三角関数の教科書・補足

手書きなので読みづらいところがあるかも

最後のページは直前の確認にも有効です

2021.10.17
制作：[redacted]るり

三角関数の教科書・補足

• 三角方程式・不等式を実際にどう解くか、

◦ 三角方程式

問．以下の等式をみたすθを，$0 \leqq \theta < 2\pi$の範囲でもとめる。また一般角（$\alpha + \underline{2n\pi}$，$0 \leqq \alpha < 2\pi$，$n$は整数）でも表わせ。 (3)は$n\pi$で

1) $\sin\theta = \frac{1}{2}$　2) $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$　3) $\tan\theta = \sqrt{3}$

気をつけることは、

・単位「円」を描かない……

（きれいな円を描くのは難しいし，時間もかかる）

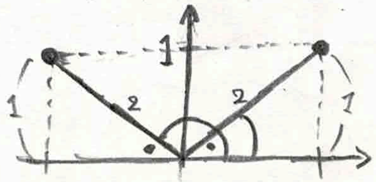
・$0 \leqq \theta < 2\pi$の範囲で，解が2つある

ということ。とくに後者は要注意。採点者は冷酷なので，1つしか書いていないと問答無用で×になる。

1) $\sin\theta = \frac{1}{2}$

sinは $\boxed{\frac{y\text{座標}}{\text{線分の長さ}}}$ だったので，y座標が1，原点からの距離が2の点を打って線分を引く。

すると見覚えのある三角形が現れて，



$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

一般角のときは $\theta = \frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{5}{6}\pi + 2n\pi$

と分かるのだが…

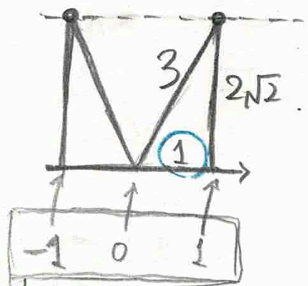
・1つの三角比が与えられたとき、他の2つ $(0 \leq \theta < 2\pi)$

1) $\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$　2) $\cos\theta = \frac{3}{4}$　3) $\tan\theta = 3$

これまでの方法をもとに、まずは1回考えてみよう。

答えが2つあることに注意。片方だけはX.

1) $\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.



x座標、分かっていれば書かなくて……

三平方の定理より、底辺は1。

方程式のときと同様、条件をみたすものが2つある。

右側では

$\cos\theta = \frac{x座標}{斜辺} = \frac{1}{3}$

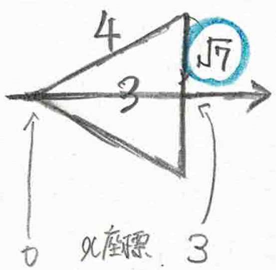
$\tan\theta = 傾き = 2\sqrt{2}$

左側では、

$\cos\theta = \frac{y座標}{斜辺} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$

$\tan\theta = 傾き = -2\sqrt{2}$.

2) $\cos\theta = \frac{3}{4}$



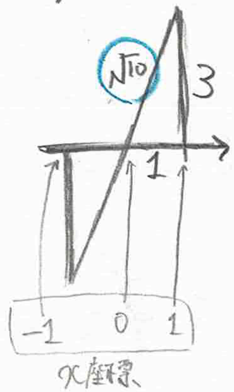
三平方より、高さは$\sqrt{7}$。

上側：$\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$

下側：$\sin\theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\tan\theta = -\frac{\sqrt{7}}{3}$

斜辺が右下がり ⇔ 傾きが負

3) $\tan\theta = 3$　tanは傾き.



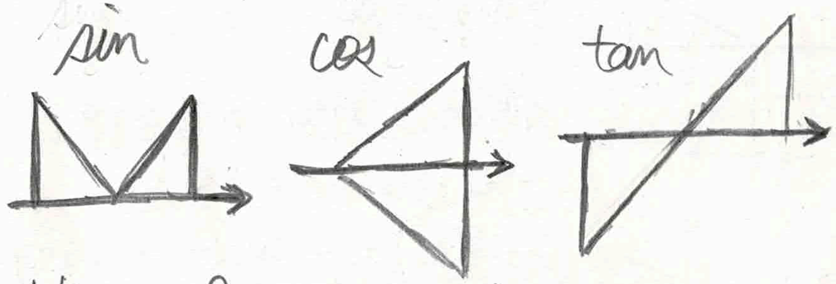
三平方より、斜辺は$\sqrt{10}$

右上側：$\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$

左下側：$\sin\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$.

