# ２学期期末考査 数学A 補足

作成：[redacted]るり

**目次**（□数字は大問番号、☆は重要ポイント解説、◇は発展内容。読み飛ばして可）

## 1 確率・期待値

| X＼Y | | 数学 | | | | | 合計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | |
| 英語 | 5 | 1 | 3 | 1 | 0 | 1 | 6 |
| | 4 | 1 | 0 | 7 | 5 | 1 | 14 |
| | 3 | 2 | 1 | 0 | 9 | 3 | 15 |
| | 2 | 1 | b | 6 | 0 | a | a+b+7 |
| | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 | 5 |
| 合計 | | 5 | 4+b | 15 | 15 | a+8 | 50 |

$\boldsymbol{x \geq 3}$

### 確率の計算

$$確率 = \frac{\textbf{求める場合の数}}{\textbf{全ての場合の数}}$$

(1) $\dfrac{\text{コ}}{\text{サシ}}$：$x \geqq 3$ となるのは、右図の青線より上の部分で、場合の数は $6 + 14 + 15 = 35$（通り）。そのうち $Y = 3$ となるのは $1 + 7 = 8$（通り）より、条件付き確率は $\boldsymbol{\frac{35}{8}}$。

(2) ス：英語または数学の合計から $a + b + 47 = 50 \therefore a + b = \boldsymbol{3}$。

私ははじめ表中の $a, b$ の存在に気づかず、巡回に来た[redacted]先生に「$a, b$とは何ですか？問題文に記述が見当たらないのですが」と質問して当惑させてしまった。

$\dfrac{\text{セ}}{\text{ソ}}$：$a + b = 3$ より $X = 2$ となる場合の数は 10通り。$\frac{10}{50} = \boldsymbol{\frac{1}{5}}$。

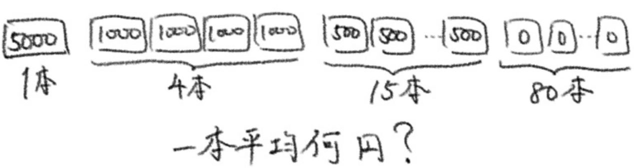
### 期待値の意味

| | 賞金(円) | 本数(本) |
|---|---|---|
| 1等 | 5000 | 1 |
| 2等 | 1000 | 4 |
| 3等 | 500 | 15 |
| はずれ | 0 | 80 |
| 計 | ― | 100 |

例えば右図のようなくじで、1 等のくじ、2 等のくじ、3 等のくじ、はずれくじで賞金が異なるが、**平均して一本あたり何円なのか** が期待値。このとき、等級によって本数が違うから、単純に

$$\frac{5000 + 1000 + 500 + 0}{4}$$

としてはいけないのはいいだろう。では、どう考えればいいのか。(期待値の意味がわかっていない人はここで必ず一回考えて)。



**100 本全てのくじの賞金を足して 100 で割ればいい** のである。

全賞金の合計は

$$5000 \times 1 + 1000 \times 4 + 500 \times 15 + 0 \times 80 = 16500 \text{（円）}$$

であるから、1 本あたり平均して

$$16500 \div 100 = 165 \text{（円）}$$

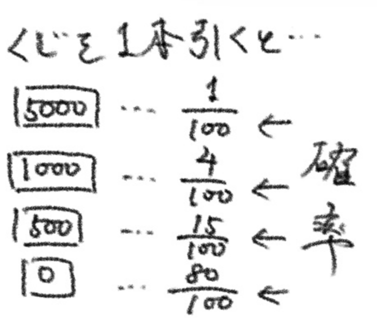
に相当する。これが **賞金の期待値** である。これを一本の式で書くと

$$\frac{5000 \times 1 + 1000 \times 4 + 500 \times 15 + 0 \times 80}{100} = 165$$

この式は、次のように書くこともできる。

$$5000 \times \frac{1}{100} + 1000 \times \frac{4}{100} + 500 \times \frac{15}{100} + 0 \times \frac{80}{100} = 165$$

このように書くと、「×」の左側は**金額**、右側は **その金額になる確率** になっている。このことから、**金額と確率の積** を全ての金額（5000, 1000, 500, 0）について計算して足したのものが期待値とも言える。




