

08.10.2019

Barbara Roszkowska-Lech

www.mini.pw.edu.pl/~barosz

barosz@mini.pw.edu.pl

521-

2 kolokwia - po 16 punktów

24 pkt z kolokwiów zwalnia z części zadaniowej egzaminu - 60pkt zadaniowa, 20pkt teoretyczna
zadania weekendowe

kolokwia - piątek 18.00 29.11, 24.01

1. $(f \circ g)(i) = f(g(i))$

(a) $f \circ id = f = id \circ f$

(b) $f^{-1} \circ f = id$

2. Grupa (X, \circ)

(a) $\forall x, y \in X \ x \circ y \in G$

i. Wewnętrzność

(b) $\forall a, b, c \in G \ (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

i. Łączność

(c) $\exists e \in X \ \forall x \in X \ x \circ e = e \circ x = x$

i. Element neutralny

(d) $\forall x \in X \ \exists x' \in X \ x \circ x' = x' \circ x = e$

i. Odwracalność

3. Rozwiązywanie układów n równań z n niewiadomymi

(a) Na razie - współczynniki układów równań to liczby rzeczywiste

(b) Def. Układ m równań z niewiadomymi x_1, \dots, x_n

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

na przykład

$$2x + 3y - 5z = 2$$

$$x + 2y - 3z = 1$$

(c) Rozwiązanie: $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$, tj $\forall_i a_{i1}s_1 + \dots + a_{in}s_n = b_i$

i. $(\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R})$

A. $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

(d) Układ sprzeczny - układ który nie ma rozwiązań

(e) $\begin{vmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{vmatrix}$ - kolumna wyrazów wolnych

i. Jeśli $\forall_i b_i = 0 \rightarrow$ układ U nazywamy jednorodnym - układ jednorodny zawsze ma rozwiązania zerowe

$$2x + 3y = 8$$

$$x + 2y = 7$$

potem

$$r_1 - 2r_2 \quad : x + 2y = 7$$

$$r_1 - r_2 \quad : -y = -6$$

potem

$$r_1 + 2r_2 \quad : x = -5$$

$$-r_2 \quad : y = 6$$

(f) Dwa układy równań są równoważne gdy mają te same zbiory rozwiązań

i. Lemat: Następujące operacje przekształcają układ równań na układ równoważny.

- A. Zamiana kolejności dwóch równań
- B. Do jakiegoś równania dodajemy inne równanie pomnożone przez stałą
- C. Mnożenie równania przez stałą inną od zera

$$x + 2y - 3z + t = 1$$

$$2x - y + z - t = 5$$

potem

$$r_1 - 2r_2 \quad x + 2y - 3z + t = 1$$

$$: \quad -5y + 7z - 3t = 3$$

potem

$$: \quad -5y + 7z - 3t = 3$$

$$\frac{r_2}{5} \quad -y + \frac{7}{5}z - \frac{3}{5}t = \frac{3}{5}$$

potem

$$: \quad \text{itd itp każdy umie}$$

potem

$$x = \frac{11}{5} + \frac{z}{5} + \frac{t}{5}$$

$$y = \frac{-3}{5} + \frac{7}{5}z + \frac{3}{5}t$$

$$z, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Rozw} \quad \left\{ \left(\frac{11}{5} + \frac{z}{5} + \frac{t}{5}; \frac{-3}{5} + \frac{7}{5}z + \frac{3}{5}t, z, t \right) \mid z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

(g) U' :

$$x_{j_1} = c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n + d_1$$

...

$$x_{j_k} = c_{k1}x_1 + \dots + c_{kn}x_n + d_k$$

dla $j_1 < \dots < j_k$ oraz x_1, \dots, x_{j_k} nie występują po prawej stronie U'

(h) x_1, \dots, x_{j_k} - zmienne zależne, $x_i : i \notin \{j_1, \dots, j_k\}$ - zmienne niezależne (parametry)

(i) Jeśli U' jest równoważny U to U' nazywamy rozwiązaniem ogólnym układu U

- i. Każde podstawienie ciągu $n - k$ liczb za parametry i wyliczeniu pozostałych x_j daje rozwiązanie
- ii. Różnym ciągom parametrów odpowiadają różne rozwiązania
- iii. Każde rozwiązanie można otrzymać w ten sposób