

06.11.2019

Własności funkcji ciągłych. Jednostajna ciągłość funkcji

1. Def. Mówimy, że funkcja $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ ma własność Darboux jeśli $f(a) \neq f(b) \implies \forall c$ leżącego pomiędzy $f(a)$ i $f(b)$ $\exists x_0 \in (a, b) f(x_0) = c$

2. Twierdzenie 7.1: Każda funkcja ciągła $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ ma własność Darboux

3. Twierdzenie 7.2 (Weierstrassa I)

Każda funkcja ciągła $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona, tzn $\exists K \in \mathbb{R} \forall x \in]a, b[|f(x)| \leq K$

Uwaga - W powyższym twierdzeniu założenie, że dziedziła funkcji jest przedziałem domkniętym i ograniczonym - musi być przedziałem domkniętym

(a) Dowód nie wprost. Zakładamy, że $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła ale nie jest ograniczona, tzn

$\forall K \in \mathbb{R} \exists x \in]a, b[|f(x)| > K$. W szczególności biorąc $K = n$ gdzie $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in]a, b[|x_n| > n$. Zatem mamy ciąg $\{x_n\}$, który jest ograniczony (bo $x_n \in]a, b[$)

$\xrightarrow{\text{tw. B-W}}$ ciąg $\{x_n\}$ zawiera podciąg zbieżny, oznaczmy $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$. Wtedy $x_0 \in]a, b[$, bo $\forall k \in \mathbb{N} a \leq x_{n_k} \leq b$ i z tw. o przechodzeniu do granicy w nierównościach otrzymujemy $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in]a, b[$

Funkcja f jest ciągła na $]a, b[\implies$ w szczególności jest ciągła w pkt $x_0 \in]a, b[\xLeftrightarrow{(\text{CH})} \forall \{\tilde{x}_n\} \subset]a, b[\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n) = f(x_0)$

W szczególności $\{x_n\} \subset]a, b[\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) \iff \forall \epsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq k_0 |f(x_{n_k}) - f(x_0)| < \epsilon$

Dla $\epsilon = 1$ mamy $\exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq k_0 |f(x_{n_k}) - f(x_0)| < 1$ (*)

$\forall k \geq k_0 |f(x_{n_k})| = |f(x_{n_k}) - f(x_0) + f(x_0)| \leq |f(x_{n_k}) - f(x_0)| + |f(x_0)| \stackrel{(*)}{<} 1 + |f(x_0)|$

Sprzeczność z $\forall n \in \mathbb{N} |f(x_n)| > n \implies \forall k \in \mathbb{N} |f(x_{n_k})| > n_k$