

誰も見たことがない、本当に新しい

# 三角函数

の教科書（ $\beta$  版）

## はじめに

---

突然ですが、皆さんは次の問題をどうやって解きますか？

### 問題

$\tan \theta = \frac{12}{5}$  のとき  $\sin \theta, \cos \theta$  の値を求めよ ( $0 < \theta < \pi$ )

教科書には大抵こんな解答が載っています。

### よくある解答

公式  $\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$  に  $\tan \theta = \frac{12}{5}$  を代入して

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{12^2}{5^2} + 1 = \frac{169}{25} \quad \therefore \cos^2 \theta = \frac{25}{169} = \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$0 < \theta < \pi$  より  $\cos \theta > 0$  であるから  $\cos \theta = \frac{5}{13}$ .

$$\sin \theta = \cos \theta \cdot \tan \theta = \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{5} = \frac{12}{13}.$$

でも、これって面倒じゃないですか？ 求めたいのは  $\cos \theta$  や  $\sin \theta$  なのに、2 乗したり平方根取ったりしている。そして何より、

### 公式を忘れたら終わり

なのです。確かにこの公式自体は重要であり、覚えるべきものですが、少なくともこの程度の問題で使うようなものではありません。こんなふうに分数を使って何段階にも分けてやっていたら計算ミスをしてしまいます。

そしてミスをしてても容易に気づけません。

では、どうやって解けばいいのか。簡単です。 $\tan \theta = \frac{12}{5}$  と言っているのですから、素直に底辺が5、高さが12の直角三角形を描けばいいのです。



斜辺の長さは…三平方の定理で一発ですね。 $(\text{斜辺})^2 = 5^2 + 12^2 = 169$  より

り **斜辺 = 13** です。 $\sin, \cos$  の定義に従えば（後でこの定義も覆しにいけますが）、 $\sin \theta = \frac{12}{13}$ ,  $\cos \theta = \frac{5}{13}$  とすぐに出ます。

何？ $\tan^2$  の公式を使う方法と計算が一緒だって？確かにそうですよ。どちらにしろ2乗の和をとって平方根出してるのは同じです。でも、直観的に分かりやすいのはどちらですか？三角形に三平方の定理を適用した後者の方が見るからに明快ですよ。

もちろん数式を扱うことの方が得意な人もいますから、そういった人は式だけで計算しても全く問題ないですが、三角関数の基礎があやふやな人が無闇に公式を使って計算しようとすると悲惨な結果になります。※ここみに文字が小さくなっているところは余談なので読み飛ばしても構いません。

図で描けばこんなに簡単なことなのに、教科書ではとにかく数式で押し切ろうとします。そして一度その教科書に洗脳された頭は、図形で考えることを受け付けません。とにかく無思考・無批判にうろ覚えの公式に代入し、ミスをしてしまいます。

もしあなたが今  $\sin$   $\cos$   $\tan$  の意味もわからずに公式を使っていて、計算

ミスのせいでなかなか点数に繋がっていなかったとしても決して落ち込むことはありません。それはあなたの数学力が足りないせいではなく、「解き方の押し付け」——それも「効率の悪い」解き方——を無反省に続けてきた戦後の **日本数学教育の敗北** の結果です。見たこともないような関数が十分な説明もなしに突然登場し、それによって数学の成績・単位・そして進級できるかどうかまで左右される。そんな理不尽なことはないですね。

断っておきますが、これは決して先生たちの教え方が悪いとかそういうレベルの話ではありません。教科書だけの問題でもなく、戦後から無批判に受け継いできた日本の教育課程そのものに問題があります。教科書や先生はやっぱりその既定路線に従わざるを得ないのです。今はとりあえず追試に間に合わせるのが大事なのでこれ以上書きませんが、とにかく **三角関数がわからないのは皆さんのせいじゃありません**。それを忘れないでください。

世の中の教科書は対象が広いですから、どれも似たり寄ったり・ありきたりな説明になるのはある意味仕方ないことです。だったらもう **いっそ自分たちで教科書作っちゃえ** ってことで書いたのがこれです。9期生の9期生による9期生のための教科書です。

