三角函数

$\mathbb{2}$

2学期期末考査対応

はじめに

スマホで見るのが大勢だろうから、前回とは趣向を変えてスライド形式にしました。**画面を横にして見るといいかも。**

基本的な内容しか扱っていません。応用問題については個別に質問してください。

言葉が減ってシンプルになった分、逆に分かりずらいかもしれません。試行錯誤中です。

もくじ

0. 復習

思い出してください。sin は $\dfrac{x\text{座標}}{\text{線分の長さ}}$、cosは $\dfrac{y\text{座標}}{\text{線分の長さ}}$、

そして **tanは傾き** です。

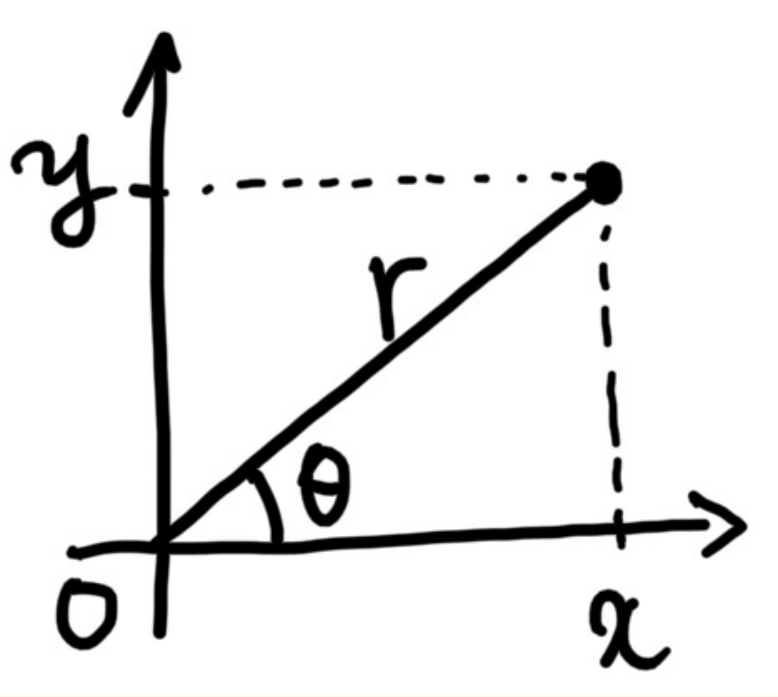
一般角の三角比の定義

右の図で、

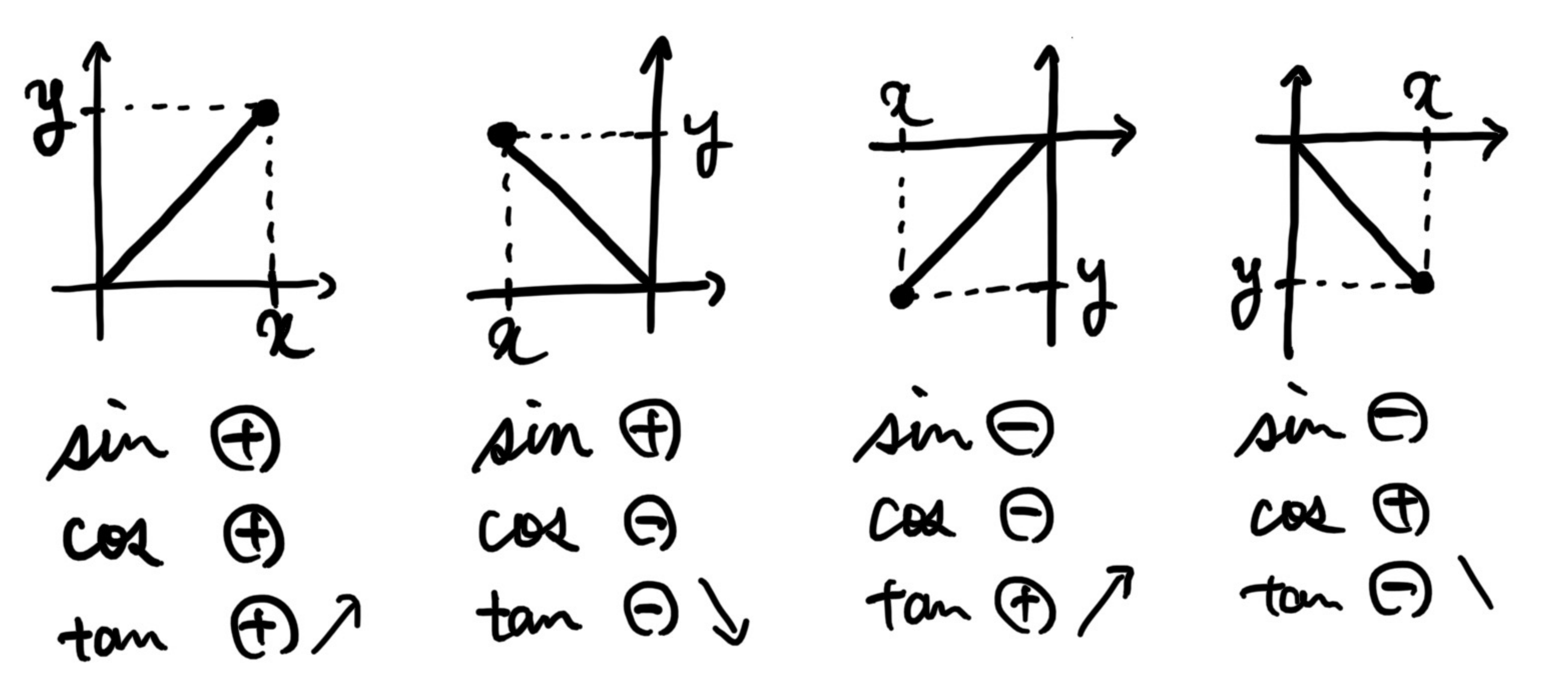
$$\sin\theta = \frac{y\text{座標}}{\text{線分の長さ}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x\text{座標}}{\text{線分の長さ}} = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \text{傾き}$$



（参考）象限別　三角比の正負



三角比の相互関係

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

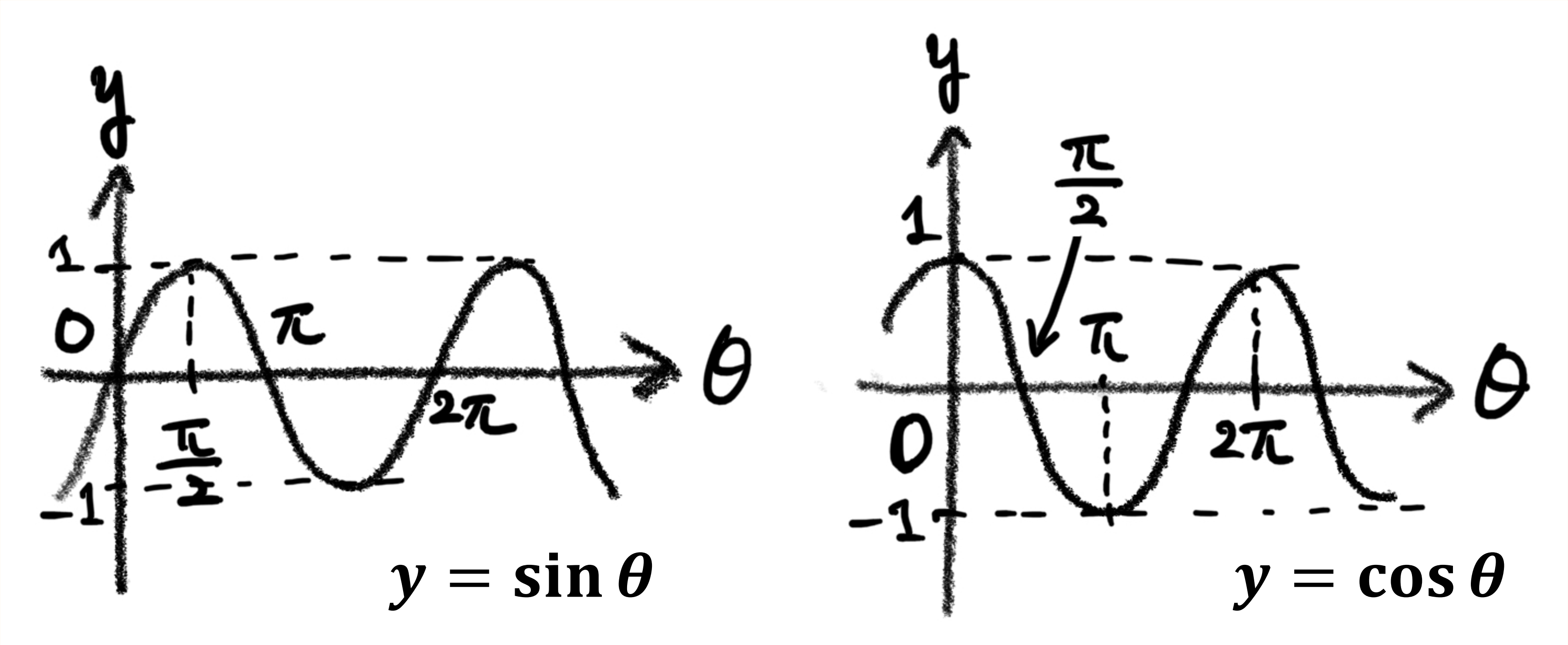
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

