunki

$1 \in A$

$\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \implies n + 1 \in A)$

ii. to $A = \mathbb{N}$

iii. Zbiór A jest induktywny, bo $1 \in A$ oraz $\forall_{n \in A} n + 1 \in A$ Zatem $\mathbb{N} \subset A$

iv. Skoro $A \subset \mathbb{N}$ oraz $\mathbb{N} \subset A$ to $A = \mathbb{N}$

(c) Przykład - dowód tego, że $\forall_{n \in \mathbb{N}} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$ (**)

i. Niech $A = \{n \in \mathbb{N} : 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}\}$

ii. Potrzebujemy pokazać,że $1 \in A$ oraz, że $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \implies n + 1 \in A)$ To znaczy,że

A. Dla n=1 wzór (**) jest spełniony $(1 + 1 \geq \sqrt{1})$

B. Zakładamy,że wzór (**) jest prawdziwy dla n i dowodzimy jego prawdziwości dla n+1

Zakładamy, że $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$. Chcemy pokazać,że $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$

$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq^{zal.ind.} \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n^2+n}+1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{\sqrt{n^2}+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}$ co kończy dowód.

(d) Twierdzenie:

i. Zbiór $\mathbb{N}$ nie jest ograniczony z góry

A. Dowód nie wprost. Zakładamy,że zbiór $\mathbb{N}$ jest ograniczony z góry. Wtedy $\exists_{M \in \mathbb{N}} \forall_{n \in \mathbb{N}} n \leq M \implies n + 1 \leq M \implies n \leq M - 1 \implies M - 1$ też jest ograniczeniem górnym $\implies$ zbiór $\mathbb{N}$ nie ma najmniejszego ograniczenia górnego. Z drugiej strony. $\mathbb{N}$ jako zbiór niepusty i ograniczony z góry ma kres górny, czyli najmniejsze ograniczenie górne. Skoro założenie implikuje sprzeczność to założenie jest nieprawdziwe więc zbiór $\mathbb{N}$ nie jest ograniczony z góry

ii. Zbiór $\mathbb{Q}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$,to znaczy $\forall_{x,y \in \mathbb{R}, x<y} \exists_{q \in \mathbb{Q}} x < q < y$ (pomiędzy dowolnymi dwoma rzeczywistymi istnieje liczba wymierna)

iii. Zbiór $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (zbiór liczb niewymiernych) jest gęsty w $\mathbb{R}$, to znaczy $\forall_{x,y \in \mathbb{R}, x<y} \exists_{z \notin \mathbb{Q}} x < z < y$

(e) Dowód indukcyjny tego, że wszystkie koty są tego samego koloru. Indukcja e względu na n-liczba kotów.

i. Dla n=1 OK

ii. Zakładamy że fakt jest prawdziwy dla n, i dowodzimy dla n+1

09.10.2019
CIĄGI LICZBOWE
Ważne: $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}|x+y|\leq|x|+|y|$ oraz $||x|-|y||\leq|x-y|$

1. Def. Ciągiem $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ lub $\{a_n\}_{n\geq 1}$lub $\{a_n\}$ nazywamy funkcję $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. Ponadto $a_n$ nazywamy n-tym wyrazem ciągu
   (a) Przykłady:
      i. $a_n=\sqrt[n]{n}$
         ^ ciąg zdefiniowany przez podanie wzoru na n-ty wyraz tego ciągu
         A. $1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3}$ itp
      ii. $b_1=1$
         $b_2=1$
         $b_{n+1}=b_n+b_{n-1}, n\geq 2$
         ^ ciąg zdefiniowany rekurencyjnie
         A. Pierwsze wyrazy ciągu - $1,1,2,3,5,8,13,21,...$ Fibonacci
2. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony z dołu $\iff \exists_{m\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}a_n\geq m$
3. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony z góry $\iff \exists_{M\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}a_n\leq M$
4. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony $\iff (\exists_{m\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}a_n\geq m)\wedge(\exists_{M\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}a_n\leq M)$ czyli $\exists_{K\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}|a_n|\leq K$
   (a) Przykład:
      i. Ciąg $a_n=\frac{1}{n}$ jest ograniczony z dołu, bo $\exists_{m\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}a_n\geq m$ $(m=0)$
      ii. Ciąg $a_n=\frac{1}{n}$ jest ograniczony z dołu, bo $\exists_{M\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}a_n\leq M$ $(m=1)$
      iii. Skoro ciąg jest ograniczony z góry i z dołu to możemy powiedzieć że ciąg ten jest ograniczony
5. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący $\iff \forall_{n\in\mathbb{N}}a_{n+1}>a_n \overset{\forall_{n\in\mathbb{N}}a_n>0}{\iff}\forall_{n\in\mathbb{N}}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$
6. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest niemalejący $\iff \forall_{n\in\mathbb{N}}a_{n+1}\geq a_n \overset{\forall_{n\in\mathbb{N}}a_n>0}{\iff}\forall_{n\in\mathbb{N}}\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$
7. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest malejący $\iff \forall_{n\in\mathbb{N}}a_{n+1}<a_n \overset{\forall_{n\in\mathbb{N}}a_n>0}{\iff}\forall_{n\in\mathbb{N}}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$
8. Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest nierosnący $\iff \forall_{n\in\mathbb{N}}a_{n+1}\leq a_n \overset{\forall_{n\in\mathbb{N}}a_n>0}{\iff}\forall_{n\in\mathbb{N}}\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq 1$
   (a) Ciągi rosnące,niemalejące,malejące i nierosnące nazywamy monotonicznymi
      i. np $a_n=\frac{(-1)^n}{n}\to a_1-1<a_2=\frac{1}{2}>a_3=-\frac{1}{3}$
      ii. $b_n=\frac{n}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$
         A. Ze wzrostem n, n+1 rośnie, więc $\frac{1}{n+1}$ maleje, więc $1-\frac{1}{n+1}$ rośnie
         B. Zatem ciąg $b_n$ jest rosnący
9. Def. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do granicy $g\in\mathbb{R}\iff\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|a_n-g|<\epsilon$
   (a) Dla dowolnie małego $\epsilon>0$ dla wyrazów ciągu o dostatecznie dużych wartościach, odległość pomiędzy dowolnym wyrazem ciągu spełniającym warunki a $g$ jest mniejsza od $\epsilon$
   (b) Wtedy $g$ nazywamy granicą i zapisujemy $\lim_{n\to\infty}a_n=g$ lub $a_n\to g$
      i. Przykład: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ bo $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|\frac{1}{n}-0|<\epsilon$
         $\frac{1}{n}<\epsilon$
         $\frac{1}{\epsilon}<n\longrightarrow n_0=\lceil\frac{1}{\epsilon}\rceil$
10. Def. Jeśli ciąg $\{a_n\}$ nie jest zbieżny to nazywamy go rozbieżnym;
11. Twierdzenie 2.1: Każdy ciąg stały jest zbieżny: $\forall_{n\in\mathbb{N}}a_n=a\implies\lim_{n\to\infty}a_n=a$
   (a) Dowód: $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|a_n-a|<\epsilon$. Ponieważ $\forall_{n_0\in\mathbb{N}}a_n-a=0$, to zawsze $0<\epsilon$
12. Twierdzenie 2.2: Ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę
   (a) Dowód: Zakładamy, że $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ oraz $\lim_{n\to\infty}b$ i $a\neq b$
   (b) Niech $\epsilon=\frac{1}{2}|a-b|$. Wtedy $\epsilon>0$ bo $a\neq b$
   (c) Z założenia $\lim_{n\to\infty}a_n=a\implies\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_1\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_1}|a_n-a|<\epsilon$ oraz $\lim_{n\to\infty}a_n=b\implies\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_2\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_2}|a_n-b|<\epsilon$

(d) Ponieważ $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}|x+y| \leq |x|+|y|$, to $2\epsilon = |a-b| = |a-a_n+a_n-b| \leq |a-a_n|+|a_n-b| = |a_n-a|+|a_n-b| <^{n\geq n_1, n\geq n_2} \epsilon+\epsilon = 2\epsilon$

(e) Otrzymaliśmy $2\epsilon > 2\epsilon$ oraz $\epsilon > 0 \implies 2 > 2$ sprzeczność

13. Twierdzenie 2.3: Jeśli ciąg jest zbieżny, to jest ograniczony.

    (a) Dowód: Niech $\lim_{n\to\infty} a_n = g$,tzn $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_1\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|a_n-g| < \epsilon$

    (b) W szczególności dla $\epsilon = 1$ otrzymujemy $\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|a_n-g| < 1$,czyli $-1 < a_n-g < 1$, czyli $\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0} g-1 < a_n < g+1$

    (c) Stąd $\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n \leq max\{g+1, a_1, a_2, ..., a_{n_0-1}\} \implies \{a_n\}$ jest ograniczony z góry

    (d) $\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n \geq min\{g-1, a_1, a_2, ..., a_{n_0-1}\} \implies \{a_n\}$ jest ograniczony z dołu

    (e) Zatem $\{a_n\}$jest ograniczony.

    (f) UWAGA: $\{a_n\}$ jest zbieżny $\implies \{a_n\}$ jest ograniczony

        i. NIE DZIAŁA W DRUGĄ STRONĘ

        ii. np $a_n = (-1)^n$ daje nam $-1, 1, -1, 1$ - ciąg jest ograniczony, ale nie jest zbieżny

14. Twierdzenie 2.4 (o ciągłości działań arytmetycznych): Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oraz $\lim_{n\to\infty} b = b$, to

    (a) Dowód: Wiemy, że $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_1\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_1}|a_n-a| < \frac{\epsilon}{2}$ oraz $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_2\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_2}|b_n-b| < \frac{\epsilon}{2}$

        i. Chcemy pokazać, że $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|a_n+b_n-(a+b)| < \epsilon$

        ii. $|a_n+b_n-a-b| = |a_n-a+b_n-b| \leq |a_n-a|+|b_n-b| <^{n\geq n_1, n\geq n_2} \dfrac{\epsilon}{2}$

        iii. $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|a_n+b_n-(a+b)| < \epsilon$ jeśli $n_0 = max(n_1, n_2)$

    (b) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = a-b$

        i. Ciąg pomocniczy $\forall_{n\in\mathbb{N}} c_n = -b_n$,wtedy wystarczy pokazać że $c_n \to -b$, i leci pierwszy dowód

    (c) $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = ab$

        i. Dowód: Skoro z $\{a_n\}$ jest zbieżny, to z twierdzenia 2.3 jest ograniczony, tzn $\exists_{K\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}|a_n| \leq K$ (dodatkowo, $K \neq 0$)

        ii. Wiemy to samo co w dowodzie z (a).

        iii. Chcemy pokazać, że $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|a_nb_n-ab| < \epsilon$

        iv. $|a_nb_n-ab| = |a_nb_n-a_nb+a_nb-ab| = |a_n(b_n-b)+b(a_n-a)| \leq |a_n(b_n-b)|+|b(a_n-a)| = |a_n||b_n-b|+|b||a_n-a| \leq K|b_n-b|+|b||a_n-a|$

        v. $\lim_{n\to\infty} b_n = b \iff \forall_{\epsilon>0}\exists_{n_2\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_2}|b_n-b| < \dfrac{\epsilon}{2K}$

        vi. $\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall_{\epsilon>0}\exists_{n_1\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_1}|a_n-a| < \dfrac{\epsilon}{2(|b|+1)}$

        vii. $K|b_n-b|+|b||a_n-a| \leq K|b_n-b|+(|b|+1)|a_n-a|$

        viii. Stąd $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|a_nb_n-ab| < \epsilon$ - $n_0 = max(n_1, n_2)$

    (d) $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$ jeśli $b \neq 0$ i $\forall_{n\in\mathbb{N}} b_n \neq 0$

    (e) Przykład:

        i. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{4n^2-n+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n^2}}{4-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+3\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{4-\frac{1}{n}+5\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}} = \frac{1+3\cdot0\cdot0}{4-0+5\cdot0\cdot0} = \frac{1}{4}$

15. Twierdzenie 2.5 (o ciągłości wartości bezwzględnej): Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, to $\lim_{n\to\infty}|a_n| = |a|$

    (a) Dowód: Wiemy, że $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_1\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_1}|a_n-a| < \epsilon$

    (b) Chcemy pokazać, że $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}||a_n|-|a|| < \epsilon$

    (c) Mamy $||a_n|-|a|| \leq |a_n-a|$

    (d) Stąd $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}||a_n|-|a|| \leq |a_n-a| < \epsilon$

    (e) Uwaga 2.1: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$

        i. $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|a_n-0| < \epsilon$ z lewej strony oraz

        ii. $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}||a_n|-0| < \epsilon$z prawej strony. $|x| = ||x||$,więc strony są równoważne

16. Twierdzenie 2.6 (o przechodzeniu do granicy w nierównościach): Jeśli $\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0} a_n \leq b_n$ i $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ to $a \leq b$

    (a) Uwaga 2.2: Twierdzenie 2.6 **nie** będzie prawdziwe jeśli $\leq$ zamienimy na $<$

        i. np $a_n = \frac{1}{n^2}, b_n = \frac{1}{n}$

ii. $\forall_{n\geq 2} a_n < b_n$ ale $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n$

