30.10.2019

1. Własności dla X - przestrzeń, $A : I \to P(X)$, $B : I \to P(X)$,$C-$zbiór
    (a) Jeśli $i_0 \in I$, to $A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$
    (b) Jeśli $i_0 \in I$, to $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_{i_0}$
    (c) Jeżeli $\forall_{i \in I} A_i \subseteq C$,to $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq C$
    (d) Jeżeli $\forall_{i \in I} C \subseteq A_i$,to $C \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$
        i. D: Niech $x \in C \implies \forall_{i \in I} x \in A_i \implies x \in \bigcap_{i \in I} A_i$
    (e) $\bigcup_{i \in I}(A_i \cup B_i) = (\bigcup_{i \in I} A_i) \cup (\bigcup_{i \in I} B_i)$
    (f) $\bigcap_{i \in I}(A_i \cap B_i) \subseteq (\bigcap_{i \in I} A_i) \cap (\bigcap_{i \in I} B_i)$
        i. D:$x \in \bigcap_{i \in I}(A_i \cap B_i) \iff \forall_{i \in I} x \in A_i \cap B_i \iff \forall_{i \in I}(x \in A \wedge x \in B) \iff (x \in \bigcap_{i \in I} A_i) \wedge (x \in \bigcap_{i \in I} B_i) \iff x \in (\bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{i \in I} B_i)$
    (g) $\bigcup_{i \in I}(A_i \cap B_i) \subseteq (\bigcup_{i \in I} A_i) \cap (\bigcup_{i \in I} B_i)$
        i. D:$x \in \bigcup_{i \in I}(A_i \cap B_i) \implies \exists_{i \in I} x \in A_i \cap B_i \implies \exists_{i \in I}(x \in A_i \wedge x \in B_i) \implies (\exists_{i \in I} a \in A_i) \wedge (\exists_{i \in I} x \in B_i) \implies x \in \bigcup_{i \in I} A_i \wedge x \in \bigcup_{i \in I} B_i \implies x \in (\bigcup_{i \in I} A_i) \cap (\bigcup_{i \in I} B_i)$
    (h) $(\bigcap_{i \in I} A_i) \cup (\bigcap_{i \in I} B_I) \subseteq \bigcap_{i \in I}(A_i \cup B_i)$, Inkluzja przeciwna nie zachodzi
    (i) $-\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} -A_i$
        i. D: $x \in -\bigcup_{i \in I} A_i \iff x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \iff \neg(x \in \bigcup_{i \in I} A_i) \iff \neg(\exists_{i \in I} x \in A_i) \iff \forall_{i \in I} \neg(x \in A_i) \iff x \in \bigcap_{i \in I} -A_i$
    (j) $-\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} -A$
    (k) Jeżeli $\forall_{i \in I} A_i \subseteq B_i$to $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$ oraz $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i$
    (l) $\bigcup_{i \in I}(C \cap A_i) = C \cap \bigcup_{i \in I} A_i$
        i. D: $x \in \bigcup_{i \in I}(C \cap A_i) \iff \exists_{i \in I} x \in C \cap A_i \iff \exists_{i \in I}(x \in C \wedge x \in A_i) \iff x \in C \wedge \exists_{i \in I} x \in A_i \iff x \in C \wedge x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff x \in C \cap \bigcup_{i \in I} A_i$
    (m) $\bigcap_{i \in I}(C \cup A_i) = C \cup (\bigcap_{i \in I} A_i)$
    (n) Jeżeli $J \subseteq I$ to $\bigcup_{j \in J} A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ oraz $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{j \in J} A_j$
        i. D: $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \implies \forall_{i \in I} x \in A_i \implies \forall_{j \in J} x \in A_j \implies x \in \bigcap_{j \in J} A_j$
    (o) $\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset$
        i. D: Przypuśćmy, że istnieje $x \in \bigcup_{i \in \emptyset} A_i$, to $\exists_{i \in \emptyset} x \in A_i \iff \exists_i i \in \emptyset \wedge x \in A_i$, ale $i \in \emptyset$ to zdanie fałszywe stąd sprzeczność
    (p) $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = X$
    D: $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall_{i \in \emptyset} x \in A_i \iff \forall_i i \in \emptyset \implies x \in A_i \iff x \in X$

2. Indeksowanie dwoma indeksami I, J - zbiory indeksów$C : I \times J \to P(X), (i, j) \mapsto c_{ij} = C(i, j)$
   $x \in \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} C_{ij} \iff \exists_{j \in J} x \in \bigcap_{i \in I} C_{ij} \iff \exists_{j \in J} \forall_{i \in I} x \in C_{ij}$
   Analogicznie definiujemy $\bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} C_{ij}$ oraz $\bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I} C_{ij}$ oraz$\bigcap_{j \in J} \bigcap_{i \in I} C_{ij}$
   Własności: $C : I \times J \to P(X)$
    (a) $\bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I} C_{ij} = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} C_{ij} \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} C_{ij}$
    (b) $\bigcap_{j \in J} \bigcap_{i \in I} C_{ij} = \bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J} C_{ij} \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} C_{ij}$
    (c) $\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} C_{ij} \subsetneqq \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} C_{ij}$
        i. $x \in \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} C_{ij} \iff \exists_{i \in I} \forall_{j \in J} x \in C_{ij} \implies \forall_{j \in J} \exists_{i \in I} x \in C_{ij} \iff x \in \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} C_{ij}$

3. Nieskończone rodziny indeksowane. $I = J = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}^2$
    (a) Dla każdego $a, b \in \mathbb{R}$, niech $C_{ab} = \{< x, y > \in \mathbb{R}^2 : y \leq ax + b\}$
    $\underline{\bigcup_{a \in \mathbb{R}} C_{ab} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times (b, +\infty)}$
    $\bigcup_{b \in \mathbb{R}} C_{ab} = \mathbb{R}^2$
    $\bigcap_{a \in \mathbb{R}} C_{ab} = \{0\} \times (-\infty, b)$
    $\bigcap_{b \in \mathbb{R}} C_{ab} = \emptyset$
    $\bigcap_{b \in \mathbb{R}} \bigcup_{a \in \mathbb{R}} C_{ab} = \bigcap_{b \in \mathbb{R}}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times (b, +\infty)) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$
    $\bigcup_{b \in \mathbb{R}} \bigcap_{a \in \mathbb{R}} C_{ab} = \bigcup_{b \in \mathbb{R}}(\{0\} \times (-\infty, b)) = \{0\} \times \mathbb{R}$