数学 I

二次函数の最大と、最小

これは１学期中間考査の解説と，今回の範囲の問題を解くにあたって必要な理解を整理したものです．重要と思われる問題については特に重く扱いました．色々と大切なことがありますがまず一つ先に挙げます．

❌２次関数を見たらまず平方完成　←　これは**間違い**!!

今回はバリバリ平方完成を使う試験だったので放物線の式が与えられたら問答無用で平方完成したくなりますが，その前にまずは問題文をちゃんと読むことが必要です．頑張って平方完成したのに使わなかったら意味ないですよね.「そんなの当たり前じゃん」と思うかもしれませんが，問題をよく読めば分かったのにしなくて良いことをして時間を無駄にしてしまうのは[redacted]**先生の指示テスト**で経験済みのはずです.

結構背景から詳しく書いたつもりなので「そんなのわかりきってるよ」と思うところは飛ばして全然大丈夫です..

$\boxed{1}$ ２次関数の計算問題．与えられた条件から平行・対称移動や方程式を適切に用いて関数を求める.

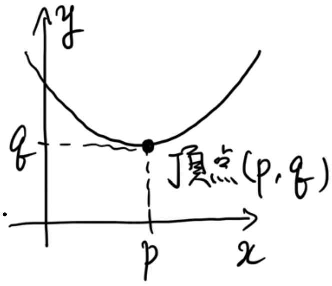
重要ポイント①　平方完成

平方完成 … $y = (\,f(x) =\,)\,a(x-p)^2 - q$ の形にする.

Q. この形の式からわかるものは？

A. 頂点の座標が(p,q)であること，軸は$x=p$であることがわかる.

平行移動の問題では頂点がどのように移動したかを考える.



（1）略

（2）ア）

$$
\begin{aligned}
-3x^2+6x-2 &= -3(x^2-2x)-2\\
&= -3\{(x-1)^2-1\}-2\\
&= -3(x-1)^2+1
\end{aligned}
$$

イ）

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}x^2+2x-1 &= \frac{1}{2}(x^2+4x)+1\\
&= \frac{1}{2}\{(x+2)^2-4\}+1\\
&= \frac{1}{2}(x+2)^2-3
\end{aligned}
$$

（3）放物線の平行移動．平方完成し，**頂点の動き**を考えるのが鉄則.

移動前：　$y=-x^2$ → 頂点$(0,0)$

ア）$y=-x^2+6x=-(x-3)^2+9$　より頂点$(3,9)$．x軸方向に３，y軸方向に９移動した.

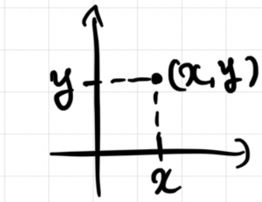
イ）$-x^2-3x+2=-\left(x+\frac{3}{2}\right)+\frac{17}{4}$　より頂点$(-\frac{3}{2},\frac{17}{4})$．以下同様.

（次ページへ）

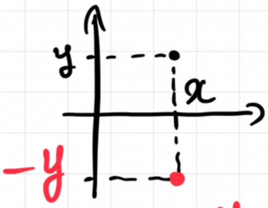
重要ポイント② 対称移動 → 点の移動で考える

◉まずは点の移動を考える

・元の点：(x, y)



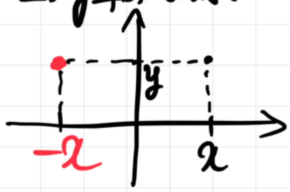
1. x軸対称



y座標が$-y$に。

$y \to -y$

2. y軸対称

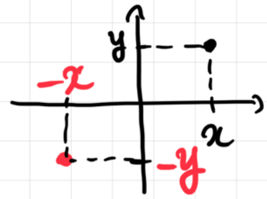


x座標が$-x$に。

$x \to -x$

移動前　移動後

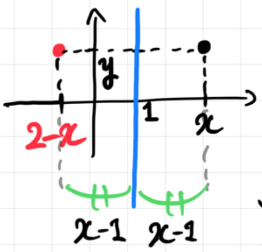
3. 原点対称



$\begin{cases} x \to -x \\ y \to -y \end{cases}$

x, yとも変わる!

