1　解答欄に与えられた三角形の外接円、内接円、傍接円をすべて作図しなさい

2　次の各問いに答えよ（各2点　計20点）

(1) $(-2x^3yz^2)^2\times\left(-\dfrac{3}{8}xy^2\right)\div\left(\dfrac{9}{4}xyz^2\right)^2$

(2) $(\sqrt{13}-\sqrt{11})^4(\sqrt{13}+\sqrt{11})^5-(\sqrt{13}-\sqrt{11})^5(\sqrt{13}+\sqrt{11})^4$

(3) 関数$y=-\dfrac{1}{2}x^2$において、xの変域が$a\leqq x\leqq 2$のときyの変域が$-9\leqq y\leqq b$である。a、bを求めよ

(4) $12x^2-3(x+3)^2$を因数分解せよ

(5) $2x^4-17x^2-9$を因数分解せよ

(6) 二次方程式$4x^2-\{(2-\sqrt{3})+(2\sqrt{3}+1)\}+(3+\sqrt{2})(1-2\sqrt{3})=0$を解け

(7) 二次方程式$(3x-2)^2=(x-2)(x-6)$を解け

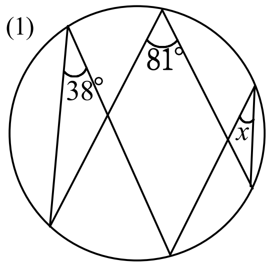
(8) 最大公約数が24、最小公倍数が720である2つの3桁の自然数の組を求めよ

(9) 3つのサイコロを同時に投げるとき、ちょうど2つの目が同じになる確率を求めよ

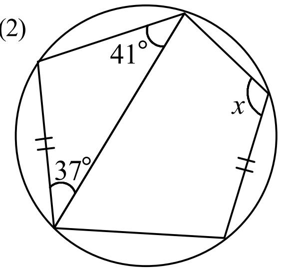
(10) 1919!を計算すると末尾に0は何個並ぶか

3　次の角を求めよ（各2点　16点満点）

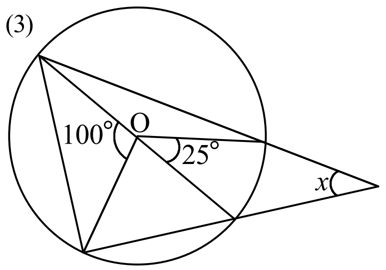
(1)



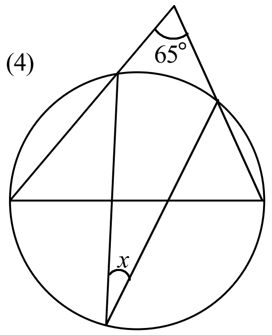
(2)



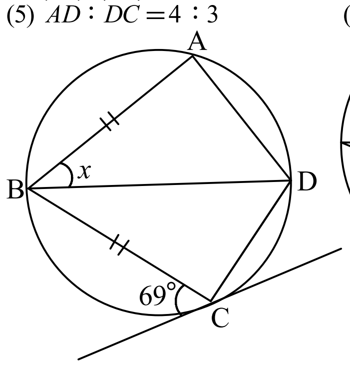
(3)



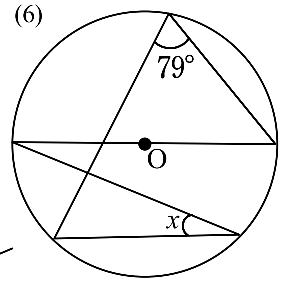
(4)



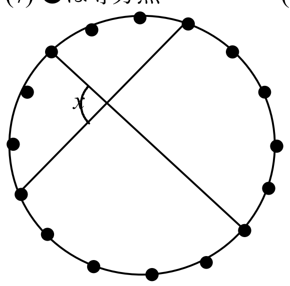
(5) $\overset{\frown}{AD}:\overset{\frown}{DC}=4:3$



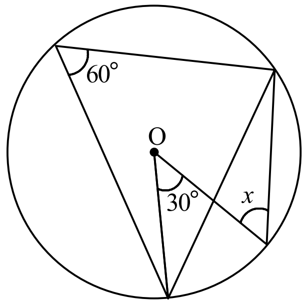
(6)