この教科書は以下のような人を対象としています：

- ・ 数学が嫌いな人
- ・ 三角関数が嫌いな人
- ・  $\sin \cos \tan \theta \alpha x y \cdots$  と文字が次々出てきてわけわかんない人
- ・ 考え方はわかるけど面倒な計算になるとうまくいかない人
- ・ 三角関数はわかるし解けるけど、もっと簡単に理解したい人

追試に間に合うように急いで作った仮版なので雑なところもありますがご容赦ください。

かなりくどくどと書いていますのでわかる人にはうざったいかもしれませんがご了承を。

# 弧度法と一般角

三角比・三角関数に入る前にまずラジアンと一般角の話をしましょう。ラジアンや  $\theta + 2n\pi$  とかがわからない人はまずここをしっかりと押さえてください。

## 弧度法

体系 p.204

ここは教科書どおりいきます。ラジアンは、円（というか扇形）の弧の長さと半径の比で表した角度のことです。



$$\pi = 180^\circ$$

これはもうとにかく叩き込んでください。 $\frac{\pi}{3}$  とか言われたらすぐに「あー60°ね」って言えるくらい体に染み込ませてください。小学校以来360°法に慣れ親しんでいるとすぐには受け入れ難いかもしれませんが、こればかりは仕方ないです。何度も解いているうちに染み付いてくるのでそこは頑張ってください。

平角（180°）が  $\pi$ 、1回転が  $2\pi$  です。

弧度法を使うメリットは正直今の段階では見えにくいですが。一応簡単にふれると、360°法の360という数字は「一年の日数に近い」「いろんな数で割れる」という実用的な理由で使われているもので、360じゃなきゃいけない**数学的な理由はありません**。一方、ラジアンには「半径に対する弧の長さ」という数学的な意味があります。そしてラジアンが比較しているのは半径という「長さ」と弧という「長さ」。どちらも同じ種類の単位のもので、このようにラジアンは360°法とは異なり、れっきとした意味のある測り方なのです。

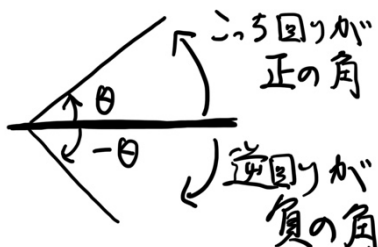
# 一般角

体系 p.202

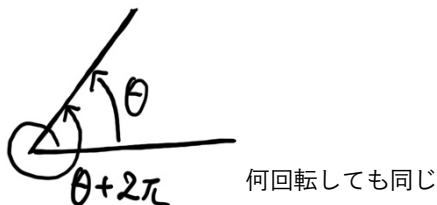
まずは角度の測り方の大原則を覚えてください。

## 角度は左回りの方向が正

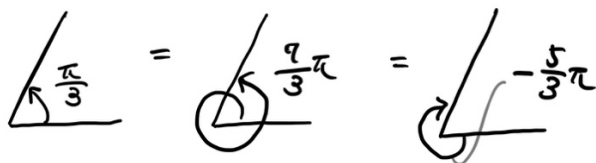
「左回り」とか「反時計回り」のように言葉で考えるとすぐに分らなくなるので、図のように目で覚えてください。負の角というのは単に角度を右回りに測っただけのことです。



一般角では 1 回転を超える角度も考えます。角度  $\theta$  に何回  $2\pi$  を加えても、つまり何回転させても角度の形は同じになります。



たとえば  $\frac{\theta}{3}$ ,  $\frac{7\pi}{3}$ ,  $-\frac{5\pi}{3}$  という角は、全部同じ形の角を表しています