4. $x=1$ 対称



$x \to 2-x$

移動前後の点の軸からの距離は等しい。

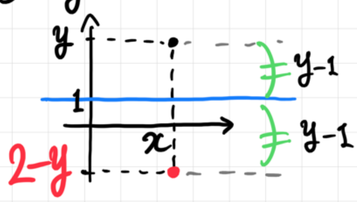
点(x, y)の、直線$x=1$からの距離は $x-1$。

⇓

移動後の点は、直線$x=1$よりも $x-1$ だけ左側。

それは $1-(x-1)=2-x$.

5. $y=1$ 対称



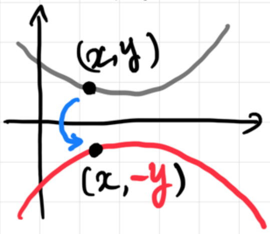
4. x軸対称のときと同様に、

$y \to 2-y$

◉点の移動をもとに関数の移動を考えると…

0. 元の関数

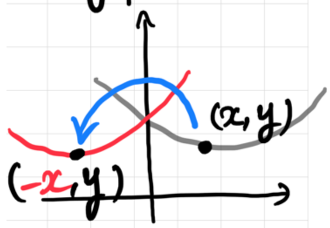
1. x軸対称



$-y=f(x)$

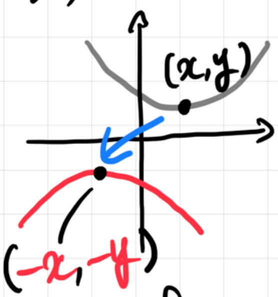
つまり $y=-f(x)$

2. y軸対称



$y=f(-x)$

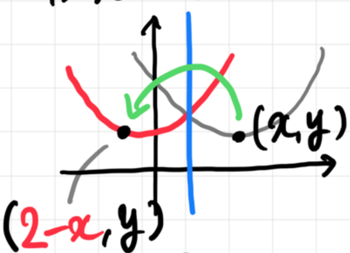
3. 原点対称



$-y=f(-x)$

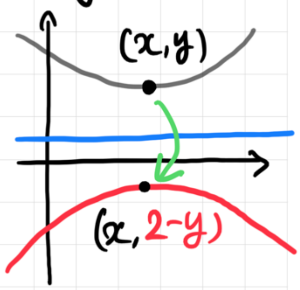
つまり $y=-f(-x)$

4. $x=1$ 対称



$y=f(2-x)$

5. $y=1$対称



$2-y=f(x)$

つまり $y=2-f(x)$

（4）対称移動.

平方完成する必要はない. 点の移動をもとに考える.

前のページの内容を整理すると，

関数 $y=f(x)$ を対称移動するとき，

軸	変化	関数
x 軸	$y\to -y$	$y=-f(x)$
y 軸	$x\to -x$	$y=f(-x)$
原点	$x\to -x$，$y\to -y$	$y=-f(-x)$
直線 $x=1$	$x\to 2-x$	$y=f(2-x)$
直線 $y=1$	$y\to 2-y$	$y=2-f(x)$

もちろんこんなものを暗記するのではなく，実際にグラフを描いて手を動かして計算して覚える.

移動前：$\boldsymbol{y=-x^2+4x-1}$

ア）**$\boldsymbol{x}$軸対称** → x軸を軸にしてグラフが上下反転する．関数全体の符号を変えるだけ.

前：$y=-x^2+4x-1$ → 後：$y=-(-x^2+4x-1)=\boldsymbol{x^2-4x+1}$

イ）**$\boldsymbol{y}$軸対称** → y軸を軸にしてグラフが左右反転する．上の表にあるようにxを$-x$に書き換える.

前：$y=-x^2+4x-1$ → 後：$y=-(-x)^2+4(-x)-1=-x^2-4x-1$

※ぶっちゃけ 2 次関数に限って言うならxの次数が 1 の項だけ符号を反転させればいいっていうのはあるけどそういう細かい裏技をいちいち覚えられる人とそうじゃない人がいるからあんまりそういう小手先のテクニックに気を取られない方がいいと思う．少なくとも私は覚えられない.

