1 次の問いに答えよ

(1) 一次方程式$2x+9-\frac{4x+1}{3}=10x-0.5$を解け

(2) 二次方程式$2(x-1)^2=-3x+8$を解け

(3) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\left(-\frac{2}{\sqrt{3}+1}\right)^2+\sqrt{\frac{9}{8}}$を計算せよ（分母は有理化すること）

(4) $999^2-1001^2+1001\times 999$を計算せよ

(5) 2021を素因数分解せよ

(6) 連立方程式 $\begin{cases} 20x+21y=2021 \\ x+\quad y=100 \end{cases}$ を解け

(7) $ab-4a+6b-24$を因数分解せよ

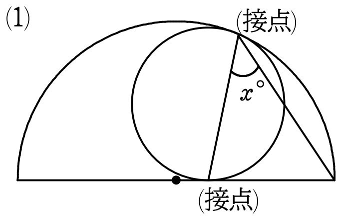
(8) $\frac{2n+7}{n-1}$が整数となるような整数nを全て求めよ

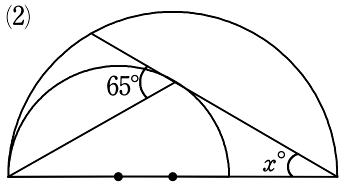
(9) $x+y=\sqrt{5}, xy=1\ (x>y)$のとき、$(x-y)^{2021}$と$\frac{x^2-y^2}{x-y}$の大小を比較せよ（不等号で表せ）

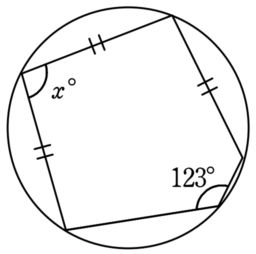
(10) 2つのサイコロを投げたとき、目の積が偶数になる確率を求めよ

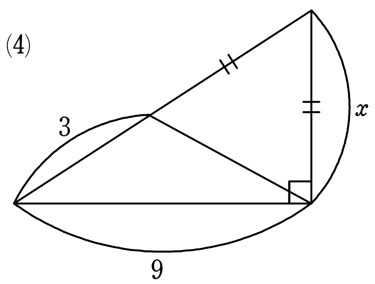
(11) REIWAの5つの文字の並べ方はこれを含め何通りあるか

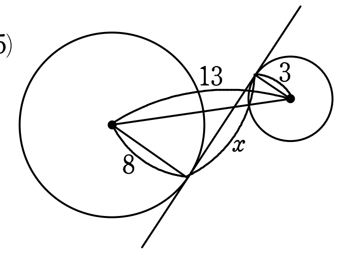
2 次に示すxの値を求めよ

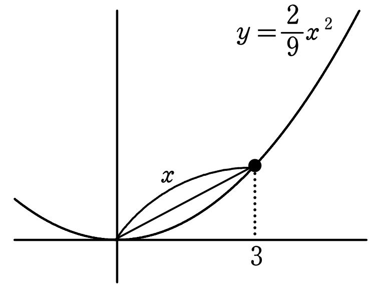
(1)


(2)


(3)


(4)


(5)


(6)


3 3つのグラフ$\begin{cases} y=x^2 \cdots ① \\ y=2x+3 \cdots ② \\ y=kx-k^2+13 \cdots ③ \\ y=(k+5)x-5k \cdots ④ \end{cases}$について以下の問いに答えよ

