08.10.2019
Barbara Roszkowska-Lech
www.mini.pw.edu.pl/~barosz
barosz@mini.pw.edu.pl
521-
2 kolokwia - po 16 punktów
24 pkt z kolokwiów zwalnia z części zadaniowej egzaminu - 60pkt zadaniowa,20pkt teoretyczna
zadania weekendowe
kolokwia - piątek 18.00 29.11,24.01

1. $(f \circ g)(i) = f(g(i))$
   (a) $f \circ id = f = id \circ f$
   (b) $f^{-1} \circ f = id$
2. Grupa $(X, \circ)$
   (a) $\forall_{x,y \in X} x \circ y \in G$
      i. Wewnętrzność
   (b) $\forall_{a,b,c \in G} (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
      i. Łączność
   (c) $\exists_{e \in X} \forall_{x \in X} x \circ e = e \circ x = x$
      i. Element neutralny
   (d) $\forall_{x \in X} \exists_{x' \in X} x \circ x' = x' \circ x = e$
      i. Odwracalność
3. Rozwiązywanie układów n równań z n niewiadomymi
   (a) Na razie - współczynniki układów równań to liczby rzeczywiste
   (b) Def. Układ m równań z niewiadomymi $x_1, ..., x_n$
   $a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1$
   $a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n = b_2$
   ...
   $a_m x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m$
   na przykład
   $2x + 3y - 5z = 2$
   $x + 2y - 3z = 1$
   (c) Rozwiązanie to taki zbiór $(s_1, ..., s_n) \in \mathbb{R}^n$,tj $\forall_i a_{i1}s_1 + ... + a_{in}s_n = b_i$
      i. Definicja n-iloczynu kartezjańskiego
      ii. $(\mathbb{R}^n = \{(x_1, .., x_n)\, x_i \in \mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$
         A. $A \times B = \{(a, b)\, a \in A, b \in B\}$
   (d) Układ sprzeczny - układ który nie ma rozwiązań
   (e) $\begin{vmatrix} b_1 \\ ... \\ b_m \end{vmatrix}$- kolumna wyrazów wolnych
      i. Jeśli $\forall_i b_i = 0 \rightarrow$układ U nazywamy jednorodnym - układ jednorodny zawsze ma rozwiązania zerowe
   $2x + 3y = 8$
   $x + 2y = 7$
   potem
   $r_1 - 2r_2 \quad : x + 2y = 7$
   $r_1 - r_2 \quad : -y = -6$
   potem
   $r_1 + 2r_2 \quad : x = -5$
   $-r_2 \quad : y = 6$
   (f) Dwa układy równań są równoważne gdy maja te same zbiory rozwiązań

i. Lemat: Następujące operacje przekształcają układ równań na układ równoważny.

A. Zamiana kolejności dwóch równań

B. Do jakiegoś równania dodajemy inne równanie pomnożone przez stałą

C. Mnożenie równania przez stałą inną od zera

$x + 2y - 3z + t = 1$

$2x - y + z - t = 5$

potem

$r_1 - 2r_2$ $\quad x + 2y - 3z + t = 1$

: $\quad -5y + 7z - 3t = 3$

potem

: $\quad -5y + 7z - 3t = 3$

$\frac{r_2}{5}$ $\quad -y + \frac{7}{5}z - \frac{3}{5}t = \frac{3}{5}$

potem

: itd itp każdy umie

potem

$x = \frac{11}{5} + \frac{z}{5} + \frac{t}{5}$

$y = \frac{-3}{5} + \frac{7}{5}z + \frac{3}{5}t$

$z, t \in \mathbb{R}$

Rozw $\quad \{(\frac{11}{5} + \frac{z}{5} + \frac{t}{5}; \frac{-3}{5} + \frac{7}{5}z + \frac{3}{5}t, z, t)\, z, t \in \mathbb{R}\}$

(g) U' :

$x_{j1} = c_{11}x_1 + ... + c_{1n}x_n + d_1$

...

$x_{jk} = c_{k1}x_1 + ... + c_{kn}x_n + d_k$

dla $\quad j_1 < ... < j_k$ oraz $x_1, ..., x_{jk}$ nie występują po prawej stronie U'

(h) $x_1, ..., x_{jk}$ - zmienne zależne , $x_i : i \notin \{j_1, ..., j_k\}$ - zmienne niezależne (parametry)

(i) Jeśli U' jest równoważny U to U' nazywamy rozwiązaniem ogólnym układu U

i. Każde podstawienie ciągu $n - k$ liczb za parametry i wyliczeniu pozostałych x_j daje rozwiązanie

ii. Różnym ciągom parametrów odpowiadają różne rozwiązania

iii. Każde rozwiązanie mozna otrzymać w ten sposób

15.10.2019

1. :

$$2x_1+3x_2+x_3+2x_4=1$$
$$4x_1+6x_2+3x_3+2x_4=3$$
$$6x_1+9x_2+5x_2+2x_4=5$$

2. :

$$\begin{bmatrix}2&3&1&2\\4&6&3&2\\6&9&5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2&3&1&2\\0&0&1&-2\\0&0&2&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2&3&0&4\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&\frac{3}{2}&0&2\\0&0&1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$x_1+\tfrac{3}{2}x_2+2x_4=0$$
$$x_3-2x_4=1$$

: Rozwiązanie $=\{(-\frac{3}{2}x_2-2x_4\,,\,x_2,1+2x_4\,,\,x_4):\,x_2,x_4\in\mathbb{R}\}$

3. Zbiór K zawierający co najmniej dwa elementy nazywamy ciałem, jeśli
   (a) $K\times K\rightarrow K\quad(x,y)\rightarrow x\oplus y$
   (b) $K\times K\rightarrow K\quad(x,y)\rightarrow x\odot y$
   (c) Wybierane są dwa elementy K - element zerowy oznaczamy 0, element jedynkowy 1
      i. Spełnione są następujące warunki dla każdych $a,b,c\in K$
         A. $a\oplus(b\oplus c)=(a\oplus b)\oplus c$ - łączność
         B. $a\oplus b=b\oplus a$ - przemienność
         C. $0\oplus a=a$ - element neutralny
         D. $\forall_{a\in K}\exists_{p\in K}a\oplus p=0$ - istnienie elementu przeciwnego
         E. $a\odot(b\odot c)=(a\odot b)\odot c$ - łączność
         F. $a\odot b=b\odot a$ - przemienność
         G. $1\odot a=a$ - element neutralny
         H. $\forall_{a\in K\setminus\{0\}}\exists_{p\in K}a\odot p=1$ - istnienie elementu odwrotny
         I. $(a\oplus b)\odot c=(a\odot c)\oplus(b\odot c)$
   (d) Przykłady - $K=\mathbb{R}$ $(\mathbb{R},+,\cdot,0,1)$, $(\mathbb{C},+,\cdot,0,1)$
      i. $\{Z_2,+_2,\cdot_2,0,1\}$ - $\begin{array}{ccc}+_2&0&1\\0&0&1\\1&1&0\end{array}$ (xor) oraz $\begin{array}{ccc}\cdot_2&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{array}$ (koniunkcja)
   (e) Def. K ciało. Podzbiór $L\subset K$ nazywamy podciałem K jeśli dla dowolnych $a,b\in L$
      i. $a+b\in L,\ a\cdot b\in L,\ -a\in L,\ a^{-1}\in L$
      ii. Przykład: $Z_n=\{0,1,\dots,n-1\}$
         A. tzn $a+_n b:=(a+b)\%n$
         B. $a\cdot_n b:=(a\cdot b)\%n$
         C. Dla na przykład Z_6 nie zawsze spełniona jest odwracalność
      iii. Kiedy $(Z_n,+_n,\cdot_n,0,1)$ jest ciałem?
      iv. Kiedy $\forall_{k\in Z_n}k\in Z_n$ma element odwrotny?