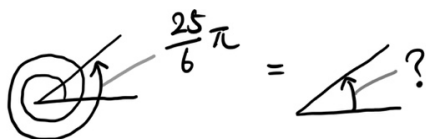
※上の図の記号「=」は角の形（見た目）が同じであることを表しています。

とすると当然三角比の計算などで  $\frac{7\pi}{3}$  や  $-\frac{5\pi}{3}$  といった数字が出てきたら  
簡単な角  $\frac{\theta}{3}$  に直してやる必要があります。ここではその練習をしましょう。

## 問 1

角度  $\frac{25}{6}\pi$  を簡単にせよ。

( $\frac{25}{6}\pi$  が表す角を、 $0 \leq \theta < 2\pi$  を満たす  $\theta$  で表せ)



$\frac{25}{6}\pi$  は  $2\pi$  より大きいですから、1 回転以上しています。これを 1 回転以内の角で表すという問題です。上図左のように何回転かしたものを「ほどいていく」イメージです。試しに 1 回転分ほどいてみると ( $2\pi$  を引くと)、

$$\frac{25}{6}\pi - 2\pi = \frac{13}{6}\pi$$

となって、まだ 1 回転より大きいですね。そこでもう 1 回転。

$$\frac{13}{6}\pi - 2\pi = \frac{\pi}{6}$$

これで 1 回転以内に収まりました。

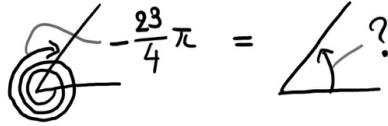
今やったのは、「1 回転に収まるまで  $2\pi$  を引き続ける」という操作です。これを一気にやると

$$\frac{25}{6}\pi - 2 \times 2\pi = \frac{\pi}{6}$$

となります。

## 問 2

角度 $-\frac{23}{4}\pi$ を簡単にせよ。 $(0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす $\theta$ で表せ)



今度は負の角です。最終目標は「一回転以内の正の角で表すこと」ですから、符号が正になるまで1回転進める、つまり $2\pi$ を加え続ければいいことになります。

$$-\frac{23}{4}\pi + 2\pi = -\frac{15}{4}\pi$$

$$-\frac{15}{4}\pi + 2\pi = -\frac{7}{4}\pi$$

$$-\frac{7}{4}\pi + 2\pi = \frac{\pi}{4}$$

3回転加えてようやく正の角になりましたね。これも一本の式で表すと

$$-\frac{23}{4}\pi + 3 \times 2\pi = \frac{\pi}{4}$$

のようになります。

**$2\pi$ をこえる一般角を簡単にする**

「1回転以内の正の角」になるまで回転させる（ $2\pi$ を足す・引く）

# 三角比から三角関数へ

## 三角比

体系 p.172

直角三角形を使うのは導入としてはいいですが、それに慣れすぎると  $90^\circ$  以上の角が出てきたときにすぐに窮してしまいます。ここではいきなり座標平面で考えます。

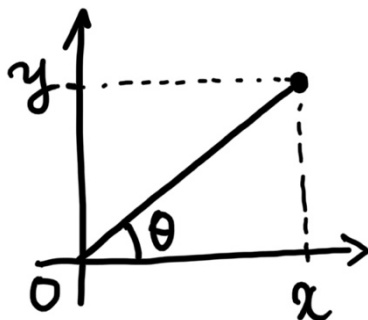
三角関数のビギナーを阻む最初の壁に、**文字が多くてわけわからん**というのがあります。慣れれば便利なのですが、慣れないうちはただただ分かりづらいだけです。ここでは文字の使用は必要最小限にとどめます。

xy 平面を描いて、原点から適当な方向に適当な長さの線分を引きます。直線と x 軸の正の部分のなす角を  $\theta$  とします。このとき、 $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$  を

$$\sin \theta = \frac{\text{y座標}}{\text{線分の長さ}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{x座標}}{\text{線分の長さ}}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \text{傾き}$$



