Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Marek Trunkát

Algoritmy v teorii reprezentací

Katedra algebry

Vedoucí diplomové práce:	RNDr. Jan Šťovíček, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Matematické struktury

Praha 2013

Na tomto místě bych chtěl poděkovat vedoucímu mé diplomové práce RNDr. Janu Šťovíčkovi, Ph.D. za nespočet cenných rad, připomínek a trpělivost při vedení mé práce.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Algoritmy v teorii reprezentací

Autor: Marek Trunkát

Katedra: Katedra algebry

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jan Šťovíček, Ph.D., Katedra algebry

Abstrakt: Práce se zabývá implementací algoritmu pro nalezení generátoru skoro štěpitelných posloupností nerozložitelného a neprojektivního modulu algebry cest nad konečným toulcem. Algoritmus je zde implementován v algebraickém systému GAP (Groups, Algorithms, Programming) s využitím doplňujícího balíku QPA (Quivers and Path Algebras).

Klíčová slova: skoro štěpitelné posloupnosti, teorie reprezentací, algoritmus, QPA

Title: Algorithms in Representation Theory

Author: Marek Trunkát

Department: Department of Algebra

Supervisor: RNDr. Jan Šťovíček, Ph.D., Department of Algebra

Abstract: This thesis deals with implementation of algorithm for computation of generator of almost split sequences ending at an indecomposable nonprojective module of path algebra over finite quiver. Algorithm is implemented in algebra system GAP (Groups, Algorithms, Programming) with additional package QPA (Quivers and Path Algebras).

Keywords: almost split sequences, representation theory, algorithm, QPA

Obsah

1 Úvod **1**

2 Teorie **3**

2.1 Teorie kategorií . . . 4
2.2 Algebry a moduly . . . 11
2.2.1 Projektivní moduly . . . 16
2.2.2 Funktor Ext . . . 18
2.2.3 Funktor D . . . 19
2.2.4 Funktor $()^*$ . . . 24
2.2.5 Funktor Tr . . . 29
2.2.6 Funktory δ^* a δ_* . . . 35
2.2.7 Skoro štěpitelné posloupnosti . . . 37
2.3 Teorie reprezentací . . . 46
2.3.1 Toulec a algebra cest . . . 46
2.3.2 Přípustný ideál . . . 49
2.3.3 Reprezentace a moduly . . . 56

3 Algoritmus **61**

3.1 Konstrukce potřebných izomorfismů . . . 62
3.1.1 Izomorfismus $\varphi_{P,Y}$ . . . 62
3.1.2 Izomorfismus $\sigma_{\delta,X}$ . . . 68
3.1.3 Izomorfismus $\gamma_{\delta,X}$ . . . 71
3.1.4 Izomorfismus $\omega_{\delta,X}$ . . . 78
3.2 Algoritmus pro nalezení skoro štěpitelné posloupnosti . . . 79

4 Implementace **85**

4.1 Značení v kódu QPA . . . 85
4.2 Vstup a výstup algoritmu . . . 85
4.3 Modul Ω . . . 86
4.4 Rozložení $A^n \simeq P_1 \oplus P_1'$ . . . 87
4.5 Pomocné funkce . . . 89
4.6 Dualita P_1^* . . . 91
4.7 Modul $Tr(X)$ . . . 95
4.8 Izomorfismus $P_1 \oplus P_1' \simeq A^n$ . . . 98
4.9 Izomorfismus $\varphi_{P_1,\Omega}$ . . . 100
4.10 Dualita $DTr(X)$ . . . 101
4.11 Tenzorový součin $Tr(X) \otimes_A \Omega$ . . . 103
4.12 Hlavní bázový prvek $\phi_\Omega(\omega)$ . . . 105
4.13 Báze $Tr(X) \otimes_A \Omega$ . . . 106
4.14 Homomorfismus $\xi : \Omega \to DTr(X)$ . . . 107
4.15 Hledaný generátor E . . . 108

5 Příklady použití a testování časové náročnosti **109**

6 Závěr **119**

Seznam použité literatury 121

Přílohy 123

1. Úvod

Cílem této práce je implementace algoritmu pro nalezení generátoru skoro štěpitelných posloupností v systému [GAP] **Groups, Algorithms, Programming - a System for Computational Discrete Algebra** s využitím balíku [QPA] **Quivers and Path Algebras**.

První část obsahuje všechnu potřebnou teorii. Nejprve krátký úvod do teorie kategorií, poté teorii nutnou pro konstrukci algoritmu a nakonec teorii potřebnou pro implementaci algoritmu v teorii reprezentací.

V druhé části nalezneme konstrukci algoritmu, tak jak byla popsána v diplomové práci [3] **Computing almost split sequences** norského studenta **Tea Sormbroen Lian**.

V třetí části algoritmus implementujeme a na závěr jsou umístěny příklady použití a srovnání rychlosti s algoritmem, který je v [QPA] aktuálně implementován.

2. Teorie

Tato kapitola obsahuje potřebnou teorii pro konstrukci algoritmu pro výpočet generátoru skoro štěpitelných posloupností i jeho následnou implementaci. Je rozdělena do dvou částí.

Nejprve si připomeneme základní pojmy z teorie kategorií, které budou nutné pro naši další práci. Teorie je zde čerpána především z [3] a dále [1], kde je možné nalézt podrobnější informace.

Druhá část se zabývá algebrami nad komutativním okruhem, jejich moduly a funktory v kategorii modulů. Dále jsou zde popsány vlastnosti skoro štěpitelných posloupností. Teorie je kompilovaná z několika zdrojů - tří knih ([2], [4] a [5]) a dále diplomové práce [3].

Třetí část obsahuje základy teorie reprezentací artinovských algeber, které využijeme v samotné implementaci algoritmu v knihovně [QPA]. Teorie je čerpána převážně z knih [1] a [2].