ウ）**原点対称** → 一から計算してもいいが，ここではイ）で既に y軸対称のものを求めているので，それを x軸について対称移動したものを求めると早い.

イ：$y=-x^2-4x-1$ ――（x軸で対称移動）―→ ウ：$y=-(-x^2-4x-1)=\boldsymbol{x^2+4x+1}$

エ）**$\boldsymbol{x=1}$ 対称** → いよいよここからが本番.

移動前の式の x を $2-x$ に書き換える.

計算ミス注意！

移動前：$y=-x^2+4x-1$

移動後：$y=-(2-x)^2+4(2-x)-1$
$=-(x^2-4x+4)-4x+8-1$
$=\boldsymbol{-x^2+3}$

オ）**$\boldsymbol{y=1}$ 対称**

→ エ）よりは易しい．符号の扱いには注意.

移動前：　$y=-x^2+4x-1$

移動後：$2-y=-x^2+4x-1$
$y=2-(-x^2+4x-1)$
$=\boldsymbol{x^2-4x+3}$

※もちろん平方完成して頂点がどう移動するか考えても解ける．そのほうがわかりやすいようならばそちらで考えても一向に差し支えない．ただ平方完成をする手間を考えると元の形のままダイレクトに移動する方が簡単ではある．いずれにせよ $x=4$ とか $y=-1$ 対称などと言われても慌てずに対応することが大切．小問 1 個に 2 ページも費やしてしまったが，これで対称移動の大体のことは伝わったかなと思う.

（5）平行移動．平方完成しなくてもいい．元の関数は$y=-2x^2+4x-4$.

A. $\boxed{\text{平方完成しない方法}}$ x軸方向に-3だけ移動するので，xを$x+3$に書き換える．またy軸方向に 1 だけ移動するので式全体に 1 を足す．（ここら辺はまた改めて詳しく書きます）

$$
\begin{aligned}
y &= -2(x+3)^2+4(x+3)-4 \\
&= \mathbf{-2x^2-8x-9}
\end{aligned}
$$

B. $\boxed{\text{平方完成する方法}}$ 元の関数を平方完成すると，

$$
\begin{aligned}
y &= -2x^2+4x-4 \\
&= \mathbf{-2(x-1)^2-2}
\end{aligned}
$$

これをx軸方向に-3，y軸方向に 1 だけ移動すると，$y=-2(x+2)^2-1$を得る．

（6）これは平方完成が必要．頂点の移動を考える．

C_1：$y=2(x+2)^2+1$　頂点は$(-2,\ 1)$　　　　C_2：$y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$　頂点は$\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$

ア）C_1 の頂点$(-2,\ 1)$を C_2 の頂点 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ に移すにはどういう移動をすればよいか考える．

x軸方向に関しては $\frac{3}{2}-(-2)=\frac{7}{2}$，$y$軸方向に関しては $\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$ だけ平行移動したとわかる．

イ）**逆の移動**で考える．x軸方向に 1，y軸方向に-2だけ平行移動して C_1 に重なる放物線 C は，
C_1 を　x軸方向に-1，y軸方向に2　だけ平行移動することで求められる．

$$
\begin{aligned}
y &= 2(x+2+1)^2+1+2 \\
&= \mathbf{2(x+3)^3+3}
\end{aligned}
$$

（次ページへ）

重要ポイント③ 最大・最小の基本

※上に凸か下に凸かで分けて考えるのは合理的でないので，以下いちいち明示的に場合分けしません．

A. 定義域の範囲指定がない場合

頂点 → 最小／最大．最大／最小（頂点でない側の最◯値）は **なし**．

B. 定義域が指定されている場合

$$\rightarrow \begin{cases} \text{①頂点(軸)を含むか} \\ \text{②定義域の端が含まれるか} \end{cases} \text{に注意!!}$$