1. 三角関数のグラフ

tanのグラフ、平行移動、

軸の数値はどこまで記入すればいいの？、etc…

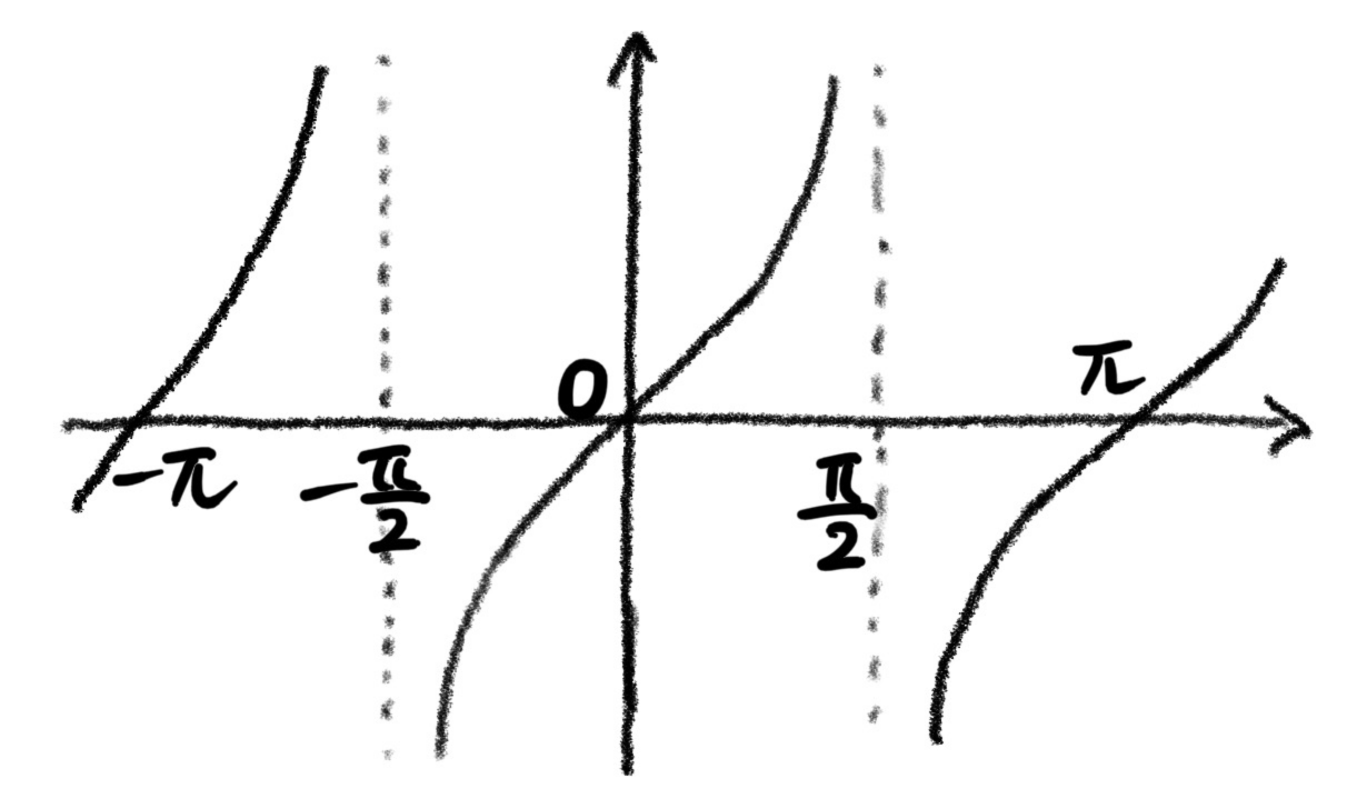
sin, cos のグラフ



注目すべきは、

- sinは 0 始まり、cosは 1 始まり（$\theta = 0$ の時の値のはなし）
- どちらも **周期 2π、値域 $-1 \le y \le 1$**

tanのグラフ

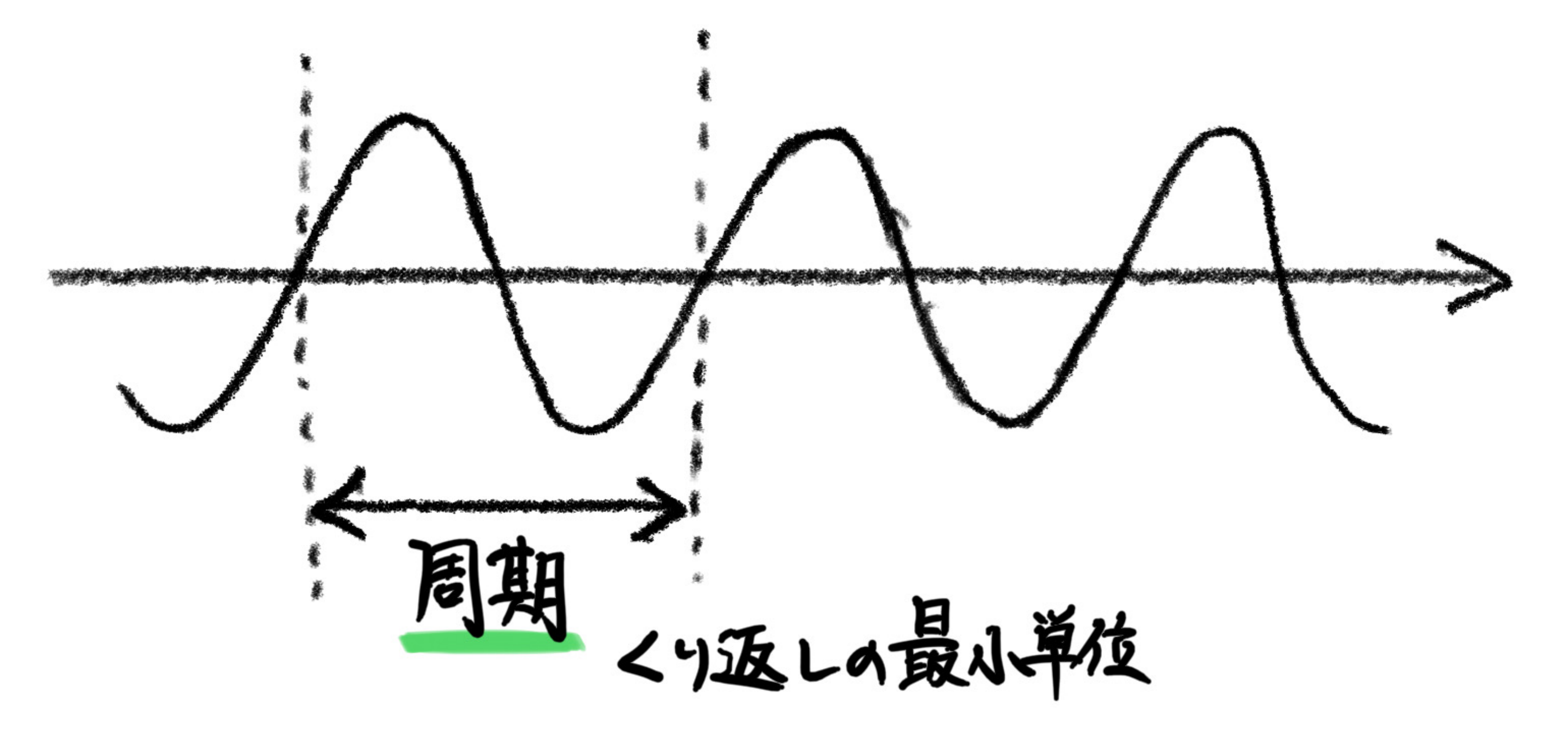


周期は $\boldsymbol{\pi}$

$-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \ldots$のときは定義されない（漸近線）

周期とは

波は同じ形の繰り返し



その繰り返しの最小単位が周期

周期の調べ方

sin, cosの周期は、その中身が 2π 進むときに θ がどれだけ進むか。もっというとθに何を足しても周期には影響しないから、

θ が何倍されているか

だけがわかればいい。

$$y = 2\sin\left(\underbrace{2\theta}_{\text{ここが }2\pi\text{ 進むのが 1周期}} + \frac{\pi}{6}\right)$$

周期の調べ方$_2$

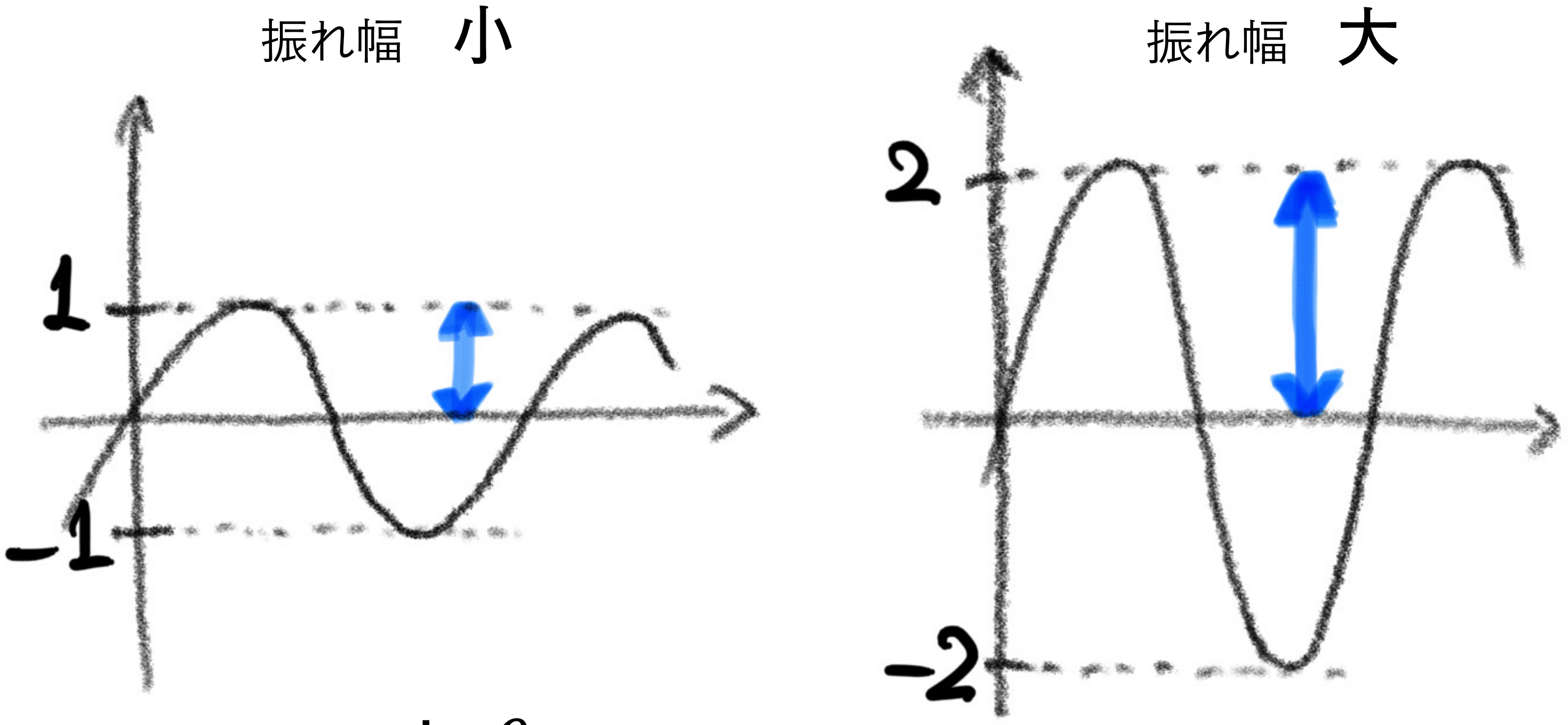
$$y = 2\sin\left(\underbrace{2\theta}_{\text{ここが } 2\pi \text{ 進むのが 1周期}} + \frac{\pi}{6}\right)$$

2θ が 2π だけ進む（増える）とき、θ は π だけ進むから、周期は π 。

$$y = -\cos\underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{ここが } 2\pi \text{ 進むのが 1周期}}(\theta + \pi)$$

$\frac{1}{3}\theta$ が 2π だけ進む（増える）とき、θ は 6π だけ進むから、周期は 6π 。

sin, cosの振れ幅



$y = \sin\theta$　　　　$y = \mathbf{2}\sin\theta$

sinの係数（左側についている数字）（の絶対値）**が大きいほど**

振れ幅が大きい

グラフを描きやすいように式変形

$$y=\sin(\boldsymbol{2\theta}-3\pi)\rightarrow y=\sin\boldsymbol{2}\left(\theta-\frac{3}{2}\pi\right)$$