17. Twierdzenie 2.7 (o trzech ciągach): Jeśli $\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0} a_n \leq b_n \leq c_n$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$, to $\lim_{n\to\infty} b_n = g$
    (a) Dowód: Chcemy pokazać, że $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_3\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_3}|b_n - g| < \epsilon \iff \forall_{\epsilon>0}\exists_{n_3\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_3} - \epsilon < b_n - g < \epsilon$
    (b) Wiemy, że $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_1\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_1}|a_n - g| < \epsilon \iff \forall_{\epsilon>0}\exists_{n_1\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_1}\epsilon < a_n - g < \epsilon$ oraz $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_2\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_2}\epsilon < c_n - g < \epsilon$
    (c) $(n \geq n_2 \wedge n \geq n_0) \implies b_n - g \leq c_n - g < \epsilon$
    (d) $(n \geq n_1 \wedge n \geq n_0) \implies b_n - g \geq a_n - g > -\epsilon$
    (e) Zatem pokazaliśmy, że $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0} - \epsilon < b_n - g < \epsilon$ $(n_3 = max(n_0, n_1, n_2))$
    (f) Wniosek z twierdzenia o trzech ciągach: Jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony i $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, to $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$
        i. Na mocy uwagi 2.1 wystarczy pokazać, że $\lim_{n\to\infty} |a_n b_n| = 0$
        ii. Z założenia $\exists_{K\in\mathbb{R}}\forall_{n\in\mathbb{N}}|a_n| \leq K$
        iii. $\forall_{n\in\mathbb{N}} 0 \leq |a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq K \cdot |b_n|$, $K \cdot |b_n| \to 0$, więc z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy $\lim_{n\to\infty} |a_n b_n| = 0$

18. Twierdzenie 2.8: Jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest niemalejący i ograniczony z góry, to jest zbieżny

19. Twierdzenie 2.8.1: Jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest nierosnący i ograniczony z dołu, to jest zbieżny

20. 2.8 oraz 2.8.1 razem: Jeśli ciąg jest monotoniczny i ograniczony, to jest zbieżny

21. Twierdzenie 2.11 (z przyszłości):
    (a) $|a| < 1 \implies \lim_{n\to\infty} |a|^n = 0$
    (b) $a > 0 \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$
    (c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

22. def. $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$ jest rosnące, jeśli $\forall_{x_1,x_2\in A} : (x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2))$

23. def $f : A \to \mathbb{R}$ jest funkcją okresową jeśli $\exists_{r\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\forall_{a\in A} x + r \in A \wedge x - r \in A \wedge f(a) = f(a + r)$

16.10.2019
Nierówność Bernoulliego: $\forall_{x>-1, n\in\mathbb{N}}(1+x)^n \geq 1+nx$

1. Twierdzenie 2.8: Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.
   (a) $\{a_n\}$ jest monotoniczny i ograniczony $\implies$ (nie $\impliedby$ )$\{a_n\}$ zbieżny
   (b) Ciąg, który jest zbieżny, nie musi być monotoniczny. Na przykład $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Ciąg ten jest zbieżny z twierdzenia o trzech ciągach, bo $\forall_{n\in\mathbb{N}} \frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n} \implies \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. Ale ciąg ten nie jest monotoniczny, bo $a_1 = -1 < a_2 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2} > a_3 = \frac{-1}{3}$
2. Granice niewłaściwe
   (a) Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny do $+\infty$ (co zapisujemy $\lim_{n\to\infty} = +\infty$ lub $a_n \to +\infty$) $\iff \forall_{D>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0} a_n > D$
   (b) Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny do $-\infty$ (co zapisujemy $\lim_{n\to\infty} = -\infty$ lub $a_n \to -\infty$) $\iff \forall_{D>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0} a_n < -D$
   (c) Przykład:
      i. $\lim_{n\to\infty} n = \infty$,bo $\forall_{D>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}, n_0=\lceil D\rceil}\forall_{n\geq n_0} a_n > D$
3. Twierdzenie 2.9 ( o dwóch ciągach): Jeśli $\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0} a_n \leq b_n$ i $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, to $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$
   (a) Jeśli $\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0} a_n \leq b_n$ i $\lim_{n\to\infty} b = -\infty$, to $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$
4. Twierdzenie 2.10:
   (a) Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, to $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$
   (b) Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ i ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony z dołu, to $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$
   (c) Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ i ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony z góry, to $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$
   (d) Przykład:
      i. Niech $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ oraz $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$. Co możemy powiedzieć o zbieżności ciągu $\{a_n b_n\}$?
      ii. Nic, bo na przykład $a_n = \frac{1}{n} \to 0$, $b_n = n \to \infty$, $a_n b_n = 1 \to 1$, ale dla $a_n = \frac{1}{n^2}$ $a_n b_n \to 0$, lub $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $a_n b_n \to \infty$
      iii. $[0\cdot\infty]$ to symbol nieoznaczony
      iv. Inne symbole nieoznaczone:
         A. $[\infty - \infty]$
         B. $[\frac{0}{0}]$
         C. $[\frac{\infty}{\infty}]$
         D. $[\infty^0]$
         E. $[0^0]$
         F. $[1^\infty]$
      v. Ale dla $a \in \mathbb{R}$ :
         A. $[a + \infty] = \infty$
         B. $[a \cdot \infty] = (\infty$ jeśli $a > 0$, $-\infty$ jeśli $a < 0)$
         C. $[\frac{a}{\infty}] = 0$ jeśli $a \in \mathbb{R}$
   (e) Twierdzenie 2.11:
      i. $|a| < 1 \implies \lim_{n\to\infty} |a|^n = 0$
         D: 1. przypadek: $a = 0$. Wtedy $\lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} 0^n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$
         2.: $a \neq 0$. Wtedy $\frac{1}{|a|} > 1$ więc istnieje $\delta > 0$ taka, że $\frac{1}{|a|} = 1 + \delta$
         : $\frac{1}{|a|^n} = (\frac{1}{|n|})^n = (1+\delta)^n \geq^{nier.Bern} 1 + n\delta \geq n\delta$
         : $\forall_{n\in\mathbb{N}} 0 \leq |a|^n \leq \frac{1}{n\delta} \implies^{tw.o\,3\,ciągach} \lim_{n\to\infty} |a| = 0 \implies \lim_{n\to\infty} |a^n| = 0 \implies^{uwaga\,2.1} \lim_{n\to\infty} a^n = 0$
      ii. $a > 0 \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$
         D: 1.przypadek: $a = 1$. Wtedy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$
         : 2. przypadek: $a > 1$. Wtedy $\forall_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{a} > 1$
         : $a = (\sqrt[n]{a})^n = (1 + \sqrt[n]{a} - 1)^n \geq^{n.Bern} 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1)$
         : $\forall_{n\in\mathbb{N}} a \geq 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1)$
         : $\forall_{n\in\mathbb{N}} \frac{a-1}{n} \geq \sqrt[n]{a} - 1$
         : $\forall_{n\in\mathbb{N}} \frac{a-1}{n} + 1 \geq \sqrt[n]{a} \geq 1 \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

: 3. przypadek: $a \in (0,1)$. Wtedy $\frac{1}{a} > 1 \implies^{przpadek\,2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$

: stąd $1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$ oraz $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}} = 1$

iii. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(f) $\forall_{a,b\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}}(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

5. Liczba $e$

(a) Rozważmy ciąg Eulera $e_n = (1+\frac{1}{n})^n$. Pokażemy, że $\{e_n\}$ jest rosnący i ograniczony z góry, zatem zbieżny. Liczba $e$ to granica tego ciągu $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \approx 2,71828$

(b) Twierdzenie 2.12: Ciąg Eulera jest rosnący i ograniczony z góry, więc zbieżny.

D: Najpierw pokażemy, że $\{e_n\}$ jest rosnący

: $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{(\frac{n+2}{n+1})^n \cdot (\frac{n+2}{n+1})}{(\frac{n+1}{n})^n} = (\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}})^n \cdot \frac{n+2}{n+1} = (\frac{n(n+2)}{(n+1)^2})^n \cdot \frac{n+2}{n+1} = (\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1})^n \cdot \frac{n+2}{n+1} = (1+\frac{-1}{n^2+2n+1})^n \cdot \frac{n+2}{n+1} \geq^{n.Bern} (1-\frac{n}{n^2+2n+1})\frac{n+2}{n+1} = \frac{n^2+2n+1-n}{n^2+2n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{(n^2+n+1)(n+2)}{(n+1)\cdot(n+1)} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1$

: Zatem $\forall_{n\in\mathbb{N}} \frac{e_{n+1}}{e_n} > 1 \implies^{e_n>0} \forall_{n\in\mathbb{N}} e_{n+1} > e_n$ czyli $\{e_n\}$ jest rosnący

: Teraz pokażemy, że $\{e_n\}$ jest ograniczony z góry.

: $e_n = (1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} =^{n\geq 2} 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdot\dots\cdot n}{k!\cdot n^k} < 2+\sum_{k=2}^{n} \frac{n^k}{k!\cdot n^k} = 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} = 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot k} = 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^{n-2}}{1-\frac{1}{2}} < 2+1 = 3$

: $\forall_{n\geq 2} e_n > 3$ i $e_1 = 2 \implies \forall_{n\in\mathbb{N}} e_n < 3$, czyli ciąg $\{e_n\}$ jest ograniczony z góry

(c) Def. Liczba $e$ to granica ciągu Eulera: $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

i. Pokazaliśmy, że $\forall_{n\in\mathbb{N}} e_n < 3 \implies e = \lim_{n\to\infty} e_n \leq 3$

ii. Pokazaliśmy, że $\{e_n\}$jest rosnący $\implies \forall_{n\in\mathbb{N}} e_n \geq e_1 = 2 \implies e = \lim_{n\to\infty} e_n \geq 2$

iii. Więc $2 \leq e \leq 3$

iv. Uwaga: to jest przykład na to, że $[1^\infty]$ to symbol nieoznaczony, bo $a_n = 1+\frac{1}{n} \to 1$, $b_n = n \to \infty \implies a_n^{b_n} = (1+\frac{1}{n})^n \to e$

A. $a_n = 1+\frac{1}{n} \to 1$, $b_n = 2n \to \infty \implies a_n^{b_n} = (1+\frac{1}{n})^{2n} \to 2e$

6. Podciągi

(a) Def. Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$będzie ciągiem, zaś $n_1, n_2, n_3, \dots$ liczbami naturalnymi, takimi, że $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ Wtedy ciąg $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ o wyrazach $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$ nazywamy podciągiem ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

i. Przykład: $a_n = \frac{1}{n}$,wyrazy tego ciągu: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \dots$

: $b_n = \frac{1}{n^2}$, wyrazy tego ciągu: $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots$ Ciąg $\{b_n\}$to podciąg ciągu $\{a_n\} : b_k = a_{k^2}$

: $c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, wyrazy tego ciągu: $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \dots$ Ciąg $\{c_n\}$nie jest podciągiem $\{a_n\}$(ale $\{a_n\}$ jest podciągiem $\{c_n\}$)

(b) Twierdzenie 2.13: Każdy podciąg ciągu zbieżnego do $g$ też zbiega do $g$:

i. $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ i $\{a_{n_k}\}$ jest podciągiem ciągu $\{a_n\} \implies \lim_{n\to\infty} a_{n_k} = g$

ii. Wniosek: Jeśli ciąg $\{a_n\}$ zawiera co najmniej dwa podciągi zbieżne do różnych granic, to nie jest zbieżny

iii. Przykład: Ciąg $a_n = (-1)^n$ nie jest zbieżny, bo $\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n} = 1$ oraz $\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n+1} = -1$, oba są podciągami $\{a_n\}$ i są zbieżne do innych granic, więc $a_n$ nie jest zbieżny

iv. Przykład: $\lim_{n\to\infty}(\frac{2n+3}{2n+2})^{4n-3}(=[1^\infty])= \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n+2})^{4n-3} = \lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^{2m-7} = \frac{(\lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^m)^2}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^7} = \frac{e^2}{1} = e^2$

(c) Twierdzenie 2.14: (Bolzano-Weierstrassa)

i. Każdy ciąg ograniczony zawiera podciąg zbieżny.

(d) Def. Ciąg $\{a_n\}$ jest ciągiem Cauchyego (podstawowym) $\iff \forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n,m\geq n_0}|a_n - a_m| < \epsilon$

(e) Twierdzenie 2.15 (warunek równoważny zbieżności ciągu)

i. Ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny $\iff$ $\{a_n\}$ jest ciągiem Cauchyego

D $\implies$ Zakładamy, że $\{a_n\}$ jest zbieżny, tzn. $\exists_{g\in\mathbb{R}}\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|a_n - g| < \frac{\epsilon}{2}$

: Pokażemy, że $\{a_n\}$jest ciągiem Cauchyego, tzn $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n,m\geq n_0}|a_n - a_m| < \epsilon$

: $|a_n - a_m| = |a_n - g + (-a_m + g)| \leq |a_n - g| + |a_m - g| <^{n,m\geq n_0} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

: Zatem pokazaliśmy, że $\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_1\in\mathbb{N},n_1=n_0}\forall_{n,m\geq n_1}|a_n - a_m| \leq \epsilon$

$\Longleftarrow$ pomijamy bo długi dowód

i. Przykład: Ciąg $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ nie jest zbieżny, bo nie jest ciągiem Cauchyego.