で定めます。これが私たちの新しい三角比の定義です！

**sin は y 座標ベース**です。y 座標を線分の長さで割ったものです。

**cos は x 座標ベース**です。x 座標を線分の長さで割ったものです。

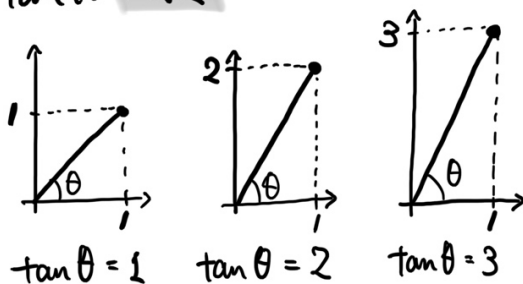
え、ちっとも分かりやすすくない？ ちょっとだけ我慢してください。この関係は  $\theta$  が直角を超えても成り立つんです。単位円とか考えなくても、この考え方さえできていれば困らないのでちゃんと押さえてください。

**tan は傾き**です。tan は傾き、tan は傾き、tan は傾き…。コサイン分のサ



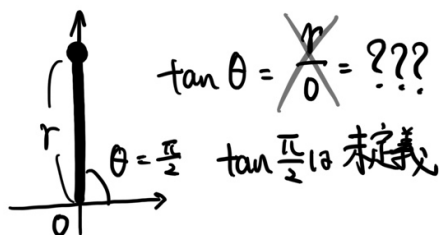
インとか一回忘れてください。いいですか、 $\tan$  は傾きですよ。なんなら  $\tan \theta$  を「タンジェントシータ」と読む代わりに「傾きシータ」と読んでもいいくらいです。それくらいこの傾きの考え方は重要です。

**$\tan$  は傾き**



傾きが急になるほど  
 $\tan \theta$  が大きくなる

とくに  $\theta = \frac{\pi}{2}$  のときは垂直になってしまい、 $\tan \theta$  を定義できません。

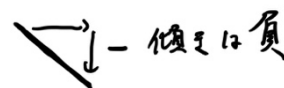
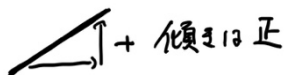
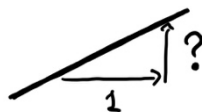


**補足** 「傾き」を忘れた人のために。直線の傾きというのは、

$$\frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$$

のことです。直線上で  $x$  座標が 1 増えたときに  $y$  座標がいくつ増えるかの値です。もっと平たく言うと、右に 1 進んだときに上にいくつ進むかです。

例えば  $y = 2x + 3$  という直線の傾きは 2、 $y = -x + 5$  だったら傾きは -1 です。一年生の頃の一次関数の範囲です。思い出しましたか？



# 一般角への拡張

体系 p179, 206 (三角形→180° →一般角と回りくどい。意味不明)

「拡張」と書きましたが、さっきと同じことを第2～4象限でもやるだけです。特段変わったことはしませんが、とにかく

## 単位円は忘れてください

半径を1にすることにこだわってもロクなことはありません。三角比っていうのはあくまで「比」なんですから。それからわざわざ問題を解くときに円を書く必要もありません。

なんでみんなこぞって単位円を使うのかといえれば、それは線分の長さが1になる、つまりy座標とx座標をそのままsinとcosの値として使えるからです。他にも便利なことはありますが、単位円に固執すると本質を見失います。円はあくまで「補助」。主役ではありません。

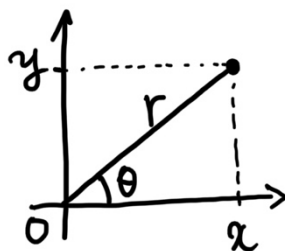
では、もう一度さっきの三角比の定義を振り返ります。

### 三角比の定義

$$\sin \theta = \frac{y \text{座標}}{\text{線分の長さ}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{x \text{座標}}{\text{線分の長さ}} = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \text{傾き}$$



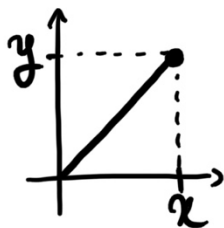
さすがに毎回「線分の長さ」と書くのは煩わしいので以降は「r」と書きます。この定義のいいところは**直角を超えてもそのまま通用する**ところです。