2.1 Teorie kategorií

Definice 2.1. Kategorie $\mathcal{C}$ je trojice $\mathcal{C} = (Ob(\mathcal{C}), Hom(\mathcal{C}), \circ)$, kde $Ob(\mathcal{C})$ je nazývána třída objektů $\mathcal{C}$, $Hom(\mathcal{C})$ je nazývána třída morfismů a $\circ$ je binární operace na morfismech splňující:

(a) Každým dvěma objektům $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ přiřadíme množinu morfismů $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ nazývanou morfismy z X do Y takovou, že pro $(X,Y) \neq (Z,U)$ je $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \cap Hom_{\mathcal{C}}(Z,U) = \emptyset$.

(b) Pro každou trojici $X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$ je operace

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) & \to & Hom_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ (f,g) & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

nazvaná skládání morfismů, splňující následující dvě podmínky:

(i) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ pro každou trojici $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ a $h \in Hom_{\mathcal{C}}(Z,U)$.

(ii) Pro každý objekt $X \in Ob(\mathcal{C})$ existuje morfismus $1_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X,X)$, nazávaný identický morfismus na X, takový, že pro každé $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Z,X)$ je $f \circ 1_X = f$ a $1_X \circ g = g$.

Namísto $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ píšeme často jen $X \xrightarrow{\mathrm{f}} Y$ nebo $f : X \to Y$. Diagram v kategorii $\mathcal{C}$ nazveme komutativním, pokud každé složení cest se stejným začátkem i koncem si je rovné. Například následující diagram s $X, Y, Z, U \in Ob(\mathcal{C})$ je komutativní, pokud $g \circ f = i \circ h$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "i"] & U \end{tikzcd}$$

Definice 2.2. Kategorii $\mathcal{C}'$ nazveme podkategorií kategorie $\mathcal{C}$, pokud splňuje následující podmínky:

(a) $Ob(\mathcal{C}')$ je podtřída Ob($\mathcal{C}$).

(b) Pro $X, Y \in Ob(\mathcal{C}')$ je $Hom_{\mathcal{C}'}(X,Y) \subseteq Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

(c) Skládání morfismů v $\mathcal{C}'$ je stejné jako v $\mathcal{C}$.

(d) Pro každý objekt $X \in Ob(\mathcal{C}')$ je identický morfismus $1_X \in Hom_{\mathcal{C}'}(X,X)$ stejný jako v kategorii $\mathcal{C}$.

Podkategorii $\mathcal{C}'$ nazveme úplnou, pokud $Hom_{\mathcal{C}'}(X,Y) = Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ pro všechny $X, Y \in Ob(\mathcal{C}')$

Definice 2.3. Kategorii $\mathcal{C}$ nazveme aditivní, pokud splňuje následující podmínky:

(a) Pro každou konečnou množinu $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ existuje objekt $X \oplus Y \in \mathcal{C}$ (nazývaný direktní suma X a Y) společně s morfismy $\nu_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X, X \oplus Y)$, $\nu_Y \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, X \oplus Y)$, $\pi_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X \oplus Y, X)$ a $\pi_Y \in Hom_{\mathcal{C}}(X \oplus Y, Y)$ takovými, že platí:

$$\begin{aligned}
\pi_X \nu_X &= 1_X \\
\pi_Y \nu_Y &= 1_Y \\
\pi_X \nu_Y &= 0 \\
\pi_Y \nu_X &= 0 \\
\pi_X \nu_X + \pi_Y \nu_Y &= 1_{X \oplus Y}
\end{aligned}$$

Morfismy π_X a π_Y jsou nazývány kanonické projekce a ν_X a ν_Y kanonické inkluze.

(b) Pro všechny $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ má množina $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ strukturu abelovské grupy.

(c) Pro každou trojici objektů $X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$ je skládání morfismů

$$\circ : Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

bilineární operace.

(d) Existuje nulový objekt $0 \in Ob(\mathcal{C})$ takový, že pro všechny $X \in Ob(\mathcal{C})$ je $|Hom_{\mathcal{C}}(X, 0)| = |Hom_{\mathcal{C}}(0, X)| = 1$.

Definice 2.4. Mějme aditivní kategorii $\mathcal{C}$. Opačná kategorie $\mathcal{C}^{op}$ ke kategorii $\mathcal{C}$ má stejné objekty $Ob(\mathcal{C}^{op}) = Ob(\mathcal{C})$, ale $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y, X)$ pro všechny $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$. Sčítání v $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y)$ je definováno stejně jako v $Hom_{\mathcal{C}}(Y, X)$. Skládání $\circ'$ v $\mathcal{C}'$ je definováno vztahem $g \circ' f = f \circ g$, kde $\circ$ je skládání v $\mathcal{C}$.

Definice 2.5. Nechť $\mathcal{C}$ je aditivní kategorie a $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

(a) Jádro morfismu f je objekt $Ker(f) \in Ob(\mathcal{C})$ společně s morfismem $\nu_f \in Hom_{\mathcal{C}}(Ker(f), X)$ (nazývaným kanonické vnoření) takovým, že splňuje následující podnínky:

(i) $f \nu_f = 0$.

(ii) Pro každé $T \in Ob(\mathcal{C})$ a $t \in Hom_{\mathcal{C}}(T, X)$ takové, že $ft = 0$ existuje právě jedno $s \in Hom_{\mathcal{C}}(T, Ker(f))$ takové, že $t = \nu_f s$.

$$\begin{tikzcd}
Ker(f) \arrow[r, "\nu_f"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\
T \arrow[u, dotted, "s"] \arrow[ur, "t"] & &
\end{tikzcd}$$

(b) Kojádro morfismu f je objekt $Cok(f) \in Ob(\mathcal{C})$ společně s morfismem $\pi_f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Cok(f))$ (nazývaným kanonická projekce) takovým, že splňuje následující podnínky:

(i) $\pi_f f = 0$.