4. Def. Macierzą $m\times n$ (o m wierszach i n kolumnach) o wyrazach ze zbioru X nazywamy
   (a) $A=\begin{vmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{m1}&\dots&a_{mn}\end{vmatrix}$, $a_{ij}\in X$, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$
   (b) Formalnie: $A:\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots n\}\rightarrow X$, $(i,j)\mapsto a_{ij}=A(i,j)$

5. $M_n^m(x)$- zbiór wszystkich macierzy $m\times n$ o wspólnym X
   (a) $U:\begin{array}{c}a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1\\\vdots\\a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n=n_m\end{array}$ - macierz współczynników układu $A=\begin{vmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{m1}&\dots&a_{mn}\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}b_1\\\vdots\\b_m\end{vmatrix}$

6. Def. $A \in M_n^m(K)$ Operacjami elementarnymi macierzy A nazywamy
   (a) Dodanie do wiersza innego przemnozonego przez $a \in K$ $(r_i + ar_j)$
   (b) $r_i \leftrightarrow r_i$
   (c) ar_i , $a \neq 0$
7. Formalna definicja - jak się macierz ułoży w takie jakby schodki to jest postać schodkowa
   (a) Mówimy, że macierz $A \in M_n^m(K)$ jest w postaci schodkowej, jeśli:
      i. Każdy wiersz zerowy w A znajduje się ponizej każdego wiersza niezerowego
      ii. Dla każdego i>1 pierwszy od lewej $\neq 0$ wyraz w i-tym wierszu znajduje się w kolumnie na prawo od pierwszego $\neq 0$ wyrazu $i - 1$ wiersza
      iii. Macierz jest w **zredukowanej** postaci schodkowej, jeśli jest w postaci schodkowej i w każdym niezerowym $\neq 0$ wierszu pierwszy $\neq 0$ wyraz to 1, i jest on jedynym różnym od zera wyrazem w swojej kolumnie
8. Niech K ciało. Każda $\neq 0$ macierz $A \in M_n^m(K)$ jest równoważna (A jest równoważne B , $A \approx B$ jeśli z A możemy otrzymać B za pomocą skończonej liczby operacji elementarnych) macierzą w postaci schodkowej i z macierzą w postaci schodkowo zredukowanej.
   (a) Z tego wynika, że każdy układ równań o współczynnikach w K ma rozwiązanie

22.10.2019

1. Przypomnienie co to macierz schodkowa
2. Twierdzenie: Każda macierz $A \in M_m^n(K)$jest równoważna z macierzą w postaci schodkowej (potrzebne operacje a,b) oraz z macierzą w postaci schodkowej zredukowanej (a,b,c)
   (a) $r_i \leftrightarrow r_j$
   (b) $r_i + ar_j$
   (c) $a \neq 0: \ ar_i$
   (d) Wniosek - Każdy niesprzeczny układ równań ma rozwiązanie
   (e) Dowód:
      i. Dla macierzy zerowej - OK - na przykład $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$
      ii. Indukcja: $A \neq 0$
         Jeden wiersz - od razu postać schodkowa
         ZJ - A ma m wierszy , jest niezerowa, jest w postaci schodkowej
         : Możemy zrobić algorytm, dla którego jeśli $A_m$jest w postaci schodkowej to otrzymamy z A_{m+1} postać schodkową. Zerujemy odpowiednie kolumny ostatniego wiersza używając wierszy z A_m. Jeśli jakaś kolumna nie dała się wyzerować to wstawiamy wiersz w odpowiednie miejsce. Jak mamy schodkową to łatwo można zrobić schodkową zredukowaną z c. Mamy schodki. Koniec dowodu.
3. Definicja: Wielomianem zmiennej x o współczynnikach w K nazywamy wyrażenie $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots a_n \in K$
   (a) Każdy wielomian f wyraża funkcję $f : K \to K$, $s \mapsto a_0 + a_1s + \cdots + a_ns^n$. f nazywamy funkcją wielomianową.
      i. Pierwiastkiem wielomianu nazywamy $s \in K : f(s) = 0$
      ii. $K = \mathbb{R} \vee \mathbb{C} \vee \mathbb{Q}$
   (b) Przykład: $K = Z_2 = \{0, 1\}$
      i. $|\{f : f : Z_2 \to Z_2\}| = 4$. W Z_2, różne wielomiany oznaczają tą samą funkcję, na przykład $x^2 + x + 1$ oraz $x^3 + x + 1$
      ii. Ciało w którym każdy wielomian n-tego stopnia ma n pierwiastków, to ciało algebraicznie domknięte.
   (c) Zasadnicze twierdzenie algebry: Ciało liczb zespolonych jest ciałem algebraicznie domkniętym. To znaczy, że każdy wielomian o n współczynnikach w tym ciele ma n pierwiastków. $\mathbb{R}$ nie jest algebraicznie domknięte
4. $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}$ $A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to K, \quad (i, j) \mapsto A(i, j)$ czyli (a_{ij}) (i - wiersz, j - kolumna)
   (a) $r_i(A) = [a_{i1}, \ldots, a_{in}]$, $c^j(A) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$
   (b) $A_{(2,3)}^{(3,5,7)}$ bierze trzecią, piątą i siódmą kolumnę, z tylko drugim i trzecim rzędem.
   (c) $0_m^n = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$
   (d) Macierz kwadratowa - $m = n$
   (e) $\begin{bmatrix} x & & \\ & x & \\ & & x \end{bmatrix}$ - główna przekątna
   (f) Jeśli poniżej głównej przekątnej same zera - górna trójkątna, na odwrót - dolna trójkątna, jeśli na górze i na dole same zera- diagonalna, jeśli dodatkowo na głównej przekątnej same jedynki - macierz jednostkowa
   (g) Macierze możemy dodać, jeśli ich wymiary się zgadzają: $(A + B)(i, j) = A(i, j) + B(i, j)$
   (h) $-A : (-A)(i, j) = -(A)(i, j)$

(i) $A \in M_m^n, B \in M_m^1 : \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \in M_m^1$

   i. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

(j) $A \in M_m^n,\ B \in M_n^k :\ A \cdot B \in M_m^k$

   i. $c^i(A \cdot B) = A \cdot c^i(B)$
   ii. więc $(A \cdot B)(i,j) := \sum_{s=1}^{n} A(i,s) \cdot B(s,j) = r_i(A)c^j(B)$
   iii. $r_j(AB) = r_j(A)B$
   iv. $c^i(AB) = A \cdot c^i(B)$
   v.