(7) ●は等分点

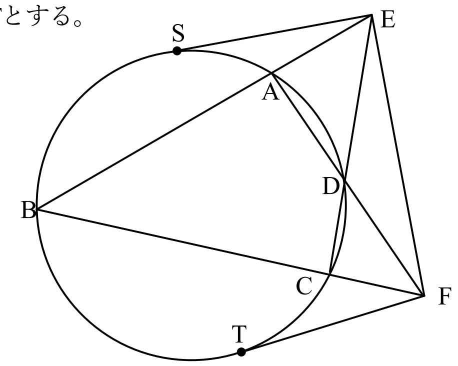


(8)

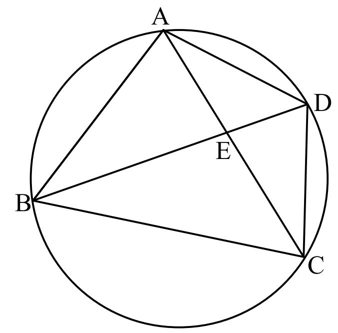


4　△ABCの内心をI、△IBCの外心をDとする。
4点A,B,C,Dが同一円周上にあることを示せ。

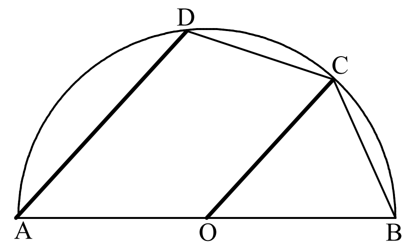
5　円に内接する四角形ABCDの辺AB, CDの交点をE、BC, ADの交点をFとする。
E, Fからこの円へ引いた接線の接点をS, Tとするとき、
$ES^2+FT^2=EF^2$　であることを証明せよ。



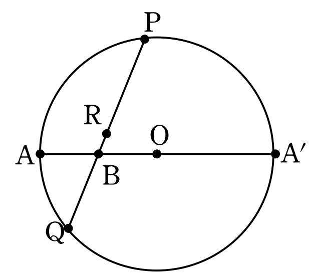
6　右の図においてAB=9cm, BC=12cm, CD=DA=6cmである。
(1) BE：EDを求めよ
(2) △ABE：△BCDを求めよ
(3) DEの長さを求めよ



7　ABを直径とする中心Oの半円の周上に、OC∥ADとなるように点C, Dをとる。
AB=9cm, BC=3cmであるときADの長さを求めよ

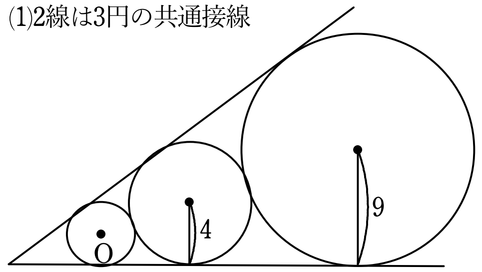


8　右の図のように半径4の円Oがある。OAの中点をBとし、Bを通る弦PQを引く。
PQの中点をR、AA′を直径とする。PがAを出発して時計回りにA′まで動くとき
Rの描く軌跡の長さを求めよ。

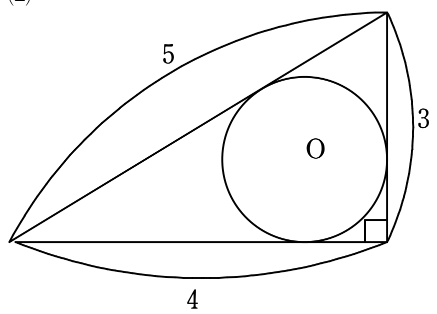


$\boxed{9}$ 次に示す円Oの半径を求めよ（各　点　計　点）

(1)2線は3円の共通接線



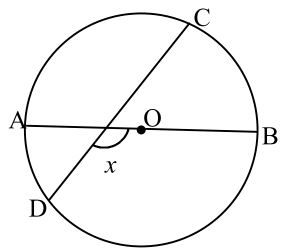
(2)