(ii) Pro každé $T \in Ob(\mathcal{C})$ a $t \in Hom_{\mathcal{C}}(Y,T)$ takové, že $tf = 0$ existuje právě jedno $s \in Hom_{\mathcal{C}}(Cok(f),T)$ takové, že $t = s\pi_f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "\pi_f"] \arrow[dr, "t"] & Cok(f) \arrow[d, dotted, "s"] \\ & & T \end{tikzcd}$$

Definice 2.6. Aditivní kategorii $\mathcal{C}$ nazveme abelovskou, pokud pro každé $X, Y \in Ob(C)$ a $f \in Hom_C(X,Y)$ existují $Ker(f)$ i $Cok(f)$ a navíc $Cok(\nu_f) \simeq Ker(\pi_f)$, kde $\nu_f : Ker(f) \to X$ resp. $\pi_f : Y \to Cok(f)$ je kanonické vnoření resp. kanonická projekce.

Definice 2.7. Posloupnost objektů a morfismů

$$\cdots \xrightarrow{f_{n+1}} X_{n+1} \xrightarrow{f_n} X_n \xrightarrow{f_{n-1}} X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-2}} \cdots$$

v abelovské kategorii $\mathcal{C}$ nazveme exaktní, pokud pro všechna n je $Ker(f_{n-1}) = Im(f_n)$. Krátká exaktní posloupnost je exaktní posloupnost tvaru $0 \to X \to Y \to Z \to 0$.

Definice 2.8. Nechť jsou $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$ dvě kategorie. Kovariantní funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ přiřazuje každému objektu $X \in Ob(\mathcal{C})$ objekt $F(X) \in Ob(\mathcal{C}')$ a každému morfismu $h : X \to Y$ v $\mathcal{C}$ morfismus $F(h) : F(X) \to F(Y)$ v $\mathcal{C}'$ takový, že:

(a) $T(1_X) = 1_{T(X)}$ pro každý $X \in Ob(\mathcal{C})$.

(b) pro každou dvoji morfismů $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ v $\mathcal{C}$ platí, že $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$.

Kontravariantní funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ přiřazuje každému objektu $X \in Ob(\mathcal{C})$ objekt $F(X) \in Ob(\mathcal{C}')$ a každému morfismu $h : X \to Y$ v $\mathcal{C}$ morfismus $F(h) : F(Y) \to F(X)$ v $\mathcal{C}'$ takový, že:

(a) $T(1_X) = 1_{T(X)}$ pro každý $X \in Ob(\mathcal{C})$.

(b) pro každou dvojici morfismů $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ v $\mathcal{C}$ platí, že $T(g \circ f) = T(f) \circ T(g)$.

Definice 2.9. Nechť $T, T' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ jsou dva kovariantní (resp. kontravariantní) funktory. Pak třída morfismů $\Psi = \{\Psi_X : T(X) \to T'(X)\}_{X \in Ob(\mathcal{C})}$ je přirozenou transoformací T do T', pokud následující diagram v $\mathcal{C}'$ komutuje pro každý morfismus $f : X \to Y$:

$$\begin{tikzcd} T(X) \arrow[r, "\Psi_X"] \arrow[d, "T(f)"'] & T'(X) \arrow[d, "T'(f)"] \\ T(Y) \arrow[r, "\Psi_Y"'] & T'(Y) \end{tikzcd} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{tikzcd} T(Y) \arrow[r, "\Psi_Y"] \arrow[d, "T(f)"'] & T'(Y) \arrow[d, "T'(f)"] \\ T(X) \arrow[r, "\Psi_X"'] & T'(X) \end{tikzcd}$$

Přirozenou transformaci Ψ nazveme přirozenou ekvivalencí (nebo též přirozeným izomorfismem), pokud pro každé $X \in \mathcal{C}$ je Ψ_X izomorfismus.

Kovariantní funktor $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ nazveme ekvivalencí kategorií, pokud existuje funktor $F : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ a přirozené ekvivalence $\Psi : 1_{\mathcal{C}} \to FT$ a $\Phi : 1_{\mathcal{C}'} \to TF$, kde $1_{\mathcal{C}}$ a $1_{\mathcal{C}'}$ jsou funktory identity na C resp. C'.

Kontravariantní funktor $D : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ nazveme dualitou kategorií, pokud indukovaný kovariantní funktor $D : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ je ekvivalence kategorií.

Definice 2.10. Nechť $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ jsou abelovské kategorie a $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ kovariantní (resp. kontravariantní) funktor. A nechť

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

je exaktní posloupnost v $\mathcal{C}$. Pak řekneme, že F je

(a) zleva exaktní, pokud následující posloupnost je exaktní v $\mathcal{D}$:

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$$

$$\text{(resp. } 0 \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(A) \text{)}$$

(b) zprava exaktní, pokud následující posloupnost je exaktní v $\mathcal{D}$:

$$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$$

$$\text{(resp. } F(C) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(A) \longrightarrow 0) \text{)}$$

(c) exaktní, pokud následující posloupnost je exaktní v $\mathcal{D}$:

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$$

$$\text{(resp. } 0 \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(A) \longrightarrow 0) \text{)}$$

Definice 2.11.

(a) $Set :=$ kategorie množin, kde morfismy jsou množinová zobrazení.

(b) $Ab :=$ kategorie abelovských grup, kde morfismy jsou homomorfismy abelovských grup.

(c) $Mod(S) :=$ kategorie S-modulů okruhu S, kde morfismy jsou homomorfismy S-modulů.