29.10.2019
$A(row, column)$, $A \in M_{rows}^{columns}$

1. $A \in M_m^n(K)$, $B \in M_n^p(K)$
   (a) $AB \in M_m^p(K)$
   (b) $A \cdot B(i,j) \stackrel{def.}{=} \sum_{k=1}^{n} A(i,k) \cdot B(k,j)$
      i. $c^j(A \cdot B) = Ac^j(B)$
      ii. $r_i(A \cdot B) = r_i(A) \cdot B$
   (c) Mnożenie macierzy nie musi być przemienne - zazwyczaj nie jest
   (d) Przykład - $A, B \in M_2^2(K)$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,$B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,$A \cdot B \neq B \cdot A$
2. Własności sumy i iloczynu - Niec $A, A', A'' \in M_m^n(K)$,$B, B \in M_n^p(K)$,$C \in M_p^r(K)$,$\lambda \in K$
   (a) $(A + A') + A'' = A + (A' + A'')$
   (b) $A + A' = A' + A$
   (c) $A + (-A) = 0_m^n$
   (d) $A + 0_m^n = A$
   (e) $(AB)C = A(BC)$
   (f) $(A + A')B = AB + A'B$
   $A(B + B') = AB + AB'$
      i. D: $[(A + A')B](i,j) = \sum_{k=1}^{n}(A + A')(i,k) \cdot B(k,j) = \sum_{k=1}^{n}(A(i,k) + A'(i,k)) \cdot B(k,j) = \sum_{k=1}^{n} A(i,k) \cdot B(k,j) + \sum_{k=1}^{n} A'(i,k) \cdot B(k,j) = AB(i,j) + A'B(i,j) = (AB + A'B)(i,j)$
   (g) $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$
   (h) $I_m A = A = AI_m$
3. Macierz transponowaną do $A \in M_m^n(K)$ nazywamy macierz $A^\top \in M_n^m(K)$, taką że $A^\top(i,j) = A(j,i)$
   (a) Przykład $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ $, A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$
   (b) $(A^\top)^\top = A$
   (c) Def. Jeśli $A \in M_m^n(K)$ i $A = A^\top$to A nazywamy macierzą symetryczną. Jeśli $A = -A^\top$,to A nazywamy macierzą antysymetryczną
      i. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ - macierz symetryczna
      ii. $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ - macierz antysymetryczna (muszą być zera na przekątnej)
4. Własności operacji transponowania. $A, B \in M_m^n(K)$, $C \in M_m^p(K)$, $\lambda \in K$
   (a) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$
   (b) $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$
   (c) $(A^\top)^\top = A$
   (d) $I_n^\top = I_n$
   (e) $(AC)^\top = C^\top A^\top$
      i. D: $(AC)^\top(i,j) = (AC)(j,i) = \sum_{k=1}^{n} A(j,k) \cdot C(k,i) = \sum_{k=1}^{n} A^\top(k,j) \cdot C^\top(i,k) = \sum_{k=1}^{n} C^\top(i,k) \cdot A^\top(k,j) = (C^\top A^\top)(i,j)$

A teraz pora przejść do prawdziwej algebry liniowej: Przestrzenie wektorowe.

Przestrzenie wektorowe (liniowe)

1. Def. Przestrzeń wektorową nad ciałem K nazywamy zbiór $V \neq \emptyset$ z odwzorowaniami:

   $V \times V \to V: \ (u, v) \mapsto u + v$ - dodawanie wektorów

   $K \times V \to V \ (a, v) \mapsto a \cdot v$- mnożenie wektora przez skalar
   Oraz z wyróżnionym elementem $\mathbb{O} \in V$ (wektor zerowy), to znaczy dla każdych $u, v, u \in V, a, b \in K$

   (a) $u + (v + u) = (u + w) + v$
   (b) $u + v = v + u$
   (c) $\mathbb{O} + u = u$
   (d) $\forall_{u \in V} \exists_{u'} u + u' = \mathbb{O}$
   (e) $a \cdot (b \cdot u) = (a \cdot b) \cdot u$
   (f) $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$
       $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$
   (g) $1 \cdot v = v$

   Oznaczamy $V[K]$
   Przykłady przestrzeni liniowych:

   (a) $\mathbb{R}^2 = \{[x, y] : x, y \in \mathbb{R}\}$
   (b) $\mathbb{R}^n = \{[x_1, \ldots, x_n] : \forall_i x_i \in \mathbb{R}\}$ - wtedy $[x_1, \ldots x_n] + [y_1, \ldots, y_n] = [x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n]$ oraz $\lambda[x_1, \ldots, x_n] = [\lambda x_1, \ldots \lambda x_n]$
   (c) K^n- przestrzeń liniowa nad K
   (d) $L < K$ - L podciało K: $\mathbb{R}$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$, K nad L
   (e) $\mathbb{R}$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$, K nad K
   (f) $V = M_m^n(K)$ - przestrzeń liniowa nad K
   (g) Wielomiany: $K[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n : \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in K\}$
       $\lambda(a_0 + \cdots + a_n x^n) = \lambda a_0 + \cdots + \lambda a_n x^n$
       $K[x]$ to przestrzeń liniowa nad ciałem K
   (h) $Map(X, K) = \{f : \ f : \ X \to K\}$ - K ciało, X niepusty zbiór

2. Def. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K
   Niepusty podzbiór $U \subset V$ nazywamy podprzestrzenią przestrzeni V, jeśli dla każdych $u, v \in U$ oraz dla dowolnego $a \in K$ $u + v \in U, \ au \in U$

   (a) $U < V :$ Jeśli $U < V$ to $\mathbb{O} \in U$
   (b) Trywialne podprzestrzenie $\{\mathbb{O}\} < V$, $V < V$
   (c) $\mathbb{R}^2 < \mathbb{R}^3, K_{n-a}[x] < K_n$ dla $n, a \in \mathbb{N}_+, n > a$
   (d) Rozwiązania układu równań są przestrzenią wektorową

3. V - przestrzeń liniowa nad K

   (a) $a \cdot v = \mathbb{O} \iff a = 0 \lor v = 0$

Algebra liniowa z geometrią dla informatyków - konspekt wykładu 2018/19

Barbara Roszkowska -Lech

Październik 2018

4 Przestrzenie wektorowe

Definicja 4.1. *Przestrzenią wektorową (liniową) nad ciałem K nazywamy zbiór V z odwzorowaniami*

$$V \times V \to V \quad (u, v) \mapsto u + v \quad \text{zwanym dodawaniem wektorów},$$

$$K \times V \to V \quad (a, v) \mapsto a \cdot v \quad \text{zwanym mnożeniem wektora przez skalar},$$