**期待値 ＝ (とりうる値 × その確率) の和**

ここで重要なのは、

それぞれの（値×確率）を計算して足しても、
先に合計金額を求めてからくじの本数で割っても、
得られる期待値は変わらない

ということ。

確率のところは約分するとかえって面倒になることもあるので適宜判断。記述では約分せずに書いて良い。

答えだけ出すときは別として、記述式の答案では必ず $\mathbf{0\times 80}$ **を記入する**こと。足していないと、ちゃんと期待値の定義に沿って計算したとみなされない。

---

$\frac{\text{タチ}}{\text{ツテ}}$：$X=5$となる場合の数は 6（通り）、$X=4$は 14、$X=3$は 15、$X=2$は 10、$X=1$は 5 であるから、$X$の期待値は

| X＼Y | | 数学 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 合計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 英語 | 5 | 1 | 3 | 1 | 0 | 1 | 6 |
| | 4 | 1 | 0 | 7 | 5 | 1 | 14 |
| | 3 | 2 | 1 | 0 | 9 | 3 | 15 |
| | 2 | 1 | b | 6 | 0 | a | a+b+7 |
| | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 | 5 |
| 合計 | | 5 | 4+b | 15 | 15 | a+8 | 50 |

$$5\times\frac{6}{50}+4\times\frac{14}{50}+3\times\frac{15}{50}+2\times\frac{10}{50}+1\times\frac{5}{50}$$

$$=\frac{156}{50}=\boldsymbol{\frac{78}{25}}.$$

なおこれを

$$\frac{5\times 6+4\times 14+3\times 15+2\times 10+1\times 5}{50}=\frac{156}{50}=\frac{78}{25}$$

と書くと、全員の英語の成績を足してから人数で割ったことになる。

(3) 解説の通りだが、与えられた期待値 $\frac{133}{50}$ の分母の 50 は人数であるから、直ちに **全員の数学の成績の合計が 133** とわかる。

$$5\times 5+4(b+4)+3\times 15+2\times 15+1(a+8)=133$$

これを整理して $a+4b=9$。これと $a+b=3$ から $\boldsymbol{a=1, b=2}$。

**――― 事象の独立 ―――**

事象 A と B が独立：A の成否（起きているかどうか）が、B の成否に影響を及ぼさない。つまり

- A が起きているとき　に B が起こる確率

・ A が起きていないときに B が起こる確率

が同じ。A についても

・ B が起きているとき　に A が起こる確率
・ B が起きていないときに A が起こる確率

が同じ。例えば

サイコロを投げて 1 の目が出る確率
コインを投げて　表　　が出る確率

は互いに独立である。これはコインとサイコロが「物理的に」切り離されているから当然であるが、すぐには独立かどうかわからない（計算してみないとわからない）ものもある。

例えば、

・ 5 年生のうち半分が理系選択
・ 4 年生のうち半分が理系選択

であれば、無作為に選んだ 1 人が理系選択である確率は、5 年生から選んだ場合でも 4 年生から選んだ場合でも変わらず $\frac{1}{2}$ である。このことから独立だとわかるのはどんな事象だろうか？

ヒント　無作為に選んだ 1 人の**学年**が**文理選択**の傾向に影響しないから…

$$\text{無作為に選んだ一人が}\begin{cases}\text{4 年生であるという事象}\\\text{理系選択であるという事象}\end{cases}$$