(1) ①，②，③が1点で交わるときのkの値を全て求めよ

(2) ①と④が接する（＝共有点が一つ）ときの②と③の交点の座標を求めよ

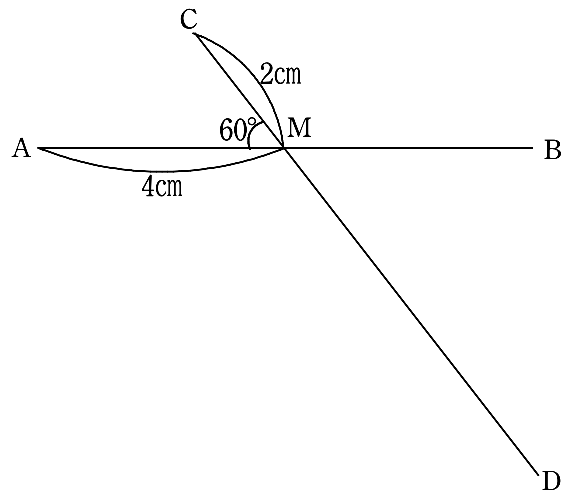
4 次の問いに答えよ

(1) 一辺の長さがaの正三角形の面積をaで表せ

(2) 一辺の長さがaの正四面体の体積をaで表せ

(3) 一辺の長さがaの正八角形の面積をaで表せ

5 図のように8㎝の線分ABと10㎝の線分CDが点Mで交わっている。
AM＝4㎝，CM＝2㎝，∠AMC＝60°のとき次の問いに答えよ



(1) △ACMの面積を求めよ

(2) ADの中点をNとするとき、次を求めよ

① NC

② ∠CNB

（問題以上）

解答

1	(1)	$x=\frac{55}{56}$	(2)	$x=-\frac{3}{2},2$	(3)	$\frac{3\sqrt{2}}{4}+2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{2}-4$	(4)	995999
	(5)	43×47	(6)	$x=79,y=21$	(7)	$(a+6)(b-4)$	(8)	$n=-8,-2,0,2,4,10$
	(9)	$(x-y)^{2021}<\frac{x^2-y^2}{x-y}$	(10)	$\frac{3}{4}$	(11)	120通り		
2	(1)	45	(2)	40	(3)	98		
	(4)	12	(5)	$4\sqrt{3}$	(6)	$\sqrt{13}$		
3	(1)	$k=-4,-1,3,4$	(2)	(5,13)				
4	(1)	$\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$	(2)	$\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$	(3)	$2(\sqrt{2}+1)a^2$		
5	(1)	$2\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$	(2)	①$2\sqrt{7}$cm　②60°				

解説

1 (1)特に工夫を要するわけでもないただの面倒な計算問題。$\frac{4x+1}{3}$や-0.5があるので両辺に6をかけて小数･分数を抹殺する。

$$2x+9-\frac{4x+1}{3}=10x-0.5$$
$$12x+54-8x-2=60x-3$$
$$56x=55$$
$$x=\frac{55}{56}$$

(4)和と差の積･平方差の公式の利用

$$999^2-1001^2+1001\times999=(999-1001)(999+1001)+(1000+1)(1000-1)$$
$$=-2\times2000+1000000-1$$
$$=995999$$

(5)2,3,5,7,…と素数で順に割っていく。運が良ければすぐ見つかる。解が見つかるまで精神的につらいが頑張ろう。

(6)$\begin{cases}20x+21y=2021\\x+\ \ y=\ 100\end{cases}\rightarrow\begin{cases}20x+21y=2021\\21x+21y=2100\end{cases}$　$x=79,y=21$

(7)$ab-4a+6b-24=a(b-4)+6(b-4)=(a+6)(b-4)$

(8)このような整数問題では与えられた分数や平方根などを別の文字でおいて計算するとよい。

$\frac{2n+7}{n-1}=m$とおくと、

$$m(n-1)=2n+7$$
$$m(n-1)-2n-7=0\quad 両辺に+5$$
$$m(n-1)-2n+2=9\quad 左辺を因数分解$$
$$m(n-1)-2(n-1)=9$$
$$(m-2)(n-1)=9$$

$(m-2),(n-1)$はどちらも整数で積は9。

かけて9になる整数の組は$9\left\{\begin{matrix}-9&-3&-1&1&3&9\\-1&-3&-9&9&3&1\end{matrix}\right\}$（正式な表記ではない）