ここからは実際に第1象限から第4象限まで、三角比がどのような値を取るか見ていきましょう。

## 第 1 象限

第一象限では  $y, x$  とも正ですから、対応する  $\sin, \cos$  の値も当然正になります。

線分は右肩上がりですから、傾きの  $\tan$  は正です。

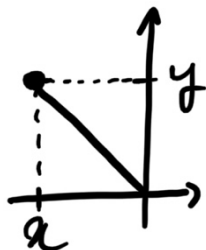


## 第 2 象限

$y$  は正なので、対応する  $\sin$  も正。

$x$  は負なので対応する  $\cos$  も負になります。

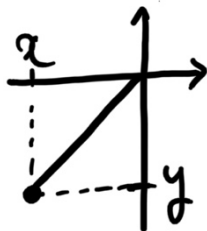
線分は右肩下がりですから、傾きの  $\tan$  は負です。



## 第 3 象限

$y, x$  ともに負なので、対応する  $\sin, \cos$  の値も負です。

傾きの  $\tan$  は……線分が右肩上がりになっているので正ですね。

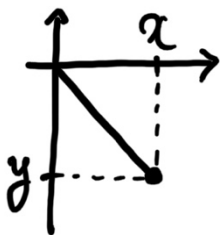


## 第 4 象限

$y$  が負なので対応する  $\sin$  は負。

$x$  が正なので対応する  $\cos$  は正。

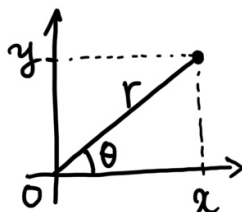
線分は右肩下がりなので、傾きの  $\tan$  は負。



(次ページへ)

## 三角比の負の値の意味

ここで一つ注意しておきたいことがあります。



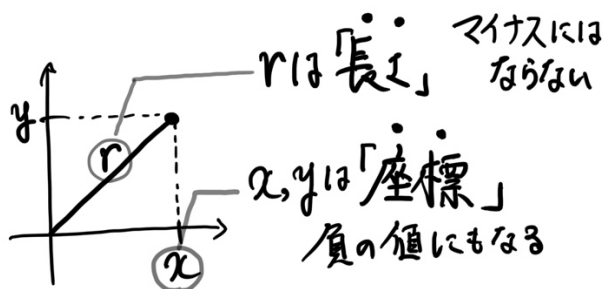
それは、この定義の図において、

$x, y$  は「座標」だが、 $r$  は「長さ」である

ということです。

$r$  は線分の「長さ」です。「長さ」に負の値はあり得ません。長さ  $r$  は絶対に正の値なのです。

一方  $x$  や  $y$  は原点を基準とした「座標」です。「座標」は負の値もとりまします。 $\sin$  や  $\cos$  の値がマイナスになることがあるのは、あくまで  $x, y$  という「座標」を基準にしているからです。マイナスの  $\sin, \cos$  の意味は、三角比を直角三角形で考えている限り絶対にわかりません。



このことを心の片隅に留めておいてください。

# 三角関数の性質

体系 p.211

教科書を見ると[1]～[4]まで 18 式もの公式があります。これ全部覚えなきゃ…なんて思わないでくださいね。考えればすぐにわかります。

こういうことを言うと、「いや、そうは言っても試験中にわざわざ考えてる暇ないし、どうせ早く解ける人たちは暗記してるんでしょ」と言われそうです。確かに計算が早い人はこれらの公式が頭に入っているかもしれませんが、でも、それは教科書と睨めっこして覚えたのではなく、**何度も問題演習をしているうちに自然に覚えたもの**なのです。そして、幸いここで出てくる事柄は試験中でもすぐに、「自然に」導けます。とにかく演習もせずに公式だけ暗記するようなことだけはやめてください。特に追試前になって三角関数の基礎があやふやでこれを読んでいる人は他にもっと覚えるべきことがあります。まずはそっちです。