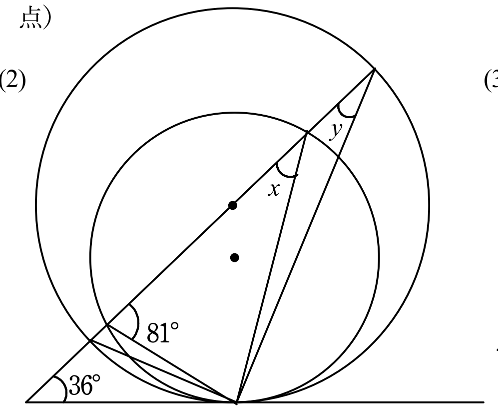
$\boxed{10}$ 次の角を求めよ（各　点　計　点）

(1) $\overset{\frown}{AC}:\overset{\frown}{BD}=5:6$、

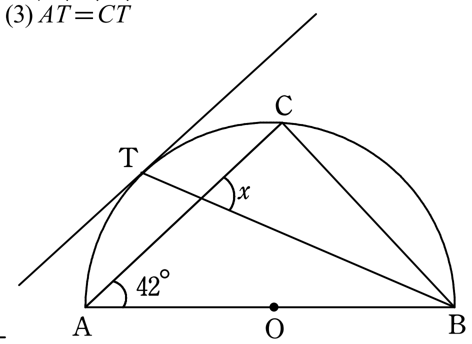
$\overset{\frown}{AD}:\overset{\frown}{BC}=3:5$



(2)



(3) $\overset{\frown}{AT}=\overset{\frown}{CT}$

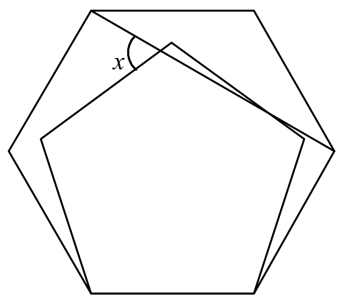


$\boxed{11}$ 次に示された値を求めよ

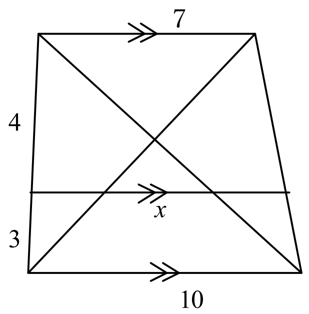
(1) $\angle x$

（正五角形ABCDEF、

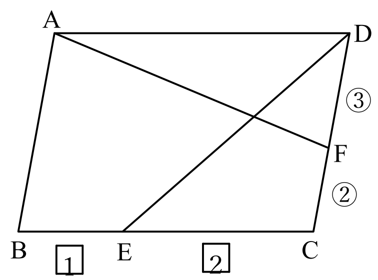
正六角形GHCDI）



(2) xの長さ

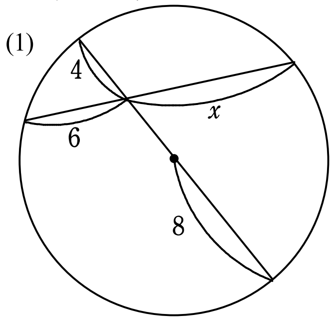


(3) DG : GEおよびAG : GF（▱ABCD）

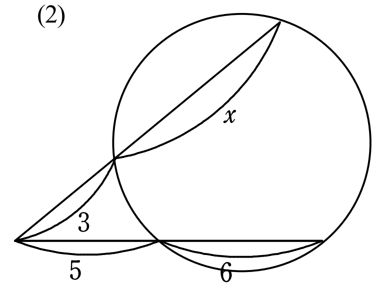


$\boxed{12}$ 次の長さを求めよ

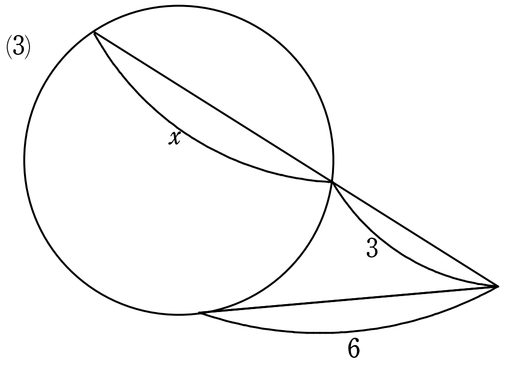
(1)



(2)



(3)