（○θ −□π） を、 ○（θ −△π） という形に変形する。

→θ 軸方向の平行移動が考えられるようになる。

↑この変形をする理由は、それによってθ軸方向の平行移動が考えられるようになるから。わけもわからずにやっていると失敗する！

式の意味を理解しよう

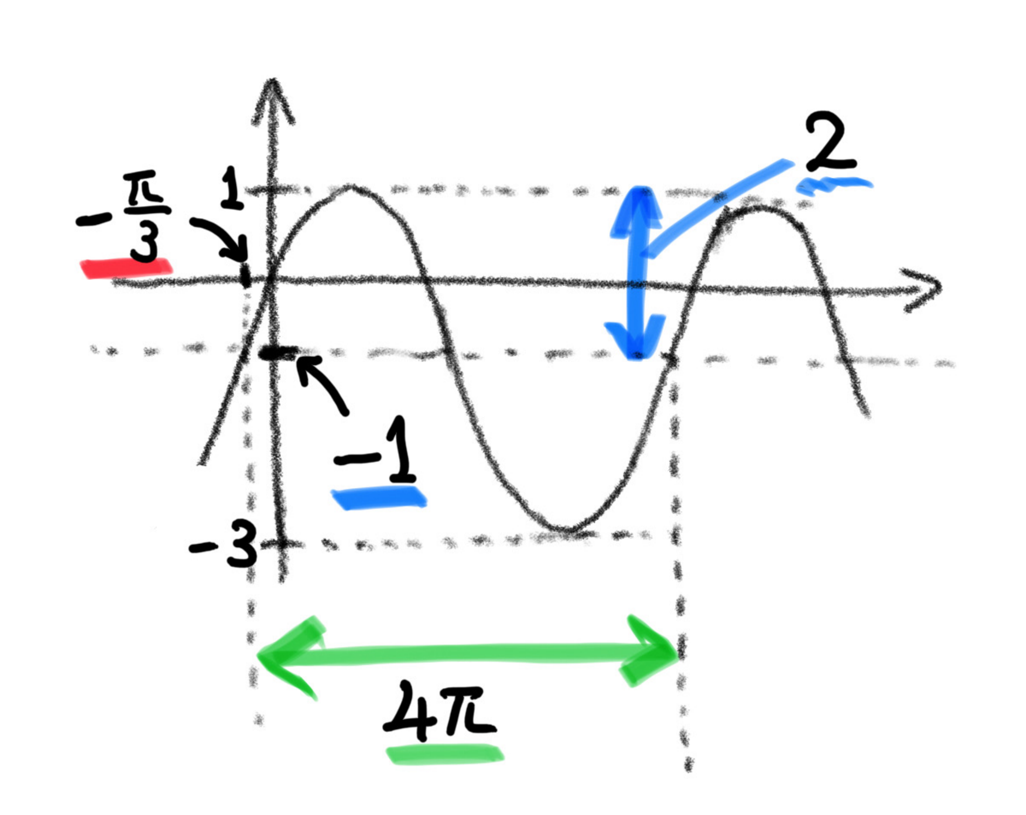
$$y = 2\sin\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - 1$$

振れ幅/2　2π/周期　横の移動　縦の移動

（次スライドへ続く）

$$y = 2\sin\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-1$$

振れ幅/2　　2π/周期　　横の移動　　縦の移動



sin の係数(2) → **振れ幅**

θ の係数 $\left(\frac{1}{2}\right)$ → **周期** (4π)

θ に足している数字 $\left(\frac{\pi}{3}\right)$

→ **横の移動量** $\left(\theta\text{軸方向に} -\frac{\pi}{3}\right)$

sin の項に足している数字 (-1)

→ **縦の移動量** (y 軸方向に -1)

グラフの描き方

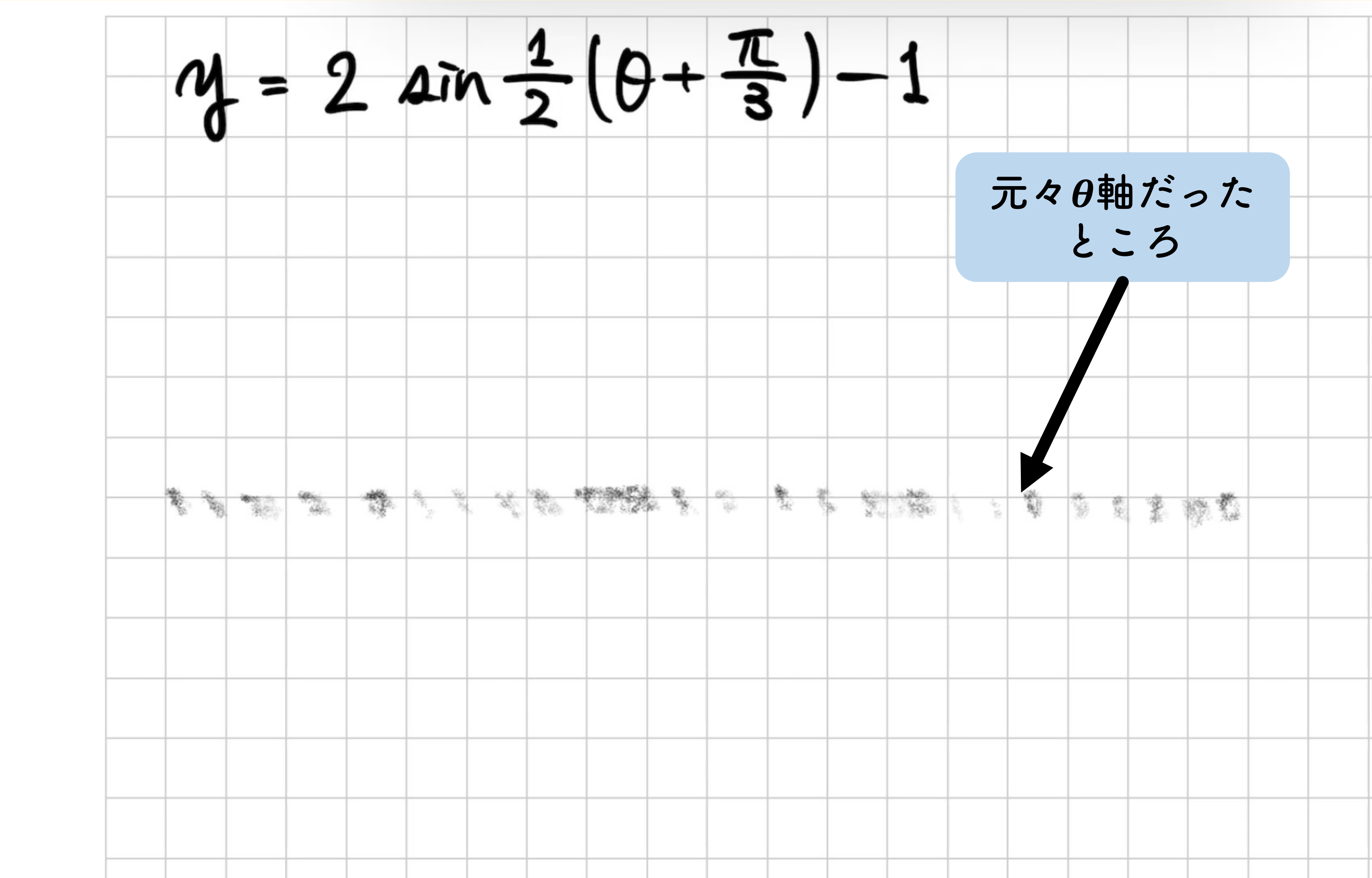
1. **波** を描く → **山と谷** を確認（$\sin, \cos$ の場合）
2. $\boldsymbol{\theta}$**軸** を描く
3. $\boldsymbol{\theta}$**座標** を記入する → 原点を確認
4. $\boldsymbol{y}$**軸** を描く
5. $\boldsymbol{y}$**座標** を記入する

※色々と流派がありますが、個人的に一番描きやすい（迷わない）と思う方法を紹介します。

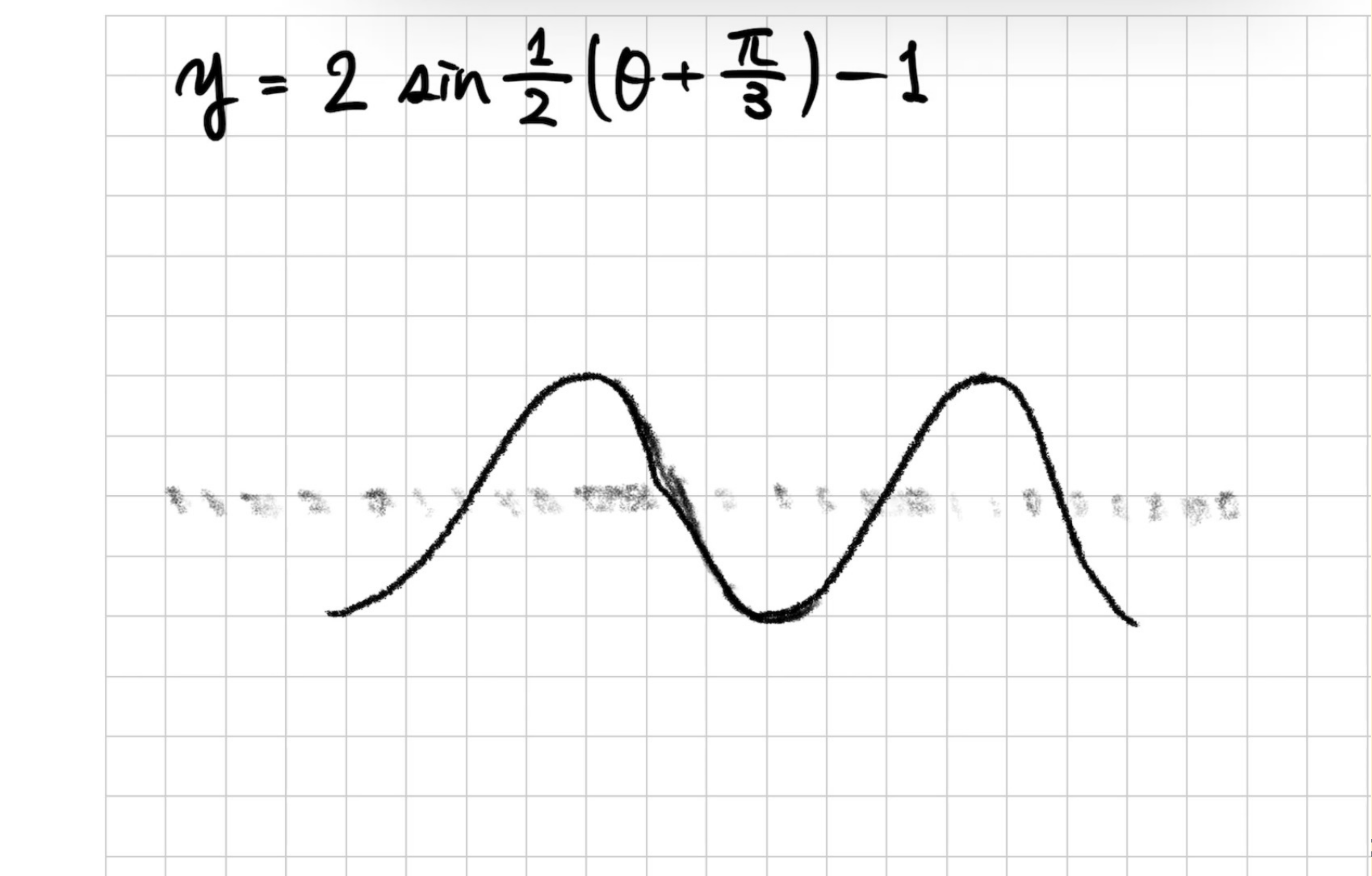
なぜ、軸をあとで描くのか

軸を描いてから、通る点を取っていくやり方だと、平行移動・拡大・縮小がややこしい。先に波を描いてしまい、それに合わせてx軸・y軸をとる方が描きやすいし、思考の手順も自然。