が独立である。

逆に選んだ一人が理系選択だったときも、文系選択であったときも、その人が 4 年生である確率は $\frac{1}{2}$ で同じ。

一方、

・ 5 年生のうち 半分 が理系選択
・ 4 年生のうち　$\frac{3}{4}$ が理系選択

であれば 5 年生全体と 4 年生全体で理系選択者の割合が異なる。このとき、

無作為に選んだ１人が５年生であるか４年生であるかによって、その人が理系選択である可能性が変わってくる。このとき、

無作為に選んだ一人が
- ４年生であるという事象
- 理系選択であるという事象

は独立ではない（互いに影響している）。

逆に選んだ１人が「理系選択であるか文系選択であるか」によってその人が４年生である確率が変わってくることを確かめよう。

---

(4) $X=2$ という事象と $Y=4$ という事象が独立

解説のように積の法則を使う方法の他に、(2)の結果を使うこともできる。

**【別解】**

事象$(X=2)$ と事象$(Y=4)$が独立であるということは、

・単に$(X=2)$である確率

・$(Y=4)$のときに$(X=2)$である確率

が等しいということ。

| X＼Y | | 数学 5 | 数学 4 | 数学 3 | 数学 2 | 数学 1 | 合計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 英語 | 5 | 1 | 3 | 1 | 0 | 1 | 6 |
| 英語 | 4 | 1 | 0 | 7 | 5 | 1 | 14 |
| 英語 | 3 | 2 | 1 | 0 | 9 | 3 | 15 |
| 英語 | 2 | 1 | b | 6 | 0 | a | a+b+7 |
| 英語 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 | 5 |
| 合計 | | 5 | 4+b | 15 | 15 | a+8 | 50 |

単に$(X=2)$である確率は(2)で求めた $\frac{1}{5}$。

一方$(Y=4)$のときに$(X=2)$である確率は、表より $\frac{b}{4+b}$ であるから

$\frac{b}{4+b}=\frac{1}{5}$　$5b=4+b$　$\boldsymbol{b=1, a=3}$.

（次ページへ）

## $\boxed{2}$ 数値代入法で最後の式展開が面倒な人へ

### ◇ 数値代入法

青チャートII+B p.33 「4 恒等式」によると、

**$x$ について $n$ 次の条件式が異なる $(n+1)$ 個の値に対して成り立つとき、その式は恒等式である。**

例えば、$x^2-1=(x-1)(x+1)$ という式について、$x=1$ を代入すると $0=0$ となって成立、$x=2$ を代入すると $3=3$ となって成立、$x=3$ を代入すると $8=8$ でやはり成立する。

両辺は $x$ について２次であり、3 つの異なる $x$ について等式が成り立つから、どんな $x$ に対してもこの式が成り立つ、すなわち恒等式であると言えるのである。たった３つの値について調べるだけで全ての $x$ について成り立つことが示せるのは魔法のようではないか。

証明は青チャート参照のこと。どんな恒等式も $\left(\text{左辺}\right)-\left(\text{右辺}\right)$ を計算すると

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0 \quad (a_0,a_1,\ldots,a_n\text{は定数})$$

という形になる。ここで **$n$次方程式の解は高々 $n$個である** ことから、もし等式が $(n+1)$ 個の $x$ に対して成り立つようなら、$a_0=a_1=\cdots=a_n=0$ であるに違いない。したがって等式は恒等式である。

当然、記述でもこの魔法ツールを使いたいわけだが、その場合には必ず

「両辺が $x$について $n$次以下である」
「異なる $(n+1)$ 個の値に対して成り立っている」

ことを記述する必要がある。そうしないとちゃんとわかっているとみなしてもらえない。

記述で大事なのは、（簡潔に書くことももちろんだが）とにかく「わかってますよアピール」である。必要以上にくどくどと書く必要はないが、こういう「絶対に書き漏らしてはいけないこと」をしっかり意識するだけで出来栄えが変わってくる。

参考：青チャートII+B p.35「基本例題 16 未知係数の決定(2)〔数値代入法〕」より「検討　p.33 の基本事項$\boxed{3}$の定理の利用」

上で述べた方法を使うと、「$a, b, c, d$ を求めた後に実際に代入して恒等式になることを確かめる」という面倒な操作が省ける。

> **【別解】**
>
> $x = 0$ を代入すると、$d = 9$
>
> $x = 1$ を代入すると、$c + d = 36$
>
> $x = -1$ を代入すると、$2b - c + d = 0$
>
> $x = -2$ を代入すると、$-6a + 6b - 2c + d$
>
> これを解くと、$a = 3, b = 9, c = 27, d = 9$ …（∗）
>
> 条件式の両辺は $x$ について 3 次であり、（∗）のとき 4 つの相異なる $x$ の値について等式が成り立っている。よって（∗）が答え。