$\boxed{13}$ 図のような放物線$y=x^2$があり、その上にx座標がそれぞれa, $-a$の点A, Bをとる。

∠OABの二等分線とx軸, 放物線, y軸との交点をそれぞれC, D, Eと定める。

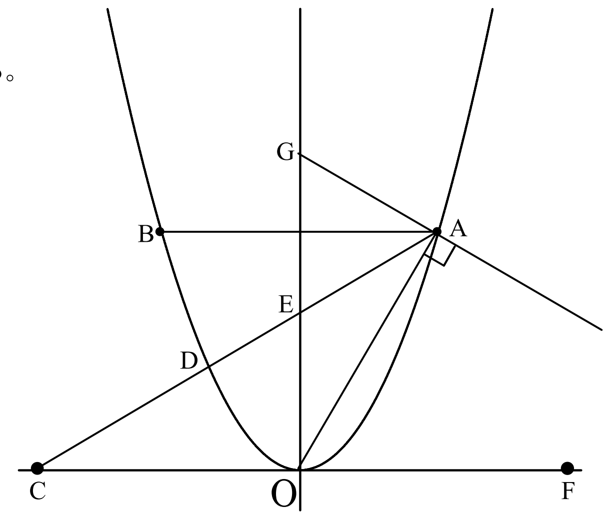
点Cとy軸について対称な点をFとする。

また点AにおいてOAと直交する直線とy軸との交点をGとする。

このときABがGEの二等分線となった。

次の各問いに答えよ

なお、名前が設定されてない点を用いる必要はない。



(1) 正三角形を2つ答えなさい

(2) AFの長さをaで表しなさい

(3) ∠OAG以外の直角を2つ答えなさい

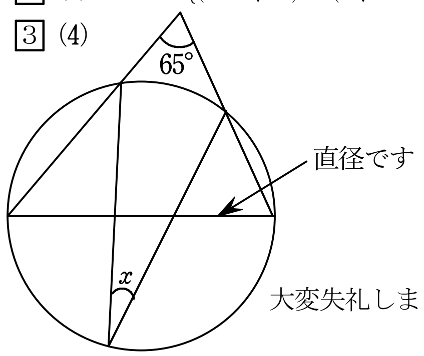
(4) 相似な三角形の組を一組答えなさい

(5) 円に内接する四角形を1つ答えなさい

問題は以上です。最後の問題を難しくしようとしたら放物線の性質をほとんど使わない幾何問題になってしまったので放物線については皆さん各自で[redacted]プリント5-1～5-7を見て練習してください。作図は、$\boxed{1}$の3種類の接する円や5心、円外の点からの接線は描けるようにしておきましょう。また今回は出しませんでしたがトレミーの定理に関する証明の出題も予想されます。範囲が広いですがひとつづつ確実に固めていきましょう。

問題訂正 $\boxed{2}$ (6) $4x^2-2\{(2-\sqrt{3})+(2\sqrt{3}+1)\}x+(\sqrt{3}-2)(1-2\sqrt{3})=0$

$\boxed{3}$ (4)



大変失礼しました。

解答

$\boxed{1}$ 解説参照

$\boxed{2}$ (1) $-\dfrac{8}{27}x^5y^2$ (2) $32\sqrt{11}$ (3) $a=-3\sqrt{2}, b=0$ (4) $9(x-3)(x+1)$ (5) $(x-3)(x+3)(2x^2+1)$

(6) $x=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}-\dfrac{1}{2}$ (7) $x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}$ (8) (120, 144) (9) $\dfrac{5}{12}$ (10) 477個

$\boxed{3}$ (1) 43° (2) 115° (3) 37.5° (4) 25° (5) 24° (6) 11° (7) 90° (8) 45°

$\boxed{4}$ 問題集p57，191番参照 $\boxed{5}$ 問題集p66，総合問題13参照

$\boxed{6}$ (1) 3:1 (2) 9:16 (3) 3㎝ $\boxed{7}$ 7㎝ $\boxed{8}$ 2π $\boxed{9}$ (1) $\dfrac{16}{9}$ (2) 1