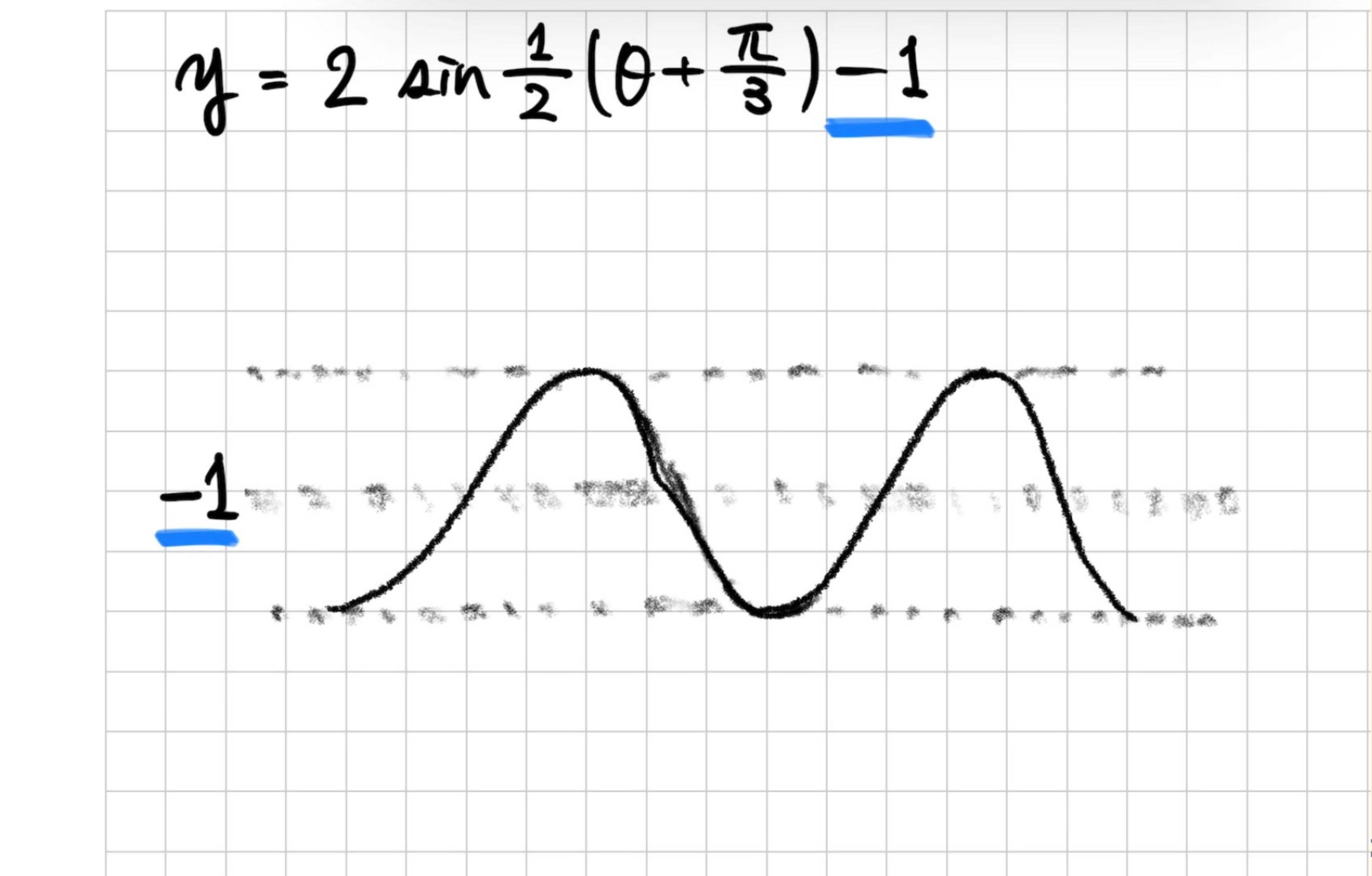
1. 波を描く 移動前のθ軸を描く



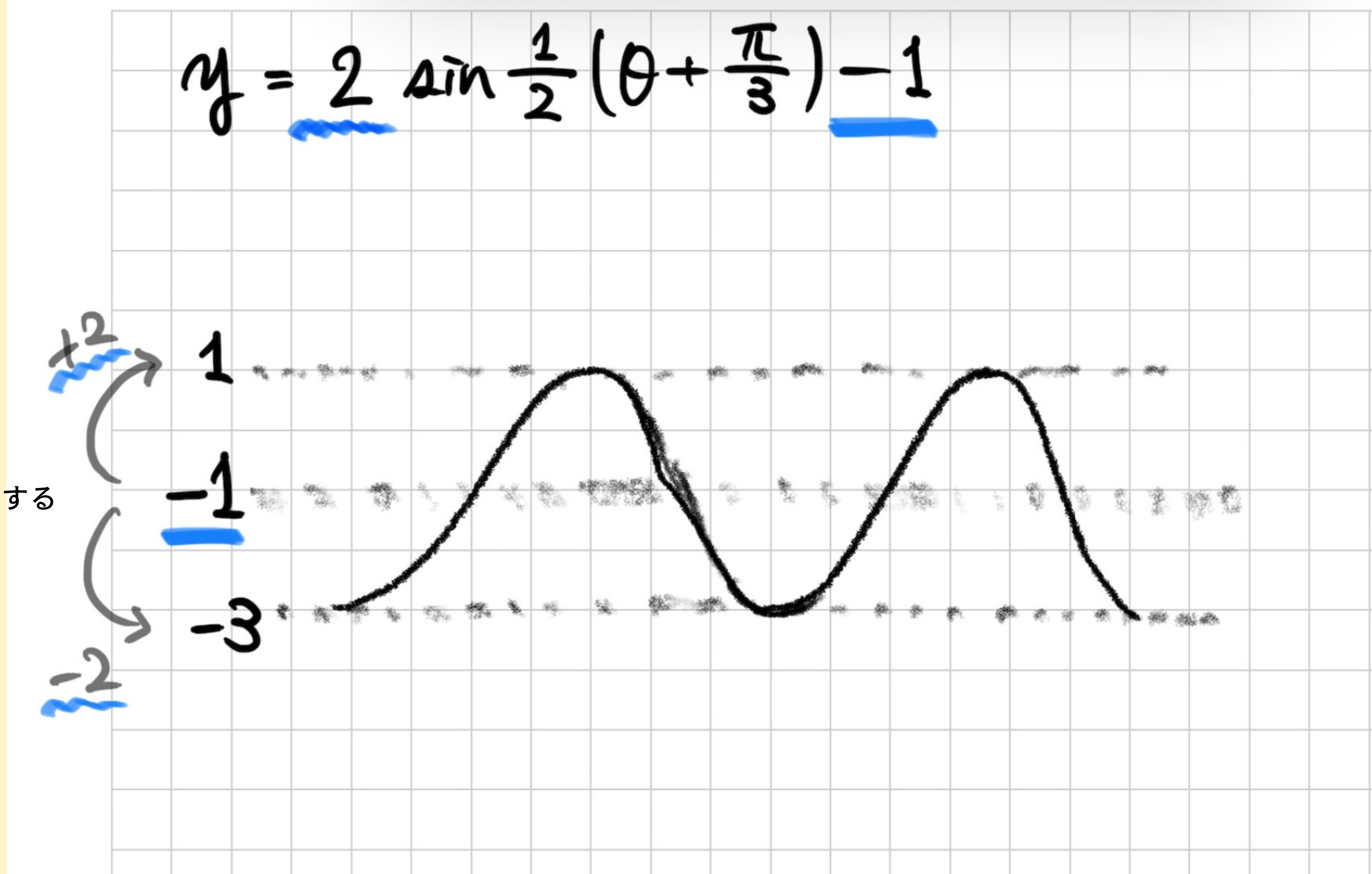
1. 波を描く



1. 波を描く 元のθ軸を確認

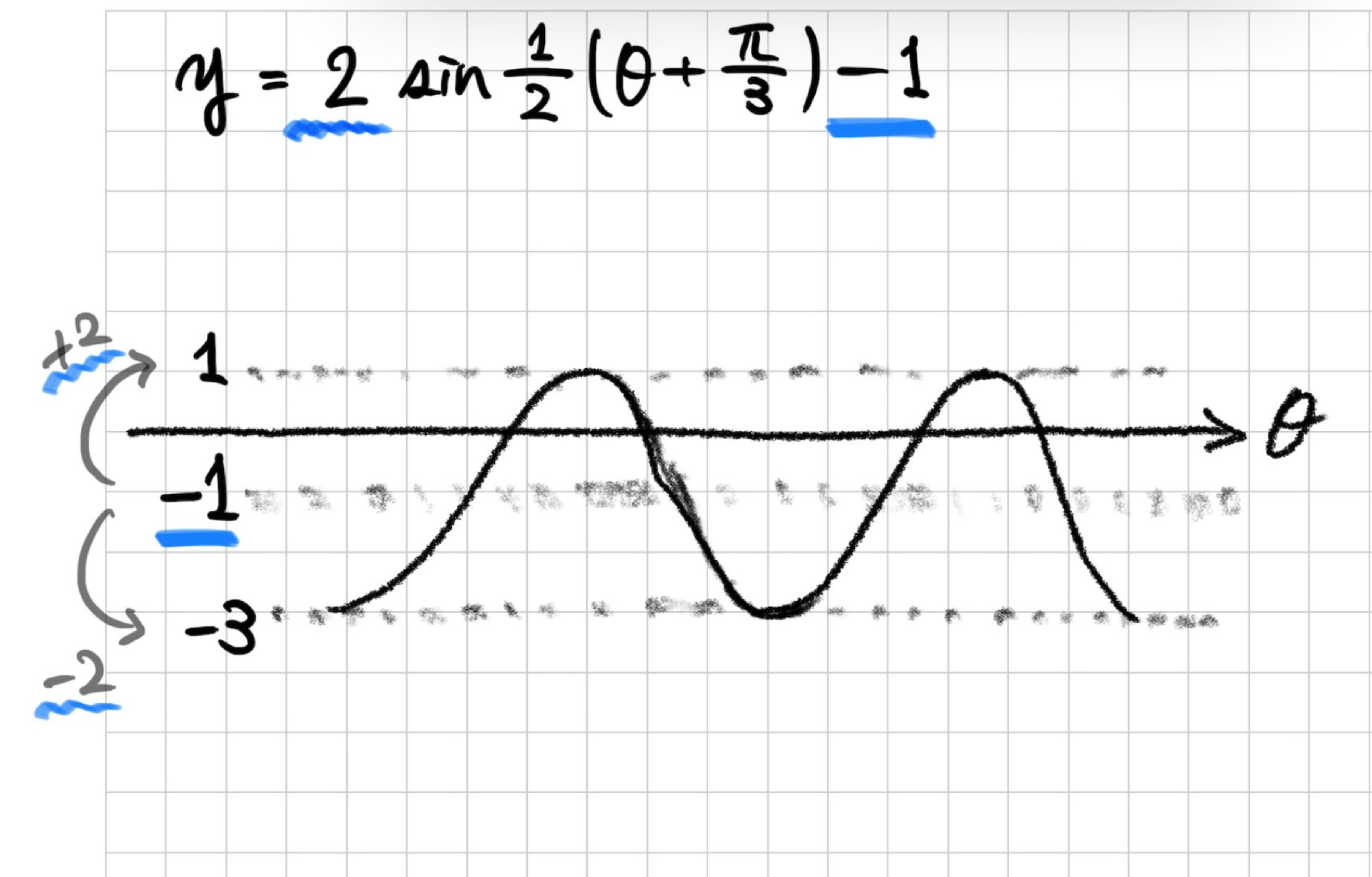


1. 波を描く 山と谷のy座標を確認（←振れ幅）

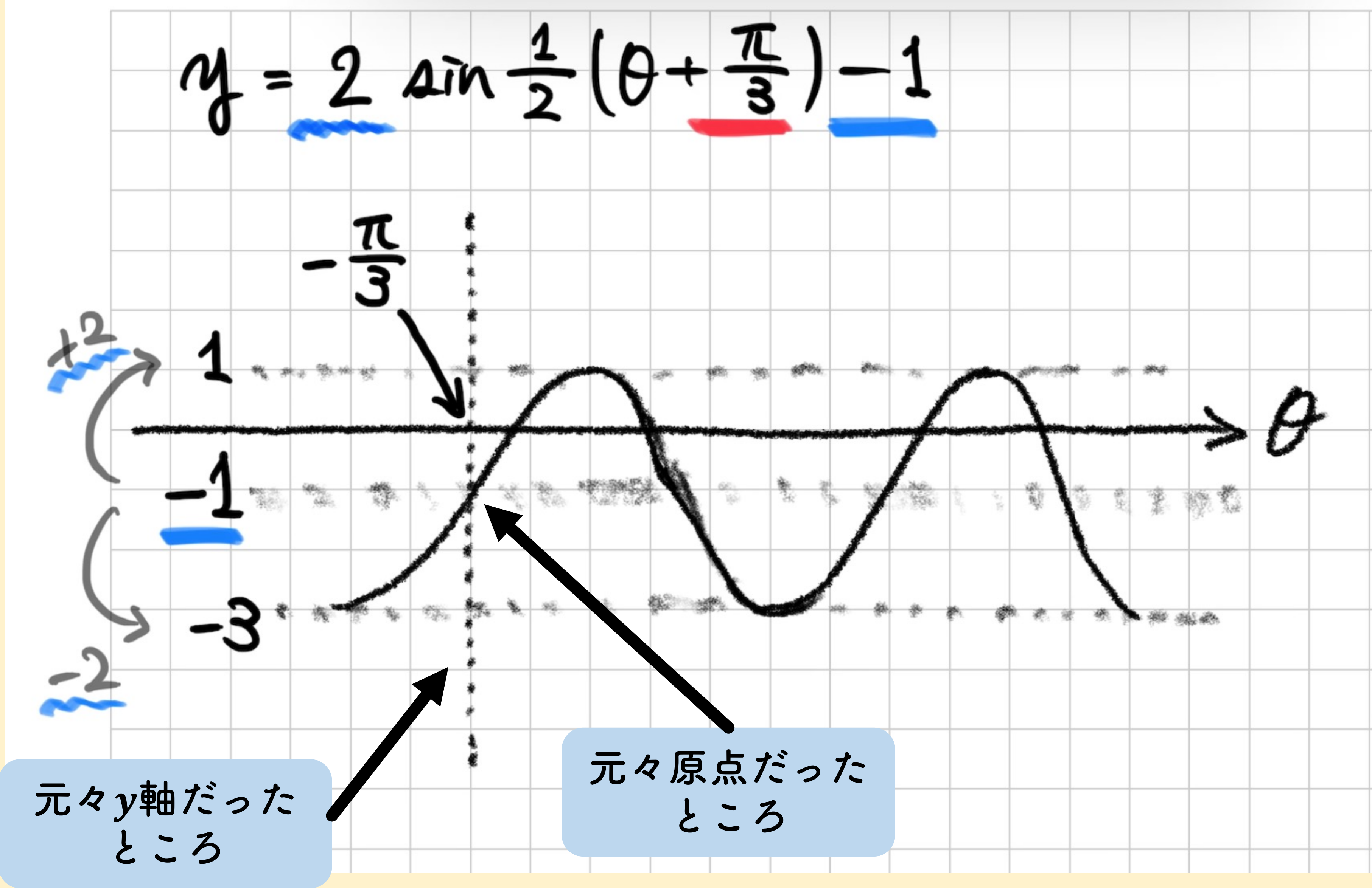


元の θ軸から、
上下に 2だけ変化する

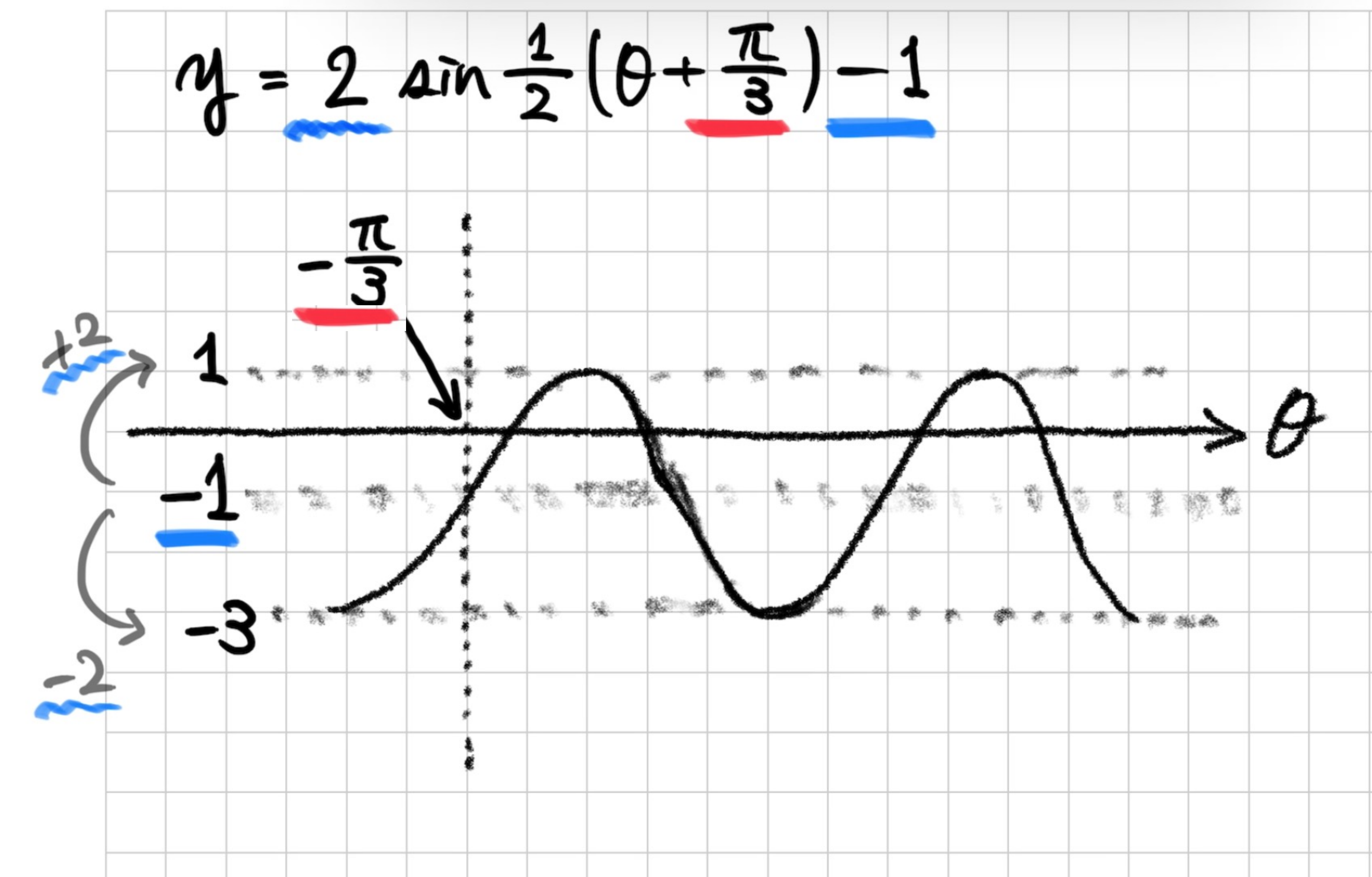
2. θ軸を描く



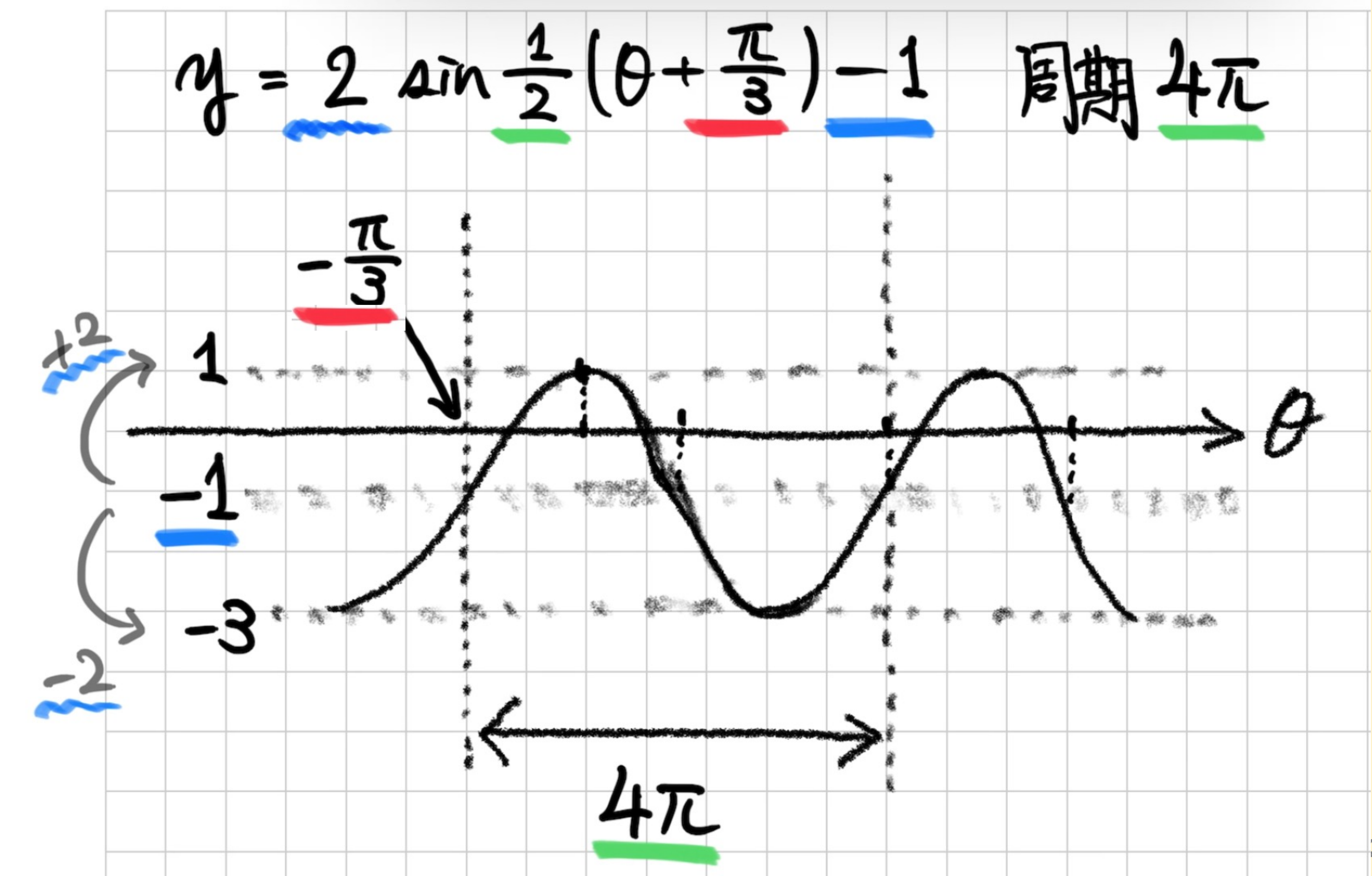
3. θ座標を記入する 移動前の原点を確認



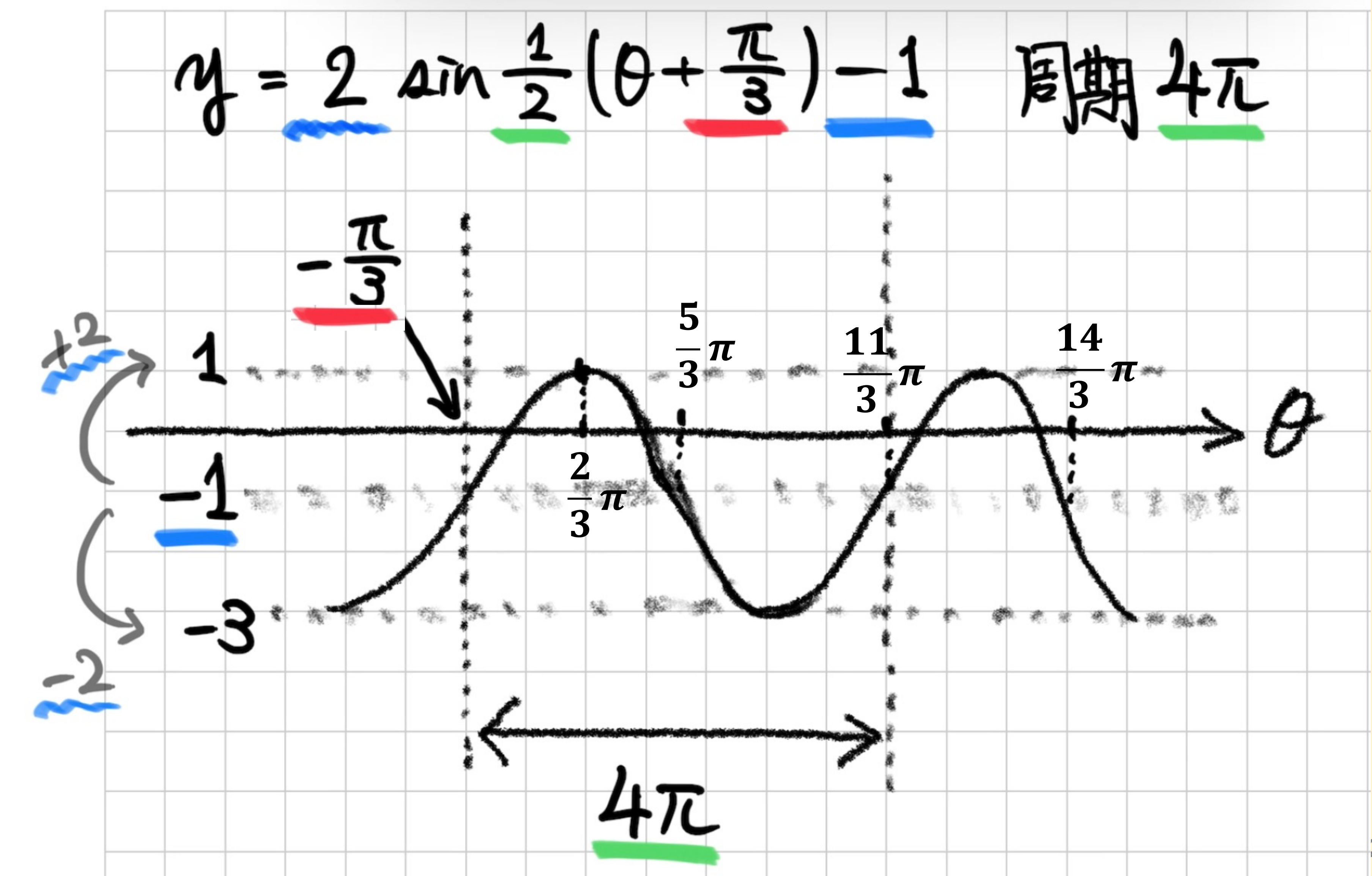
3. θ座標を記入する 移動前の原点を確認