もう一度強調する。この方法で記述するときは、必ず

「両辺が $x$ について $n$ 次以下である」
「異なる $(n+1)$ 個の値に対して成り立っている」

ことを書くこと。

（次ページへ）

## 3 等式の証明

**等式の証明：3 つの方法**

**① 片方の辺を展開してもう片方の辺を導く**

**② 左辺と右辺をそれぞれ展開して同じになることを導く**

**③ $\left(\text{左辺}\right)-\left(\text{右辺}\right)=\mathbf{0}$を示す**

①②が有効な時もあるが、うまくいかないこともある（複雑な因数分解・奇想天外な発想を要する場合がある）。③であれば頑張って計算すれば必ず 0 に辿り着ける。③（差＝0 を示す）が最も強力で確実な方法である。

$$
\begin{aligned}
\left(\text{左辺}\right)-\left(\text{右辺}\right)&=\boldsymbol{(a^2+b^2+1)-2(a+b-ab)}\\
&=a^2+2ab+b^2-2a-2b+1\\
&=(a+b)^2-2(a+b)+1 \text{ 』}\\
&=1-2+1 \quad \left(\because \boldsymbol{a+b=1}\right)\\
&=0
\end{aligned}
$$

$\therefore \left(\text{左辺}\right)=\left(\text{右辺}\right).$ ■

（証明内 』記号は説明のためのもので、証明とは無関係）

式展開はできるだけ飛躍なく丁寧に書くのが無難。

特に、上図の **太字部分は絶対に省略してはならない**。以下理由を説明する。

$\boldsymbol{(a^2+b^2+1)-2(a+b-ab)}$：左辺、右辺をそのまま代入した形。

私はこれを書かなかったので減点された。

$\left(\because \boldsymbol{a+b=1}\right)$：「問題文に書いてあるから書かなくていいじゃないか」と思ってはいけない。上の証明において、 **』までの行と次の行では全く種類の異なる変形である** ことを意識してほしい。

』まではただの式変形（$a+b=1$という性質を使っていない。$a,b$ はただの文

字）であるが、』の次の行では $a+b=1$ という性質を使っている。通常の変形ではなく、**問題文で与えられた性質を利用するときは、必ずそのことをはっきりと記述する必要がある**。

$\therefore \left(\textbf{左辺}\right)=\left(\textbf{右辺}\right)$：この1行前の $=0$ で証明終わりにしてはいけない。問題文で要求されているのは、$\left(\textbf{左辺}\right)=\left(\textbf{右辺}\right)$**を示すこと** であるから、ちゃんと最後は示すべき形を書いてあげる必要がある。

大学の数学に入るとこういうあまりにも自明な事柄・論理展開は省略されることも多いけれど、高校の段階では一つ一つきっちり説明する必要がある。

■：言わずもがな。(Q. E. D.) や $\left(\text{証明終}\right)$, $\left(\text{終}\right)$などでも良い。なお■の記号を「ハルモス記号」「墓石記号」などと呼ぶ。世界で通じる。

（次ページへ）

**6** 全ての実数$k$に対して $(k+1)x+(k-1)y-5k+1=0$ となる $x, y$

$x, y$ という、普段は変数として使われる文字に惑わされないように。これはあくまで **$k$についての恒等式** なのだから、$k$ について整理してあげる

$$(x+y-5)k+(x-y+1)=0$$

$$x+y-5=0,\ x-y+1=0$$

$$\boldsymbol{x=2,\ y=3}$$

**【別解】◇数値代入法**

> $k=1$ を代入すると $2x-4=0 \therefore x=2$.
> $k=-1$ を代入すると $-2y+6=0 \therefore y=3$.
> ここで条件式の両辺は $k$ について１次以下であり、２つの異なる $k$ の値に対して成り立っている。よって $\boldsymbol{x=2,\ y=3}$ のとき条件式は恒等式となる。

記述では**波線部を絶対に書くこと**（$n$回目）。これがないと答えが必要十分条件であることを示したことにならない。数値代入法で解くときはくれぐれも注意。不安な人は使わない方が無難。

（次ページへ）

## 7 3次方程式の解と係数

（問題７）

3次方程式 $x^3+x^2+x+1=0$ の3解を $\alpha,\beta,\gamma$ とすると

$x^3+x^2+x+1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ と因数分解できるから、

$\alpha+\beta+\gamma=$ ア，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=$ イ，$\alpha\beta\gamma=$ ウ である。