Lemma 2.12. *Nechť $\mathcal{C}$ je kategorie a $X \in Ob(\mathcal{C})$, pak*

(a) *máme kovariantní funktor*

$$Hom_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \to Set,$$

daný pro $Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$ a $f \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ předpisem:

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{C}}(X,-)(Y) &:= Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \\ Hom_{\mathcal{C}}(X,-)(f) &:= Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ &\qquad\qquad g \mapsto fg \end{aligned}$$

(b) *máme kontravariantní funktor*

$$Hom_{\mathcal{C}}(-,X) : \mathcal{C} \to Set,$$

daný pro $Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$ *a* $f \in Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ *předpisem:*

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{C}}(-,X)(Y) :=& \; Hom_{\mathcal{C}}(Y,X) \\ Hom_{\mathcal{C}}(-,X)(f) :=& \; Hom_{\mathcal{C}}(Z,X) \to Hom_{\mathcal{C}}(Y,X) \\ & \qquad\qquad g \mapsto gf \end{aligned}$$

(c) *pokud je* $\mathcal{C}$ *abelovská, pak jsou* $Hom_{\mathcal{C}}(X,-)$ *i* $Hom_{\mathcal{C}}(-,X)$ *zleva exaktní funktory z* $\mathcal{C}$ *do* Ab *(Kategorie abelovských grup).*

Pro stručnost budeme v dalším textu zapisovat homomorfismus $Hom_{\mathcal{C}}(X,-)(f)$ *jako* $(f \circ -)_X$ *a* $Hom_{\mathcal{C}}(-,X)(f)$ *jako* $(- \circ f)_X$.

Důkaz.

(a) Zřejmě $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \in Set$ a

$$Hom_{\mathcal{C}}(X,-)(1_Y) = [g \mapsto 1_Y g = g] = 1_{Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)}$$

pro každé $Y \in \mathcal{C}$. Dále je-li $Y, Z, W \in \mathcal{C}$, $f_1 \in Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ a $f_2 \in Hom_{\mathcal{C}}(Z,W)$, pak platí

$$\begin{aligned} (Hom_{\mathcal{C}}(X,-)(f_2 f_1))(g) &= f_2 f_1 g \\ &= f_2(f_1 g) \\ &= (Hom_{\mathcal{C}}(X,-)(f_2))(f_1 g) \\ &= Hom_{\mathcal{C}}(X,-)(f_2) Hom_{\mathcal{C}}(X,-)(f_1)(g) \end{aligned}$$

pro každé $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ a tedy

$$Hom_{\mathcal{C}}(X,-)(f_2 f_1) = Hom_{\mathcal{C}}(X,-)(f_2) Hom_{\mathcal{C}}(X,-)(f_1).$$

(b) Dokáže se podobně jako (a).

(c) Že $Hom_{\mathcal{C}}(X,-)$ i $Hom_{\mathcal{C}}(-,X)$ jsou funktory $\mathcal{C} \to Ab$ je zřejmé, dokážeme exaktnost zleva $Hom_{\mathcal{C}}(X,-)$. Exaktnost zleva funktoru $Hom_{\mathcal{C}}(-,X)$ se dokáže ekvivalentně.

Mějme tedy krátkou exaktní posloupnost v $\mathcal{C}$:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 \cdot$$

Potřebujeme dokázat, že následující posloupnost

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X,A) \xrightarrow{(f\circ -)_X} Hom_{\mathcal{C}}(X,B) \xrightarrow{(g\circ -)_X} Hom_{\mathcal{C}}(X,C)$$

je exaktní v Ab. Nejprve ukážeme, že $(f \circ -)_X$ je monomorfismus v Ab, což je v Ab to samé jako jako injektivní. Nechť $h \in Hom_{\mathcal{C}}(X,A)$ je takové, že

$$(f \circ -)_X(h) = fh = 0$$

Pak protože f je monomorfismus, musí být $h = 0$. Nechť $h \in \mathcal{C}(X, B)$, pak

$$(f \circ -)_X(g \circ -)_X(h) = (f \circ -)_X(gh) = fgh = (fg \circ -)_X(h)$$

a tedy

$$(f \circ -)_X(g \circ -)_X = (fg \circ -)_X.$$

Z čehož plyne, že

$$Im((f \circ -)_X) \subseteq Ker((g \circ -)_X).$$

Nyní dokážeme opačnou inkluzi

$$Ker((g \circ -)_X) \subseteq Im((f \circ -)_X).$$

Buď $h \in Ker((g \circ -)_X)$. Pak $gh = 0$ a protože f je jádro g, pak se h faktorizuje skrze f, neboli existuje $j \in Hom_{\mathcal{C}}(X, A)$ takové, že

$$h = fj = (f \circ -)_X(j).$$

A tedy $h \in Im((f \circ -)_X)$.

□

Poznámka 2.13. Buď $\mathcal{C}$ abelovská kategorie a $A, B, C, D \in Ob(\mathcal{C})$ a u, v, f, g momorfismy takové, že následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & B \arrow[d, "v"] \\
C \arrow[r, "g"] & D
\end{tikzcd}$$

Protože je kategorie $\mathcal{C}$ abelovská, tak existují jádra i kojádra morfismů f a g. A dá se dokázat, že existují i jednoznačně určené morfismy $u_{ker} : Ker(f) \to Ker(g)$ a $v_{cok} : Ker(f) \to Ker(g)$ takové, že následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Ker(f) \arrow[r, "\nu_f"] \arrow[d, dotted, "u_{ker}"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & B \arrow[r, "\pi_f"] \arrow[d, "v"] & Cok(f) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "v_{cok}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Ker(g) \arrow[r, "\nu_g"] & C \arrow[r, "g"] & D \arrow[r, "\pi_f"] & Cok(g) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Definice 2.14. Zobrazení u_{ker} (resp. v_{cok}) z předchozí poznámky nazýváme jádrový morfismus u (resp. kojádrový morfismus v). Budeme je takto značit, ačkoli je toto značení nepopisuje jednoznačně, protože vždy závisí na diagramu, ke kterému se vztahují. V dalším textu bude ale vždy z kontextu jasné, o který doagram se jedná.