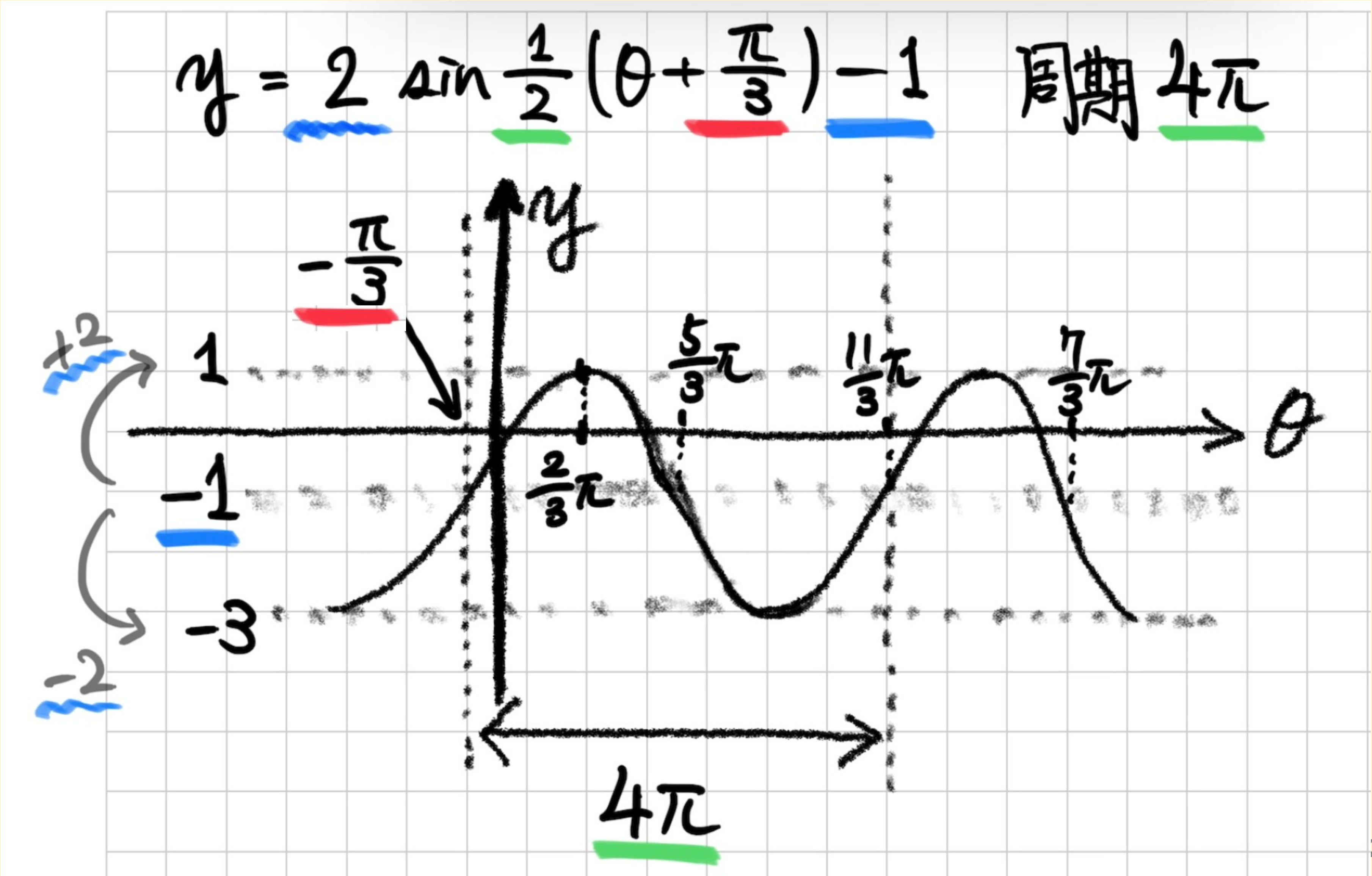
3. θ座標を記入する 周期を確認



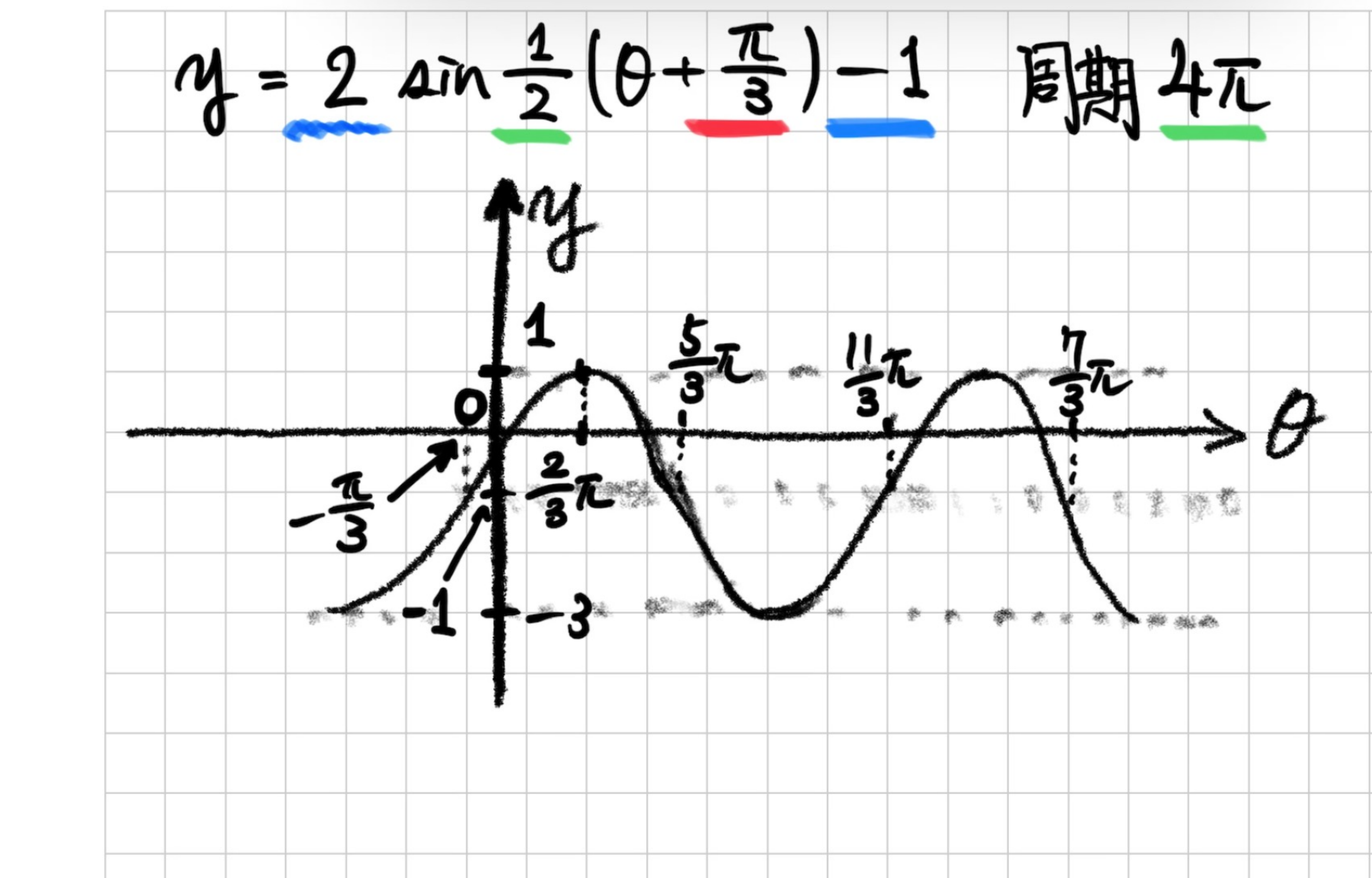
3. θ座標を記入する



4. y軸を描く 記入したθ座標から原点を確認



完成



$y = 2\sin\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - 1$　周期 4π
y
1
O
$\frac{5}{3}\pi$
$\frac{11}{3}\pi$
$\frac{7}{3}\pi$
θ
$-\frac{\pi}{3}$
$\frac{2}{3}\pi$
-1
-3

軸の数値の記入は

- 山と谷（最大・最小になるところ）
- 移動前のθ軸と交わるところ

は最低限書いておきましょう

注意

今まで見てきたように軸を後から描く方が描きやすい（と私は思う）が、解答用紙に既に軸が描かれている可能性もある。

その時は、先に問題用紙にササっと今の要領で（雑でいいから）グラフを書いて形を把握し、それを写すといい。