*oraz z wyróżnionym elementem w V zwanym wektorem zerowym i oznaczanym przez **0** jeśli spełnione są następujace warunki zwane aksjomatami przestrzeni wektorowej. Dla każdych $u, v, w \in V$ oraz $a, b, \in K$*

1. $u + (w + v) = (u + w) + v$ *łaczność dodawania wektorów ,*
2. $u + w = w + u$ *przemienność dodawania wektorów ,*
3. $0 + u = u + 0 = u$ *wektor **0** jest elementem neutralnym dodawania,*
4. $\forall_{u \in V} \exists_{u' \in V}\ u + u^{'} = \boldsymbol{0}$ *istnienie elementu odwrotnego w dodawaniu,*
5. $a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$ *łaczność mnożenia przez skalary,*
6. $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$ *rozdzielność mnożenia względem dodawania wektorów*
7. $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$ *rozdzielność mnożenia względem dodawania skalarów,*

8. $1 \cdot v = v$ *1 jest elementem neutralnym mnożenia.*

Elementy zbioru V nazywamy wektorami a elementy ciała K skalarami. Przestrzeń wektorową V nad ciałem K oznaczamy $V[K]$, a tam gdzie nie będzie to prowadzić do nieporozumień tylko V.

Przykłady przestrzeni liniowych

1. Niech L będzie podciałem ciała K. Wtedy K jest przestrzenią wektorową na dciałem L.

2. Zbiór $K^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in K, i = 1, 2, \ldots n\}$ wszystkich n elementowych ciągów o wyrazach z ciała K z działaniami określonymi następujaco:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

$$a(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$$

jest przestrzenią liniową nad ciałem K

3. Niech $M_m^n(K)$ oznacza zbiór wszystkich macierzy o wyrazach z ciała K. *Sumą macierzy* $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ nazywamy taką macierz $C = [c_{ij}] \in M_m^n(K)$, taką że $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, dla każdego $i = 1, \cdots, m, \quad j = 1, \cdots, n$. *Iloczynem macierzy* A przez skalar $c \in K$ nazywamy taka macierz $D = [d_{ij}] \in M_m^n(K)$, że $d_{ij} = ca_{ij}$ dla dla każdego $i = 1, \cdots, m, \quad j = 1, \cdots, n$. Zbiór $M_m^n(K)$ z tak określonymi działaniami jest przestrzenia liniowa nad ciałem K.

4. Niech $K[x]$ bedzie zbiorem wszystkich wielomianów o wspólczynnikach w ciele K. Czyli

$$K[x] = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n | n \in N \cup \{0\}, a_0, a_1, \cdots, a_n \in K\}.$$

Określamy dodawanie i mnożenie wielomianów przez skalary. Z tymi działaniami $k[x]$ jest przestrzenią wektorową nad K.

5. Niech K bedzie ciałem, a X niepustym zbiorem.. Oznaczmy $Map(X, K) := \{f; f : X \to K\}$. Zbiór $Map(X, K)$ z dodawaniem $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ i mnożeniem przez skalary $(af)(x) = a(f(x))$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem K.

Definicja 4.2. *Niech V bedzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Niepusty podzbiór $U \subseteq V$ nazywamy podprzestrzenią V, jeśli dla dowolnych u, $w \in U$ oraz dla dowolnego $a \in K$*

$$u + w \in U, \quad au \in U.$$

Jeśli U jest podprzestrzenią V, to będziemy ten fakt zapisywać symbolocznie $U < V$. Jeśli U jest podprzestrzenią V to U zawiera wektor zerowy), oraz dla dowolnego wektora $u \in U$ zawiera wektor $-u$. Ponadto U jest przestrzenią liniową nad K z działaniami indukowanymi z V.

Przykłady podprzestrzeni przestrzeni liniowych

1. Dla dowolnej przestrzeni liniowej V podzbiór $\{\mathbf{0}\}$, złożony tylko z wektora zerowego jest podprzestrzenią V. Nazywamy ja podprzestrzenią zerową. Ponadto V jest swoją własną podprzestrzenią.

2. Niech $K_m[x]$ oznacza zbiór wszystkich wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach w ciele K stopnia $\leq m$. Wtedy $K_m[x] < K[x]$.

3. Niech U będzie jednorodnym układem równań z n niewiadomymi o współczynnikach w ciele K i macierzą A. Wtedy Zbiór wszystkich rozwiązań tego układu jest podprzestrzenia przestrzeni K^n. $Rozw(A, 0) < K^n$.

4. Niech $x_0 \in X$ i niech $W = \{f \in Map(X, K) : f(x_0) = 0\}$. Wtedy W jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $Map(X, K)$.

Twierdzenie 4.3. *Niech $U \subseteq V$. Wtedy następujące warunki są równoważne*

1. $U < V$
2. $\forall_{a,b \in K} \forall_{u,w \in U} \qquad au + bv \in U$
3. $\forall_{a_1, a_2, \cdots, a_k \in K} \forall_{u_1, u_2, \cdots, u_k \in U} \qquad a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_kv_k \in U.$

Twierdzenie 4.4. *Niech dla każdego $t \in T$, U_t bedzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej V. Wtedy część wspólną wszytkich podprzestrzeni U_t, $\bigcap\limits_{t \in T} U_t$ jest podprzestrzenią przestrzeni V.*

Definicja 4.5. *Niech $A \subset V$. Podprzestrzeń $L(A) := \bigcap\limits_{A \subset U < V} U$ będąca częscią wspólna wszystkich podprzestrzeni V zawierających zbiór A nazywamy podprzestrzenią generowana przez zbiór A.*

Jeśli $L(A) = V$ to mówimy, że A jest zbiorem generatorów przestrzeni V

Definicja 4.6. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K oraz niech $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$, $\quad a_1, a_2, \cdots, a_n \in K$. Wektor $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ nazywamy kombinacją liniową wektorów v_1, $v_2, \cdots, v_n$ o współ czynnikach $a_1, a_2, \cdots, a_n$.*

Zauważmy, że z twierdzenia 3.3 wynika, że U jest podprzestrzenią przestrzeni V wtedy i tylko wtedy gdy U jest zamknięte ze względu wszytkie kombinacje liniowe wektorów z U.

Twierdzenie 4.7. *Niech $A \subset V$. Wtedy*

$$L(A) = \{v \in V; \exists_{n \in N}, \quad \exists_{v_1, v_2, \cdots, v_n}, \quad \exists_{a_1, a_2, \cdots, a_n} \quad v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n\}.$$

Twierdzenie 4.8. *Niech $A, A' \in M_m^n(K)$ oraz $v_1, v_2, \cdots, v_m$ będą wierszami macierzy A a $v_1', v_2', \cdots, v_m'$ wierszami macierzy A'. Jeśli macierze A i A' są wierszowo równoważne to $L(v_1, v_2, \cdots, v_m) = L(v_1', v_2', \cdots, v_m')$.*

Przykłady

1. $K_n[x] = L(1, x, \cdots, x^n)$
2. $K^n = L(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ gdzie $e_i = [0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots 0]$.
3. $L(x^n, x^{n+1}, \cdots)$ jest podprzestrzenią przestrzeni wielomianów $K[x]$ zawierającą wszystkie wielomiany podzielne przez x^n.