: $\neg(\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n,m\geq n_0}|a_n - a_m| < \epsilon)$

: Chcemy pokazać, że $\exists_{\epsilon>0}\forall_{n_0\in\mathbb{N}}\exists_{n,m\geq n_0}|a_n - a_m| \geq \epsilon$

: $|a_{2n} - a_n| = |1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n}| = |\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}| = \frac{1}{n+1} + \ldots \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \ldots \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

: Zatem pokazaliśmy, że $\exists_{\epsilon>0}\forall_{n_0\in\mathbb{N}}\exists_{n,m\geq n_0}|a_n - a_m| \geq \epsilon$ - zachodzi dla $\epsilon = \frac{1}{2}$, $n = 2n_0$, $m = n_0$

23.10.2019
Granica górna i dolna ciągu

1. Def. Mówimy, że $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$ jeśli istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}$ ciągu $\{a_n\}$ taki, że $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = g$
   (a) Przykład: Wyznaczamy punkt skupienia ciagu $a_n = \sqrt{\frac{1+4n}{2+n}} \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

      $b_n = \sqrt{\frac{1+4n}{2+n}}$, $c_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$
      $\lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{4} = 2$ bo $s_n \to s \implies (s_n)^q \to s^q$
      pierwsze wyrazy $\{c_n\}$ - $c_1 = -1, c_2 = -1, c_3 = 1$ - może się powtarzać?
      $c_{4k} = (-1)^{2k(4k+1)} = 1$, $c_{4k+1} = (-1)^{\frac{(4k+1)(4k+2)}{2}} = (-1)^{(4k+1)(2k+1)} = -1$,
      $c_{4k+2} = (-1)^{\frac{(4k+2)(4k+3)}{2}} = (-1)^{(2k+1)(4k+3)} = -1$, $c_{4k+3} = (-1)^{\frac{(4k+3)(4k+4)}{2}} = (-1)^{(4k+3)(2k+2)} = 1$
      a więc $a_{4k} = b_{4k}c_{4k} = b_{4k} \xrightarrow{k\to\infty} 2$
      $a_{4k+1} = b_{4k+1}c_{4k+1} = b_{4k+1} \xrightarrow{k\to\infty} -2$
      $a_{4k+2} = b_{4k+2}c_{4k+2} = b_{4k+2} \xrightarrow{k\to\infty} -2$
      $a_{4k+3} = b_{4k+3}c_{4k+3} = b_{4k+3} \xrightarrow{k\to\infty} 2$
      Więc punkty skupienia ciągu $\{a_n\}$ to $-2$ i $2$

2. Def. Granicą dolną ciągu $\{a_n\}$, oznaczaną $\liminf_{n\to\infty} a_n$ lub $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ nazywamy kres dolny zbioru wszystkich punktów skupienia ciągu $\{a_n\}$ :
   $\liminf_{a\to\infty} = inf\{g : \exists_{\{a_{n_k}\}} \lim_{n\to\infty} a_{n_k} = g\}$

3. Def. Granicą górną ciągu $\{a_n\}$, oznaczaną $\limsup_{n\to\infty} a_n$ lub $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ nazywamy kres górny zbioru wszystkich punktów skupienia ciągu $\{a_n\}$ :
   $\limsup_{a\to\infty} = inf\{g : \exists_{\{a_{n_k}\}} \lim_{n\to\infty} a_{n_k} = g\}$
   (a) Wtedy, dla $a_n = \sqrt{\frac{1+4n}{2+n}} \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$: $\liminf_{n\to\infty} a_n = 2$, $\limsup_{n\to\infty} = -2$

4. Twierdzenie 2.16: Dla dowolnego $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ mamy
   $\lim_{n\to\infty} a_n = g \iff \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = g$

GRANICA FUNKCJI

Przez cały wykład będziemy zakładać, że $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}$. Ponadto, $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

1. Def. Mówimy, że $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru $D$ jeśli istnieje ciąg $\{a_n\}$ taki,że $\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n \in D \setminus \{a\}$ (inaczej $\{a_n\} \subset D \setminus \{a\}$ i $\lim_{n\to\infty} a_n = a$
   (a) Przykłady:
      i. $\{0\} \cup [1, 2)$ - punkty skupienia - $[1, 2]$
      ii. $\mathbb{N}$ - punkt skupienia $\{+\infty\}$
      iii. $\mathbb{Z}$ - punkty skupienia $\{-\infty, +\infty\}$
      iv. $\{1, 2, 3\}$- nie ma punktów skupienia
      Ogólniej, dowolny zbiór skończony nie ma punktów skupienia
      v. $\mathbb{R}$ - punkty skupienia - $\widetilde{\mathbb{R}}$

2. Def. (Heinego granicy funkcji): Niech $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$ będzie punktem skupienia zbioru D i $g \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Mówimy, że g jest granicą funkcji $f$ w punkcie $a$ (jeśli $a \in \mathbb{R}$) lub w $\pm\infty$(jeśli $a = \pm\infty$) i zapisujemy
   $\lim_{x\to a} f(x) = g$ lub $f(x) \xrightarrow{x\to a} g \iff \underline{\forall_{\{a_n\}\subset D\setminus\{a\}} \lim_{n\to\infty} a_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(a_n) = g}$ - **(H)**
   (a) Przykład $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 1 \\ 1 & \text{dla } x \neq 1 \end{cases}$ - $\lim_{n\to\infty} f(x) = 1$ . W szczególności $\lim_{x\to1} f(x)$ nie zależy od wartości funkcji w punkcie $x_0 = 1$

3. Twierdzenie 4.1: Granica funkcji jest wyznaczona jednoznacznie, tzn. jeśli $\lim_{x\to a} f(g) = g_1$ oraz $\lim_{x\to a} f(x) = g_2$ , to $g_1 = g_2$
   (a) Dowód: Zakładamy, że $\lim_{x\to a} f(x) = g_1$ i $\lim_{x\to a} f(x) = g_2$
   $\forall_{\{a_n\}\subset D\setminus\{a\}} \lim_{n\to\infty} a_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(a_n) = g_1$
   Weźmy dowolny ciąg $\{a_n\} \subset D \setminus \{a\}$ taki, że $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Wtedy $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = g_1$ oraz $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = g_2$
   Z tw 2.2, otrzymujemy, że $g_1 = g_2$

(b) Przykłady:

i. $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{2x-1}$, $D=\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}\infty k$
Weźmy ciąg $\{a_n\}\subset D\setminus\{-\infty\}=\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$ taki, że $\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$. Wtedy $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$ oraz $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\frac{|a_n|}{a_n}\overset{a_n<0}{=}\frac{-a_n}{2a_n}=-\frac{1}{2}$, więc $\lim_{x\to-\infty}=-\frac{1}{2}$

ii. Granica $\lim_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ nie istnieje. Weźmy dwa ciągi, $\{a_n\}\subset\mathbb{R}\setminus\{0\}$,$\{x_n\}\subset\mathbb{R}\setminus\{0\}$ takie, że $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ oraz $\lim_{n\to\infty}b_n=0$
$a_n=\frac{1}{2n\pi}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, $x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. Wtedy:
$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sin(2n\pi)=0$
$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})=1$
Granica musi być jednoznaczna - więc $\lim_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ nie istnieje

4. Def. (Cauchy'ego granicy skonczonej (właściwej) funkcji w punkcie): Niech $a\in\mathbb{R}$ będzie punktem skupienia $D$ i niech $g\in\mathbb{R}$. Wtedy:
$\lim_{x\to a}f(x)=g\iff\underline{\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}0<\text{|x-a|}<\delta\implies\text{|f(x)-g|}<\epsilon}$ - **(C)**
Dla $x$ bliskich $a$ i różnych od $a$ odległość $f(x)$ od $g$ jest dowolnie mała.

5. Twierdzenie 4.2 : Definicje Cauchy'ego i Heinego granicy wlą̨ściwej funkcji w punkcie są równoważne.

(a) Dowód: (H) $\implies$ (C) Dowód nie wprost. Zakładamy, że (H) i $\neg$(C)
$\exists_{\epsilon>0}\forall_{\delta>0}\exists_{x\in D}0<|x-a|<\delta\wedge|f(x)-g|\geq\epsilon\ \ \neg$(C)
W szczególności dla $\delta=\frac{1}{n},n\in\mathbb{N}$ otrzymujemy $\exists_{\epsilon>0}\forall_{n\in\mathbb{N}}\exists_{x_n\in D}0<|x_n-a|<\frac{1}{n}\wedge|f(x_n)-g|\geq\epsilon$
Z tw. o trzech ciągach $\lim_{n\to\infty}|x_n-a|=0\iff\lim_{n\to\infty}(x_n-a)=0\iff\lim_{n\to\infty}x_n=a$
Pokazaliśmy, że $\exists_{\epsilon>0}\exists_{\{x_n\}\subset D\setminus\{a\}}\lim_{n\to\infty}x_n\wedge\forall_{n\in\mathbb{N}}|f(x)-g|\geq\epsilon$
$\exists_{\{x_n\}\subset D\setminus\{a\}}\lim_{n\to\infty}x_n=a\wedge\lim_{n\to\infty}f(x_n)\neq g\iff\neg(H)$ - sprzecznosc z zał. że zachodzi (H)

(b) (C) $\implies$ (H): Zakładamy, że zachodzi (C), tzn $\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}0<|x-a|<\delta\implies|f(x)-g|<\epsilon$
Chcemy pokazać, że (H), czyli $\forall_{\{a_n\}\subset D\setminus\{a\}}\lim_{n\to\infty}a_n=a\implies\lim_{n\to\infty}f(a_n)=g$
$\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|f(a_n)-g|<\epsilon$
Weźmy dowolny ciąg $\{a_n\}\subset D\setminus\{a\}$ taki, że $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ i weźmy dowolny $\epsilon>0$. Wtedy
$\exists_{n_1\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_1}0<|a_n-a|<\delta\overset{\text{(C)}}{\implies}|f(a_n)-g|<\epsilon$

(c) Zatem pokazalismy $\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}|f(a_n)-g|<\epsilon\ (n_0=n_1)$

6. Def. Cauchy'ego niewłaściwych granic funkcji w punkcie: Niech $a\in\mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru $D$
$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty\iff\forall_{G>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}0<|x-a|<\delta\implies f(x)>G$
$\lim_{x\to a}f(x)=-\infty\iff\forall_{G>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}0<|x-a|<\delta\implies f(x)<-G$

7. Def. Cauchy'ego właściwej granicy w $\pm\infty$: Niech $\pm\infty$ będzie punktem skupienia zbioru $D$ i $g\in\mathbb{R}$
$\lim_{x\to+\infty}f(x)=g\iff\forall_{\epsilon>0}\exists_{G>0}\forall_{x\in D}x>G\implies|f(x)-g|<\epsilon$
$\lim_{x\to-\infty}f(x)=g\iff\forall_{\epsilon>0}\exists_{G>0}\forall_{x\in D}x<-G\implies|f(x)-g|<\epsilon$

8. Def Cauchy'ego niewłaściwych granic funkcji w $\pm\infty$: Niech $\pm\infty$ będzie punktem skupienia zbioru $D$
$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\iff\forall_{G>0}\exists_{L>0}\forall_{x\in D}x>L\implies f(x)>G$
$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty\iff\forall_{G>0}\exists_{L>0}\forall_{x\in D}x>L\implies f(x)<-G$
$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\iff\forall_{G>0}\exists_{L>0}\forall_{x\in D}x<-L\implies f(x)>G$
$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\iff\forall_{G>0}\exists_{L>0}\forall_{x\in D}x<-L\implies f(x)<-G$

9. Twierdzenie 4.3: Powyższe dwie definicje Cauchy'ego grainc funkcji są równowazne odpowiednim definicjom Heinego

10. Twierdzenie 4.4: (tw. o trzech funkcjach): Jeśli:

(a) $f,p,h:\ D\to\mathbb{R}$

(b) $a\in\widetilde{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia $D$

(c) $g\in\mathbb{R}$ i $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}h(x)=g$

(d) $\forall_{x\in D\text{ i x bliskiego a}}f(x)\leq p(x)\leq h(x)$

To $\lim_{x\to a}p(x)=g$ - (dowód z def Heinego i tw o trzech ciągach)

11. Twierdzenie 4.5 (tw o dwóch funkcjach): Jeśli:

(a) $f,h:\ D\to\mathbb{R}$

(b) $a\in\widetilde{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia D

(c) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ (ewentualnie $\lim_{x\to a} h(x) = -\infty$)

(d) $\forall_{x\in D \text{ i x bliskie a}} f(x) \leq h(x)$

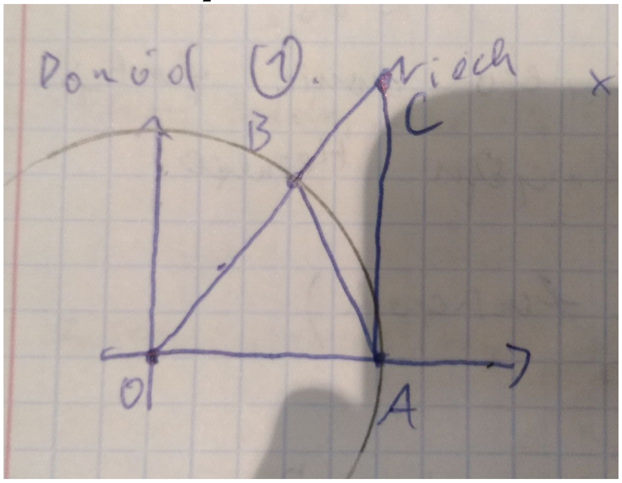
To $\lim_{x\to a} h(x) = +\infty$ (ewentualnie $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$)

(a) Przykład: $\lim_{x\to 0} x \cdot \sin \frac{1}{x}$
$0 \leq |x \cdot \sin \frac{1}{x}| = |x||\sin \frac{1}{x}| \leq |x|$ dla $x \neq 0$
$\overset{\text{tw.o 3 funkcjach}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} |x \cdot \sin \frac{1}{x}| = 0 \iff \lim_{x\to 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$

30.10.2019

1. Twierdzenie 4.6: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$-(a) oraz $\forall_{x\in\mathbb{R}}|\sin x|\le|x|$ - (b)

   (a) D: Niech $x\in(0,\frac{\pi}{2})$


   $P_{\triangle AOB}<P_{wycinekkołaAOB}<P_{\triangle OAC}$
   $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin x<\frac{x}{2\pi}\pi\cdot 1^2<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x$
   $\sin x<x<\frac{\sin x}{\cos x}$
   Dla $x\in(0,\frac{\pi}{2})$,mamy $\frac{\sin x}{x}<1$ oraz - $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$
   Dla $-x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ mamy $\cos(-x)<\frac{\sin(-x)}{-x}<1$
   Dla $y\in(-\frac{\pi}{2},0)$ mamy $\cos y<\frac{\sin y}{y}<1$
   Stąd $\forall_{x\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})}\cos x<\frac{\sin x}{x}<1\overset{\text{tw. o 3 funkcjach}}{\Longrightarrow}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, bo $\lim_{x\to 0}\cos(x)=1$

   (b) D: Weźmy,że $\forall_{x\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})}|\frac{\sin x}{x}|<1$ z czego $\forall_{x\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})}|\sin x|<|x|$,
   Dla $x=0$, $|\sin x|=0\le|x|$
   Dla $x$ takich, że $|x|\ge\frac{\pi}{2}$ mamy $|\sin x|\le 1<\frac{\pi}{2}\le|x|$
   Z wszystkich poprzednich $\Longrightarrow\forall_{x\in\mathbb{R}}|\sin x|\le|x|$

## 5. Granice jednostronne, asymptopty i ciągłość funkcji

1. Przez cały wykład zakładamy,ż że $f:D\to\mathbb{R}$ gdzie $D\subset\mathbb{R}$

   (a) $y=\sqrt{x}$ - granicę w zerze możemy liczyć tylko z prawej strony.