2.2 Algebry a moduly

V této části budeme pracovat s pevně zvoleným asociativním okruhem s jednotkou R, který navíc bude komutativní, lokální a artinovský. Nejprve si tyto definice připomeneme:

Definice 2.15. Komutativní okruh R je lokální, pokud má právě jeden maximální pravý ideál a ten je nenulový.

Pokud je R je lokální s maximálním pravým ideálem $\underline{m}$, pak $\underline{m}$ je oboustranný ideál a je zároveň maximálním levým ideálem dle [1] Lemma I.4.6.

My ale budeme pracovat s komutativním okruhem R, ten je lokální jednoduše právě tehdy, když má právě jeden maximální nenulový ideál.

Lemma 2.16. *Pokud je R lokální okruh, pak R/J je lokální okruh pro každý vlastní ideál J okruhu R.*

Důkaz. Buď R lokální okruh, J jeho vlastní ideál a nechť $\underline{m}$ značí maximální ideál okruhu R. Dokážeme, že $J/\underline{m}$ je maximální jednoznačně určený ideál okruhu R/J.

Mějme libovolný ideál Y okruhu R/J, pak Y je tvaru $Y = X/J$ pro nějaký ideál X okruhu R takový, že $X \subsetneq Y \subsetneq R$. Jelikož ideál $\underline{m}$ je maximální, musí být $X \subseteq \underline{m}$ a tedy

$$Y = X/J \subseteq \underline{m}/J.$$

□

Definice 2.17. Okruh R je zleva (resp. zprava) artinovský, pokud se každý klesající řetězec jeho levých (resp. pravých) ideálů zastaví. Neboli máme-li klesající řetězec levých (resp. pravých) ideálů okruhu R

$$R = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots,$$

pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $I_j = I_i$ pro každé $i, j \geq n$.

Definice 2.18. Jakobsonův radikál $rad(R)$ okruhu R definujeme jako průnik všech maximálních ideálů R.

Dále tedy nechť R značí pevně zvolený komutativní, lokální a artinovský okruh. Nyní zavedeme klíčový pojem R-algebry.

Definice 2.19. R-algebra A je okruh, který je zároveň R-modulem takovým, že pro $\alpha, \beta, \lambda \in A$ a $r, s \in R$ platí:

(a) $(r\alpha + s\beta)\lambda = r(\alpha\lambda) + s(\beta\lambda)$

(b) $\alpha(r\beta + s\lambda) = r(\alpha\beta) + s(\alpha\lambda)$

Artinovská R-algebra je R-algebra, která je konečně generovaná jako R-modul. Opačná algebra A^{op} k algebře A je algebra se stejnou modulovou strukturou, která má ale okruhové násobení definováno opačně:

$$a \cdot_{A^{op}} b := b \cdot_A a$$

Kategorii levých A-modulů značíme $Mod(A)$. O pravých A-modulech budeme referovat jako o A^{op}-modulech. Poznamenejme, že v části části 2.3 zabývající se teorií reprezentací a poté v Kapitole 4 zabývající se implementací algoritmu budeme pracovat s pravýmu moduly a $Mod(A)$ bude tedy značit kategorii pravých modulů. Na vše později upozorníme.

R-podmodul I R-algebry A je pravým (resp. levým) ideálem A, pokud $xa \in I$ (resp. $ax \in I$) pro každý $x \in I$ a $a \in A$. Oboustranný ideál je ideál, který je zároveň levým i pravým ideálem.

Dále bude A značit pevně zvolenou artinovskou R-algebru a pojďme se podívat na vztah R-modulů a A-modulů.

Definice 2.20. Nechť S je okruh. Označme $mod(S)$ úplnou podkategorii $Mod(S)$ konečně generovaných modulů.

Lemma 2.21. *Platí:*

(a) $Mod(A) \subseteq Mod(R)$

(b) $Hom_A(M, N) \subseteq Hom_R(M, N)$ *pro* $M, N \in Mod(A)$

(c) $mod(A) \subseteq mod(R)$

(d) *Pokud* $M \in Mod(A) \cap mod(R)$, *pak* $M \in mod(A)$.

Poznamenejme, že v případech (a) i (c) se jedná o podmnožinu, ne o úplnou podkategorii.

Důkaz.

(a) Pro $M \in Mod(A)$ definujeme násobení $R \times M \to M$ následovně:

$$(r, m) \mapsto (r \cdot 1_A)m$$

Protože $r \cdot 1_A \in A$, je násobení dobře definované.

(b) Nechť $M, N \in Mod(A)$ a $f \in Hom_A(M, N)$. Pak pro $m_1, m_2 \in M$ $a \in A$ máme

$$f(am_1 + m_2) = af(m_1) + f(m_2).$$

A tedy pro každé $r \in R$ dle bodu (a) platí, že $f(rm_1 + m_2) = f((r1_A)m_1 + m_2) = (r1_A)f(m_1) + f(m_2) = rf(m_1) + f(m_2)$.