① まずは**頂点**（**軸**）を含むかを調べる．→ 途中まで平方完成

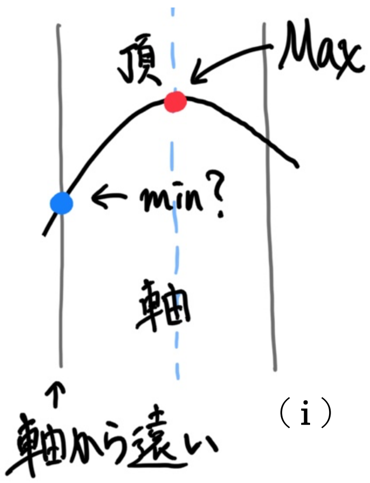
例）$y=x^2+4x-13=(x+2)^2+\cdots$ ←ここまで計算する．$\left(x-◯\right)^2$の後ろは計算しなくていい．

→ 軸は $x=-2$ とわかる．これが定義域に含まれているか確認．

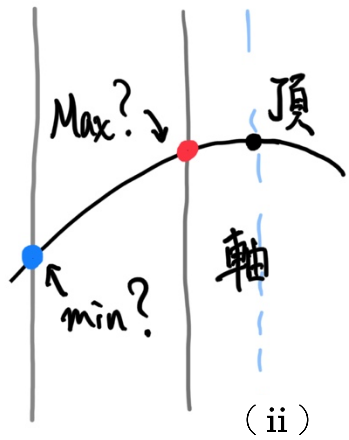
※2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ の軸は $x=-\frac{b}{2a}$ であることを覚えておくと便利ではある．

i）頂点を含む → 頂点が最小／最大．最大／最小は，**あるとすれば**軸から遠い方の定義域端

ii）頂点を含まない → 最大・最小は，**あるとすれば**定義域端．



（i）



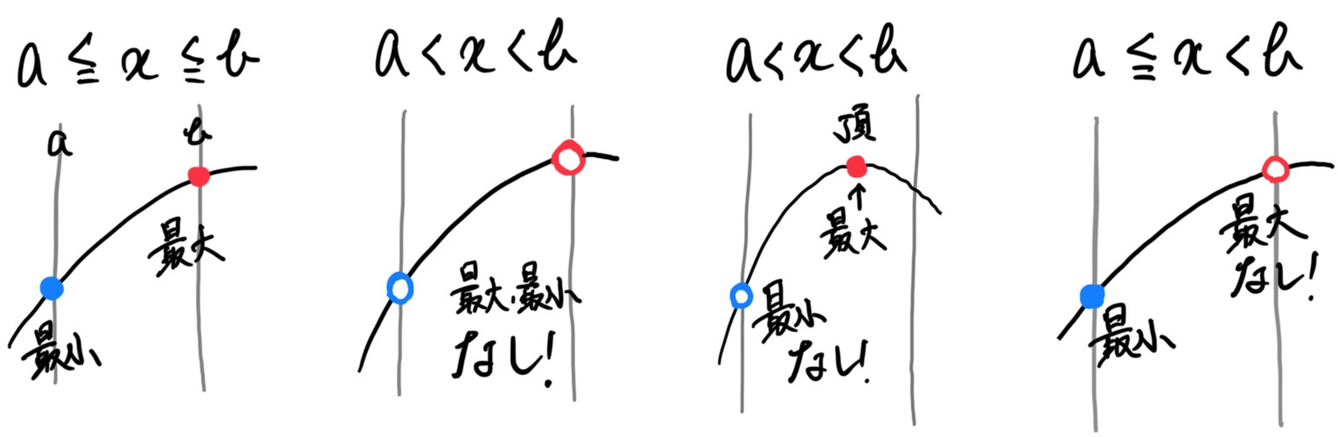
（ii）

※上に凸の場合の例

※そういえば O 家先生が色覚特性に配慮して強調に赤は使わない方がいいと言っていましたね．
これからは気をつけます．

② **定義域の端**を含むか確認 → **不等号**で判断！

$$\begin{cases} \leq, \geq \left(\text{以上・以下}\right) \rightarrow \text{端は含まれる．最大・最小になりうる} \\ <, > \left(\text{より大きい・未満}\right) \rightarrow \text{端は含まれない．最大・最小にはならない} \end{cases}$$