$\boxed{10}$ (1) 132° (2) $\angle x=45°$，$\angle y=27°$ (3) 66°

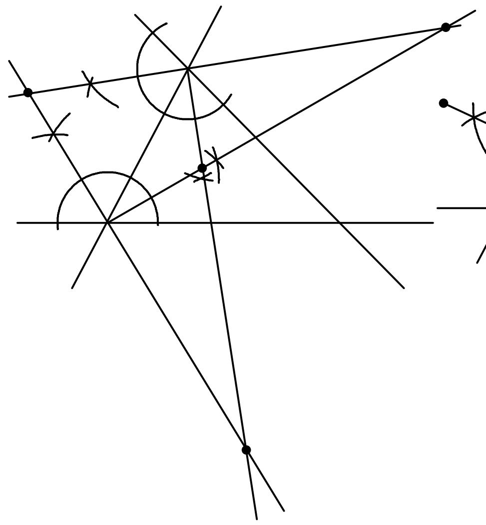
$\boxed{11}$ (1) 66° (2) $\dfrac{19}{7}$ (3) DG:GE=3:4，AG:GF=5:2 $\boxed{12}$ (1) 8 (2) $\dfrac{46}{3}$ (3) 9

$\boxed{13}$ (1) △OAB，△OAF，△OBC，△AGE，△BGEから3つ (2) AF=$2a$ (3) ∠CAF，∠EBC
(4) △COE∽△CAFなど（曖昧な問いですみません） (5) 四角形AEOF，BEOCから１つ

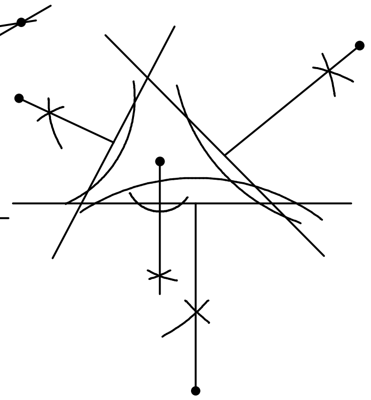
解説

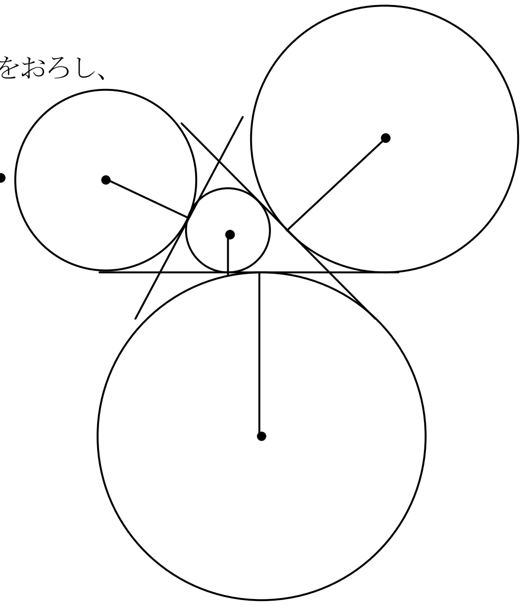
$\boxed{1}$（鋭角三角形の場合、外接円は省略）

①２つの角で内角と外角の二等分線。
交点が3つの傍接円，内接円の中心。



②各円の中心から辺に垂線をおろし、
その足を通る円を描く

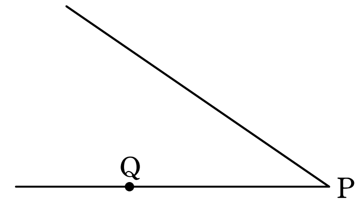




問題量が多い中で、作図にかける時間は極力少なくしたい。そのため、できるだけ少ない手順で完成させることが重要である。たとえば傍心は内角及び他の外角の二等分線の交点であるが、そのうちどれか2本の線が引ければ決定する。内心についても、3本のうち2本の内角二等分線が分かればよい。左の解答例では最も少ない手順で内接円と傍接円を作図している。右下の角は一切使用していない。

接線に関する出題も予想されるので、以下に追加問題を示す。

$\boxed{問}$ 右図の2本の線を接線とし、Qを通る円を作図せよ



$\boxed{2}$ (1) 些細なことではあるが、このような計算問題では文字ごとに指数を計算する方法がある。例えば式の中に○○×x^2が出てくると指数が2増え、○○÷x^4が出てくると指数は4減る。今回の問題では

$$(-2x^3yz^2)^2\times\left(-\frac{3}{8}xy^2\right)\div\left(\frac{9}{4}xyz^2\right)^2$$

