

問題

正の整数 a, b, c, d について $a^3 = b^2, c^3 = d^2, c - a = 9$ がなりたつとき、整数 a, b, c, d の値を求めよ。

解説

$a^3 = b^2$ より、 $b = a^{\frac{3}{2}} = a\sqrt{a}$ であるから、 b が整数の時、 a は平方数で表せる。

なぜ a が平方数となるのか

まず b は問題文で定義されている通り整数で、 a も同様に整数であるから、 \sqrt{a} も整数となる。平方根が整数になるとき、 a は平方数である。

$$b = \sqrt{a} \iff b^2 = a$$

c についても同様に平方数であるから、

$$a = x^2, c = y^2$$

と表せる。 $c - a = 9$ より、 $y^2 - x^2 = 9$ となる。また $c > a$ であるから、 $y > x$

$$\therefore (y+x)(y-x) = 9$$

x, y は整数であるから、 $y+x, y-x$ も整数である。

かつ、 $y+x, y-x$ はともに正 ($\because y+x$ は整数同士の足し算, $y-x$ は $y > x$ でかつ整数同士の引き算)

$\therefore y+x > y-x$ より、 $y+x, y-x$ の考えられる組み合わせは、

$$(y+x, y-x) = (9, 1)$$

したがって、

$$x = 5, y = 4$$

よって、

$$a = 25, c = 16$$

$a^3 = b^2, c^3 = d^2$ により、

$$b = 125, d = 64$$

解答

$$a = 25$$

$$b = 125$$

$$c = 16$$

$$d = 64$$