（7）定義域つきの最大最小

ア）定義域：$-2 \leq x \leq 1$．$y = -2x^2 - 4x + 1 = -2(x+1)^2 + \cdots$ → 軸は$x = -1$ → 定義域に含まれる！
上に凸だから頂点で最大値をとる．$-2(-1)^2 - 4(-1) + 1 = 3$
定義域の端は-2と1．軸(-1)から遠い方は1なので$x = 1$のとき最小値-5をとる．
ここでx「$\leq$」1だから$x = 1$は定義域に含まれる．だから答えはこれで良い．

イ）定義域：$0 < x < 3$．$y = 2x^2 - 10x + 9 = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \cdots$ → 軸は $x = \frac{5}{2}$ → 定義域に含まれる．
下に凸だから頂点で最小値をとる．$2\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 10 \times \frac{5}{2} + 9 = -\frac{7}{2}$
最大値があるとすれば定義域端だが，ここで条件$0 < x < 3$により定義域に 0 も 3 も含まれないから，最大値はなし．

（8）定義域指定がなく，最大値とそのときの xの値がわかっている → 頂点がわかる．
頂点は$(3, 2)$．またこれが最「大」値だから関数は上に凸．したがって求める関数は

$$y = a(x-3)^2 + 2 \quad ただし \quad a < 0$$

で表される．続いてグラフが $(-3, -34)$ を通ることから

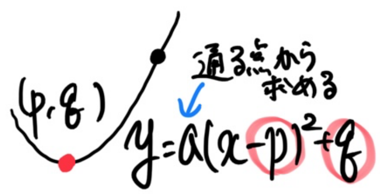
$$36a + 2 = -34 \ \therefore\ a = -1$$

これは $a < 0$ を満たしているから適切.

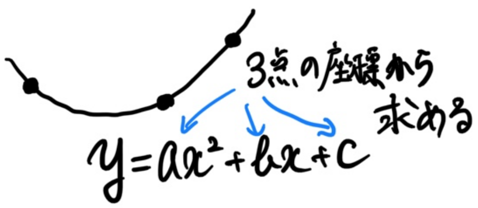
重要ポイント④ 関数の決定

① 頂点と通る 1 点 → $y = a(x-p) + q$ （1 つに決まる）
② 通る 3 点 → $y = ax^2 + bx + c$ （1 つに決まる）
③ 平行移動＋通る点／頂点を通る直線／etc.
→ $y = a(x-p) + q$ （1 つじゃないかも）
④ x軸と $x = \alpha$ および $x = \beta$ で交わるとき（あまり出てこない）
→ $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$ （2 次方程式で習った）

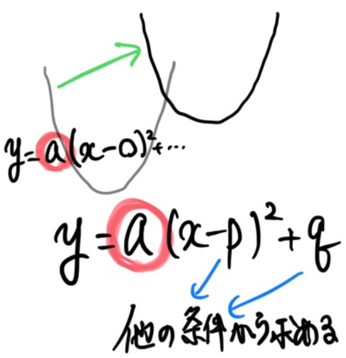
① 頂点+通る一点



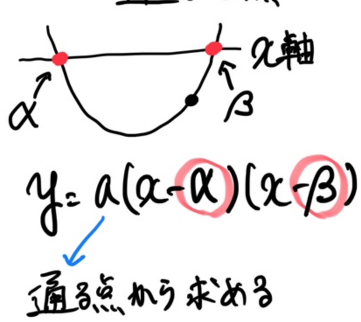
② 通る3点



③ 平行移動系



④ x軸との共有点
+通る1点



(9) **通る 3 点**が与えられた 2 次関数 → $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ の形で代入.

$(-2,0)$ → $4a - 2b + c = 0$ … ①

$(1,3)$ → $a + b + c = 3$ … ②

$(2,-4)$ → $4a + 2b + c = -4$ … ③

①と③の差から$b = -1$. ②と③の差から$3a + b = -7$より$a = -2$. これらを②に代入して$c = 6$.