   (b) $y=\begin{cases}\sqrt{x} & x\ge 0\\ 1 & x<0\end{cases}$ $\lim_{x\to 0}f(x)$ nie istnieje. Ale możemy rozważać granicę lewostronną $\lim_{x\to 0^-}f(x)$ i granicę prawostronną $\lim_{x\to 0^+}$

2. Def. (Heinego granic jednostronnych)

   (a) Niech $a\in\mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru $D\cap(-\infty,a)$ i niech $g\in\widetilde{\mathbb{R}}$. Wtedy $g$ jest granicą lewostronną funkcji $f$ w punkcie $a$ ( co zapisujemy $\lim_{x\to a^-}f(x)=g$ lub $f(x)\overset{x\to a^-}{\longrightarrow}g$ lub $f(a^-)=g$)
   $\iff\forall_{\{x_n\}\subset D\cap(-\infty,a)}\lim_{n\to\infty}x_n=a\implies\lim_{n\to\infty}f(x_n)=g$

   (b) Niech $a\in\mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru $D\cap(a,+\infty)$ i niech $g\in\widetilde{\mathbb{R}}$. Wtedy $g$ jest granicą prawostronną funkcji $f$ w punkcie $a$ ( co zapisujemy $\lim_{x\to a^+}f(x)=g$ lub $f(x)\overset{x\to a^+}{\longrightarrow}g$ ub $f(a^+)=g$)
   $\iff\forall_{\{x_n\}\subset D\cap(a,+\infty)}\lim_{n\to\infty}x_n=a\implies\lim_{n\to\infty}f(x_n)=g$

3. Twierdzenie 5.1 (def. Cauchy'ego granic jednostronnych funkcji) - podkreślone to zmiana od definicji zwykłej granicy

   (a) Niech $a\in\mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru $D\cap(-\infty,a)$

      i. Jesli $g\in\mathbb{R}$ to $\lim_{x\to a^-}f(x)=g\iff\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}\underline{-\delta<x-a<0}\implies|f(x)-g|<\epsilon$
      ii. Jeśli $g=+\infty\lim_{x\to a^-}f(x)=+\infty\iff\forall_{G>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}\underline{-\delta<x-a<0}\implies f(x)>G$
      iii. Jeśli $g=-\infty\lim_{x\to a^-}f(x)=-\infty\iff\forall_{G>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}\underline{-\delta<x-a<0}\implies f(x)<-G$

   (b) Niech $a\in\mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru $D\cap(a,+\infty)$

      i. Jesli $g\in\mathbb{R}$ to $\lim_{x\to a^-}f(x)=g\iff\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}\underline{0<x-a<\delta}\implies|f(x)-g|<\epsilon$
      ii. Jeśli $g=+\infty\lim_{x\to a^-}f(x)=+\infty\iff\forall_{G>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}\underline{0<x-a<\delta}\implies f(x)>G$

iii. Jeśli $g = -\infty \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \iff \forall_{G>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}\underline{0 < x - a < \delta} \implies f(x) < -G$

4. Twierdzenie 5.2: Jeśli $a \in \mathbb{R}$ jest punktem skupienia $D \cap (-\infty, a)$ i $D \cap (a, +\infty)$ oraz $g \in \widetilde{\mathbb{R}}$, to $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = g$

   (a) $[\frac{1}{0^+}] = +\infty, [\frac{1}{0^-}] = -\infty$

5. Asymptoty

   (a) Def. Prosta $x = a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ jest

      i. Asymptotą pionową lewostronną (wykresu) funkcji $y = f(x) \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$

      ii. Asymptotą pionową prawostronną (wykresu) funkcji $y = f(x) \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$

      iii. Asymptotą pionową obustronną gdy jest asymptotą pionową lewostronną i prawostronną

   (b) Def. Prosta $y = b$, gdzie $b \in \mathbb{R}$ jest

      i. Asymptotą poziomą lewostronną (wykresu) funkcji $y = f(x) \iff \lim_{x\to -\infty} f(x) = g$

      ii. Asymptotą poziomą prawostronną (wykresu) funkcji $y = f(x) \iff \lim_{x\to +\infty} f(x) = g$

      iii. Asymptotą poziomą obustronną gdy jest asymptotą poziomą ^lewostronną i prawostronną

   (c) Def. Prosta $y = mx + k$, gdzie $m, k \in \mathbb{R}$ jest

      i. Asymptotą ukośną lewostronną (wykresu) funkcji $y = f(x) \iff \lim_{x\to -\infty}[f(x) - (mx + k)] = 0$

      ii. Asymptotą ukośną prawostronną (wykresu) funkcji $y = f(x) \iff \lim_{x\to +\infty}[f(x) - (mx + k)] = 0$

      iii. Asymptotą ukośną obustronną gdy jest asymptotą poziomą lewostronną i prawostronną

      iv. Twierdzenie 5.3: Prosta $y = mx + k$, gdzie $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $k \in \mathbb{R}$ jest asymptotą ukośną prawo/lewostronnną $\iff m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \land k = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - mx]$ - (dowód na ćwiczeniach)

         A. Przykład: Wyznaczmy asymptoty funkcji $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
         $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = [\frac{1}{0^-}] = -\infty, \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = [\frac{1}{0^+}] = +\infty$, Więc $x = 0$ to asymptota pionowa obustronna
         $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = -1, \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = 1$ - asymptota pozioma lewostronna to $y = -1$, prawostronna $y = 1$
         Brak asymptot ukośnych, bo są asymptoty poziome

6. Ciągłość

   (a) Przypomnienie: $\lim_{x\to a} f(x) = g \overset{(H)}{\iff} \forall_{\{x_n\}\subset D\setminus\{a\}} \lim_{x\to\infty} x_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g \overset{(C)}{\iff} \forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D} 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - g| < \epsilon$

   (b) Def. (Heinego ciągłości funkcji w punkcie):
   Funkcja $f$ jest ciągła w punkcie <u>a∈D (musi być w dziedzinie)</u> $\iff \forall_{\{x_n\}\subset D} \lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ - **(CH)**

      i. W przypadku funkcji ciągłej $f$ mamy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$, tzn. z granicą można wejść pod symbol funkcji.

      ii. Uwaga: Jeśli $a \in D$ nie jest punktem skupienia zbioru $D$, to
      $\underbrace{\forall_{\{x_n\}\subset D} \lim_{n\to\infty} x_n = a}_{*} \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ - (*) jest spełnione jedynie przez ciągi $\{x_n\}$ takie, że dla wszystkich dalszych $n : x_n = a$
      $\implies$ dla wszystkich dużych $n$ $f(x_n) = f(a) \xrightarrow{n\to\infty} f(a)$
      Zatem warunek (CH) jest spełniony i funkcja jest ciągła w $a$. Na przykład każda $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jest ciągła w każdym punkcie z $D = \mathbb{N}$, bo każdy taki punkt nie jest punktem skupienia dziedziny

   (c) Twierdzenie 5.4 (def. Cauchy'ego ciągłości funkcji w punkcie).
   Funkcja $f(x)$ jest ciągła w pkt. $a \in D \iff \forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$ - **(CC)**

      i. D (gdy $a$ jest punktem skupienia zbioru $D$): Chcemy pokazać, że (CH) $\iff$ (CC)
      (CH) $\iff \forall_{\{x_n\}\subset D} \lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a) \iff \forall_{\{x_n\}\subset D\setminus\{a\}} \lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a) \iff \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \iff$
      $\iff \forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D} 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon \iff$ (CC)

      ii. Przy okazji udowodniliśmy nastepujące twierdzenie:

   (d) Twierdzenie 5.5: Jeśli $a \in D$ jest punktem skupienia zbioru $D$, to $f(x)$ jest ciagła w punkcie $a \iff \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

   (e) Def. Funkcja $f(x)$ jest ciągła $\iff$ $f(x)$ jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny, tzn.
   $\forall_{a\in D}\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon \iff f(x)$ jest ciągła w $a$
   Przykłady:

i. Funkcja stała $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ gdzie $c \in \mathbb{R}$
$\forall_{a\in D}\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}|x-a| < \delta \implies |c-c| = 0 < \epsilon$ więc jest ciagła

ii. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ jest ciągła:
$\forall_{a\in D}\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}|x-a| < \delta \implies |x-a| < \epsilon$, co zachodzi dla $\delta = \epsilon$

iii. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ jest ciągła:
$\forall_{a\in D}\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}|x-a| < \delta \implies ||x|-|a|| \leq |x-a| < \epsilon$,co zachodzi dla $\delta = \epsilon$

iv. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+b}{2}$ - przydatne do nastepnego
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-b}{2}$
$\sin\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+b}{2}$
$\sin\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+b}{2}$

v. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = \sin(x)$,$g(x) = \cos(x)$ są ciągłe, bo:
$\forall_{a\in D}\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}|x-a| < \delta \implies |\sin x - \sin a| = 2|\sin\frac{x-a}{2}|\cdot|\cos\frac{x+a}{2}| \leq 2\cdot|\frac{x-a}{2}|\cdot|1| \leq |x-a| < \epsilon$ $(\delta = \epsilon)$
$\forall_{a\in D}\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}|x-a| < \delta \implies |\cos x - \cos a| = 2|\sin\frac{x-a}{2}|\cdot|\sin\frac{x+a}{2}| \leq 2\cdot|\frac{x-a}{2}|\cdot|1| \leq |x-a| < \epsilon$ $(\delta = \epsilon)$

06.11.2019

## 6 Funkcje Ciągłe

1. Def. Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ gdzie $D \subset \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $a \in D \overset{(CH)}{\iff} \forall_{\{x_n\} \in D} \lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a) \overset{(CC)}{\iff} \forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D}|x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$

   (a) T: Jeśli $a \in D$ jest punktem skupienia $D$ , to $f$ jest ciągła w punkcie $a \iff \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \iff \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

   Funkcje $c, x, |x|, \sin x, \cos x$ są ciągłe

2. Twierdzenie 6.1: Jeśli funkcje $f, g : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}$ są ciągłe w punkcie $a \in D$, to
   $f + g, f - g, fg$ też są ciągłe w punkcie $a$
   $\frac{f}{g}$ też jest ciągła w punkcie $a$ jeśli $\forall_{x\in D} g(x) \neq 0$
   D: Twierdzenie to wynika z def. Heinego ciągłości funkcji i z tw. o ciągłości działań arytmetycznych
   Wnioski:

   (a) Każdy wielomian $w(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ jest funkcją ciągłą

   (b) Każda funkcja wymierna $\frac{w_1(x)}{w_2(x)}$ jest funkcją ciągłą

   (c) Funkcje $\tan x$ i cotx są ciągłe

3. Twierdzenie 6.2: Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. Dokładniej, jeśli $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$ i $f : D_1 \to D_2$ jest ciągła w punkcie $a \in D_1$ i $g : D_2 \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $f(a)$, to złożenie $g \circ f$ $(g \circ f(x) := g(f(x)))$ jest ciągłe w punkcie $a$
   Przykład Funkcja $f(x) = \sin |x|$ jest ciągła
   Funkcja odwrotna do funkcji ciągłej nie musi być funkcją ciągłą - musi być odwracalna

4. Twierdzenie 6.3 (o ciągłości funkcji odwrotnej): Jeśli $P$ to przedział i $f : P \to Y \subset \mathbb{R}$ jest ciągła i odwracalna, to funkcja odwrotna $f^{-1} : Y \to P$ też jest funkcją ciągłą.
   Wniosek: Funkcja cyklometryczne, tzn $\arcsin x, \arccos x, \arctan x$,arccot$x$ to funkcje ciągłe jako funkcje odwrotne

5. Def. Do funkcji elementarnych będziemy zaliczać:

   (a) wielomiany $w(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

   (b) funkcje wymierne $\frac{w_1(x)}{w_2(x)}$

   (c) funkcja pierwiastek $\sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$

   (d) funkcje trygonometryczne i cyklometryczne

   (e) funkcje wykładniczą $a^x$ gdzie $a > 0$
   Jak rozumieć $a^x$ gdy $a > 0$ i $x \in \mathbb{R}$?