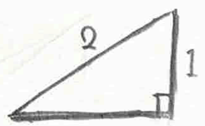
～ここまでのまとめ～

sin、cos、tan の値が与えられたとき描く（イメージする）図

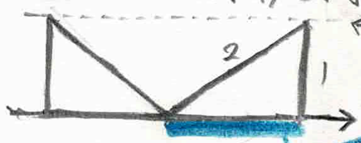


答えが2つあることを忘れるな!!

時間の限られた試験では、図を描く時間も
最小限にしたい。そんなときに三角形が活躍する
まず普通の(直角が右にある)、斜辺2，高さ1
の直角三角形を描く。



次に、向きが逆の三角形を向かい合わせる。



どちらもおなじみの三角定規。角の測りはじめはここ
(始線)
であったことに注意すると、

$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$ （一般角のとき $\theta = \frac{\pi}{6} + 2n\pi,\ \frac{5}{6}\pi + 2n\pi$）

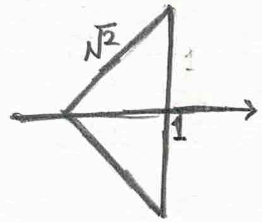
となる。

2) $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

sin のときは  だったが、cosのときはどうか
(一回考えてみよう)

三角形で考えるときも、sin, cos はあくまで x, y
「座標」であったこと(本冊 p.12)を忘れないこと。

斜辺 $\sqrt{2}$ に対して x 座標が 1 になるのは…

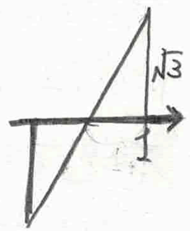


このように上下に2つくっつけた三角形で考えればよい。

45°の三角定規だから、

$\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi$，一般角のとき $\theta = \frac{\pi}{4} + 2n\pi,\ \frac{7}{4}\pi + 2n\pi$

3) $\tan\theta = \sqrt{3}$



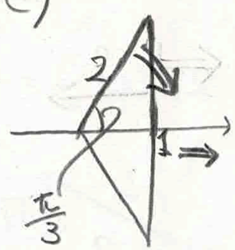
tan は傾き
斜辺が一直線
になるように三角形を2つ描けば、

$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$　一般角のとき $\frac{\pi}{3} + n\pi$

○三角不等式

問 $\cos\theta > \frac{1}{2}$ をみたす θ の範囲
$(0 \leqq \theta < 2\pi)$

方程式のときと考え方は同じ
まず $\cos\theta = \frac{1}{2}$ となる図を描く



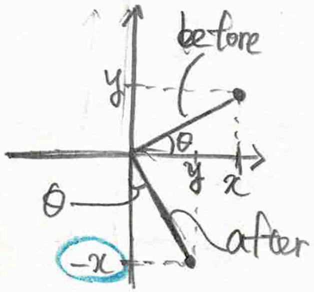
cosは x 座標に対応しているから、
cosが大きいなら x 座標も大きい
ということは、斜辺と x 軸のなす角が $\frac{\pi}{3}$ より小さければ
よいので、$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi$

・θ, $\theta+\pi$, $\pi-\theta$, $\frac{\pi}{2}-\theta$, $\theta+\frac{\pi}{2}$ の話

本冊の説明を読んだあとに、[redacted]先生のプリント（三角関数 No.1−3 三角関数の性質）を読むと分かりやすいかも。

本冊のような考え方が定着していれば、$\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)$のような公式にない角の三角関数も容易に考えられる。

例. $\sin\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)$を簡単にせよ.



$\frac{3}{2}\pi$とは270°（ ）ですから、これにθを加えると $\theta+\frac{3}{2}\pi$ です

移動後(after)のy座標は $-x$ になっていますから、

$\sin\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right) = -\cos\theta$ がいえます.