(10)「$y = 2x^2$を平行移動した」という条件から，求める関数は

$$y = 2(x-p)^2 + q$$

とおける．頂点 (p,q) が直線 $y = 6x - 5$ 上にあることから $q = 6p - 5$.

$$y = 2(x-p)^2 + 6p - 5$$

ここで $(x,y) = (2,3)$ を代入して

$$\begin{aligned} 3 &= 2(2-p)^2 + 6p - 5 \\ &= 2p^2 - 2p + 3 \\ &\therefore 2p^2 - 2p = 0 \end{aligned}$$

これを解くと $p = 0, 1$ を得る．したがって考えられる (p,q) の組は

$$(p,q) = (0,-5), (1,1).$$

よって求める答えは

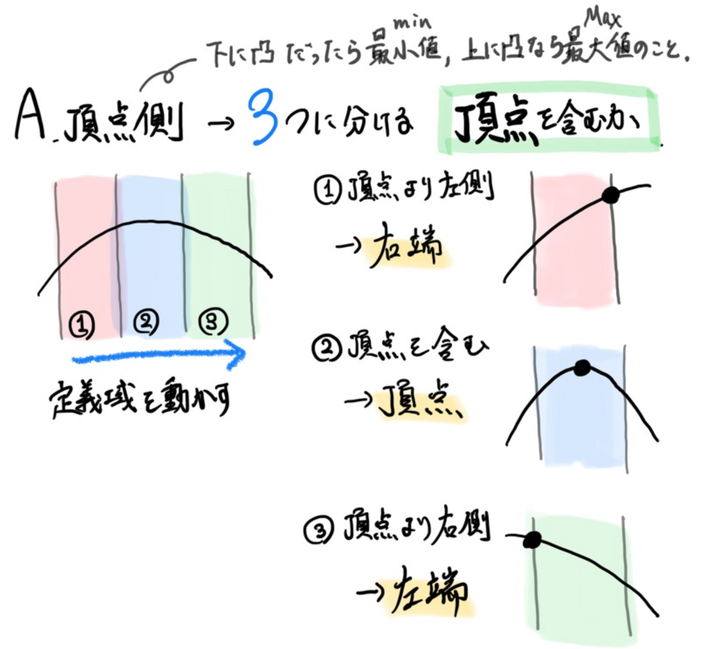
$$y = 2x^2 - 5,\ y = 2(x-1)^2 + 1.$$

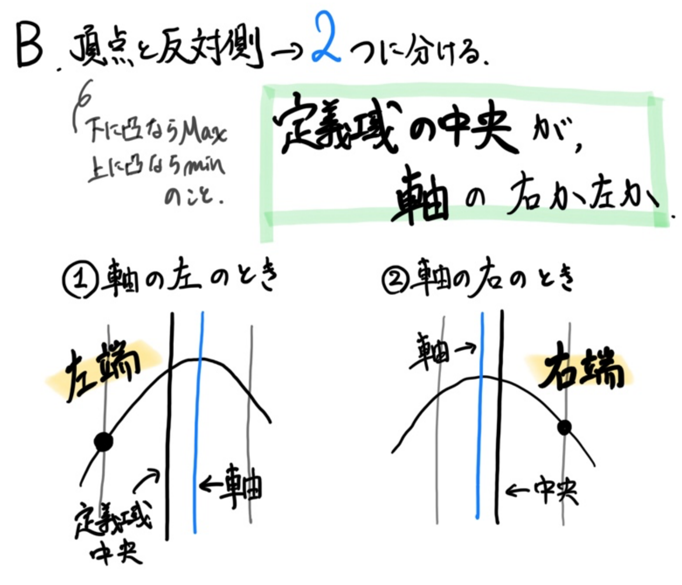
関数はただ一つに定まるとは限らないことに注意.

重要ポイント⑤ 定義域・軸が動く 2 次関数の最大最小

定義域が動いても軸が動いても，**定義域の方を**左から順に動かして場合分けする.

※様々な考え方があります．人によってはもっと別の考え方の方が考えやすいかもしれません．ただ，どんな考え方をするにしてもある程度統一した方法を持っておくと本番で混乱しません.