      i. Dla $x = 0, a^x = a^0 = 1$
      ii. Dla $x \in \mathbb{N}$,$a^x = a \cdot \dots \cdot a$ ($x$ czynników)
      iii. Jeśli $x \in \mathbb{Z}$ i $x < 0$ to $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$
      iv. Jeśli $x \in \mathbb{Q}$, czyli $x = \frac{n}{m}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, to $a^x = a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$
      v. A co jeśli $x \notin \mathbb{Q}$?
      Def. Jeśli $a \in [1, \infty)$,to $a^x := \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q} \wedge q \leq x\}$ - zbiór niepusty i ograniczony z góry, np. przez $a^{\lfloor x \rfloor + 1}$ $\implies$ ma skończony kres górny
      Jeśli $a \in (0, 1)$,to $a^x := \frac{1}{(\frac{1}{a})^x}$

   (f) funkcję logarytmiczną $\log_a x$

6. Twierdzenie 6.4 (własności potęgowania):

   (a) Jesli $a, b > 0$, $x, y, \in \mathbb{R}$, to $a^{x+y} = a^x \cdot a^y, (a^x)^y = a^{xy}, (ab)^x = a^x \cdot b^x$

   (b) Jeśli $a \in (1, \infty)$, to funkcja $f(x) = a^x$ jest rosnąca i jej zbiór wartości to $(0, \infty)$

   (c) Jeśli $a \in (0, 1)$, to funkcja $f(x) = a^x$ jest malejąca i jej zbiór wartości to $(0, \infty)$

7. Twierdzenie 6.5: Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ jest ciągła, tzn
   $\forall_{x_0\in\mathbb{R}} \lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$

8. Def. Niech $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$. Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcję $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, która jest funkcją odwrotną do funkcji $g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $g(x) = a^x$
   Uwaga: Funkcja logarytmiczna jest funkcją ciągłą jako funkcja odwrotna do funkcji ciągłej określonej na przedziale

9. Funkcja pierwiastek: Na ćwiczeniach, pokazalismy, że $\forall_{g\geq 0}\forall_{\{x_n\}\in[0,\infty)} \lim_{x\to\infty} x_n = g \iff \lim_{x\to\infty} \sqrt[4]{x_n} = \sqrt[4]{g}$
Analogicznie mozna wykazać, że powyższy fakt zachodzi nie tylko dla pierwiastka stopnia 4 ale dowolnego stopnia $k \in \mathbb{N}$
Warunek ten oznacza, że $f(x) = \sqrt[k]{x}$ jest funkcją ciągłą w dowolnym punkcie $g$

10. Twierdzenie 6.6: Każda funkcja elementarna jest funkcją ciągłą.

11. Def (funkcje hyperboliczne):

    (a) $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

    (b) $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

    (c) $\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $x \in \mathbb{R}$

    (d) $\coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

    (e) Uwagi:

        i. Pomiędzy funkcjami hiberbolicznymi zachodzą **podobne** związki jak pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi, np:
        $\sinh 2x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 2 \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 2 \sinh x \cosh x$
        $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1$

        ii. Funkcje hiperboliczne są ciągłe, np $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

06.11.2019

**Własności funkcji ciągłych. Jednostajna ciągłość funkcji**

1. Def. Mówimy, że funkcja $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ ma własnosć Darboux jeśli $f(a) \neq f(b) \implies \forall_{c \text{ leżącego pomiedzy } f(a) \text{i } f(b)} \exists_{x_0\in(a,b)} f(x_0) = c$

2. Twierdzenie 7.1: Każda funkcja ciągła $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ ma własnosć Darboux

3. Twierdzenie 7.2 (Weierstrassa I)
   Każda funkcja ciągła $f; < a, b >\to \mathbb{R}$ jest ograniczona, tzn $\exists_{K\in\mathbb{R}} \forall_{x\in<a,b>} |f(x)| \leq K$
   Uwaga - W powyższym twierdzeniu założenie, że dziedzina funkcji jest przedziałem domkniętym i ograniczonem - musi być przedziałem domkniętym

   (a) Dowód nie wprost. Zakładamy, że $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ jest ciągła ale nie jest ograniczona, tzn $\forall_{K\in\mathbb{R}} \exists_{x\in<a,b>} |f(x)| > K$. W szczególności biorąc $K = n$ gdzie $n \in \mathbb{R}$ otrzymujemy $\forall_{n\in\mathbb{N}} \exists_{x_n\in<a,b>} |x_n| > n$.Zatem mamy ciąg $\{x_n\}$, który jest ograniczony (bo $x_n \in< a, b >$)
   $\overset{\text{tw. B-W}}{\Longrightarrow}$ ciąg $\{x_n\}$ zawiera podciąg zbieżny, oznaczmy $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Wtedy $x_0 \in< a, b >$, bo $\forall_{k\in\mathbb{N}} a \leq x_{n_k} \leq b$ i z tw. o przechodzeniu do granicy w nierównościach otrzymujemy $\lim_{x\to\infty} x_{n_k} \in< a, b >$
   Funkcja $f$ jest ciągła na $< a, b > \implies$ w szczególności jest ciągła w pkt $x_0 \in< a, b > \overset{\text{(CH)}}{\iff} \forall_{\{\tilde{x}_n\}\subset<a,b>} \lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(\tilde{x_j}) = f(x_0)$
   W szczególności $\{x_n\} \subset< a, b >\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \implies \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) \iff \forall_{\epsilon>0} \exists_{k_0\in\mathbb{N}} \forall_{k\geq k_0} |f(x_{n_k}) - f(x_0)| < \epsilon$
   Dla $\epsilon = 1$ mamy $\exists_{k_0\in\mathbb{N}} \forall_{k\geq k_0} |f(x_{n_k}) - f(x_0)| < 1$ (*)
   $\forall_{k\geq k_0} |f(x_{n_k})| = |f(x_{n_k}) - f(x_0) + f(x_0)| \leq |f(x_{n_k}) - f(x_0)| + |f(x_0)| \overset{(*)}{<} 1 + |f(x_0)|$
   Sprzeczność z $\forall_{n\in\mathbb{N}} |f(x_n)| > n \implies \forall_{k\in\mathbb{N}} |f(x_{n_k})| > n_k$
   Dla dostatecznie dużych $k$ otrzymamy $1 + |f(x_0)| < n_k l$

**Własności funkcji ciągłych:**

1. Twierdzenie 7.1 : Każda funkcja ciągła $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ ma własność Darboux, to znaczy $f(a) \neq f(b) \implies \forall_{c \text{ między } f(a), f(b)} \exists_{x_0 \in (a,b)} f(x_0) = c$
2. Twierdzenie 7.1: (twierdzenie Weierstrassa I)
Jeśli funkcja $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ jest ciągła, to jest ograniczona
3. Twierdzenie 7.2: (twierdzenie Weierstrassa II)
Jeśli funkcja $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ jest ciągła, to przyjmuje wartość najmniejszą i największą - osiąga swoje kresy
$\exists_{x_m, x_M \in <a,b>} f(x_m) = \inf\limits_{x \in <a,b>} f(x) \; i \; f(x_M) = \sup\limits_{x \in <a,b>} f(x)$
Uwaga - z przedziału otwartego to niekoniecznie prawda
   (a) Dowód: $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ - funkcja ciągła $\overset{\text{tw.Weierstrassa I}}{\Longrightarrow} f$ jest ograniczona, tzn ograniczony jest zbiór wartości tej funkcji $Y = \{f(x) : x \in< a, b >\}$. Ponadto $Y \neq \emptyset$. Zatem istnieją skończone kresy zbioru $Y$. Oznaczmy $m = \inf Y = \inf\limits_{x \in <a,b>} f(x)$ i $M = \sup Y = \sup\limits_{x \in <a,b>} f(x)$. Pokażemy, że $\exists_{x_M \in <a,b>} f(x_m) = M$. Dowód tego, że $\exists_{x_m \in <a,b>} f(x_m) = m$ przebiega analogicznie.
   Dowód nie wprost: Zakładamy, że $\forall_{x \in <a,b>} f(x) \neq M$, więc $f(x) < M$ bo $M = \sup\limits_{x \in <a,b>} f(x)$
   Zdefiniujmy funkcję $F :< a, b >\to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{M - f(x)}$. Funkcja ta jest dobrze zdefiniowana, bo mianownik się nie zeruje.
   $F :< a, b >\to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą $\overset{\text{tw. Weierstrassa I}}{\Longrightarrow}$ jest ograniczona, tzn. $\exists_{K>0} \forall_{x \in <a,b>} 0 < F(x) < K$ tzn $\exists_{K>0} \forall_{x \in <a,b>} 0 < \frac{1}{M - f(x)} < K \implies \exists_{K>0} \forall_{x \in <a,b>} M - f(x) > \frac{1}{K}$
   $\implies \exists_{K>0} \forall_{x \in <a,b>} f(x) < M - \frac{1}{K}$, co oznacza że M nie jest największym ograniczeniem $Y$, czyli $M \neq \sup\limits_{x \in <a,b>} f(x)$ - sprzeczność

**Jednostajna ciągłość funkcji**

Do końca wykładu będziemy zakładać, że $D \subset \mathbb{R}$.

**Przypomnienie:**

Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest ciągła $\iff \forall_{a \in D}$funkcja $f$ jest ciągła w $a \iff \forall_{a \in D} \forall_{\epsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$
- $\delta$ może zależeć od $a$.

Jeśli $\delta$ nie zależy od $a$, tzn jest taka sama dla każdego $a$, to wtedy mówimy, że funkcja $f$ jest jednostajnie ciągła, tzn spełnia warunek:

1. Def: Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła $\iff \forall_{\epsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{a \in D} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$
   (a) Uwaga 7.1: Każda funkcja jednostajnie ciagła jest ciągła.
   (b) Przykłady:
      i. $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ nie jest jednostajnie ciągła
      Dowód nie wprost. Zakładamy, że $f$ jest jednostajnie ciągła, czyli $\forall_{\epsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{a \in D} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$
      W szczególności dla $\epsilon = 1$ ptrzymujemy $\exists_{\delta>0} \forall_{x,y \in (0,\infty)} |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < 1$
      Weźmy $x_n = \frac{1}{n}, t_n = \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}$. Wtedy $|x_n - y_n| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Stąd dla dostatecznie dużego $n$ mamy $|x_n - y_n| < \delta \implies |f(x_n) - f(y_n)| < 1$
      Z drugiej strony, $|f(x_n) - f(y_n)| = |n - n - 1| = 1$ - skąd sprzeczność.
      ii. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$, jest jednostajnie ciągła - $\forall_{\epsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{a \in D} \forall_{x \in D} |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| = |\cos x - \cos a| = | - 2 \sin \frac{x-a}{2} \sin \frac{x+a}{2}| = 2|sin \frac{x-y}{2}|| \sin \frac{x+y}{2}| \leq 2|\frac{x+y}{2}| \cdot 1 = |x - y| < \epsilon$
      Więc wystarczy wybrać $\delta = \epsilon$
2. Twierdzenie 7.4: (twierdzenie Cantora):
Jeśli $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ jest ciągła, to jest jednostajnie ciągła.

   Dowód nie wprost: Zakładamy, że $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ jest ciągła ale nie jest jednostajnie ciągła. Wtedy $\exists_{\epsilon>0} \forall_{\delta>0} \exists_{a \in D} \exists_{x \in D} |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \epsilon$. W szczególności biorąc $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy$\exists_{\epsilon>0} \forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{x_n, y_n \in <a,b>} |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ i $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$
   W ten sposób otrzymaliśmy dwa ciągi $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$. Ciąg $\{x_n\}$ jest ograniczony, bo $\forall_{n \in \mathbb{N}} x_n \in [a, b] \overset{\text{tw.Bolzano-Weierstrassa}}{\Longrightarrow} \{x_n\}$ zawiera podciąg zbieżny; oznaczmy $x_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0$
   Z twierdzenia o przechodzeniu do granicy w nierównościach, mamy $x_0 \in [a, b]$
   $\forall_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \implies \forall_{n \in \mathbb{N}} x_n - \frac{1}{n} < y_n < x_n + \frac{1}{n} \implies \forall_{k \in \mathbb{N}} x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < y_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k}$ lewa i prawa strona zbiegają do $x_0$, więc z tw o 3 ciągach $y_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0$

Z ciągłości funkcji $f$ w punkcie $x_0$, $f(x_{n_k}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$ i $f(y_{n_k}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$
Stąd $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$,co jest sprzeczne z $\boldsymbol{\exists_{\epsilon>0}}\forall_{n\in\mathbb{N}}\exists_{x_n,y_n\in<a,b>}\boldsymbol{|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon}$, bo z drugiej strony $\exists_{\epsilon>0}\forall_{n\in\mathbb{N}}\exists_{x_n,y_n\in<a,b>}|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon \implies \exists_{\epsilon>0}\forall_{n\in\mathbb{N}}\exists_{x_n,y_n\in<a,b>}|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \epsilon$

3. Def: Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza na $D \iff \exists_{L>0}\forall_{x,y\in D}|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$
Przykład: Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ spełnia warunek Lipschitza, bo już dzisiaj pokazaliśmy, że $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}|f(x)-f(y)| = |\cos x - \cos y| \leq |x - y|$, tzn istnieje $L$ spełniające warunek Lipschitza $(L = 1)$

4. Twierdzenie 7.5: Jeśli $f : D \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza, to jest jednostajnie ciągła.
Dowód: Niech $f : D \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza. Wtedy $\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{a\in D}\forall_{x\in D}|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq L|x - y| < \epsilon$ $(\delta = \frac{\epsilon}{L})$ , co oznacza, że $f$ jest jednostajnie ciągła.