以下、三角関数の値が元の角 $\theta$ の時と比べてどのように変化するか見ていきましょう。

$$\theta + 2n\pi$$

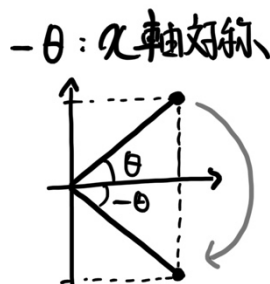
一般角のところでみたように、結局この角の形は $\theta$ と一緒にですから三角関数の値は変わりませんね。

$$-\theta$$

x軸対称にパタンと折り返すだけです。見てのとおりにx座標はそのまま、y座標だけ反転して（マイナスになって）いるので、対応するsinも反転します。

**sin と 傾きの tan が反転**

x座標が変わらないのでcosはそのままです。



しつこいですが覚えるんじゃないですよ。とにかくこの考え方を試験中にできるようにしてください。

$$\theta + \pi$$

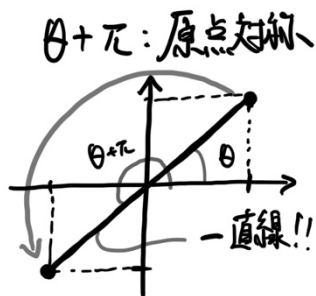
$\pi$ を足す、というとなんて難しそうですが要は原点对称に移動しただけです。

x座標もy座標も反転しているので、

**sin と cos が反転**

傾きの tan はそのままです

(線分の向きが変わってない)。

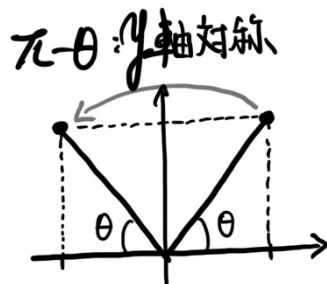


$$\pi - \theta$$

y軸対称です。y座標はそのまま x座標だけ反転しているので、

**cos と 傾きの tan が反転**

sin はそのままですね。



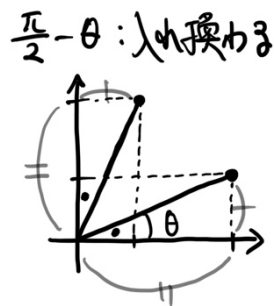
$$\frac{\pi}{2} - \theta$$

ちょっと難しくなります。図をよく見て下さい。移動後はx座標とy座標の値が入れ替わっていますね。xとyを入れ替えるということは、それに対応するsinとcosを入れ替えることに他なりません。

**sin と cos が入れ替わる**

tanはどうでしょうか。xとyが入れ替わったということは、傾き方(xがいくつ進んだ時にyがいくつ進む)が逆になったということです。

**傾きの tan は逆数になる**

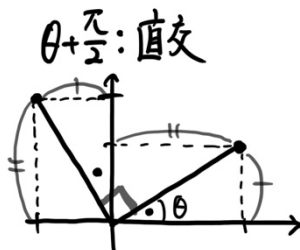


逆数になる、というのは数式で書いた方がわかりやすいかもしれません。

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\theta + \frac{\pi}{2}$$

最後です。 $\frac{\pi}{2}$ 、つまり直角を加えるということは、移動後の線分は元の線分に直交します。右図をよく見れば、



移動後の  $y$  座標が、元の  $x$  座標に

移動後の  $x$  座標が、元の  $y$  座標の符号を反転したになっている

ことがわかります。これは文章より式の方がわかりやすいですね。

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta, \quad \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta$$

最後  $\tan$  ですが、これは 2 年の時に習った直線の直交条件から簡単にわかります。

### 直線の直交

座標平面上の 2 直線が直交する時、傾きの積は  $-1$

したがって、傾き  $\tan \theta$  の線分に直交する線分の傾きは、

$$-\frac{1}{\tan \theta}$$

になります。

紙に書くと結構わかりづらくなっちゃいました。余裕があればもう少しわかりやすいの作ります。ごめん。

# 必要な公式・応用

体系 p.186

ここからは証明・応用問題を解くための方法について書いていきます。あまり「解法パターンの列挙」みたいなのは好きではないのですが、知らないといけないようなものが多いので。