具体的な方法については次ページ以降それぞれの問題で解説する.

$\boxed{2}$ $y=-(x-2)^2-1 \quad (a-1\leq x\leq a+1)$

この関数は**上に凸**．定義域が動くパターン．頂点は$(\mathbf{2},-\mathbf{1})$，軸は$x=2$.

（1）最大値．最大値は前ページでいうところの **A．頂点側**，つまり頂点を含むかどうかが重要になってくるところなので **3 つ**に場合分けする．

i）　定義域が頂点より左側のとき，つまり $\boldsymbol{a+1<2}$ のとき，

最大値をとるのは定義域の**右端**（$\boldsymbol{x=a+1}$）.

最大値は，関数の式に代入して $-(a+1-2)^2-1=\boldsymbol{-a^2+2a-2}$.

ii）　定義域が頂点を含むとき，つまり $\boldsymbol{a-1\leq 2\leq a+1}$ のとき，

最大値は**頂点**，つまり $\boldsymbol{-1}$（$\boldsymbol{x=2}$）.

iii）　定義域が頂点より右側のとき，つまり $\boldsymbol{a-1>2}$ のとき，

最大値をとるのは定義域の**左端**（$\boldsymbol{x=a-1}$）で，

最大値は $-(a-1-2)^2-1=\boldsymbol{-a^2+6a-10}$.

これらをまとめて関数のように表わすと，最大値 $M(a)$ は

$$M(a)=\begin{cases}-a^2+2a-2 & (a<1)\\ -1 & (1\leq a\leq 3)\\ -a^2+6a-10 & (a>3)\end{cases}$$

（2）最小値． **B．頂点の反対側** なので 2 つに分ける．定義域中央と軸との関係に注目．

定義域の中央は $\frac{(a-1)+(a+1)}{2}=\boldsymbol{a}$. これと 2 との大小で場合分けする．

i）　定義域中央が軸より左側にある，すなわち $\boldsymbol{a<2}$ のとき，

最小値をとるのは定義域**左端** $\boldsymbol{x=a-1}$ で $\boldsymbol{-a^2+6a-10}$.

ii）　定義域中央が軸と一致または軸の左側にある，すなわち $\boldsymbol{a\geq 2}$ のとき，

最小値をとるのは定義域**右端** $\boldsymbol{x=a+1}$ で $\boldsymbol{-a^2+2a-2}$.

aの関数として表わすと

$$m(a)=\begin{cases}-a^2+6a-10 & (a<2)\\ -a^2+2a-2 & (a\geq 2)\end{cases}$$

注意点としては，aの場合分けのとき**境目**をその右か左のどちらかにちゃんと入れてあげること．

ここからはテクニック的な話．混乱しそうだったら読まないことを強く推奨．

最後に，$M(a)$の式と$m(a)$の式を比べてほしい．あることに気づくはずだ．

$$M(a)=\begin{cases}-a^2+2a-2 & (a<1)\\ -1 & (1\leq a\leq 3)\\ -a^2+6a-10 & (a>3)\end{cases} \qquad m(a)=\begin{cases}-a^2+6a-10 & (a<2)\\ -a^2+2a-2 & (a\geq 2)\end{cases}$$

そう，$m(a)$に登場する式は両方とも$M(a)$で既に求めた式なのだ．矢印のように入れ換えてしまえばあとはaの範囲にさえ注意すれば上でやったようにいちいち考えなくても求まるのである．ただしこれには注意が必要で，{ のあと aで場合分けした式を両方とも aが小さい方から書かないと逆になってしまう．筆者は本番でまさにそのミスをした．中途半端に習得した知識はかえって身を滅ぼすことになりかねない．

$\boxed{3}$ 「$0 < x < 8$である」という一言を書き忘れない．ちゃんと「分かってますよアピール」をする！

$\boxed{4}$ 略.

$\boxed{5}$ $f(x) = x^2 - 4ax + 8a \quad (0 \leq x \leq 4)$　　**下に凸**の関数.