また $x^4=(x^3+x^2+x+1)\left(x+\text{エ}\right)+1$ より

$\alpha^4=\beta^4=$ カ，$\alpha^5\beta+\beta^5\gamma+\gamma^5\alpha=$ キ である。

ア～ウは解説のとおり。

### ◇ 3次方程式の解と係数

2次方程式の解と係数の関係からおさらいする。

$x=\alpha,\beta$ を解に持つ2次方程式の一つは、

$$\boldsymbol{(x-\alpha)(x-\beta)=0}$$

と表せる。（方程式に $x=\alpha,\beta$ を代入してみよ）。左辺を展開すると

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

となる。

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は、両辺を $a$ で割ると

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

である。このことから、

「**2次方程式** $ax^2+bx+c=0$ **の2解が** $x=\alpha,\beta$ **である**」

という条件が与えられたら、直ちに

$$\boldsymbol{\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \ \alpha\beta=\frac{c}{a}}$$

が得られる。

3 次方程式でも同じようなことができる。3 次方程式は最大 3 個の解を持つ（今後学習する）。その 3 解を $\alpha, \beta, \gamma$ とすると、3 次方程式の一つは

$$\boldsymbol{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0}$$

と表せる。これを展開すると

$$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0\,.$$

一方、3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq 0)$ は両辺を$a$で割ると

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$$

であるから、係数を比較して

$$\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}.}$$

これは知っておいて損はない。

## ――― ◇ $\boldsymbol{a^n-b^n}$ の因数分解 ―――

$a^2-b^2$ の因数分解は、$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$。

$a^3-b^3$ の因数分解は、$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$。

ここまでは既に習った因数分解である。

$a^4-b^4$ は、ネタバレすると $a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$ となる。

これを一般化すると、

$$\boldsymbol{a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})}$$

となる（右辺を展開して左辺と一致することを確かめよ）。

さらに、$n$ **が奇数のとき**、$b\to -b$ と書き換えると面白いことが起こる。

$$a^n-(-b)^n=\big(a-(-b)\big)(a^{n-1}+a^{n-2}(-b)+\cdots+a(-b)^{n-2}+(-b)^{n-1})$$

$$(-1)^{\text{奇数}}=-1\text{ より、}(-b)^{\text{奇数}}=-b^{\text{その奇数}}$$

であるから、

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

（$n=3$ のとき、よく知っている $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ となる）。

## ◇ $x^n - 1$ の因数分解

これまでのことから $x^n-1$の因数分解は次のような綺麗な(？)式で表せる。

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$$

例えば、

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

$$x^4 - 1 = (x-1)(x^3+x^2+x+1)$$

$$x^{10} - 1 = (x-1)(x^9+x^8+\cdots+x+1)$$

のようになる。

---

エ・オ：上記のことを使うと、$x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$ から

$$x^4 = (x^3+x^2+x+1)(x-1)+1$$

が直ちに導ける。

（次ページへ）

# $\boxed{9}$ (相加平均)≧(相乗平均) の本領発揮

**――― (相加平均)≧(相乗平均) ―――**

2つの数$a, b$に対して、

相加平均とは、$a$と$b$を足して2で割った平均。私たちが今まで使ってきた「平均」である。算術平均とも呼び、$\frac{a+b}{2}$ で表される。

相乗平均とは、その名の通り $a$と$b$を**掛けて平方根を取った** もの。$\sqrt{ab}$ で表され、幾何平均とも呼ぶ。

相加平均と相乗平均の大小関係 とは、どんな正の2数$a, b$にたいしても、必ず**相加平均のほうが相乗平均より大きい、または同じである** という関係のこと。式で表すと

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

(左辺)−(右辺)$\geqq 0$となることを確かめよ。

実際には、両辺を2倍した

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$$

の形でよく使われる。

> 相加平均と相乗平均の大小関係（長ったらしい名前！）は、等号成立条件（$a=b$）まで含めての性質であるから、等号成立条件もこの関係を利用して求めて良い。
>
> 相加平均と相乗平均の大小関係 と書く代わりに (**相加平均**)≧(**相乗平均**) と書いて良い（青チャートはこの表記を使用／[redacted]先生確認済)。ただし「相加相乗」のような勝手な略語を説明に使用しないこと。

ここで注意しておきたいのは、

**不等式の証明は (相加平均)≧(相乗平均) を使わなくてもできる**

ということ。

【例】$x+\frac{1}{x} \geqq 2$ を示せ（$x>0$）

【解 1】$\left(\text{相加平均}\right) \geqq \left(\text{相乗平均}\right)$ より $x+\frac{1}{x} \geqq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2.$ ■