## 8. Pochoda funkcji jednej zmiennej

1. Def. Punkt $a$ jest punktem wewnętrznym zbioru $D \subset \mathbb{R} \iff \exists_{\delta>0}(a-\delta, a+\delta) \subset D$
   Przez cały wykład będziemy zakładać, że (o ile nie będzie powiedziane inaczej)
   $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ i $x_0$ jest punktem wewnętrzym zbioru $D$

2. Def. Jeśli istnieje skończona granica $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, - (tzw. iloraz różnicowy) to nazywamy ją pochodną funkcji $f$ w punkcie $x_0$i oznaczamy $f'(x_0)$ lub $\frac{df}{dx}(x_0)$
   Wtedy funkcję $f$ nazywamy różniczkowalną w punkcie $x_0$

3. **Interpretacja geometryczna pochodnej**
   Wartość pochodnej $f'(x_0)$ to nachylenie prostej stycznej do wykresu funkcji $f$ w $x_0$ w postaci $f'(x_0) = \tan\alpha$ gdzie $\alpha$ to kąt nachylenia prostej do dodatniej półosi $OX$, gdzie styczna to graniczne położenie siecznej przechodzącej przez punkty $(x_0, f(x_0))$ i $(x_0+h, f(x_0+h))$ dla $h \to 0$, która istnieje jeśli iloraz różnicowy ma granicę.
   Jeśli granica istnieje i też jest skończona, to $f'(x_0) = \tan\alpha$
   Wyznaczymy równanie prostej stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$
   $y = ax+b$ gdzie $a = \tan\alpha = f'(x_0)$ i $f(x_0) = ax_0 + b$, z czego $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$
   $y = f'(x_0) + f(x_0) - f'(x_0)x_0 \iff y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) \iff y - y_0 = f'(x_0)(x-x_0)$ gdzie $y_0 = f(x_0)$

4. Twierdzenie 8.1: Warunek konieczny różniczkowalności
   Jeśli funkcja $f$ jest rózniczkowalna w punkcie $x_0$, to jest też ciągła w $x_0$.
   $f$ jest różniczkowalna w $x_0 \implies f$ jest ciągła w $x_0$
   (a) D:(egzamin) Z założenia $x_0$jest punktem wewnętrznym $D \implies x_0$ jest punktem skupienia zbioru $D \implies$ ($f$ jest ciągła w $x_0 \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
   Z różniczkowalnośći funkcji $f$ w $x_0$mamy $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$. Stąd $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x-x_0) + f(x)) = 0 + f(x) = f(x)$
   (b) Uwaga 8.1: Twierdzenie odwrotne do 8.1 nie jest prawdziwe, tzn nie każda funkcja ciągła w $x_0$ jest różniczkowalna w $x_0$
   Przykład: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$ jest ciągła, ale nie jest różniczkowalna w $x_0 = 0$

5. Def: Funkcja $f$ jest różniczkowalna w zbiorze $D \iff \forall_{x_0\in D} f$ jest różniczkowalna w $x_0$
   Wtedy możemy mówic o funkcji $f' : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$

6. Twierdzenie 8.2: (o działainach arytmetycznych na pochodnych)
   Jeśli $f, g : D \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne w $x_0$, to:
   (a) $f \pm g$ jest różniczkowalna w $x_0$ i $(f\pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
   (b) $fg$ jest różniczkowalna w $x_0$ i $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
   (c) $\frac{f}{g}$ jest różniczkowalna w $x_0$ i $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x))^2}$ jeśli tylko $\forall_{x\in D} g(x) \neq 0$
   (d) D: Z założenia $f, g$ są różniczkowalne w $x_0$. Z warunku koniecznego różniczkowalności $f, g$ są ciągłe w $x_0$.
   Dowód (a) jest trywialny więc pomijam
   (b) $(fg)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} g(x)\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
   (c): $(\frac{f}{g})'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(\frac{f}{g})(x)-(\frac{f}{g})(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{(x-x_0)\cdot(g(x)g(x_0))} =$
   $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{(x-x_0)\cdot(g(x)g(x_0))} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)}\cdot(g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

7. Twierdzenie 8.3 (o różniczkowaniu złożenia):
   jeśli $D_1, D_2 \in \mathbb{R}$ i $f : D_1 \to D_2$ jest różniczkowalna w $x_0 \in D_1$ i $g : D_2 \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $f(x_0) \in D_2$,to złożenie $g\circ f : D_1 \to \mathbb{R}$ jest rózniczkowalne w punkcie $x_0$ i $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$
   (a) D: $(g\circ f)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x_0+g))-g(f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x_0+g)-f(x_0)+f(x_0))-g(f(x_0))}{h}$ oznaczmy $\Delta = f(x_0+h) - f(x_0) \xrightarrow{h\to 0} f(x_0) - f(x_0) = 0$ bo $f$ jest ciągła w $x_0$
   $= \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x_0)+\Delta)-g(f(x_0))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x_0)+\Delta)-g(f(x_0))}{\Delta} \cdot \frac{\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}^{\Delta}}{h} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{g(f(x_0)+\Delta)-g(f(x_0)}{\Delta} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

8. Twierdzenie 8.4 (o różniczkowaniu funkcji odwrotnej):
   Jeśli $f$ jest ciągła i ściśle monotiniczna w pewnym **otoczeniu punktu** $\boldsymbol{x_0}$ (tzn w zbiorze $(x-\delta, x+\delta)$, gdzie $\delta > 0$) i istnieje pochodna $f'(x_0) \neq 0$, to funkcja odwrotna $f^{-1}$ jest różniczkowalna w punkcie $y_0 = f(x_0)$ i $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

(a) Dowód: Wiemy, że $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to (y_0 - \eta_1, y_0 + \eta_2)$ $(\delta, \eta_1, \eta_2 > 0)$ jest ciągła i ściśle monotoniczna ( $\implies$ $1-1 \implies$ odwracalna)
$f^{-1} : (y_0 - \eta_1, y_0 + \eta_2) \to (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ Z tw o ciągłości funkcji odwrotnej wynika, że $f^{-1}$jest funkcją ciągłą.
$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$

9. Twierdzenie 8.5 (o pochodnych funkcji elementarnych):

(a) $f :$funkcja stała, tzn $\forall_{x \in D} f(x) = c, c \in \mathbb{R} \implies \forall_{x \in D} f'(x) = 0$
$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0$
Wniosek: Z twierdzenia 8.2 i (a), $(cf(x))' = c'f(x) + cf'(x) = 0 + cf'(x) = f'(x)$

(b) $(x^n) = nx^{n-1}$, dla $(x, n) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{N}) \setminus (0, 1)$(dla $n = 1$ definiujemy $x' = 1$ bo $\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1$)
$(x^n)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k \ - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} = nx^{n-1} + 0 = nx^{n-1}$

(c) $(x^{-n})'$ dla $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$(x^{-n})' = ((\frac{1}{x})^n)' = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$

(d) $(\sin x)' = \cos x$ dla $x \in \mathbb{R}$
$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos \frac{2x+h}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos(x + h) = \cos(x)$

(e) $(\cos x)' = -\sin x$ dla $x \in \mathbb{R}$

(f) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos x}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$(\tan x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x}$

(g) $(\cot x)' = \frac{-1}{\sin x}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

(h) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ dla $x \in (0, \infty)$
$(\ln x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \ln(1 + \frac{h}{x}) = \lim_{h \to 0} \ln(1 + \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{h}})^{\frac{1}{h}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$
Ogólniej: $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
D: Dla $x < 0$, $(\ln |x|)' = (\ln -x)' = \frac{1}{-x} \cdot -1 = \frac{1}{x}$

(i) $(e^x)' = e^x$
$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(x)$ - funkcja ciągła i ściśle rosnąca i $\forall_{x \in (0, \infty)} f'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$
Z tw o pochodnej funkcji odwrotnej, $(e^{\ln x})' = x \implies (e^{\ln e^x})' = e^x \implies (e^x)' = e^x$

(j) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$ dla $x \in (0, \infty), \alpha \in \mathbb{R}$
$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$

(k) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ dla $x \in (-1, 1)$

(l) $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$ dla $x \in (-1, 1)$

(m) $(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$

(n) $(\text{arccot}\, x)' = \frac{-1}{1 + x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$
Dowody (k)-(n) wynikają bezpośrednio z twierdzenia o różniczkowaniu funkcji odwrotnej

**9. Pochodne jednostronne**

1. Na poprzednim wykładzie zakładaliśmy, że $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ i $x_0$ jest punktem wewnętrznym $D$. W pozostałych dwóch definicjach **nie** wymagamy by $x_0$ był punktem wewnętrznym $D$
   (a) Def. (pochodnej lewostronnej):
   Jeśli $\exists_{\delta>0}(x_0-\delta, x_0] \subset D$ i istnieje skończona granica $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ to nazywamy ją pochodną lewostronną $f$ w $x_0$ i oznaczamy $f'_-(x_0)$
   (b) Def. (pochodnej prawostronnej):
   Jeśli $\exists_{\delta>0}[x_0, x_0+\delta] \subset D$ i istnieje skończona granica $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0^+-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ to nazywamy ją pochodną prawostronną $f$ w $x_0$ i oznaczamy $f'_+(x_0)$
2. Twierdzenie 9.1 (warunek konieczny i dostateczny różniczkowalności):
   Funkcja $f$ jest różniczkowalna w $x_0 \iff$ istnieją $f'_-(x_0)$ i $f'_+(x_0)$ oraz $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. W przypadku różniczkowalności $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

**Pochodne wyższych rzędów**

1. Def. Pochodną $n$-tego rzędu funkcji $f$ w $x_0$ definiujemy rekurencyjnie:

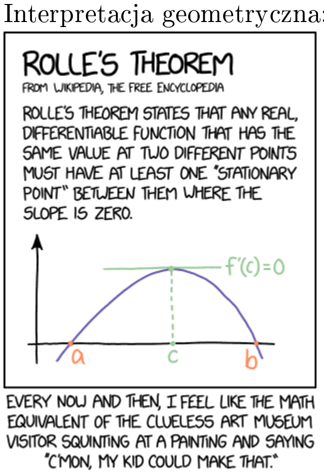
$$f^{(0)} = f(x)$$
$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$$

   Aby istniała pochodna $n$-tego rzędu $f$ w $x_0$ musi istnieć pochodna rzędu $n-1$ w pewnym otoczeniu $x_0 \implies$ muszą istnieć wszystkie poprzednie pochodne w pewnym otoczeniu punktu $x_0$
   Do oznaczanie $f^{(n)}(x_0)$ używa się także $\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$ lub $D^n f(x_0)$
   Funkcję, która ma $n$-tą pochodną w penwym przedziale będzemy nazywać $n$-krotnie różniczkowalną w tym przedziale

**Twierdzenie Rolle'a i twierdzenie Lagrange'a**

1. Twierdzenie 9.2 (Rolle'a):
   Jeśli funkcja $f$ jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna w $(a, b)$ i $f(a) = f(b)$ to $\exists_{c\in(a,b)} f'(c) = 0$

   (a) Interpretacja geometryczna:




   (b) D: Z założenia $f$ jest ciągła na $[a, b] \overset{\text{tw.Weierstrassa II}}{\implies} f$ osiąga swoje kresy na $[a, b]$,tzn $\exists_{x_m\in[a,b]} f(x_m) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ oraz $\exists_{x_M\in[a,b]} f(x_M) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$
   $\implies \forall_{x\in[a,b]} f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)$
      i. Jeśli $f(x_m) = f(x_M)$,to $\forall_{x\in[a,n]} f(x_m) = f(x) = f(x_M)$,tzn $f$ jest stała w na $[a, b] \implies \forall_{x\in(a,b)} f'(x) = 0 \implies$ za $c$ możemy wziąć dowolny punkt z $(a, b)$
      ii. Jeśli $f(x_m) \ne f(x_M)$ to $f(x_m) \ne f(a)$ lub $f(x_n) \ne f(a) \implies f(x_m) < f(a)$ lub $f(x_n) > f(a)$
      Załózmy, że $f(x_m) < f(a)$, (dowód gdy $f(x_M) > f(a)$ przebiega analogicznie)
      Mamy zatem $f(x_m) < f(a) = f(b) \implies x_m \in (a, b) \implies f$ jest różniczkowalna w punkcie $x_m \overset{\text{tw 9.1}}{\implies}$ istnieją $f'_-(x_m)$ i $f'_+x(m)$ i $f'(x_m) = f'_-(x_m) = f'_+(x_m)$
      $f'_-(x_m) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \le 0$ bo "góra" jest zawsze $\ge 0$ a dół $< 0$
      $f'_+(x_m) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \ge 0$ bo "góra" jest zawsze $\ge 0$ a dół $> 0$
      Wtedy $f'(x_m) = 0$ bo $0 \le f'_+(x_m) = f'(x_m) = f'_+(x_m) \le 0$

2. Twierdzenie 9.3 (tw. Lagrange'a o wartości średniej). Jeśli $f$ jest ciągła w $[a,b]$ i rózniczkowalna w $(a,b)$ to $\exists_{c\in(a,b)} f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
D: Weźmy $g(x) = f(x - f(a) - \frac{f(x)-f(a)}{b-a}(x-a)$. $g(a) = 0, g(b) = 0 \implies g(a) = g(b)$
Funkcja $g$ jest ciągła w $[a,b]$ i różniczkowalna w $(a,b)$. Zatem $g$ spełnia założenia tw. Rolle'a i używając tego twierdzenia otrzymujemy $\exists_{c\in(a,b)} g'(c) = 0$
$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot 1$
$\implies \exists_{c\in(a,b)} f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-1}$
Wnioski:

   (a) $\forall_{x\in(a,b)} f'(x) = 0 \iff f$ jest funkcją stałą na $(a,b)$
   $\impliedby$ Już na poprzednim wykładzie udowodniliśmy że pochodna stałej $= 0$
   $\implies$ Zakładamy, że $\forall_{x\in(a,b)} f'(x) = 0$. Weźmy dowolne $x_1, x_2 \in (a,b)$ takie, że $x_1 < x_2$. Pokażemy, że $f(x_1) = f(x_2)$,a z tego już będzie łatwo wykazać że $f$ jest stała na $(a,b)$
   Z założenia $f$ jest różniczkowalna na $(a,b) \implies$ jest ciągła na $(a,b)$
   W szczególności $f$ jest ciągła na $[x_1,x_2]$. Wtedy $\exists_{c\in(x_1,x_2)} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) = 0 \implies f(x_2) - f(x_1) = 0 \implies f(x_1) = f(x_2)$ co zachodzi dla dowolnego $x_1, x_2$, więc $f$ jest stała.