なので文字x, y, zについて指数を調べると

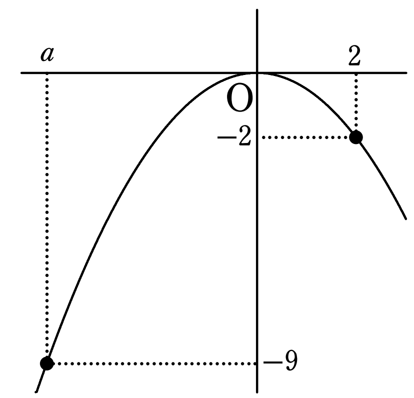
$x\cdots3\times2+1-2=5$　$y\cdots2+2-2=2$　$z\cdots2\times2-2\times2=0$

最後に係数を計算する

$$(-2)^2\times\left(-\frac{3}{8}\right)\div\left(\frac{9}{4}\right)^2=-\frac{8}{27}$$

よって答えは$-\dfrac{8}{27}x^5y^2$

文字ごとに分けることで式が煩雑にならず、ミスの減少にもなる。



(2) 与式$=\{(\sqrt{13}-\sqrt{11})(\sqrt{13}+\sqrt{11})\}^4\times\{(\sqrt{13}+\sqrt{11})-(\sqrt{13}-\sqrt{11})\}$
$=2^4\times2\sqrt{11}$
$=32\sqrt{11}$

(3) $a\leqq2$だが、aが正か負かわからない。右上の図にあるように、$x=2$のとき、$y=-2$である。ここでyの最小値が-9であることに注意すると、$x=a$のとき$y=-9$であることがわかる。したがって$-\dfrac{1}{2}a^2=9$だから$a=-3\sqrt{2}$。

xの定義域が正負にまたがっているから$b=0$。

(8) 2数をA,B（A≦B）とし、$A=24a, B=24b$とすると

$$ab=\frac{720}{24}=30\begin{Bmatrix}1 & 2 & 3 & 5\\ 30 & 15 & 10 & 6\end{Bmatrix}$$

ここで｛｝の中の縦の数字の組が(a, b)の組になっている（正式な表記ではないので注意）。$a=1,2,3$のときはAが3桁にならないので$(a, b)=(5, 6)$。よって$(A, B)=(120, 144)$

(9) 週明け代数②$\boxed{2}$ (2) に同じ。目の出方の総数は6^3通り。同じ目が出る2組の選び方が3通り、問題の状況のような目の出方は6×5通りだから$\dfrac{6\times5\times3}{6^3}=\dfrac{5}{12}$。

(10) 週明け代数①$\boxed{1}$ (6) 改。10の素因数は2と5だから、$5, 5^2, 5^3, \cdots$で何回割り切れるかを考える。

$1919\div5=383.\cdots$　$383\div5=76.\cdots$　$76\div5=15.\cdots$　$15\div5=3$

よって383+76+15+3=477。

$\boxed{3}$ $\boxed{\text{☆重要ポイント☆}}$

①**円周角の定理**（等しい弧に対する円周角は等しく中心角の$\frac{1}{2}$）

円周角と弧の長さは比例し、全円周に対する円周角は180°

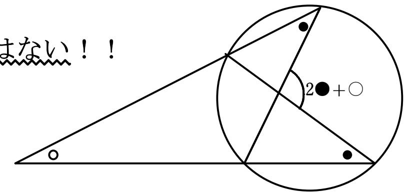
直径に対する円周角は90°←重要。直径のある図では90°を作ると答えが見えることが多い

②等しい弦に対する弧の長さは等しい

※注意 等しい弦に対する弧が等しいだけで、比例するわけではない！！

③2つの半径から二等辺三角形を見つける

④**アルハゼンの定理**（右図）



⑤内接四角形の性質（**対角の和は180°**、外角と対角が等しい）

(4), (6) 直径が与えられているので補助線を引いて90°を作る。

(5) 接弦定理より∠BDC=69°、BA=BCより∠BDA=69°。$\overset{\frown}{AD}:\overset{\frown}{DC}=4:3$だから∠CBD=$\frac{3}{4}x$。

四角形ABCDは円に内接するから∠ABC+∠ADC=180°。したがって$\frac{7}{4}x+138°=180°$。よって$x=24°$

(7) ●は16等分点。●と●の間1つに対する円周角は$\left(\frac{180}{16}\right)^{\circ}$である。

$\boxed{6}$ 問題集p48，152番。BDが∠ABCの二等分線だからAE:EC=3:4。さらに円周角の定理から△AED∽△CEBが分かり、EA, EB, EC, ED全ての長さを同じ比で表せる。