ここでもうやく「覚える」公式の登場です。おや、ため息が聞こえてきますね…。でもちょっと待ってください。まずはここまで一度も「公式らしい公式」を使わずに来たことを思い出してください。ひたすら y 座標ベースの  $\sin$ 、x 座標ベースの  $\cos$ 、傾きの  $\tan$  だけで解いてきましたよね。これだけで、皆さんの「公式を使わずに得点できる問題」の量がぐっと増えたはずですよ。あと一息。ちょっとだけ公式を受け入れてあげましょう。

## いわゆる相互関係の基本公式

三角関数の最初の方に出てくるやつです。

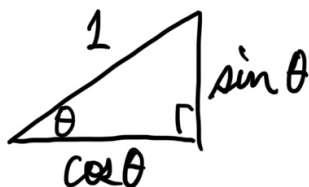
$$\textcircled{1} \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\textcircled{2} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\textcircled{3} \tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

①は定義から明らかですね。公式と呼ぶほどのものではありません。②も三平方の定理から明らかです。



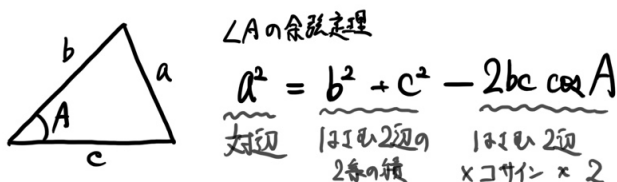


一方、③は少し特殊です。知っていて損はないですが、試験中でも落ち着いて計算すれば導けますね。

$$\tan^2 \theta + 1 = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 1 = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

## 正弦定理と余弦定理

正弦定理と余弦定理に関してはまあ教科書に書いてあることが全てです。本当は自分で証明まで導ける方がいいのですが、追試を前にしている人はとにかく**使いこなせる**ようになることを優先してください。



### 正弦定理と余弦定理の使い分け

まずは2つの定理を見比べてください。

$$\text{正弦定理: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$\text{余弦定理: } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

どっちが簡単そうですか？

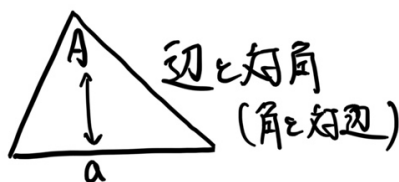
正弦定理ですよね。正弦定理は 1 次の比例関係ですが、余弦定理は 2 次です。計算するときに全ての辺の 2 乗を出す必要があります。このことから言えるのは、

### どっちでも解けるなら正弦定理を使い

ということです。ただし、たとえば  $\sin A = \frac{1}{2}$  を満たす三角形の内角  $A$  は  $A = 30^\circ, 150^\circ$  と 2 通り考えられるように、 $\sin$  を使うと角度が 2 つ出てきます。その時にどちらでもいいのか、それとも片方しかダメなのかを、既にわかっている他の角から判断する必要があります。例えば  $C = 45^\circ$  という条件が与えられている場合、 $A$  は  $150^\circ$  にはなりません。角が 2 つ出てきたときに、その妥当性のチェックを行うことを忘れないでください。

### 「辺と対角」の組があれば正弦定理

正弦定理が使えるのは「**辺と対角**」が与えられている時です。その他の時は余弦定理で解くしかありません。



要は、アルファベットの太文字と小文字両方揃っているときです。

## 内接四角形の面積

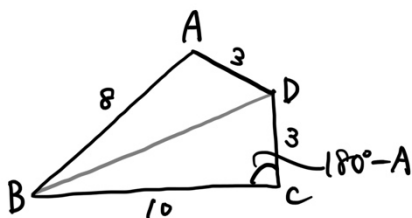
円に内接する四角形の 4 辺の長さが与えられた時に面積を求める問題です。基本方針は

$$(\text{対角線})^2 \text{ を 2 通りで表す}$$

ことです。

### 問題

4 辺の長さが順に 8, 10, 3, 3 である、円に内接する四角形の面積  $S$



$$\left. \begin{aligned} BD^2 &= BA^2 + AD^2 - 2BA \cdot AD \cos A \\ &= 73 - 48 \cos A \end{aligned} \right\} \triangle BAD$$

$$\left. \begin{aligned} BD^2 &= BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos C \\ &= 109 - 60 \cos (180^\circ - A) \\ &= 109 + 60 \cos A \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \triangle BCD \\ 2通り \\ \text{表わす} \end{array}$$