Definicja 4.9. *Niech V bedzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Układ wektorów $v_1, v_2, \cdots, v_k$ przestrzeni wektorowej V nazywamy liniowo zależnym, jeśli istnieją $a_1, a_2, \cdots, a_k \in K$ nie wszystkie równe 0, takie że $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k = 0$. Układ wektorów $v_1, v_2, \cdots, v_k$ jest liniowo niezależny, jeśli*

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0.$$

Zauważmy, ze jeśli któryś z wektorów v_i jest zerowy to taki układ jest liniowo zależny.

Twierdzenie 4.10. *Układ $v_1, v_2, \cdots, v_k$ jest liniowo zależny $\Leftrightarrow$ jeden z wektorów v_i jest kombinacją liniową pozostałych.*

Uwaga 4.11. *Niech $c^1(A), c^2(A), \cdots, c^n(A)$ bedą kolumnami macierzy $A \in M_m^n$. Wtedy układ $c^1(A), c^2(A), \cdots, c^n(A)$ jest układem liniowo niezależnym wtedy i tylko wtedy gdy jednorodny układ równań o macierzy A ma tylko zerowe rozwiązanie.*

Wniosek 4.12. *Niech macierz A będzie wierszowo równoważna z macierzą A'. Wtedy kolumny macierzy A są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy liniowo niezależne są kolumny macierzy A'.*

Podobny wniosek można też udowodnić o wierszach wierszowo równoważnych macierzy A oraz A'. Dokładniej, jeśli $v_1, \cdots, v_m$ będa wierszami macierzy A, a $v_1', \cdots, v_m'$ będa wierszami macierzy A' wierszowo równoważnej z macierzą A to układ $v_1, \cdots, v_m$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy gdy układ $v_1', \cdots, v_m'$ jest liniowo niezalezny. Ponadto zauważmy, że niezerowe wiersze kazdej macierzy schodkowej tworzą układ liniowo niezależny a jeśli jeden z wierszy jest zerowy to taki układ jest zależny. Wnioskujemy stad, że wiersze macierzy dowolnej A tworzą układ liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz ta jest równoważna z macierzą schodkowa bez zerowych wierszy.

Twierdzenie 4.13. *Niech $v_1, v_2, \cdots, v_k$ będzie układem liniowo niezależnym i niech $v \in V$. Wtedy wektor $v \in L(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ wtedy i tylko wtedy, gdy układ $(v, v_1, v_2, \cdots, v_k)$ jest liniowo zależny.*

Twierdzenie 4.14. *(**Tw. Steinitza (magiczne)**) Niech układ wektorów $(w_1, w_2, \cdots, w_k)$ w przestrzeni wektorowej $V = L(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ bedzie liniowo niezależny. Wtedy*

- *$k \leq m$,*
- *z układu $v_1, v_2, \cdots, v_m$ można wybrać podukład $v_{i_1}, \cdots, v_{i_{m-k}}$, taki, że $L(v_1, v_2, \cdots, v_m) = L(w_1, w_2, \cdots, w_k, v_{i_1}, \cdots, v_{i_{m-k}})$.*

Twierdzenie Steinitza nazywane jest twierdzeniem o wymianie. Mówi ono, że jeśli układ $(w_1, \cdots, w_k)$ jest liniowo niezależny w przestrzeni $V = L(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ to w układzie $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ można wymienić pewnych k wektorów na wektory $w_1, w_2, \cdots, w_k$ i uzyskać nowy układ generujący przestrzeń V.

Wnioski

1. Jesli W jest podprzestrzenią przestrzeni $V = L(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ to w W istnieje układ liniowo niezależny $(w_1, w_2, \cdots, w_k), (k \leq m)$, taki że $W = L(w_1, w_2, \cdots, w_k)$.
2. Jeśli $L(w_1, w_2, \cdots, w_k) = L(w_1', w_2', \cdots, w_l')$ i układy $(w_1, w_2, \cdots, w_k)$ oraz $(w_1', w_2', \cdots, w_l')$ są liniowo niezależne to $k = l$.

Definicję liniowej niezależności dla skończonych układów wektorów w przestrzeni liniowej V można rozszerzyc na przypadek układów nieskończonych. Układ wektorów $\mathcal{B}$ przestrzeni V nazywamy liniowo niezależnym gdy każdy jego skończony podukład jest liniowo niezależny.

Bazy i wymiary przestrzeni wektorowych

Definicja 4.15. *Układ wektorów $\mathcal{B}$ nazywamy bazą przestrzeni liniowej V, jeśli*

- *Układ $\mathcal{B}$ jest liniowo niezależny,*
- *Układ $\mathcal{B}$ generuje przestrzeń V, czyli $V = L(\mathcal{B})$.*

Twierdzenie 4.16. *Układ wektorów $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ jest bazą przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny wektor $v \in V$ można jednoznacznie przedstawić jako kombinację liniową wektorów $v_1, v_2, \cdots, v_m$).*

Twierdzenie 4.17. *Niech $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ będzie układem wektorów w przestrzeni V. Wtedy następujące warunki są równoważne*

1. *$\mathcal{B}$ jest bazą przestrzeni V.*
2. *$\mathcal{B}$ jest maksymalnym układem liniowo niezaleznym.*
3. *$\mathcal{B}$ jest minimalnym układem generatorów przestrzeni V*

Twierdzenie 4.18. *Jeśli przestrzeń wektorowa V posiada bazę n elementową to każda baza V ma n elementów.*

Definicja 4.19. *Mówimy, że przestrzeń V ma wymiar n, jeśli V posiada bazę n elementową. Piszemy wtedy, że $dimV = n$. Ponadto przyjmujemy, że wymiar przestrzeni zerowej wynosi 0, a jeśli V nie ma skończonej bazy, to V nazywamy przestrzenią nieskończenie wymiarową i piszemy $dimV = \infty$.*

Jeśli $dimV = n$, to każdy n-elementowy liniowo niezależny układ wektorów w przestrzeni V jest bazą V. Jeśli $dimV = n$, to każdy n elementowy układ wektorów w przestrzeni V jest bazą V.