平方完成すると $f(x) = (x - 2a)^2 - 4a^2 + 8a$．頂点は $(\boldsymbol{2a, -4a^2 + 8a})$.

軸の方が動くパターン．このような場合でも定義域を動かして考えられる.

※しつこいですが軸を動かす方が考えやすいようならそっちで考えても大丈夫です.

（1）最大値．頂点と反対側なので **2 つ**に場合分け．定義域の中央は**2.**

i)　定義域中央が軸より左側にある，すなわち $\boldsymbol{2 < 2a}$ のとき，

最小値をとるのは定義域の**左端** $\boldsymbol{x = 0}$ で，

$$\begin{aligned} f(0) &= (0 - 2a)^2 - 4a^2 + 8a \\ &= \boldsymbol{8a} \end{aligned}$$

ii)　定義域中央が軸と一致または軸の左側にある，すなわち $\boldsymbol{2 \geq 2a}$ のとき，

最小値をとるのは定義域の**右端** $\boldsymbol{x = 4}$ で，

$$\begin{aligned} f(4) &= (4 - 2a)^2 - 4a^2 + 8a \\ &= \boldsymbol{-8a + 16} \end{aligned}$$

以上をまとめて

$$M = \begin{cases} -8a + 16 & (a \leq 1) \\ 8a & (a > 1) \end{cases}$$

（2）最小値．頂点側なので **3 つ**に場合分け.

i)　定義域が頂点より左側のとき，つまり $\boldsymbol{4 < 2a}$ のとき，

定義域の**右端**（$\boldsymbol{x = 4}$）で最小値 $f(4) = \boldsymbol{-8a + 16}$ をとる.

ii)　定義域が頂点を含むとき，つまり $\boldsymbol{0 \leq 2a \leq 4}$ のとき，頂点で最小値 $\boldsymbol{-4a^2 + 8a}$ をとる.

iii)　定義域が頂点より右側のとき，つまり $\boldsymbol{2a < 0}$ のとき，

定義域の**左端**（$\boldsymbol{x = 0}$）で最小値$f(0) = \boldsymbol{8a}$ をとる.

以上より，

$$m = \begin{cases} 8a & (a < 0) \\ -4a^2 + 8a & (0 \leq a \leq 2) \\ -8a + 16 & (a > 2) \end{cases}$$

（次ページへ）

$\boxed{6}$ まず関数 $y=ax^2+bx+c$ を平方完成する．

$$\begin{aligned} y &= ax^2+bx+c \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c \end{aligned}$$

頂点は $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2}{4a}+c\right)$ …①

(1) 頂点が第3象限にあることから，軸がy軸よりも左側（$x<0$ のゾーン）にあることに注意する．

軸 $x=-\frac{b}{2a}$ が負になるためには aと bの符号が同じでないといけない．この時点で選択肢は⓪と③に絞られる．続いてどちらが頂点の y座標が負になるか実際に計算して確かめると答えは③とわかる．

(2) cを変えても2次関数の形自体は変化せず，上下に移動するだけである．これは2次関数に限らずどんな関数でも言える．

(3) $a=\frac{b^2}{4c}$ のときの頂点の座標は①に代入して $\left(-\frac{2c}{b},\ 0\right)$ だから，このとき頂点は ① x軸上 にある．

下に凸の状態を維持しているというので，$a>0$．このとき軸は必ずy軸より左側にある．また bや cの値によっては頂点が第2象限に来ることも考えられるので，答えは ⑤第2象限と第3象限．

終わりに

最後まで読んでいただいてありがとうございました．もし余力のある方は下のアンケートに答えていただけると筆者が喜びます．質問などあれば気軽に聞いてください．あと「ここがわかりやすかった」「ここもっと詳しく書いてほしかった」などの意見をくれると非常に参考になります．

https://forms.gle/4kPkQmBRK3SuR6AZ6

またこのあたりの範囲になってくると1つの問題に対して複数のアプローチが考えられます．今回はできませんでしたが，ゆくゆくは複数の解き方を紹介していきたいと思っています．微力ながら数学の学習の助けに少しでもなれたら幸いです．

2021年5月末日

作成：[redacted]

るり