対角線を引き、2 つの三角形に分割します。対角線は未知ですからそれぞれの三角形について余弦定理を適用し、 $\cos$  に関する方程式を作ります。

内接四角形の対角の和は  $180^\circ$  であることがミソです。以降は

$$73 - 48 \cos A = 109 + 60 \cos A \quad \text{より} \quad \cos A = -\frac{1}{3}$$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{8}{9} \quad \therefore \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin C = \sin(180^\circ - A) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Delta ABD = \frac{1}{2} BA \cdot AD \sin A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 8\sqrt{2}$$

$$\Delta CBD = \frac{1}{2} BC \cdot CD \cdot \sin C = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 10\sqrt{2}$$

$$S = \Delta ABD + \Delta CBD = 18\sqrt{2}$$

## 三角形の形状決定

辺の長さや三角比に関する条件式が与えられて、「この等式を満たすような三角形はどんな三角形か」という問題。「どんな」といっても三角形の種類は「正三角形」「二等辺三角形」「直角三角形」くらいしかありませんね。

三角形の形状。△ABCについて、

$$a = b \rightarrow \text{「} a = b \text{ の二等辺三角形」}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow \text{「} C = 90^\circ \text{ の直角三角形」}$$

条件式としては例えば次のようなものが与えられます：

### 問題

△ABCにおいて、 $a \cos A = b \cos B$ が成り立つとき、この三角形はどのような形をしているか。(2 中間)

条件式に対して皆さんがすることはただ一つ。それは

### 三角比を消去する

ことです。 $a$ を $\sin A$ で表したりして三角比を増やしてはいけません。とにかく三角比を消去して、**辺のみに関する条件式**に持ち込むのです。理由は明らかです。三角形の形状は上の枠囲みのように「辺の相互関係」で決まるからです。

余弦定理より $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ ,  $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ であるから、条件式は次のようになる。

$$a \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = b \cdot \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

両辺を $2abc$ 倍して、

$$a^2(b^2 + c^2 - a^2) = b^2(a^2 + c^2 - b^2)$$

展開して整理し因数分解すると（テストではちゃんと書いてね）

$$(a - b)(a + b)(a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b \text{ または } a = -b \text{ または } a^2 + b^2 = c^2$$

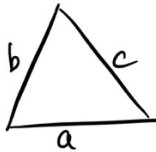
$a > 0, b > 0$  より  $a = -b$  とはならない。よって

**$a = b$  の二等辺三角形 または  $c = 90^\circ$  の直角三角形。**

単に「二等辺三角形または直角三角形」ではなく「 $a = b$  の」「 $c = 90^\circ$  の」というように情報を加えてあげるところがポイントです。

## （おまけ）ヘロン

3 辺の和が偶数の時は便利。それ以外の方は結構面倒。



$$s = \frac{a+b+c}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{3辺和} \div 2 \\ \text{とく,} \end{array} \right.$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

各辺で引いたものの積

## おわりに

いかがだったでしょうか。出来るだけのことを書いたつもりですが、やっぱり紙面なので直接教えるよりはわかりにくくなってしまったかもしれません。最初にも書きましたがとにかくインスタントなので雑です。わからないところがあったらどんどん周りの人に聞いて解決してください。数学に限らず、わかっている人を「利用する」力は大切です。それは決して迷惑なことではありません。「忙しいだろうから…」と変に気を遣ってよく分からないままにするのは本当にやめてください。