Twierdzenie 4.20. *Podprzestrzeń przestrzeni rozpiętej na skończonym układzie wektorów jest skończenie wymiarowa. Jeśli W jest podprzestrzenią w V oraz $dimV = n$, to $dimW \leq n$. Ponadto, jesli $dimV = dimW$, to $V = W$.*

Twierdzenie 4.21. *Niech V będzie przestrzenia wektorową nad ciałem K. Wówczas*

1. *Każdy liniowo niezależny układ wektorów można uzupełnic do bazy V.*
2. *Z każdego układu generatorów V mozna wybrać bazę.*

Algebra liniowa z geometrią dla informatyków - konspekt wykładu 2018/19

Barbara Roszkowska -Lech

December 2, 2018

4 Rząd macierzy

Twierdzenie 4.1. *Niech* $A, A' \in M_m^n(K)$ *oraz* $v_1, v_2, \cdots, v_m$ *będą wierszami macierzy* A *a* $v_1', v_2', \cdots, v_m'$ *wierszami macierzy* A'*. Jeśli macierze* A *i* A' *są wierszowo równoważne to* $\mathcal{L}(v_1, v_2, \cdots, v_m) = \mathcal{L}(v_1', v_2', \cdots, v_m')$*.*

Twierdzenie 4.2. *Jeśli* $v_1, \cdots, v_m$ *będa wierszami macierzy* A*, a* $v_1', \cdots, v_m'$ *będa wierszami macierzy* A' *wierszowo równoważnej z macierzą* A *to układ* $v_1, \cdots, v_m$ *jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy gdy układ* $v_1', \cdots, v_m'$ *jest liniowo niezalezny.*

Zauważmy, że niezerowe wiersze każdej macierzy schodkowej tworzą układ liniowo niezależny, a jeśli jeden z wierszy jest zerowy to taki układ jest zależny.

Wniosek 4.3. *Wiersze dowolnej macierzy* A *tworzą układ liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz ta jest równoważna z macierzą schodkowa bez zerowych wierszy.*

Twierdzenie 4.4. *Niech* $c^1(A), c^2(A), \cdots, c^n(A)$ *bedą kolumnami macierzy* $A \in M_m^n(K)$*. Wtedy układ wektorów*

$$c^1(A), c^2(A), \cdots, c^n(A)$$

jest układem liniowo niezależnym wtedy i tylko wtedy gdy jednorodny układ równań o macierzy A *ma tylko zerowe rozwiązanie.*

Wniosek 4.5. *Niech macierz A będzie wierszowo równoważna z macierzą A'. Wtedy kolumny macierzy A są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy liniowo niezależne są kolumny macierzy A'.*

Wniosek 4.6. *Macierz $A \in M_n^n(K)$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy gdy jej kolumny $c^1(A), c^2(A), \cdots, c^n(A)$ tworzą układ liniowo niezalezny.*

Wniosek 4.7. *Niech macierz $A \in M_m^n(K)$ będzie wierszowo równoważna z macierzą A'. Wtedy układ kolumn $(c^{i_1}(A), c^{i_2}(A), \cdots, c^{i_k}(A))$ macierzy A jest bazą przestrzeni*

$$\mathcal{L}(c^1(A), c^2(A), \cdots, c^n(A))$$

wtedy i tylko wtedy, gdy układ kolumn $(c^{i_1}(A'), c^{i_2}(A'), \cdots, c^{i_k}(A'))$ macierzy A' jest bazą przestrzeni

$$\mathcal{L}(c^1(A'), c^2(A'), \cdots, c^n(A')).$$

Definicja 4.8. ***Rzędem macierzy*** *$A \in M_m^n(K)$ (ozn $rz(A)$)nazywamy wymiar przestrzeni*

$$\mathcal{L}(c^1(A), c^2(A), \cdots, c^n(A)).$$

Uwaga 4.9. ***(Drugie twierdzenie magiczne)*** *Niech $A \in M_m^n(K)$. Wtedy*

$$dim\mathcal{L}(c^1(A), c^2(A), \cdots, c^n(A)) = dim\mathcal{L}(r_1(A), r_2(A), \cdots, r_m(A)).$$

Twierdzenie 4.10. ***(Twierdzenie Kroneckera -Capelliego)*** *Niech $A \in M_m^n(K)$, $\quad B \in M_m^1(K)$. Układ równań liniowych $Ax = B$ ma conajmniej jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy $rz(A|B) = rz(A)$.*

Wniosek 4.11. *Niech $A \in M_m^n(K)$. Układ równań liniowych $Ax = B$ ma dla każdego $B \in M_m^1(K)$ conajmniej jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy $rz(A|B) = m$.*

Zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań $Ax = \mathbf{0}$ zawsze jest przestrzenią liniową. Wyznaczymy teraz jej wymiar.

Twierdzenie 4.12. *Niech $A \in M_m^n(K)$. Następujące warunki są równoważne*

1. *Układ równań $Ax = \mathbf{0}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. (zerowe)*
2. *Istnieje $B \in M_m^1(K)$ takie, że układ $Ax = B$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.*

3. *Dla każdego* $B \in M_m^1(K)$ *układ* $Ax = B$ *ma co najwyżej jedno rozwiązanie.*

4. $rz(A) = n$.

Twierdzenie 4.13. *Niech* $A \in M_m^n(K)$. *Wtedy* $Rozw(A|\mathbf{0}) < M_n^1(K)$ *oraz* $dim Rozw(A|\mathbf{0}) = n - rz(A)$.

Dowolną bazę przestrzeni $Rozw(A|\mathbf{0})$ nazywamy fundamentalnym układem rozwiazań.

Twierdzenie 4.14. *Niech* $A \in M_m^n(K)$, $B \in M_m^1(K)$. *Ponadto niech* $X_0 \in M_n^1(K)$ *będzie elementem zbioru rozwiązań układu równań* $Ax = B$ *oraz niech* $X \in M_n^1(K)$. *Wtedy*

$$X \in Rozw(A|B) \Longleftrightarrow X - X_0 \in Rozw(A|\mathbf{0}).$$

Wniosek 4.15. *Niech* $A \in M_m^n(K)$, $B \in M_m^1(K)$. *Ponadto niech* $X_0 \in M_n^1(K)$ *będzie ustalonym elementem zbioru rozwiązań układu równań* $Ax = B$. *Wtedy*

- $Rozw(A|B) = X_0 + Rozw(A|\mathbf{0}) = \{X_0 + Y; Y \in Rozw(A|\mathbf{0})$.
- *Jeśli* $X_1, \ldots, X_p$ *jest układem fundamentalnym przestrzeni* $Rozw(A|\mathbf{0})$ *to każde rozwiazanie* X *układu* $Ax = B$ *daje się jednoznacznie przedstawić w postaci* $X = X_0 + a_1X_1 + \ldots + a_pX_p$, *gdzie* $a_1, a_2, \ldots, a_p \in K$.

5 Sumy i sumy proste podprzestrzeni liniowych

Niech V bedzie przestrzenią liniową nad ciałem K a V_1 oraz V_2 będą podprzestrzeniami V. Pokazaliśmy w poprzednich rozdziałach, że $V_1 \cap V_2$ jest podprzestrzenią przestrzeni V. Pokazaliśmy, tez że $V_1 \cup V_2$ jest podprzestrzenią V wtedy i tylko wtedy gdy $V_1 \subseteq V_2$ lub $V_2 \subseteq V_1$.

Definicja 5.1. *Niech V bedzie przetrzenią liniową nad ciałem K a $V_1, V_2, \ldots, V_k$ będą podprzestrzeniami V. Definiujemy*

$$V_1 + \ldots + V_k = \{v \in V; v = v_1 + \cdots + v_k, v_i \in V_i\}.$$

Zauważmy, że jeśli $V_1, V_2, \ldots, V_k$ będą podprzestrzeniami V to $V_1 + \ldots + V_k$ jest podprzestrzenią V. Nazywamy ją sumą podprzestrzeni $V_1, V_2, \ldots, V_k$.