したがって 下段に1を足して、$n=-8,-2,0,2,4,10$。なおこのような分数を含む問題では分母が0にならないように注意する。今回では$n-1\fallingdotseq0$
$n\fallingdotseq1$

(9)まず$(x-y)$を計算する。

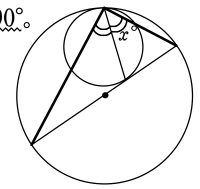
$$x+y=\sqrt{5}\quad 両辺を2乗$$
$$(x+y)^2=5\quad 左辺を展開$$
$$x^2+2xy+y^2=5\quad (x-y)^2を作るために4xyを引く$$
$$x^2-2xy+y^2=1$$
$$(x-y)^2=1$$
$$x-y=1$$

したがって$(x-y)^5=1$。次に$\frac{x^2-y^2}{x-y}=x+y=\sqrt{5}$。$(x-y)^5<\frac{x^2-y^2}{x-y}$

(10)**余事象**（あることがらが起こらない確率）の利用。目の積が奇数になるのは目が2つとも奇数の場合のみであるから、$\frac{3}{6}\times36=\frac{1}{4}$。

よって、偶数になる確率は$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$。

2 (1)直径が与えられている。直径に対する円周角はつねに90°。また内接円の接線の性質から（プリント「2つの円」参照）



右の太線が作る角はxの2倍。$x=\frac{90}{2}=45$

なお図中でx°という表記がされているから

$\angle x=45°$や$x=45°$と書くと誤りである。

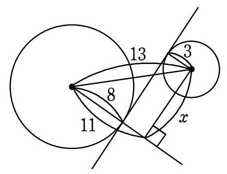
ややこしいところではあるが問題文の表現に従おう。

(2)プリント「円の基本定理」確認問題(11)より。直径の円周角90°をつくる

(3)同確認問題(9)。123°を2:1に分けて、内接四角形の対角の性質

(4)三平方の定理。$9^2+x^2=(x+3)^2$を解く。

(5)プリント「三平方の定理（平面図形）④」問題2(4)。



小さいほうの円の中心から大きい円の半径の延長に垂線を下ろす。その足と2円の中心からなる直角三角形において三平方の定理より$x^2+11^2=13^2$

$$x^2=13^2-11^2\quad 2乗の差をとる$$
$$=(13-11)(13+11)$$
$$=2\cdot24=48$$
$$x=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$$

なお三平方の計算では上の式の2段目のように2乗の差をとって和と差の積で計算すると多少計算が楽になる。

(6)与えられた点の座標は$(3,2)$だから原点との距離は$\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

3 (1)まずkを含まない式①と②の交点を求める。

$$x^2=2x+3$$
$$x^2-2x-3=0$$
$$(x-3)(x+1)=0$$
$$x=-1,3$$

よって交点は$(-1,1)$と$(3,9)$。

$(-1,1)$のとき、③の式$y=kx-k^2+13$に代入して$-k-k^2+13=1$

$$k^2+k-12=0$$
$$(k-3)(k+4)=0$$
$$k=-4,3$$

$(3,9)$のとき、

$$3k-k^2+13=9$$
$$k^2-3k-4=0$$
$$(k-4)(3k+1)=0$$
$$k=-1,4$$

よって$k=-4,-1,3,4$

(2)①と④の共有点の方程式は、

$$x^2=(k+5)x-5k$$
$$x^2-(k+5)x+5k=0$$

接する、つまり共有点が一つというのだからこの方程式の解はただ一つであるといえる。2次方程式$ax^2+bx+c=0$の解の個数は、判別式$D=b^2-4ac$からわかり、$D<0$→実数解なし、$D=0$→1つの実数解、$D>0$→2つの実数解となる。

