ラビット・チャレンジ

＜実装演習レポート　応用数学＞

メールアドレス：mtop.jp@gmail.com
受講者名：山崎　英和
受講種別：ラビット・チャレンジ

＜第一章　線形代数＞
要点まとめ

■固有値、固有ベクトルの求め方
正方行列Aについて、

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}, \qquad \vec{x} \neq 0 \qquad \cdots(1)$$

のとき、λをAの固有値といい、$\vec{x}$をλに関する固有ベクトルという

固有値を求める公式
正方行列Aについて、

$$det(A - \lambda I) = 0 \qquad \cdots(2)$$

のとき、λは行列Aの固有値である。
ここで、
$det(\,)$:行列式
I:　　単位行列

固有ベクトルの求め方
（1）の式に、（2）で求めた固有値を代入し、等式が成り立つような$\vec{x}$を固有ベクトルという。
固有値の数だけ、それに対する固有ベクトルが存在する

■固有値分解
正方行列Aが固有値λ、固有ベクトルVを持つとき、

$$A = V\Lambda V^{-1} \qquad \cdots(3)$$

と変形することを固有値分解という。
ただし、Λは固有値$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$を対角線上に並べた式
Vは固有ベクトル$(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots)$である

■特異値・特異ベクトル、特異値分解
正方行列でないMに対して、以下を満たす単位ベクトル$\vec{u}, \vec{v}$がある場合、

$$M\vec{v} = \sigma\vec{u} \ldots(1)$$
$$M^t\vec{u} = \sigma\vec{v} \ldots(2)$$

以下のように特異値分解が可能。

$$M = USV^{-1} \ldots (3)$$

ここで、Mはｍｘｎの行列、Uはｍｘｒの直行行列、Sはｒｘｒの特異値の対角行列、Vはｒｘｎの直行行列。

（１）と（２）を行列で表すと以下となる。

$$MV = US, \qquad M^T U = VS^T$$

$$\Rightarrow \; M = USV^{-1}, \qquad M^T = VS^T U^{-1}$$

これらの積は、

$$MM^T = USV^{-1}VS^T U^{-1} = USS^T U^{-1}$$

$$M^T M = VS^T U^{-1} USV^{-1} = VS^T SV^{-1}$$

つまり、MM^Tを固有値分解すれば、その左特異ベクトルU,Vと特異値Sの２乗が求まる。

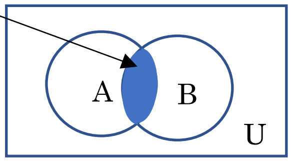
＜第二章　確率・統計＞
要点まとめ

■条件付き確率

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

■ベイズの定理

$$\underline{P(A)P(B|A)} = P(B)P(A|B) = P(A \cap B)$$



■期待値：

1．確率変数Xが離散的な確率の期待値

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \times p_k$$

2．確率変数Xが連続的な確率の期待値

$$E(X) = \int xf(x)\,dx$$

■分散・標準偏差・共分散

1．確率変数Xの期待値を$E(X) = \mu$とすると、Xの分散$V(X)$は、

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

2．確率変数Xの標準偏差$\sigma(X)$は、

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

3．確率変数XとYの期待値をそれぞれ$E(X) = \mu_x, E(Y) = \mu_y$とすると、
XとYの共分散$Cov(X,Y)$は、

$$Cov(X,Y) = E\left[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\right]$$

■確率分布

1．ベルヌーイ分布

確率変数Xが0と1の2値を取るとき、1の出る確率をpと置くと、次の式で表せる

$$P(x|p) = p^x(1-p)^{1-x}$$

2．二項分布

確率変数Xが0と1の2値を取るとき、n回試行してk回1となる分布は、次の式で表せる

$$P(k|p,n) = {}_nC_x P(k|p) = \frac{n!}{x!\,(n-k)!} p^k(1-p)^{n-k}$$

3．ガウス分布

正規分布に従う確率変数Xは、次の式で表せる

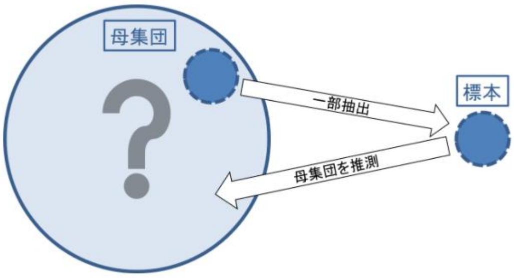
$$N(x,\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ここで、μ は$E(X)$、σ^2は$V(X)$。

■母集団の推定

母集団に属する一部の集合を標本と呼ぶ。

標本から母集団のパラメータ（母平均、母分散など）を推定する。



■標本平均

$$\bar{\mathrm{x}} = \frac{1}{n}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{x_i}$$

→　母平均$\hat{\mu}$を推定

■標本分散

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{\mathrm{x}})^2$$

■不変分散

$$\mathrm{s}^2 = \frac{1}{n - 1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{\mathrm{x}})^2$$

→　母分散$\hat{\sigma}^2$を推定

＜第三章　情報理論＞
要点まとめ

■自己情報量

$$I(x) = -log\left(P(x)\right)$$

■シャノンエントロピー

$$\begin{aligned} H(x) &= E\left(I(x)\right) \\ &= -E(log(P(x)) \\ &= -\sum P(x)log\left(P(x)\right) \end{aligned}$$