Lemat 5.2. $V_1 + \ldots + V_k = \mathcal{L}(V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k$.

Niech teraz $V_i = \mathcal{L}(\mathcal{B}_i)$. Wtedy oczywiste jest, że $V_1 + \ldots + V_k = \mathcal{L}(\mathcal{B}_1 | \ldots | \mathcal{B}_k)$.

Twierdzenie 5.3. *Niech V_1, V_2 bedą skończenie wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni V. Wówczas*

$$dim(V_1 + V_2) = dimV_1 + dimV_2 - dim(V_1 \cap V_2.)$$

Definicja 5.4. *Przestrzeń V jest sumą prostą swoich podprzestrzeni $V_1, V_2, \ldots, V_k$, jesli każdy wektor $v \in V$ daje się jednoznacznie przedstawić jako $v = v_1 + \cdots + v_k, \quad v_i \in V_i$. Piszemy wówczas $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$.*

Oczywiście każda suma prosta jest sumą podprzestrzeni.

Twierdzenie 5.5. *Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni V. Wówczas*

$$V = V_1 \oplus V_2 \quad \Leftrightarrow \quad V = V_1 + V_2, \quad V_1 \cap V_2 = 0.$$

W przypadku sumy więcej niz dwu podprzestrzeni warunek po prawej stronie jest bardziej skomplikowany.

Wniosek 5.6. *Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami skończenie wymiarowej przestrzeni V. Załóżmy, ze $V_1 \cap V_2 = 0$. Wówczas*

$$V = V_1 \oplus V_2 \quad \Leftrightarrow \quad V = V_1 + V_2.$$

Twierdzenie 5.7. *Niech* $V = V_1 + \cdots + V_k$ *oraz niech* $\mathcal{B}_i$ *będzie bazą przestrzeni* V_i*, dla* $i = 1, \cdots, k$*. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

1. $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$.
2. *Układ* $(\mathcal{B}_1| \quad \ldots \quad |\mathcal{B}_k)$ *jest bazą przestrzeni* V*.*
3. *Układ* $(\mathcal{B}_1| \quad \ldots \quad |\mathcal{B}_k)$ *jest liniowo niezależny.*

Niech teraz W będzie podprzestrzenią skończenie wymiarowej przestrzeni V. Istnieje podprzestrzeń $U < V$, taka że $V = W \oplus U$. Podprzestrzeń taką nazywamy *podprzestrzenią dopełniającą*. Nie jest ona wyznaczona jednoznacznie, ale wszystkie podprzestrzenie dopełniające mają ten sam wymiar równy $dimV - dimW$. Róznicę wymiarów $dimV - dimW$ nazywamy *kowymiarem* podprzestrzeni W i oznaczamy $codimW$.

6 Homomorfizmy przestrzeni liniowych

Definicja 6.1. *Niech V, U bedą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Przekształcenie $F : V \to W$ nazywamy przekształceniem liniowym (homomorfizmem przestrzeni liniowych), gdy dla dowolnych $v, u \in V, \quad a \in K$ spełnione są następujące warunki*

- $F(u + v) = F(u) + F(v)$,
- $F(au) = aF(u)$.

Łatwo udowodnić nastepujący fakt:

Uwaga 6.2. *Przekształcenie $F : V \to W$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych wektorów $v_1, v_2, \ldots v_n \in V$ oraz dowolnych $a_1, a_2, \ldots a_n \in K$, $F(a_1v_1 + \ldots + a_nv_n) = a_1F(v_1) + \ldots + a_nF(v_n)$*

Przykłady

1. $F : K[x] \to K[x], \quad w \mapsto \frac{dw}{dx}$.

2. Niech $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ będzie bazą przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Definiujemy przekształcenie $M_{\mathcal{B}} : V \to M_n^1(K)$,
$$M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow v = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n.$$
Przekształcenie $M_{\mathcal{B}}$ jest przekształceniem liniowym. Nazywamy je *przekształceniem wspólrzędnych.*

3. Niech X bedzie niepustym zbiorem, K ciałem i $x_0 \in X$. Przekształcenie $F : Map(X, K) \to K, \quad f \mapsto f(x_0)$ jest liniowe.

4. Niech $V = V_1 \oplus V_2$. Dla dowolnego wektora $v \in V$ istnieją wtedy wyznaczone jednoznacznie wektory $v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2$, takie że $v = v_1 + v_2$. Przekształcenie
$$P_{V_1} : V \to V,\ v \mapsto v_1$$
nazywamy rzutem na V_1 wdłuz V_2.
Symetrią wzgledem V_1 wzdłuż V_2 nazywamy takie przekształcenie
$$S : V \to V,\ v \mapsto v_1 - v_2.$$
Łatwo pokazać, że oba te przekształcenia są liniowe.

Twierdzenie 6.3. *Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ bedzie bazą przestrzeni V oraz niech $w_1, \ldots, w_n$ będzie dowolnym układem wektorów w przestrzeni W. Istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $F : V \to W$, takie że $F(v_i) = w_i$, dla $i = 1, \ldots, n$.*

Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Oznaczmy symbolem $Hom(V, W)$ zbiór wszystkich przekształceń liniowych z V w W. Przekształcenia liniowe z $Hom(V, W)$ możemy dodawać i mnożyć przez elementy z ciała K. Dla $F, G \in Hom(V, W)$, $a \in K$

$$(F + G)(v) := F(v) + G(v),\ (aF)(v) := aF(v).$$

Zbiór $Hom(V, W)$ z tymi działaniami jest przestrzenia wektorową nad ciałem K. Wektorem zerowym w tej przestrzeni jest przekształcenie zerowe przyporzadkowujące dowolnemu wektorowi v z przestrzeni V wektor zerowy z przestrzeni W.

Twierdzenie 6.4. *Niech $F : V \to W$, $G : W \to U$ będa przekształceniami liniowymi.*

1. *Przekształcenie $G \circ F : V \to U$ jest przekształceniem liniowym.*
2. *Jesli przekształcenie liniowe F jest odwracalne to $F^{-1} : W \to V$ jet również przekształceniem liniowym.*

Definicja 6.5. *Niech $F : V \to W$ bedzie przekształceniem liniowym. Wówczas*

1. *Jądrem przekształcenia F nazywamy zbiór*
$$kerF := \{v \in V : F(v) = \boldsymbol{0}\}.$$
2. *Obrazem przekształcenia F nazywamy zbiór*
$$ImF := \{F(v) : v \in V\}.$$

Przykład 6.6. *Niech $V = V_1 \oplus V_2$ oraz P_{V_1} będzie rzutem na V_1 wzdłuż V_2. Wtedy $KerP_{V_1} = V_2$ oraz $ImP_{V_1} = V_1$.*
Ponadto $P_{V_1}|V_1 = Id_{V_1}$ oraz $P_{V_1} + P_{V_2} = Id_V$.