この方程式の判別式は$D=(k+5)^2-20k$

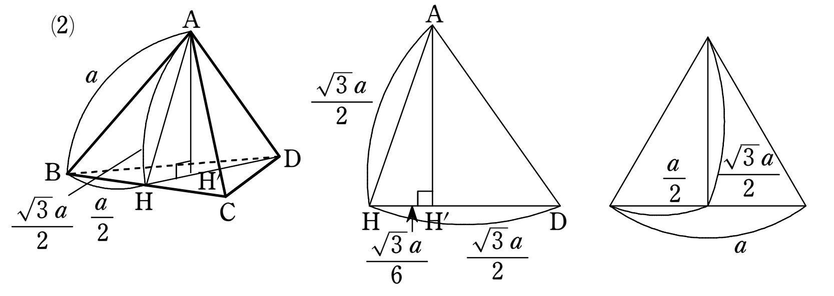
$$=k^2-10k+25$$
$$=(k-5)^2$$

解がただ一つ、つまり$D=(k-5)^2=0$から$k=5$。

③の式に代入して③$y=5x-12$。方程式②＝③を解いて、答えは$(5,13)$

4 (1)正三角形の高さは$\frac{\sqrt{3}a}{2}$だから面積は$\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}a}{2}=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

(2)



正四面体をA－BCD，AからBCへの中線をAH，面BCDへの垂線をAH′とする。

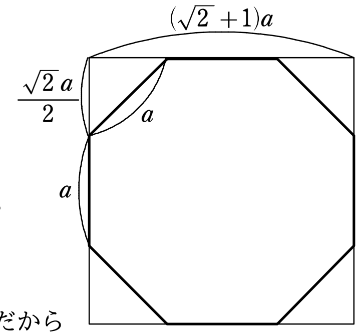
AH＝DH＝$\frac{\sqrt{3}a}{2}$。平面AHDを取り出して考える。H′は△BCDの重心だから

HH′:H′D＝1:2。したがってHH′＝$\frac{\sqrt{3}a}{6}$。△AHH′で三平方の定理により

AH′＝$\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{1}{12}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$。

求める正四面体は底面積△BCD＝$\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$，高さAH′＝$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$。

よって、体積は$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}a^2}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}a}{12}$



(2)八角形の面積は右の正方形から4隅の直角二等辺三角形を引いたものである。

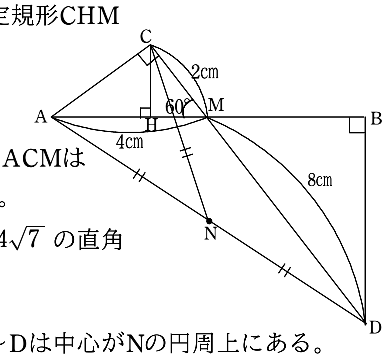
正方形の一辺は$\frac{\sqrt{2}a}{2}\cdot2+a=(\sqrt{2}+1)a$だから

面積は$(\sqrt{2}+1)^2a^2=(2\sqrt{2}+3)a^2$

隅の直角二等辺三角形１つは$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$だから

4つで$\frac{a^2}{4}\cdot4=a^2$。よって面積は$(2\sqrt{2}+3)a^2-a^2=(2\sqrt{2}-2)a^2=2(\sqrt{2}-1)a^2$。

5 (1)CからAMに垂線CHを引くと、三角定規形CHMの辺の比より CH＝$\sqrt{3}$cm。



△ACM＝$\frac{1}{2}\cdot4\mathrm{cm}\cdot\sqrt{3}\mathrm{cm}=2\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$。

(2)①AM＝2CM、∠AMC＝60°だから△ACMは三角定規形でAC＝$2\sqrt{2}$cm、∠ACMは直角。

したがって△ACDはAD＝$\sqrt{\mathrm{AC}^2+\mathrm{CD}^2}=4\sqrt{7}$の直角三角形で、NC＝$\frac{1}{2}$AD＝$2\sqrt{7}$

②∠ACD＝∠ABD＝90°だから4点A～Dは中心がNの円周上にある。

中心角∠CNB＝2∠CAM＝2×30°＝60°

[redacted]