【解 2】$\left(\text{左辺}\right)-\left(\text{右辺}\right) = x-2+\frac{1}{x} = \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geqq 0$

$\therefore\ \left(\text{左辺}\right) \geqq \left(\text{右辺}\right).$ ■

$\left(\text{相加平均}\right) \geqq \left(\text{相乗平均}\right)$ は、証明においては「2 乗の形を作る面倒な操作（平方完成）を省略してくれる便利ツール」程度のものである。

相加平均と相乗平均の大小関係は別に 2 数に限ったものではない。例えば 3 数の平均においても、$a>0,\ b>0,\ c>0$ として

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$

が成り立つ（$a>0,\ b>0,\ c>0$ より両辺は共に正であるから、両辺を 3 乗して成り立てば良い）。

テストの平均点など相加平均を用いずに相乗平均を使えばもっと平均が低くなって良いと思うのである。（相対評価においては）

---

$\left(\text{相加平均}\right) \geqq \left(\text{相乗平均}\right)$ が本当の意味で役に立つのは、$\boxed{9}$ のような最小値を求める問題である。この問題はこの大小関係を知らないと厳しいだろう。

なお $\left(a+\frac{2}{b}\right)\left(b+\frac{8}{a}\right)$ のように与えられても、一回展開してから用いないとうまくいかない。

$$
\begin{aligned}
\left(a+\frac{2}{b}\right)\left(b+\frac{8}{a}\right) &= 10+ab+\frac{16}{ab} \\
&\geqq 10+2\sqrt{ab\cdot\frac{16}{ab}} \left(\because \begin{array}{c} ab>0, \dfrac{16}{ab}>0, \\ (\text{相加平均}) \geqq (\text{相乗平均}) \end{array}\right) \\
&= 10+2\sqrt{16} \\
&= \mathbf{18}.
\end{aligned}
$$

等号成立条件は、$ab=\dfrac{16}{ab}$ すなわち $(ab)^2=16$. $ab>0$ より $\boldsymbol{ab=4}$.

展開すると $10+ab+\frac{16}{ab}$ となるが、このうち $ab+\frac{16}{ab}$ の部分に(相加平均) $\geqq$ (相乗平均) を用いている（10の方は既にはっきりした数字になっているのでこれ以上いじらなくていい）。

（次ページへ）

**$\Big($大きい辺$\Big)-\Big($小さい辺$\Big)$ が正／0 以上** を示すのが無難。ほとんどの不等式はこの方法で証明できる。そのままの形でうまくいかなければ平方差をとる。

---

## $\boxed{10}$ 不等式を 2 回使う

（1）$3(a^2+b^2+c^2) \geqq (a+b+c)^2$

$$\Big(\text{左辺}\Big)-\Big(\text{右辺}\Big)=(3a^2+3b^2+3c^2)$$
$$-(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca)$$
$$=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca$$
$$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$
$$\geqq 0$$

$\therefore \Big(\text{左辺}\Big) \geqq \Big(\text{右辺}\Big).$ ■

等号成立条件は、$a-b=b-c=c-a=0$ すなわち $a=b=c$.

最後の$\therefore \Big(\text{左辺}\Big) \geqq \Big(\text{右辺}\Big)$ の記述が必要なのは言うまでもない。

（2）$\square(a^4+b^4+c^4) \geqq (a+b+c)^4$ を成り立たせる最小の$\square$

右辺に $(a+b+c)^4$ がある。これが（1）の右辺の 2 乗になっていることに気づこう。

(1)で $3(a^2+b^2+c^2) \geqq 0$, $(a+b+c)^2 \geqq 0$ より両辺を 2 乗して

$$9(a^2+b^2+c^2)^2 \geqq (a+b+c)^4 \quad ①$$

また(1)で $a \to a^2, b \to b^2, c \to c^2$ と置き換えると

$$3(a^4+b^4+c^4) \geqq (a^2+b^2+c^2)^2.$$

両辺を 9 倍して

$$27(a^4+b^4+c^4) \geqq 9(a^2+b^2+c^2)^2 \quad ②$$

①②より

$$27(a^4+b^4+c^4) \geqq (a+b+c)^4 \quad ③$$

①の等号成立条件は$a=b=c$,②の等号成立条件は$a^2=b^2=c^2$より
③は$a=b=c$のとき成立する。よって$\square=\mathbf{27}$.