グラフ描画はサービス問題なので必ず得点すること。ここに時間をかけるのはもったいないので、演習して素早く描けるようにしよう。

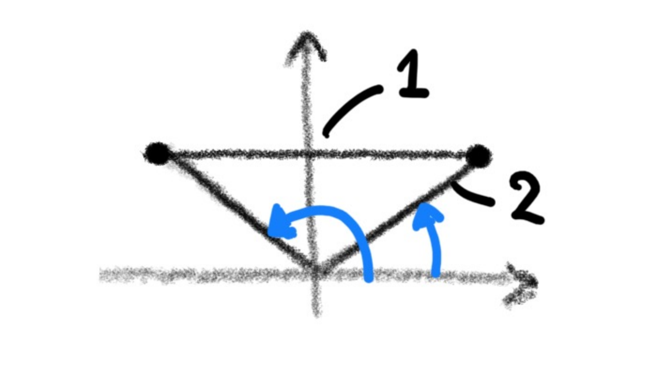
2. 三角方程式・不等式

三角方程式（復習）

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

sin は $\dfrac{\text{y座標}}{\text{線分の長さ}}$ より、

長さ：y座標 = 2：1



となるような線分は左図。

x軸の正の部分から測った角は、

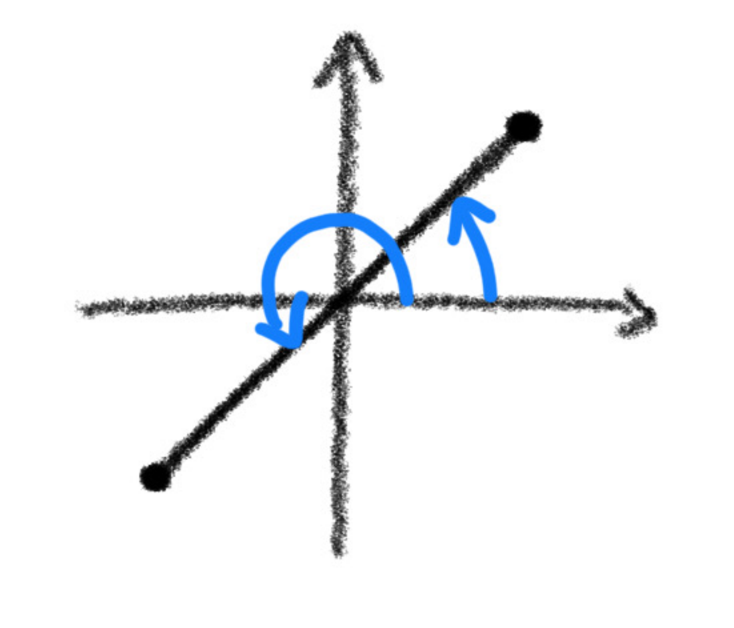
$$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi}$$

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi}$$