   (b) $\forall_{x\in(a,b)} f'(x) > 0 \implies f$ jest rosnąca na $(a,b)$ (nie zachodzi w drugą stronę, bo na przykład $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\, x \mapsto x^3$)
   D: Weźmy dowolne $x_1, x_2 \in (a,b)$ takie, że $x_1 < x_2$. Powtarzamy rozumowanie z dowodu powyżej, otrzymujemy $\exists_{c\in(x_1,x_2)} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) > 0 \implies f(x_2) - f(x_1) > 0 \implies f(x_2) > f(x_1)$

   (c) $\forall_{x\in(a,b)} f'(x) < 0 \implies f$ jest malejąca na $(a,b)$ (nie zachodzi w drugą stronę, bo na przykład $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\, x \mapsto -x^3$)
   D: Analogicznie do poprzedniego.

3. Twierdzenie 9.4: $\forall_{x\in(a,b)} f'(x) \geq 0 \iff f$ jest rosnąca (niemalejąca) i różniczkowalna na $(a,b)$
D: Niech $x \in (a,b)$. Z założenia $f$ jest rózniczkowalna w $x_0 \overset{\text{tw 9.1}}{\implies}$ istnieje $f'_+(x)$ i $f'(x) = f'_{+(x)}$
$f'(x) = f'_+(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ bo góra i dół $> 0$
$$\begin{cases} f \text{ jest rosnąca} \\ h > 0 \implies x + h > x \end{cases} \implies f(x+h) > f(x)$$

4. Twierdzenie 9.5: $\forall_{x\in(a,b)} f'(x) \leq 0 \iff f$ jest malejąca (nierosnąca) i różniczkowalna na $(a,b)$
Wnioski 2.(a-c) oraz twierdzenia 3,4 pozostają prawdziwe, gdy przedział ograniczone $(a,b)$ zamienimy na nieograniczone $(a,+\infty), (-\infty,b), (-\infty,+\infty)$

5. **Reguła De L'Hospitala**
Twierdzenie 9.6 (tw. de l'Hospitala):
Jeśli

$$1. x_0 \in (a,b)$$
$$2. f, g : (a,b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$$
$$3. \forall_{x\in(a,b)\setminus\{x_0\}} g(x) \neq 0 \text{ i } g'(x) \neq 0$$
$$4. \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \text{ lub } \lim_{x\to x_0} = \pm\infty$$
$$5. \text{istnieje granica (skończona lub nie ) } \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

To istnieje granica $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ oraz $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
W skrócie $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = [\frac{0}{0} \text{ lub } \frac{\text{coś}}{\pm\infty}] \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ jeśli $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ istnieje
Uwaga: Twierdzenie de l'Hostpitala jest także prawdziwe dla granic jednostronnych i granic w $\pm\infty$, z tym że w przypadku granicy w $+\infty$ musimy założyć $f, g : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne w $(0,+\infty)$. $\forall_{x\in(0,\infty)} g(x) \neq 0 \text{ i } g'(x) \neq 0$

**10. Wzór Taylora**

Przypomnienie tw. Lagrange'a : Jeśli funkcja $f$ jest ciągła na $[x_0, x]$ i różniczkowalna na $(x_0, x)$ to $\exists_{c\in(x_0,x)} f'(c) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \implies \exists_{c\in(x_0,x)} f(x) = f(x_0) + f'(x-x_0)$ - wzór ten można uogólnić

1. Twierdzenie 10.1 ( wzór Taylora z resztą Lagrange'a):
   Jeśli $f^{(n)}$ jest ciągła na $[x_0, x]$ i istnieje $f^{(n+1)}$ na $(x_0, x)$ to
   $\exists_{c\in(x_0,x)} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$
   Ostatni wyraz to $R_n(x)-$reszta w postaci Lagrange'a, suma reszty wyrazów to wielomian Taylora $T_n(x)$

   Szkic dowodu: Korzystamy z tw. Rolle'a dla funkcji $h :< x_0, x >\to \mathbb{R}$,
   $h(t) = f(x) - (f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t)^1 + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t}{n!}(x-t)^n) - \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \cdot (x-t)^{n+1}$
   $h$ spełnia założenia tw. Rolle'a : $h(x_0) = f(x) - T_n(x) - (f(x) - T_n(x)) = 0$, $h(x) = f(x) - f(x) = 0$ - $h(x_0) = h(x)$
   $h$ jest ciągła na $< x_0, x >$, bo z założenia $f^{(n+1)}$ jest ciągła na $[x_0, x]$, więc wszystkie poprzednie pochodne muszą być różniczkowalne - a więc ciągłe
   $h$ jest różniczkowalna na $(x_0, x)$ bo każdy wyraz sumowania jest różniczkowalny na $(x_0, x)$ - z założenia istnieją pochodne $f', \ldots, f^{(n+1)}$
   $h'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \cdot (n+1)(x-t)^n$
   Z tw Rolle'a otrzymujemy $\exists_{c\in(x_0,x)} h'(c) = 0 \implies \exists_{c\in(x_0,x)} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}(n+1)(x-t)^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-t)^n \implies \exists_{c\in(x_0,x)} f(x) = T_n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

   Uwaga: Wzór Taylora jest także prawdziwy dla przedziału $< x, x_0 >$
   Uwaga: Jeśli we wzorze Taylora podstawimy $x_0 = 0$ to dostaniemy wzór Maclaurina.
   Wzór Taylora jest przydatny do liczenia przybliżonych wartości wyrażeń

   (a) Przykład: Wyznaczmy przybliżenie $e$ wzorem Maclaurina:
   $f(x) = e^x$ - ma pochodne dowolnego rzędu, ciągła na $[0, \infty)$
   Wtedy $f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x}{2!} + \cdots + R_n(x)$
   Stąd $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$
   Dla pierwszych 6 wyrazów suma wynosi $\sim 2.717$

2. Twierdzenie 10.2 (wzór Taylora z resztą Peano):
   Jeśli istnieje $f^{(n)}(x_0)$ ( $\implies \exists_{\delta>0} f', \ldots, f^{(n-1)}$ istnieją w $(x-\delta, x+\delta)$), to
   $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ gdzie $R_n(x)$ to reszta w postaci Peano, gdzie $\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$, co zapiusjemy $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$
   Dowód: $\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_9)^n} = [\frac{0}{0}]$ - lecimy l'Hopitalem aż do $\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-(f^{(n-1)}(x_0)+f^{(n)}(x-x_0)}{n(n-1)\cdot 2\cdot(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{n(n-1)} \cdot (\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0)) = \frac{1}{n(n-1)}(f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)) = 0$

   Wzór Taylora z resztą Peano może być wygoniejszy do liczenia granic niż tw. de l'Hopitala.
   Rozwijamy wtedy wielomian Taylora odpowiednio żeby skorzystać z faktu, że $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$

**Badanie przebiegu zmienności funkcji**

W tej części wykładu będziemy zakładać, że $D \subset \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ i $x_0$ jest punktem wewnętrznym $D$

1. Def (ekstremów lokalnych):
   Funkcja $f$ ma w punkcie $x_0$:

   (a) maksimum lokalne, jeśli $\exists_{\delta>0}\forall_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)} f(x_0) \geq f(x)$
   (b) maksimum lokalne właściwe, jeśli $\exists_{\delta>0}\forall_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}} f(x_0) > f(x)$
   (c) minimumlokalne, jeśli $\exists_{\delta>0}\forall_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)} f(x_0) \leq f(x)$
   (d) minimumlokalne właściwe, jeśli $\exists_{\delta>0}\forall_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}} f(x_0) < f(x)$

2. Twierdzenie 11.1 (warunek konieczny ekstremum lokalnego):
   Jeśli funkcja $f$ osiąga w punkcie $x_0$ ekstremum lokalne i jest w tym punkcie różcniczkowalna, to $f'(x_0) = 0$

   D: Przeprowadzamy dla maksimum lokalnego, dla minimum dowód przebiega analogicznie)
   Zakładamy, że $f$ osiąga w $x_0$ maksimum lokalne. Wtedy $f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, $f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$
   Z założenia $f$ jest różniczkowalna w $x_0$, więc $0 \leq f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0 \implies f'(x_0) = 0$
   Uwaga - to nie jest warunek dostateczny ekstremum lokalnego - przykładowo $x^3$ nie osiąga ekstremum w $x = 0$

3. Twierdzenie 11.3 (coś się zepsuło w numeracji)(drugi warunek dostateczny istnienia ekstremum lokalnego)
Jeśli $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) \neq 0$ to w punkcie $x_0$ jest osiągane ekstremum lokalne właściwe.
Ponadto, jeśli $f''(x_0) > 0$ to jest to minimum lokalne właściwe, a jeśli $f''(x_0) < 0$ to jest to maksimum lokalne właściwe

D:Korzystając ze wzoru Taylora z resztą Peano i $n = 2$, otrzymujemy $f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+R_2(x)$
gdzie $\lim_{x\to x_0} \frac{R_2(x)}{(x-x_0)^2} = 0$
Pokażemy, że $f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + R_2(x) > f(x_0)$ dla $x \in (x - \delta, x + \delta) \setminus \{x_0\}$
Wystarczy pokazać, że $\frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + R_2(x) > 0$, czyli $\frac{f''(x_0)}{2} + \frac{R_2(x)}{(x-x_0)^2} > 0$
$\frac{R_2(x)}{(x-x_0)^2} > 0 \iff \forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D} 0 < |x - x_0| < \delta \implies |\frac{R_2(x)}{(x-x_0)^2} - 0| < \epsilon$
W szczególności dla $\epsilon = \frac{f''(x_0)}{4}$ $\exists_{\delta>0}\forall_{x\in(x-\delta,x+\delta)\setminus\{x_0\}} -\frac{f''(x_0)}{4} < \frac{R_2(x)}{(x-x_0)^2} < \frac{f''(x_0)}{4}$, więc $\frac{f''(x_0)}{2} - \frac{R_2(x)}{(x-x_0)^2} > \frac{f''(x_0)}{2} - \frac{f''(x_0)}{4} = \frac{f''(x_0)}{4} > 0$

**07.12.2020**

Do końca wykładu będziemy zakładać, że $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ i $x_0$ jest punktem wewnętrznym $D$.

1. Def. Punkt $(x_{0,} f(x_0))$ jest punktem przecięcia funkcji $f \iff$ funkcja $f$ **ma styczną w tym punkcie** i zmienia się w nim ze ściśle wklęsłej na ścisle wypukłą lub na odwrót
   L(o zachowaniu znaku funkcji ciągłej): $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest ciągła w $x_0 \in (a, b)$ i $f(x) > 0 \Longrightarrow$ istnieje $(c, d) \subset (a, b)$ takie, że $x_0 \in (c, d)$ i $\forall_{x \in (c,d)} f(x) > 0$

2. Twierdzenie 11.8 (warunek konieczny punktu przegięcia):
   Jeśli $f$ ma w $(x_{0,} f(x_0))$ punkt przegięcia i $f''(x)$ istnieje, to $f''(x_0) = 0$
   D: Przy założeniu, że istnieje $\delta > 0$ taka, że f jest dwukrotnie różniczkowalna w $(x_{0,} - \delta, x_0 + \delta)$ i $f''$ jest ciągła w $x_0$
   Dowód nie wprost. Zakładamy, że $(x_{0,} f(x_0))$ jest punktem przegięcia $f$ i $f''(x_0) \neq 0$
   Dla ustalenia uwagi przyjmiemy, że $f''(x_0) > 0$
   $\begin{cases} f'' \text{jest ciągła w } x_0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases} \overset{\text{lemat o zachowaniu znaku funkcji ciągłej}}{\Longrightarrow}$ istnieje $(c, d) \subset (x_{0,} - \delta, x_0 + \delta)$ taki, że $x_0 \in (c, d)$ i $\forall_{x \in (c,d)} f''(x) > 0$
   $\Longrightarrow$ $f$ jest ściśle wypukła w $(c, d)$ - sprzeczność z tym, że $f$ zmienia się w $(x_{0,} f(x_0))$ na ściśle wklęsłą lub na odwrót
   Uwaga: Warunek $f''(x_0) = 0$ nie jest warunkiem wystarczającym pkt. przegięcia w pkt $(x_{0,} f(x_0))$. Tzn. Może być tak, że $f''(x) = 0$ i $f$ nie ma punktu przegięcia w $(x_{0,} f(x_0))$, na przykład $f(x) = x^4$