$\boxed{7}$ 問題集p53，173番。ADとBCを延長して相似を作る。

$\boxed{8}$ 問題集p49，156番。直径QQ′を引くと∠QPQ′＝∠QRO＝90°。軌跡は直径OBの円

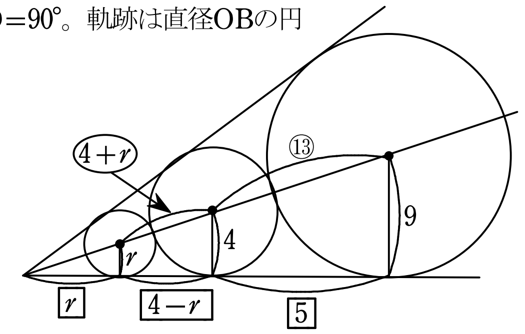
$\boxed{9}$ (1) 問題集p65，221番。円Oの半径をrとすると、

右のように三つの三角形の相似から

$(4+r):13=(4-r):5$

これを解いて$r=\frac{16}{9}$。

(2) 問題集p55，183番。



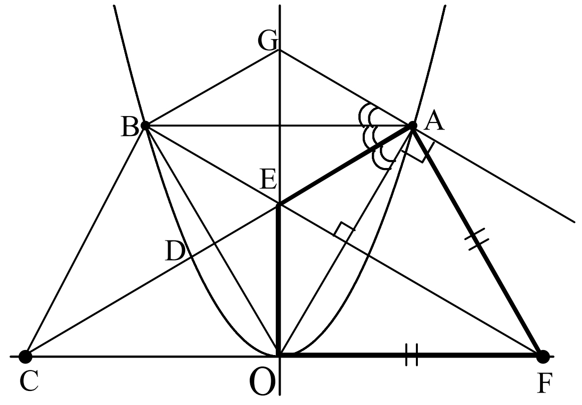
$\boxed{10}$ 泰裕先生のプリント「円の基本定理」より。

$\boxed{11}$ 週明け課題幾何編より。(1) 平行線を2本引く (3) 適切な「角出し」を行い、砂時計型の相似を作る。

週明け課題の復習も忘れずに。

$\boxed{12}$ 後ろの問題が難しいとは限らない。試験開始後一度は全体に目を通したい。

$\boxed{13}$ 放物線とは名ばかりで$y=ax^2$という式を一度も使わない問いになってしまったが、放物線と円の性質を融合させたような出題も十分考えられる。



ABがGEの二等分線なのだから∠BAG＝∠BAE。ACは∠OABの二等分線だから∠BAE＝∠OAE。したがってこれらの角は∠OAGの三等分、30°である。

(1) したがって∠OAB=60°。Bはy軸についてAと対称だから∠OBA=60°となり△OABは正三角形。同じように∠EAG=∠EBG=60°だから△AGE，△BGEも正三角形。さらに直線BEFはAOを垂直に二等分しているから△FAOは二等辺三角形であり、∠AOF＝∠OAB＝60°よりこれは正三角形。またFとCは対称だから△CBOも正三角形。

(2) △AOFが正三角形であることが分かったからAF＝OF。Fのx座標はAのx座標の2倍、$2a$であるからAF=$2a$

$\boxed{\text{発展}}$ △AOFの高さはAのy座標，a^2。正三角形の性質から$a:a^2=1:\sqrt{3}$だから$a=\sqrt{3}$である。

(3) △AOFが正三角形であるから∠CAF=60°+30°=90°。対称な∠EBCも同様。

(4) 正三角形同士のほかに内角が（90°，60°，30°）や（30°，30°，120°）の三角形が多数存在する。

(5) ∠EAF=90°，∠EOF=90°。対角の和が180°だから四角形AEOFは円に内接する。BEOCも同様。

いかがでしたでしょうか。急遽作った問題でかなり抜け漏れがありましたが、これが少しでも期末対策に役立っていただけたならば望外の幸いです。どんな強敵が現れるかわかりませんが、直前までしっかりと対策を怠らなければ冷静に対処できます。50分間を使い切ろう!!

最後に、この問題を印刷していただいた[redacted]先生，[redacted]先生と、共同作成者の[redacted]君、作問や解答チェックに協力してくれた[redacted]君、守秘にご協力いただいた皆さんに感謝します。ありがとうございました。

（2020年11月29日　るり）