※$0 \leq \theta < 2\pi$のとき、θの値は **2つ** あることが多い

三角方程式（復習）2

$$\tan\theta = 1$$



$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi}$$

tan は傾き

傾きが1になるのは左図。

（右上（第1象限）だけでなく左下（第3象限）にも線分を引けることに注意。）

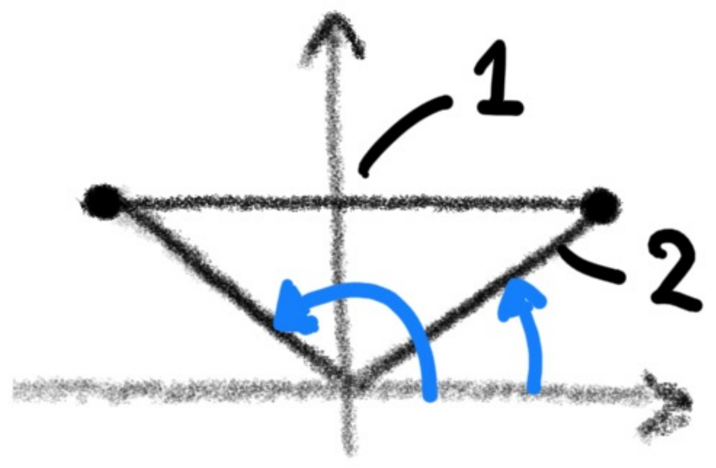
x軸の正の部分から測った角は、

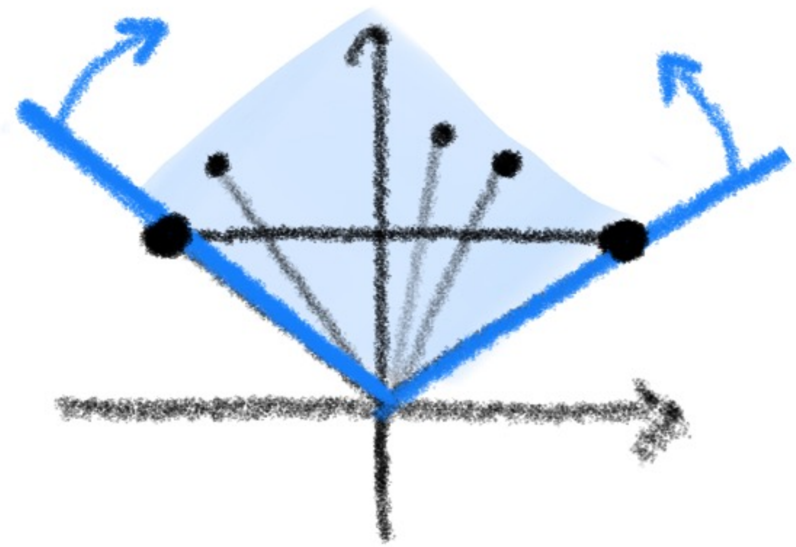
$$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi}$$

方程式から不等式へ sin

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\sin\theta \geq \frac{1}{2}$$