3. Twierdzenie 11.9(warynek wystarczający punktu przegięcia):
   Jeśli funkcja $f$ ma styczną w punkcie $(x_{0,} f(x_0))$ i istnieje $\delta > 0$ taka, że $f$ jest dwukrotnie rózniczkowalna w $(x_{0,} - \delta, x_0 + \delta)$ przy czym
   $\begin{cases} \forall_{x \in (x_{0,} - \delta, x_0)} & f''(x) < 0 \\ \forall_{x \in (x_{0,}, x_0 + \delta)} & f''(x) > 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} \forall_{x \in (x_{0,} - \delta, x_0)} & f''(x) > 0 \\ \forall_{x \in (x_{0,}, x_0 + \delta)} & f''(x) < 0 \end{cases}$ to $(x_{0,} f(x_0))$ jest punktem przegięcia $f$
   D: Twierdzenie to wynika bezpośrednio z definicji punktu przegięcia i 11.5 oraz 11.6

**07.01.2020 13 i 14 Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona**

Przez cały wykład $p$ będzie oznaczać przedział

1. Def. Funkcja $F : P \to \mathbb{R}$ jest funkcją pierwotną funkcji $f : P \to \mathbb{R} \iff F$ jest różniczkowalna i $\forall_{x \in P} F'(x) = f(x)$
   np $x^2$ jest funkcją pierwotną funkcji $x$

2. Twierdzenie 13.1:
   Jeśli $F_0 : P \to \mathbb{R}$ jest funkcją pierwotną $f : P \to \mathbb{R}$ to $F : P \to \mathbb{R}$ też jest funkcją pierwotną $f : P \to \mathbb{R} \iff \exists_{C \in \mathbb{R}} \forall_{x \in P} F(x) = F_0(x) + C$
   D: $\Longrightarrow$ Zakładamy, że $F_0, F : P \to \mathbb{R}$ to funkcje pierwotne $f$,
   tzn. $\begin{cases} \forall_{x \in P} F_0'(x) = f(x) \\ \forall_{x \in P} F'(x) = f(x) \end{cases} \implies \forall_{x \in P} (F(x) - F_0(x))' = 0 \implies$ funkcja $F(x) - F_0(xb)$ jest stała na $P$ czyli
   $\exists_{C \in \mathbb{R}} \forall_{x \in P} F(x) = F_0(x) + C$
   D: $\Longleftarrow$ Zakładamy, że $\exists_{C \in \mathbb{R}} \forall_{x \in P} F(x) = F_0(x) + C$ i $F_0$ jest funkcją pierwotną $f$. Wtedy $F' = f + 0 = f$ więc $F$ też jest funkcją pierwotną $f$

3. Nie każda funkcja ma funkcję pierwotną, na przykład $f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$. Można poprowadzić dowód nie wprost z którego wynika że $F$ musiałaby być stała ale wtedy $F'$ musiałoby być wszędzie 0 skąd sprzeczność

4. Twierdzenie 13.2: Każda funkcja ciągła $f : P \to \mathbb{R}$ ma funkcję pierwotną

5. Def: Całką nieoznaczoną funkcji $f : P \to \mathbb{R}$ oznaczaną $\int f(x)dx$ nazywamy zbiór wszystkich funkcji pierwotncy funkcji $f$. Zapisujemy $\int f(x)dx = F(x) + C$ gdzie $F$ to dowolna funkcja pierwotna $f$.

6. **Podstawowe wzory na całki:**
   (a) $\int 0dx = C$
   (b) $\int 1dx = x + C$
   (c) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ dla $n \neq = 1$
   (d) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$
   (e) $\int e^x dx = e^x + C$
   (f) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
   (g) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
   (h) $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$
   (i) $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$
   (j) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
   (k) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \text{arccot}\ x + C$
   (l) Jeśli $f$ i $g$ mają funkcjie pierwotne, to $f + g$ też ma funkcję pierwotną i $\int(f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
   D: Niech $F$ i $G$ to funkcje pierwotne odpowiednio $f$ i $g$. Wtedy $(F + G)' = F' + G' = f + g \implies \int(f(x) + g(x))dx = F + G + C = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
   (m) Jeśli $f$ ma funkcję pierwotną i $A \in \mathbb{R}$, to $Af$ też ma funkcję pierwotną i $\int Af(x)dx = \begin{cases} A\int f(x)dx + C & A \neq 0 \\ C & A = 0 \end{cases}$
   (n) Przykłady:
      i. $\int \frac{3\sqrt{x}+8}{x}dx = 3\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx + 8\int \frac{1}{x}dx = 3\int x^{-1/2} + 8\int \frac{1}{x}dx = 8\ln|x| + 6x^{1/2} + C$
      ii. $\int(\cot^2 x + 1)dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

7. Twierdzenie 13.3(o całkowaniu przez części)
   Jeśli $f, g : P \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne i $f'g$ ma funkcje pierwotną, to $fg'$ też ma funkcję pierwotną i $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ z wzoru na pochodną iloczynu
   D: $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
   $\int(f(x)g(x))'dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$
   $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx = \int f(x)g'(x)dx$

8. Twierdzenie 13.4(o całkowaniu przez podstawienie)
   Jeśli $g : P_1 \to P_2$ jest różniczkowalna i $f : P_2 \to \mathbb{R}$ ma funkcję pierwotną, to $f \circ g \cdot g'$ też ma funkcję pierwotną i $\int f(g(x))g'(x)dx$, (wtedy wstawiamy $t = g(x), dt = g'(x)dx) = \int f(t)dt$
   D: Niech $F$ oznacza funkcję pierwotną $f$, tzn $\forall_{x \in P_2} F'(x) = f(x)$. Chcemy pokazać, że $F(t) = F(g(x))$ to funkcja pierwotna $f(g(x))g'(x)$
   Rzeczywiście $\forall_{x \in P_2} (F(g(x)))' = F'(g(x)g'(x) = f(g(x)g'(x)$

9. Przykłady:

   (a) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = t = \begin{cases} t = \arctan x \\ dt = \frac{1}{1+x^2}dx \end{cases} = \int tdt = \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}\arctan^2 x + C$ (dla uproszczenia zapisu $+C$ tylko na końcu)

   (b) $\int x^2 \arcsin x \, dx = \begin{cases} f(x) = \arcsin x & f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ g'(x) = x^2 & g(x) = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \end{cases} = \frac{1}{3}x^3 \arcsin x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

   $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{x^2 \cdot x}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} t = 1-x^2 \implies x^2 = 1-5 \\ dt = -2xdx \implies -\frac{1}{2}dt = xdx \end{cases} = -\frac{1}{2}\int \frac{1-t}{\sqrt{t}}dt = -\frac{1}{2}(\int t^{-\frac{1}{2}}dt - \int t^{\frac{1}{2}}dt) = -\frac{1}{2}(2t^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}) = \frac{1}{3}\sqrt{t^3} - \sqrt{t} = \frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} - \sqrt{1-x^2} + C$

   Więc: $\int x^2 \arcsin x \, dx = \frac{1}{3}x^3 \arcsin x - \frac{1}{9}\sqrt{(1-x^2)^3} + \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} + C$

10. Całki $\int e^{x^2}dx, \int \frac{1}{\ln x}dx, \int \frac{\sin x}{x}dx. \int \frac{\cos x}{x}dx, \int \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx$ nie dadzą się wyrasić za pomocą funkcji elementarnych

11. Całkowanie funkcji wymiernych $\int \frac{\text{wielomian}_1(x)}{\text{wielomian}_2(x)}\text{dx}$

   (a) Jeśli stopień wielomianu w liczniku jest większy od stopnia jest $\geq$stopniowi wielomianu w mianowniku, to wykonujemy dzielenie.

   (b) Wielomian w mianowniku rozkładamy na iloczyn wielomianów nierozkładalnych stopnia pierwszego i drugiego

   (c) Ułamek zamieniamy na sumę ułamków prostych:
   np. $\frac{x^2-3x-5}{(x-2)^3(x^2+1)^2} = \frac{A}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} + \frac{Fx+G}{x^2+1}$ (nad liniowymi piszemy stałe, nad kwadratowymi liniowe)

   (d) $\frac{x^3-2}{(x+1)x^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x^3} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x}$

   (e) Liczymy całki z ułamków prostych

      i. $\int \frac{dx}{x+a} = \begin{cases} t = x+a \\ dt = dx \end{cases} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|x+a| + C$

      ii. $\int \frac{dx}{(x+a)^3} = \begin{cases} t = x+a \\ dt = dx \end{cases} = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3}dt = -\frac{1}{2}t^{-2} = \frac{1}{-2(x+a)^2} + C$

      iii. $\int \frac{1}{x^2+6x+13}dx = \int \frac{dx}{(x+3)^2+4} = \begin{cases} t = x+3 \\ dt = dx \end{cases} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(\frac{t}{2})^2+1} = \begin{cases} w = \frac{t}{2} \\ dw = \frac{1}{2}dt \end{cases} = \frac{1}{2}\int \frac{dw}{w^2+1} = \frac{1}{2}\arctan w = \frac{1}{2}\arctan \frac{x+3}{2} + C$

      iv. $\int \frac{3x+5}{x^2+6x+13}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+13}dx - 4\int \frac{1}{x^2+6x+13}dx$

      $\int \frac{2x+6}{x^2+6x+13} = \begin{cases} t = x^2+6x+13 \\ dt = (2x+6)dx \end{cases} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln(x^2+6x+13) + C$

      v. $\int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx = \begin{cases} \arctan x & \text{dla } n = 1 \\ \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}dx & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$

      Szkic dowodu: $\int \frac{1}{(x^2+1)^n} = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^n} = \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}dx$

      $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}dx = \int \frac{x \cdot xdx}{(x^2+1)^n} = \begin{cases} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g'(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n} & g(x) = \int \frac{x}{(x^2+1)^n}dx = ... \end{cases}$

      vi. $\int \frac{3x+5}{(x^2+6x+13)^2}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+6)-4}{(x^2+6x+13)^2}dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x+6)dx}{(x^2+6x+13)^2} - 4\int \frac{1}{(x^2+6x+13)^2}dx$ (*)

      $\int \frac{(2x+6)dx}{(x^2+6x+13)^2} = \begin{cases} t = x^2+6x+13 \\ dt = (2x+6)dx \end{cases} = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}dt = -1 \cdot t^{-1} = -\frac{1}{x^2+6x+13} + C$

      $\int \frac{1}{(x^2+6x+13)^2}dx = \int \frac{1}{((x+3)^2+4)^2}dx = \frac{1}{16}\int \frac{dx}{(\frac{(X+3)^2}{4}+1)^2} = \frac{1}{16}\int \frac{dx}{((\frac{x+3}{2})^2+1)^2} = \begin{cases} t = \frac{x+3}{2} \\ dt = \frac{1}{2}dx \end{cases} = \frac{1}{16} \cdot 2\int \frac{dt}{(t^2+1)} = \frac{1}{8}(\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt) = \frac{1}{16}\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{16}\arctan t = \frac{1}{16}\frac{\frac{x+3}{2}}{(\frac{x+3}{2})+1} + \frac{1}{16}\arctan \frac{x+3}{2} + C$

      Z tego łatwo policzyć (*)

   (f) przykład: $\int \frac{x^5+3x^4+3x^3+3x^2+x+2}{x^4+x^3+x^2}dx = \int (x+2+\frac{x^2+x+2}{x^4+x^3+x^2})dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \int \frac{x^2+x+2}{x^4+x^3+x^2}dx$

   $\frac{x^2+x+2}{x^4+x^3+x^2} = \frac{x^2+x+2}{x^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$ rozwiązujemy żeby otrzymać $A = 2, B = -1, C = 1, D = 0$ i dalej:

   $\int \frac{x^2+x+2}{x^4+x^3+x^2}dx = \int (\frac{2}{x} - \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+x+1})dx = 2\int x^{-2}dx - \int x^{-1}dx + \int \frac{x}{x^2+x+1}dx = 2 \cdot (-1 \cdot x^{-1}) - \ln|x| + \int \frac{x}{x^2+x+1}dx = \frac{-2}{x} - \ln|x| + ...$

$\int \frac{x}{x^2+x+1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{1}{2}}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$

$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \begin{cases} t = x^2+x+1 \\ dt = (2x+1)dx \end{cases} = \int t^{-1}dt = \ln|t| = ln(x^2+x+1) + C$

$\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{3/4}+1}dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}))^2+1}dx = \begin{cases} t = \frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}) \\ dt = \frac{2}{\sqrt{3}}dx \end{cases} = \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

I już mamy całki ułamków prostych i dalej mi się nie chce pisać bo to tylko wpisanie ich sumy

12. Całkowanie wyrażeń trygonometrycznych

(a) potęga nieparzysta:

$\int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 \cdot \cos x\,dx = \int (\cos^2 x)^2 \cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x\,dx = \begin{cases} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{cases} = \int (1-t^{2)^2} dt = \int (1-2t^2+t^4)dt = t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin x + C$

(b) $\int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int (\frac{1-\cos 2x}{2})^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx = \frac{1}{4}(x - 2\int \cos 2x dx + \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)dx) = \frac{1}{4}(x - 2\int \cos 2x dx + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\int \cos 4x dx) = \frac{1}{4}(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$

$\int \cos 2x dx = \begin{cases} t = 2x \\ dt = 2dx \end{cases} = \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t = \frac{1}{2}\sin 2x + C$

(c) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$

(d) $\int G(\sin x, \cos x)dx$
jeśli $G(-\sin x, \cos x) = -G(\sin x, \cos x)$ podstawiamy $t = \cos x$
jeśli $G(\sin x, -\cos x) = -G(\sin x, \cos x)$ podstawiamy $t = \sin x$
jeśli $G(-\sin x, -\cos x) = -G(\sin x, \cos x)$ podstawiamy $t = \tan x$
podstawienie uniwersalne: $t = \tan\frac{x}{2}$