(c) Nechť $M \in mod(A)$, pak pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ existuje A-modulový epimorfismus

$$g : A^n \to M.$$

Ten je dle bodu (b) také R-modulovým epomorfismem. Algebra A je artinovská, tedy konečně generovaná jako R-modul. Pak existuje R-modulový epimorfismus

$$h : R^m \to A$$

a také R-modulový epimorfismus

$$h^n : R^{mn} \to A^n.$$

Složením g a h^n dostaneme R-modulový epimorfismus

$$gh^n : R^{mn} \to M,$$

z jehož existence plyne, že $M \in mod(R)$

(d) Struktura R-modulu je na M definována následovně:

$$rm = (r1_A)m$$

Nechť $\{m_1, m_2, \cdots, m_n\} \subseteq M$ generuje M jako R-modul. Pak pro každé $m \in M$ platí:

$$m \;=\; \sum_{i=1}^{n} r_i m_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(r_i 1_A)}_{\in A} m_i \subseteq \sum_{i=1}^{n} A m_i$$

A tedy množina $\{m_1, m_2, , m_n\} \subseteq M$ generuje M i jako A-modul.

□

Věta 2.22. *Nechť S je okruh, $\bigoplus_{i=1}^n X_i$ je direktní součet S-modulů a pro $i = 1, \ldots, n$ jsou $\nu_i : X_i \to \bigoplus_{i=1}^n X_i$ kanonické inkluze a $\rho_i : \bigoplus_{i=1}^n X_i \to X_i$ kakonické projekce. Pak máme pro $Y \in Mod(S)$ následující izomorfismus:*

$$\xi : Hom_S(\textstyle\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y) \to \bigoplus_{i=1}^n Hom_S(X_i, Y)$$

daný předpisem $f \mapsto \{f\nu_i\}_{i=1}^n$ a jeho inverz

$$\xi^{-1} : \textstyle\bigoplus_{i=1}^n Hom_S(X_i, Y) \to Hom_S(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)$$

daný předpisem $\{f_i\}_{i=1}^n \mapsto \sum_{i=1}^n f_i \rho_i$.

Pokud buď $Y = S$, nebo pro všechny $n = 1, 2, \ldots, n$ je $X_i = S$, pak ξ a ξ^{-1} jsou izomorfismy S-modulů.

Důkaz. Dokážeme pouze první část, druhá část je přímočaré ověření modulových axiomů.

Nechť tedy $f \in Hom_S(\bigoplus_{i=1}^n X_i, Y)$. Pak

$$\begin{aligned} \xi^{-1}\xi(f) &= \xi^{-1}(\{f\nu_i\}_{i=1}^n) \\ &= \sum_{i=1}^n f\nu_i\rho_i \\ &= f\sum_{i=1}^n \nu_i\rho_i \\ &= f1_{\otimes_{i=1}^n X_i} \\ &= f. \end{aligned}$$

Opačně nechť $\{f_i\}_{i=1}^n \in \bigoplus_{i=1}^n Hom_S(X_i, Y)$, pak

$$\begin{aligned}
\xi\xi^{-1}(\{f_i\}_{i=1}^n) &= \xi\left(\sum_{i=1}^n f_i\rho_i\right) \\
&= \left\{\left(\sum_{i=1}^n f_i\rho_i\right)\nu_j\right\}_{j=1}^n \\
&= \left\{\sum_{i=1}^n f_i(\rho_i\nu_j)\right\}_{j=1}^n \\
&= \left\{\sum_{i=1}^n f_i\delta_{i,j}\right\}_{j=1}^n \\
&= \{f_j\}_{j=1}^n
\end{aligned}$$

□

Dále budeme pracovat s pojmem tenzorového součinu, ten zde nebudeme zavádět. Definici a všechny potřebné vlastnosti je možné nalézt například v [5] Kapitole 2.2, nebo v [3] Kapitole 2.8.

Připomeňme pouze, že pro $M \in Mod(A^{op})$, $N \in Mod(A)$ tenzorový součin $M \otimes_A N$ vždy existuje, má strukturu R-modulu a máme následující dva funktory

$$M \otimes_A - : Mod(A) \to Mod(R)$$

$$- \otimes_A N : Mod(A^{op}) \to Mod(R)$$

z nichž první je zleva exaktní.

Věta 2.23. *Nechť $M \in Mod(A^{op})$, $N \in Mod(A)$ a $L \in Mod(R)$. Pak máme následující izomorfismus abelovských grup*

$$\theta_{M,N,L} : Hom_R(M \otimes_A N, L) \to Hom_A(N, Hom_R(M, L))$$

daný předpisem

$$\theta_{M,N,L}(f) := [n \mapsto f(- \otimes n)]$$

pro $f \in Hom_R(M \otimes_A N, L)$. Navíc $\theta_{M,N,L}$ je přirozený v M, N i L.

Důkaz. [5] Theorem 2.75, 2.76. □

Lemma 2.24 (Lemma five)**.** *Uvažujme následující diagram v $Mod(A)$ s exaktními řádky:*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"'] \arrow[d, "t_1"'] & A_2 \arrow[r, "f_2"'] \arrow[d, "t_2"'] & A_3 \arrow[r, "f_3"'] \arrow[d, "t_3"'] & A_4 \arrow[r, "f_4"'] \arrow[d, "t_4"'] & A_5 \arrow[d, "t_5"'] \\
B_1 \arrow[r, "h_1"'] & B_2 \arrow[r, "h_2"'] & B_3 \arrow[r, "h_3"'] & B_4 \arrow[r, "h_4"'] & B_5
\end{tikzcd}$$

Pak platí:

(a) *Jsou-li t_2 a t_4 epimorfismy a t_5 monomorfismus, pak je t_3 epimorfismus.*

(b) *Jsou-li t_2 a t_4 monomorfismy a t_1 epimorfismus, pak je t_3 monomorfismus.*

(c) *Jsou-li t_1, t_3, t_4 a t_5 izomorfismy, pak je i t_3 izomorfismus.*

Důkaz. Tvrzení (c) jasně plyne z (a) a (b). Dokážeme zde pouze (a), jelikož (b) se dokáže analogicky.