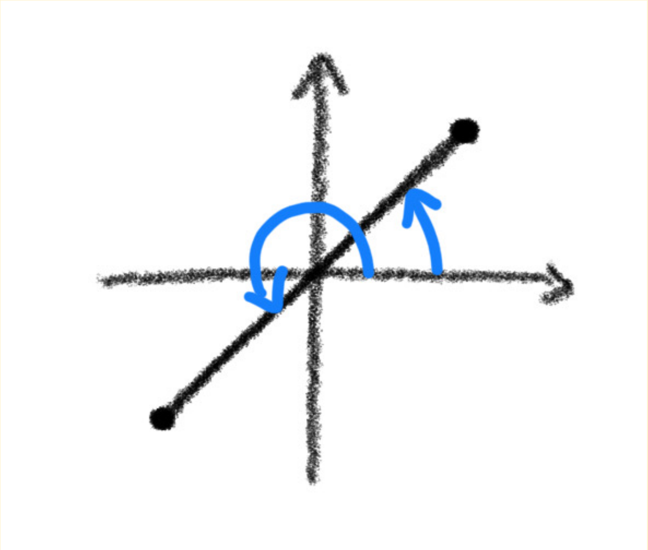


$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi}$$

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi}$$

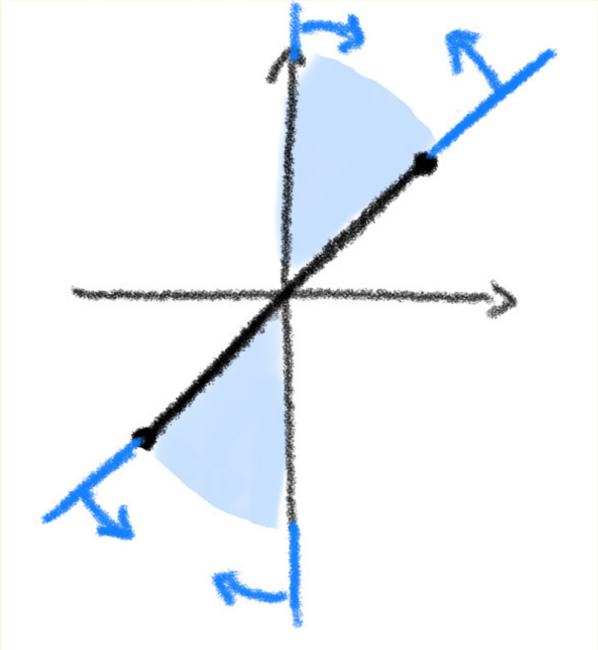
方程式から不等式へ tan

$$\tan\theta = 1$$



$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi}$$

$$\tan\theta \geq 1$$



$$\boldsymbol{\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi \leq \theta < \frac{3}{2}\pi}$$

3. 加法定理など

sin, cosの加法定理さえ覚えておけば大丈夫。
とにかく何度も問題演習で使って体に染み込ませよう

加法定理

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

(α + β) だけは覚える!

sinの2倍角

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$\beta=\alpha$を代入→

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

cosの2倍角

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$\beta=\alpha$を代入→

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha-1\\ &= 1-2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

半角

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

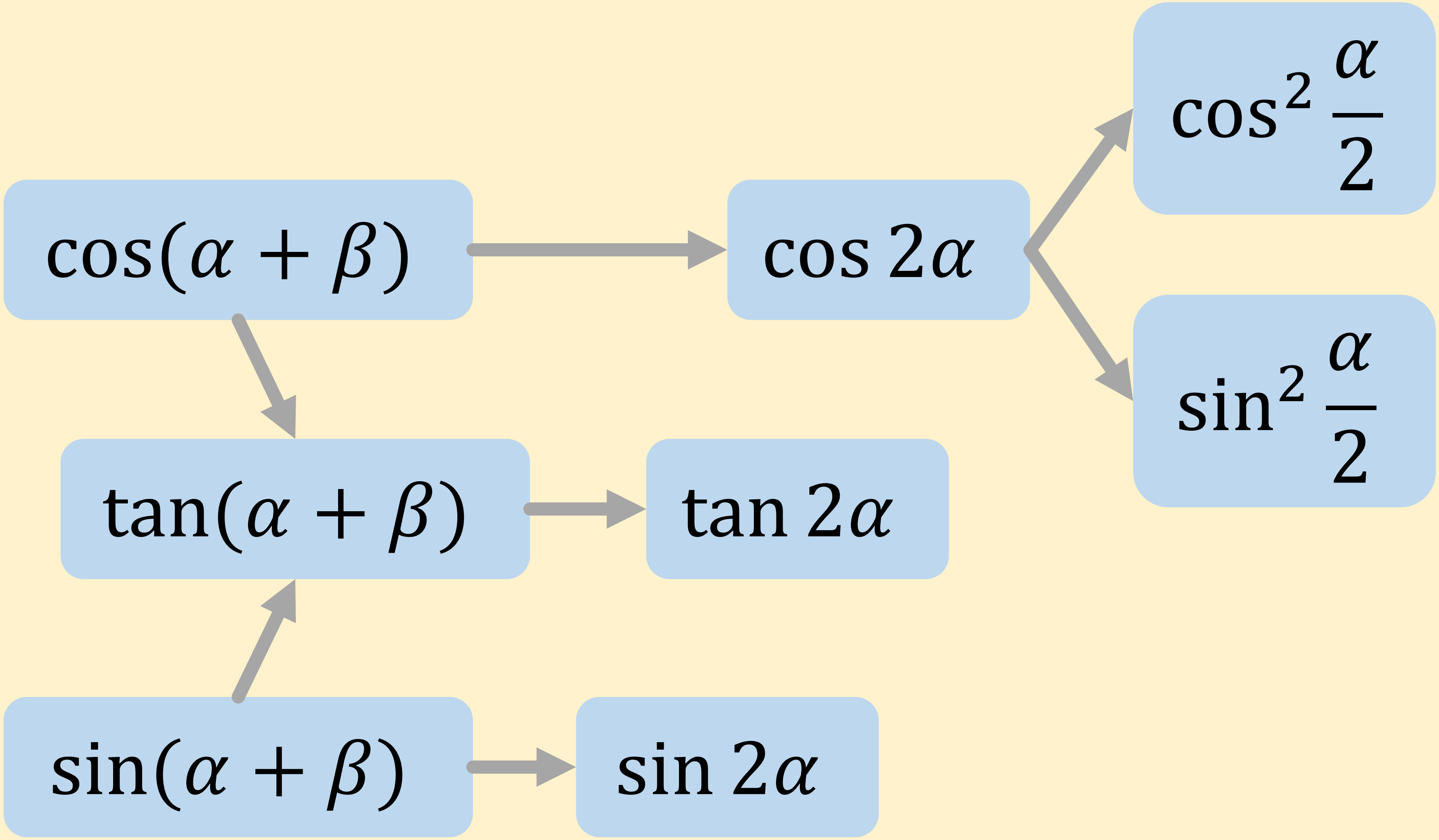
$$= 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \longrightarrow \boxed{\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \longrightarrow \boxed{\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

α を $\dfrac{\alpha}{2}$ に書き換える

加法定理から導ける



$\cos(\alpha+\beta)$
$\cos 2\alpha$
$\cos^2\frac{\alpha}{2}$
$\sin^2\frac{\alpha}{2}$
$\tan(\alpha+\beta)$
$\tan 2\alpha$
$\sin(\alpha+\beta)$
$\sin 2\alpha$

公式を覚える前に

とにかく問題演習で覚えるしかないです。ひたすら公式を使いまくって体に染み込ませてください。　そのときに、

sin, cosの加法定理以外は全部自力で導く

ようにすること。前ページで見たように、他の公式はすべて加法定理から「自然に」導けます。忘れたら公式集を見るのではなく、$\sin(\alpha+\beta), \cos(\alpha+\beta)$から導く。そうやって何度も何度も忘れては導き出すことを繰り返しているうちに自然と覚えるようになる（はずです）。

「忘れたら自力で導き出す」癖をつけておくと試験中にも有効です。

積→和

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

異種 の積（sin と cos） → 和と差の **sin**

同種 の積（sin同士／cos同士）→ 和と差の **cos**

和→積

$\frac{A+B}{2}$, $\frac{A-B}{2}$ は **足してA、引いてB** になる2数

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

sinの和 → sinとcos

cosの和 → cos同士

cosの差 → sin同士

4. 三角関数の合成

三角関数の合成公式は何をしているのか

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha) \quad \leftarrow ？？？$$

最終的に $\boldsymbol{r\sin(\theta+\alpha)}$ という形に持っていきたい。

加法定理で展開すると、

$$r\sin(\theta+\alpha) = \boxed{r\cos\alpha}\sin\theta + \boxed{r\sin\alpha}\cos\theta$$

$$\| $$

$$\boxed{a}\sin\theta + \boxed{b}\cos\theta$$

$\sin\theta$、$\cos\theta$ の係数を比較して、

$$\boldsymbol{a = r\cos\alpha}, \qquad \boldsymbol{b = r\sin\alpha}$$

これを満たすように r, α を定めればいい。

合成公式$_2$

目指す形：$\boldsymbol{r\sin(\theta+\alpha)}$

$$r\sin(\theta+\alpha)=\boxed{r\cos\alpha}\sin\theta+\boxed{r\sin\alpha}\cos\theta$$

$$\shortparallel$$

$$\boxed{a}\sin\theta+\boxed{b}\cos\theta$$

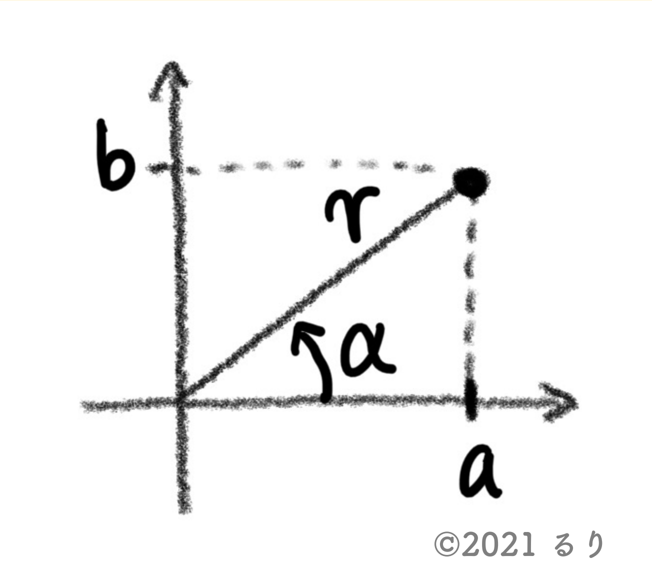
$\boldsymbol{a=r\cos\alpha}$, $\boldsymbol{b=r\sin\alpha}$ を満たすような r,a は…

右の図のようにすれば

$$\boldsymbol{r=\sqrt{a^2+b^2}}$$

とわかる。 $a=1, b=\sqrt{3}$ のような時 は α の値まで

わかる。（大抵の問題は α までわかる）



※ α がわからないときは

青チャートII＋B の

p.243「基本例題54 三角関数の合成」（3）

を参照。αを求められないので、その代わりにαがどんな角度であるかを説明する（「α は $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}, \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$ を満たす」のように）

おわりに

最後まで読んでいただいてありがとうございます。

期末考査を乗り切ろう！

↓時間があれば答えてもらえると嬉しい。数学の質問等もどうぞ

https://forms.office.com/r/JXpcgWfLXs