**$\boxed{11}$ $\boldsymbol{a>b>0}$ として、$\boldsymbol{|-a+2b|>a}$ を示せ。**

絶対値を含んでいるのでそのままではうまくいきそうにない。そんなときは…

$$\left(\text{右辺}\right)^2-\left(\text{左辺}\right)^2=a^2-|-a+2b|^2$$

$$=a^2-(a^2-4ab+4b^2)$$

$$=4ab-4b^2$$

$$=4b(a-b)$$

$$>0\ \left(\because a>b \text{ より } a-b>0\right)$$

$$\therefore\ \left(\text{左辺}\right)^2>\left(\text{右辺}\right)^2$$

ここで $\left(\textbf{左辺}\right)=|-\boldsymbol{a}+\mathbf{2}\boldsymbol{b}|\geqq\mathbf{0}$, $\left(\textbf{右辺}\right)=\boldsymbol{a}>\mathbf{0}$ より

$$\left(\text{左辺}\right)>\left(\text{右辺}\right).\ \blacksquare$$

2 乗の差をとって証明するときは、必ず 2 乗を取り去る際に両辺が正／0 以上であることを確認する必要がある。これを省略してはならない。絶対値のところは $|-a+2b|\geqq 0$ で不等号は「≧」となることに注意（$a=2b$ のとき $|-a+2b|=0$ となる。）

（次ページへ）

## $\boxed{12}$ 計算問題（群馬大, 2019）

さして難しい問題ではない。ただ計算が面倒なだけ。

$$X = \frac{p-4}{6},\ \ Y = \frac{p}{2},\ \ Z = \frac{p-1}{3}$$

（1）$X^3 + Y^3$ を因数分解すると多少は楽？

$p = 3Z + 1$ より

$X = \dfrac{Z-1}{2},\ \ Y = \dfrac{3Z+1}{2}.$

$\boldsymbol{X^3 + Y^3 = (X+Y)(X^2 - XY + Y^2)}$

$X + Y = \dfrac{Z-1}{2} + \dfrac{3Z+1}{2} = 2Z$

$$\begin{aligned} X^2 - XY + Y^2 &= (X+Y)^2 - 3XY \\ &= 4Z^2 - 3\frac{Z-1}{2}\cdot\frac{3Z+1}{2} \\ &= 4Z^2 - \frac{9Z^2 - 6Z - 3}{4} \\ &= \frac{7Z^2 + 6Z + 3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^3 + Y^3 + Z^3 &= 2Z\cdot\frac{7Z^2 + 6Z + 3}{4} + Z^3 \\ &= \frac{7Z^3 + 6Z^2 + 3Z}{2} + Z^3 \\ &= \boldsymbol{\frac{9Z^3 + 6Z^2 + 3Z}{2}} \quad \left(= \boldsymbol{\frac{9}{2}Z^3 + 3Z^2 + \frac{3}{2}Z}\right). \end{aligned}$$

（2）分数の計算が嫌なら定数倍

$\dfrac{9}{2}Z^3 = Xp^2 + aYp + bZ + c$ に $X = \dfrac{p-4}{6}, Y = \dfrac{\mathrm{p}}{2}, Z = \dfrac{p-1}{3}$ を代入

$$\frac{9}{2}\left(\frac{p-1}{3}\right)^3 = \frac{(p-4)p^2}{6} + \frac{ap^2}{2} + \frac{b(p-1)}{3} + c$$

両辺を6倍して、

$(p-1)^3=(p-4)p^2+3ap^2+2b(p-1)+6c$

$p=0$ を代入すると、$-1=-2b+6c \therefore 2b=6c+1 \ldots$①

$p=1$ を代入すると、$0=-3+3a+6c \therefore a=-2c+1 \ldots$②

$p=4$ を代入すると、$27=48a+6b+6c \therefore 16a+2b+2c=9 \ldots$③

①②を③に代入して

$16(-2c+1)+(6c+1)+2c=9$

$24c=8 \quad \boldsymbol{c=\frac{1}{3}}$. ①より$\boldsymbol{a=\frac{1}{3}}$, ②より$\boldsymbol{b=\frac{3}{2}}$.