Nechť $b_3 \in B_3$. Protože t_4 je epimorfismus, tak existuje $a_4 \in A_4$ takové, že $t_4(a_4) = h_3(b_3)$. Z komutativity posledního čtverce a exaktnosti spodního řádku v B_4 dostaneme

$$t_5 h_4(a_4) = h_4 t_4(a_4) = h_4 h_3(b_3) = 0.$$

Protože f_5 je monomorfismus musí být $f_4(a_4) = 0$ a $a_4 \in Ker(f_4) = Im(f_3)$. Tedy existuje $a_3 \in A_3$ takové, že $a_4 = f_3(a_4)$ a tedy platí, že

$$h_3 t_3(a_3) = t_4 f_3(a_3) = t_4(a_4) = h_3(b_3).$$

Pak $b_3 - t_3(a_3) \in Ker(h_3) = Im(h_2)$ a tedy existuje $b_2 \in B_2$ takové, že $h_2(b_2) = b_3 - t_3(a_3)$. Protože t_2 je epimorfismus, musí existovat $a_2 \in A_2$, pro které $t_2(a_2) = b_2$. Z komutativity diagramu plyne

$$t_3 f_2(a_2) = h_2 t_2(a_2) = h_2(b_2) = b_3 - t_3(a_3)$$

a

$$t_3(f_2(a_2) + a_3) = b_3.$$

Homomorfismus t_3 je tedy epimorfismem. □

Lemma 2.25. *Nechť S je okruh a nechť*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"', "\simeq"] & L \arrow[d, "\beta"', "\simeq"] & \\
& & N' \arrow[r, "u"] & L' \arrow[r, "v"] & K' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

je komutativní diagram s exaktními řádky v $Mod(S)$. Pak

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \xrightarrow{v\beta} K' \longrightarrow 0$$

je exaktní posloupnost v $Mod(S)$.

Důkaz. Exaktnost v M a N plyne z exaktnosti původního diagramu. Protože v a β jsou epimorfismy, pak je $v\beta$ také epimorfismem, takže posloupnost je exaktní i v K'.

Protože $(v\beta)g = (vu)\alpha = 0$ máme $Im(g) \subseteq Ker(v\beta)$. Zbývá dokázat opačnou inkluzi.

Nechť $c \in Ker(v\beta)$, pak $v\beta(c) = 0$ a tedy $\beta(c) \in Ker(v) = Im(u)$. Potom existuje $b' \in N'$ takové, že

$$u(b') = \beta(c).$$

Pak $\alpha^{-1}(b') \in N$ a

$$\beta g\alpha^{-1}(b') = u(b') = \beta(c).$$

Protože β je epimorfismus, tak nám tato úvaha dává

$$g(\alpha^{-1}(b')) = c$$

a tedy $c \in Im(g)$. $\square$

2.2.1 Projektivní moduly

Definice 2.26. A-modul P nazveme projektivním, pokud pro každé A-moduly M, N, epimorfismus $h \in Hom_A(M, N)$ a homomorfismus $f \in Hom_A(P, N)$ existuje $f' \in Hom(P, M)$ takový, že následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dotted, "f'"'] & \\
M \arrow[r, "h"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Lemma 2.27. *Nechť $M, N \in mod(A)$, $P \in Mod(A)$, $f \in Hom_A(M, N)$ se faktorizuje skrze projektivní modul a $g \in Hom_A(P, N)$ je* ***na****. Pak f se faktorizuje skrze P.*

Důkaz. Uvažujme následující diagram v $Mod(A)$:

$$\begin{tikzcd}
& & M \arrow[dl] \arrow[dd, "f"] & \\
& P' \arrow[dr] \arrow[dl, dotted, "\exists h"'] & & \\
P \arrow[rr, "g"'] & & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Homomorfismus f se faktorizuje skrze nějaký projektivní modul P'. Protože P' je projektivní a g je **na**, existuje $h : P' \to P$ takové, že diagram výše komutuje a f se tedy faktorizuje skrze P. $\square$

Definice 2.28. Prvek $e \in A$ nazveme idempotentem, pokud $e^2 = e$. Množinu idempotentů $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ nazveme ortogonální, pokud pro každé $i \neq j$ je $e_i e_j = e_j e_i = 0$. Primitivní idempotent je takový, který není možné zapsat jako součet alespoň dvou nenulových ortogonálních idempotentů. Idempotent je centrální, pokud $ea = ae$ pro každý prvek $a \in A$.

Věta 2.29. *Nechť A je Artinovská algebra. Pak $A = Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus \ldots \oplus Ae_n$ právě tehdy, když e_1, $e_2, \ldots, e_n$ je množina po dvou ortogonálních primitivních idempotentů A a navíc $1 = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$.*

Důkaz. Každá algebra má alespoň dva idempotenty a to 0 a 1. Nemá-li žádné jiné, pak máme množinu nenulových primitivních ortogonálních idempotentů $\{1\}$ a rozklad $A = A1$.

Existuje-li netriviální idempotent e algebry A, pak je netriviálním idempotentem také $1-e$, protože $(1-e)^2 = 1-2e+e^2 = 1-2e+e = 1-e$. Ty jsou navíc ortogonální, protože $e(1-e) = e-e^2 = e-e = 0$. Algebru A tedy můžeme rozložit na $A = Ae \oplus A(1-e)$ a $1 = e+(1-e)$.

Protože algebra A je konečně generovaná, můžeme ji rozložit na direktní součet nerozložitelných levých ideálů $A = P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_n$. Ty musejí být z diskuze výše tvaru $P_i = Ae_i$ pro $e_1, e_2, \ldots, e_n$ po dvou ortogonální primitivní idempotenty takové, že $1 = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$.

Naopak máme-li $1 = e_1+e_2+\ldots+e_n$ rozklad 1 na součet po dvou ortogonálních primitivních idempotentů je existence rozkladu $A = Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus \ldots \oplus Ae_n$ zřejmá. □

Definice 2.30. Množinu po dvou ortogonálních primitivních idempotentů e_1, $e_2, \ldots, e_n$ takových, že $A = Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus \ldots \oplus Ae_n$ nazveme úplnou množinou primitivních ortogonálních idempotentů A.