Uwaga 6.7. *Niech $F : V \to W$ bedzie przekształceniem liniowym. Wówczas*

1. *$kerF$ jest podprzestrzenia liniową V,*

2. *ImF jest podprzestrzenia liniową W.*

Twierdzenie 6.8. *Niech $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ będzie bazą przestrzeni V oraz niech $F : V \to W$ bedzie przekształceniem liniowym. Wówczas $ImF = \mathcal{L}(F(\mathcal{B}))$.*

Twierdzenie 6.9. *Niech $F : V \to W$ bedzie przekształceniem liniowym. Wówczas*

$$dimV = dimkerF + dimImF.$$

Definicja 6.10. *Przekształcenie liniowe $F : V \to W$ nazywamy*

- *monomorfizmem, jeśli F jest róznowartosciowe,*
- *epimorfizmem, jeśli F jest " na",*
- *izomorfizmem, jesli F jest róznowartościowe i "na" .*

Twierdzenie 6.11. *Niech $F : V \to W$ bedzie przekształceniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:*

1. *F jest monomorfizmem ,*

2. *$kerF = \{\boldsymbol{0}\}$,*

3. *F przeprowadza dowolny liniowo niezależny układ wektorów na układ liniowo niezależny,*

4. *F przeprowadza dowolną bazę na układ liniowo niezależny ,*

5. *F przeprowadza pewną bazę na układ liniowo niezależny.*

Wniosek 6.12. *Niech $F : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Następujące warunki są równoważne:*

1. *F jest izomorfizmem ,*

2. *F przeprowadza każdą bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W,*

3. *F przeprowadza pewną bazę przestrzeni V na bazę przestrzeni W.*

Niech $F : V \to W$ bedzie izomorfizmem przestrzeni liniowych. Z powyższych wniosków wynika, że wtedy $dimV = dimW$. Ponadto, jeśli $dimV = dimW = n$ to przestrzenie V oraz W są izomorficzne. Oznacza to, że dwie przestrzenie wektorowe V, W są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy $dimV = dimW$ W szczególnosci wynika stąd, ze każda n wymiarowa przestrzeń wektorowa jest izomorficzna z przestrzenią K^n.

7 Macierze przekształceń liniowych

Definicja 7.1. *Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $F : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Ponadto niech układ wektorów $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ bedzie bazą przestrzeni V, a układ $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ bazą przestrzeni W. Macierzą przekształcenia F w bazach $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ nazywamy macierz $A = [a_{ij}] \in M_m^n(K)$ taką, że*

$$c^j(A) = M_{\mathcal{C}}(F(v_j)),$$

dla $j = 1, \ldots, n$.

Macierz przekształcenia liniowego w bazach $\mathcal{B}$ oraz $\mathcal{C}$ oznaczamy $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F)$. Bezpośrednio z definicji wynika, że dla dowolnego $j = 1, \ldots, n$

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i.$$

Uwaga 7.2. *Niech $F : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym.*

$$DimImF = rz(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F)).$$

Twierdzenie 7.3. *Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $F : V \to W$ bedzie przekształceniem liniowym. Ponadto niech $\mathcal{B}$ bedzie bazą przestrzeni V a układ $\mathcal{C} =$ bazą przestrzeni W. Przekształcenie*

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} : Hom(V, W) \to M_m^n(K), \quad F \mapsto M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F),$$

jest izomorfizmem przestrzeni wektorowych.

Twierdzenie 7.4. *Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $F : V \to W$ bedzie przekształceniem liniowym. Ponadto niech $\mathcal{B}$ bedzie bazą przestrzeni V a układ $\mathcal{C}$ bazą przestrzeni W. Macierz $A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F)$ wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego wektora $v \in V$, $M_{\mathcal{C}}(F(v)) = A \cdot M_{\mathcal{B}}(v)$.*

Niech $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ będą bazami przestrzeni wektorowej V, a przekształcenie $Id = Id_V$ bedzie przekształceniem identycznosciowym przestrzeni V (tzn $Id_V(v) = v$). Macierz $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(Id)$ nazywamy macierzą zmiany bazy z $\mathcal{B}$ do $\mathcal{B}'$. Macierz ta pozwala obliczyć współrzędne dowolnego wektora z V w bazie $\mathcal{B}'$, gdy znamy te współrzedne w bazie $\mathcal{B}$. Prawdziwy jest następujący wzór

$$M_{\mathcal{B}'}(v) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(Id)M_{\mathcal{B}}(v).$$

Twierdzenie 7.5. *Jeśli V, U, W są przestrzeniami liniowymi nad ciałem K z bazami $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ odpowiednio a $F : V \to W$, $G : W \to U$ są przekształceniami liniowymi, to*

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(G \circ F) = M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(G) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F).$$

Twierdzenie 7.6. *Jeśli $F : V \to W$ jest przekształceniem liniowym a $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ są bazami przestrzeni V oraz $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}'$ są bazami przestrzeni W, to*

$$M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(F) = M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(Id)M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F)M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id).$$

8 Macierze odwracalne (przypomnienie)

Definicja 8.1. *Macierz $A \in M_n^n(K)$ nazywamy odwracalną, jeśli istnieje macierz $B \in M_n^n(K)$, taka że $AB = I_n$. Macierz B nazywamy wówczas macierzą odwrotną do macierzy A i oznaczamy A^{-1}.*

Twierdzenie 8.2. *Niech $A \in M_n^n(K)$. Nastepujące warunki są równoważne:*

- *Macierz A jest odwracalna,*
- *Macierz A jest wierszowo równowazna z macierzą jednostkową,*
- *Macierz A jest iloczynem macierzy elementarnych,*
- *Rząd macierzy A jest równy n*

Poniższe twierdzenie opisuje algorytm znajdowania macierzy odwrotnej.

Twierdzenie 8.3. *Niech $A \in M_n^n(K)$. Macierz A jest odwracalna wtedy i tylko wtedy gdy macierz $A|I$ jest wierszowo równoważna z macierzą $I|B$. Ponadto jeśli ten warunek jest spełniony to $A^{-1} = B$.*

Pokazaliśmy, ze macierze przekształceń (jeśli wybierzemy bazy) wyznaczają jednoznacznie przekształcenia liniowe.
Okazuje się że macierze odwracalne odpowiadają przy takinm utożsamieniu izomorfizmom.

Uwaga 8.4. *Macierz $A \in M_n^n(K)$ jest macierzą odwracalną wtedy i tylko wtedy gdy przekształcenie liniowe $F : K^n \to K^n$ takie, że $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = A$, gdzie $\mathcal{B}$ jest dowolną bazą K^n, jest izomorfizmem.*

Wniosek 8.5. *Niech $A \in M_n^n(K)$. Jeśli istnieje $B \in M_n^n(K)$, takie że $AB = I$ to zachodzi też $BA = I$. Ponadto taka macierz B jest wyznaczona jednoznacznie.*

Uwaga 8.6.

1. *Macierze zamiany wpółrzednych są odwracalne. Ponadto $(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(Id))^{-1} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id)$.*
2. *Jeśli A, B są macierzami odwracalnymi to AB jest macierza odwracalną i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*