あ、いつのまにか敬体になっていました（笑）。やっぱり教科書も「話すように書く」方がいいのですね。

・最後に試験問題。

[1] 7) $\sin 10^\circ \cos 80^\circ - \sin 100^\circ \cos 170^\circ$

方針 角度を小さくする。

$\cos 80^\circ = \cos(90^\circ-10^\circ) = \sin 10^\circ$

$\sin 100^\circ = \sin(180^\circ-80^\circ) = \sin 80^\circ = \cos 10^\circ$

$\cos 170^\circ = \cos(180^\circ-10^\circ) = -\cos 10^\circ$ [redacted]

ですから、

与式 $= \sin 10^\circ \sin 10^\circ - \cos 10^\circ(-\cos 10^\circ)$

$= \sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ = 1$

8) $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\sin(3\pi-\theta) - \sin\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)\cos(\pi-\theta)$

・2πを超える数字があれば、2π以内に収めます

$\sin(3\pi-\theta) = \sin(\pi-\theta)$

あとは本冊p.13以降のように考えれば、

$-\sin\theta\sin\theta - (-\cos\theta)(-\cos\theta)$

$= -\sin^2\theta - \cos^2\theta = -1$

9) 正弦/余弦定理の使い分け。

① $b=4$ $A=45^\circ$ $B=60^\circ$ → bとB、つまり辺と対角の組み合わせがあるから、正弦定理

② $a=\sqrt{2}$, $b=5$, $C=135^\circ$ → 辺と対角がないから余弦

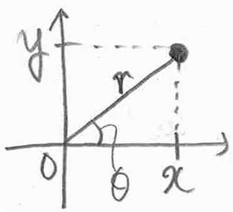
2中間数I 追試対策 最後のまとめ

・ラジアン：$\pi = 180°$ 

2π = 1回転

・2π超える角 → 2πを足す/引くして 2π以内に

・三角比　rは長さ、x, yは座標 ← 負にもなる

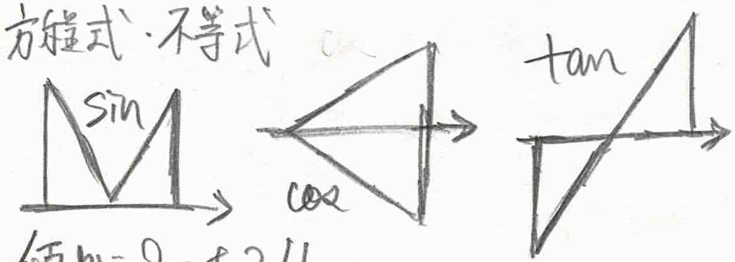


$\sin\theta = \frac{y}{r}$　$\cos\theta = \frac{x}{r}$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ = 傾き

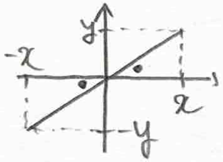
θが直角を超えても同じ考え方!

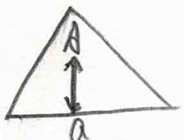
・方程式・不等式



値が2つある!!

・θ+πとか → 焦らず座標平面で確実に





・正弦・余弦定理：「辺と対角」あれば正弦

角が2つ出たら妥当性チェック。$A=150°$, $B=45°$はありえない。

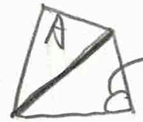
・△の面積 

$\frac{1}{2}bc\sin A$ ← 忘れるな!

はさむ2辺の積

・ヘロン：3辺が偶なら
便利だが、無理に覚えるな。

・円に内接する 　対角線で2つに分けて



$180° - A$　(対角線)^{2}を2通りで表わす

・△の形状 → 三角関数を消去

$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ のように、汚くても

無理矢理 辺の長さで表わす!!

「$a=b$の」二等辺 のように、情報を付ける!

・むやみに沢山解こうとしない。
計算ミスをとにかく最小限に。勿体ない。

・土日がんばった自分を「信じること」と、
最後まで細かなミスがないか「疑うこと」。

・緊張にうまく対処。気負いすぎず、気を抜きすぎず。