Věta 2.31. *Nechť $e_1, e_2, \ldots, e_n$ je úplná množina primitivních ortogonálních idempotentů A a P projektivní A – modul. Pak existují $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ taková, že*

$$P = (Ae_1)^{m_1}(Ae_2)^{m_2} \oplus \ldots \oplus (Ae_n)^{m_n}.$$

Důkaz. Dle [5] Theorem 3.5 je modul P projektivní právě tehdy, když existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že P je direktním sčítancem A^n. Výsledný tvar dostáváme aplikací Věty 2.29 na A^n. □

Důsledek 2.32. Prvek $e \in A$ je primitivní idempotent právě tehdy, když Ae je nerozložitelný projektivní A-modul.

Věta 2.33. *Buď $e \in A$ je idempotent, pak zobrazení*

$$Hom_A(Ae, A) \simeq eA$$

dané předpisem

$$f \mapsto f(e)$$

je izomorfismem A-modulů.

Důkaz. Že se jedná o homomorfismus je zřejmé. Označme si tento homomorfismus $Hom_A(Ae, A) \simeq eA$ jako ψ_1. Definujme zobrazení

$$\begin{array}{rcl} \psi_2 : eA & \simeq & Hom_A(Ae, A) \\ ea & \mapsto & [a'e \mapsto a'ea]. \end{array}$$

Pak pro $f \in Hom_A(Ae, A)$ a $a \in A$ máme

$$\begin{array}{rcl} \psi_1\psi_2(ea) & = & \psi_1([a'e \mapsto a'ea]) \\ & = & ea \end{array}$$

a

$$\begin{array}{rcl} \psi_2\psi_1(f)(ae) & = & \psi_2(f(e))(ae) \\ & = & \psi_2(ef(e))(ae) \\ & = & [xe \mapsto xe(fe)] \\ & = & aef(e) \\ & = & f(ae). \end{array}$$

Jde tedy o izomorfismus. $\square$

Věta 2.34. *Buď P projektivní A-modul. Pak existuje druhý projektivní A-modul P' a $n \in \mathbb{N}$ takové, že $P \oplus P' \simeq A$.*

Důkaz. Dle Věty 2.29 můžeme algebru A vyjádřit jako

$$A = Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus \ldots \oplus Ae_m,$$

kde Ae_i jsou nerozložitelné projektivní A-moduly takové, že $Ae_i \not\simeq Ae_j$ pro $i, j \in 1 \ldots m$ a $i \neq j$. Pak lze projektivní modul P dle Věty 2.31 vyjádřit jako

$$P \simeq (Ae_1)^{n_1} \oplus (Ae_2)^{n_2} \oplus \ldots \oplus (Ae_m)^{n_m}.$$

Položme $n = max_{1 \leq i \leq m}(n_i)$, pak

$$A^n \simeq P_0 \oplus (Ae_1)^{n-n_1} \oplus (Ae_2)^{n-n_2} \oplus \ldots \oplus (Ae_m)^{n-n_m}.$$

Definujme projektivní A-modul

$$P_0' := (Ae_1)^{n-n_1} \oplus (Ae_2)^{n-n_2} \oplus \ldots \oplus (Ae_m)^{n-n_m},$$

pak $P_0 \oplus P_0' \simeq A^n$. $\square$

2.2.2 Funktor Ext

Definice 2.35. Injektivní rezolventa E modulu $M \in Mod(R)$ je exaktní posloupnost

$$\mathbf{E} : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\eta} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \xrightarrow{d^2} \cdots ,$$

kde každé E^n je injektivní.

Lemma 2.36. *Pro každý modul $M \in mod(R)$ existuje injektivní rezolventa.*

Důkaz. Dle [5] Theorem 3.38 může být každý R-modul vnořený jako podmodul do injektivního R-modulu. Tedy existuje injektivní R-modul E^0 a kanonické vnoření $\nu^0 : M \to E^0$. Dostáváme exaktní posloupnost

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\nu^0} E^0 \xrightarrow{\pi^0} Cok(\nu^0) \longrightarrow 0 ,$$

kde π^0 je kanonická projekce. Tento postup můžeme iterativně opakovat pro $Cok(\nu^0)$ namísto M a dále s $Cok(\nu^1)$, $Cok(\nu^2)$, …:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\nu^0"] & E^0 \arrow[rr, "d^0:=\nu^1\pi^0"] \arrow[dr, "\pi^0"'] & & E^1 \arrow[rr, "d^0:=\nu^2\pi^1"] \arrow[dr, "\pi^1"'] & & \ldots \\
& & & Cok(\nu^0) \arrow[ur, "\nu^1"'] & & Cok(\nu^1) \arrow[ur, "\nu^2"'] &
\end{tikzcd}$$

$\square$

Definice 2.37. Buď $\mathcal{A}$ libovolná abelovská katergorie. Komplex C v kagorii $\mathcal{A}$ je (konečná či nekonečná) posloupnost morfismů a objektů

$$\mathbf{C} : \cdots \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots,$$

kde $d_n d_{n+1} = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}$. Dále položme:

$$\begin{aligned} Z_n(C) &:= Ker(d^n) \\ B_n(C) &:= Im(d^{n+1}) \\ H_n(C) &:= Z_n(E)/B_n(E) = Ker(d^n)/Im(d^{n+1}) \end{aligned}$$

Definice 2.38. Nechť $M, N \in Mod(R)$ a zvolme libovolně injektivní rezolventu modulu N

$$\mathbf{E} : 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\eta} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \xrightarrow{d^2} \cdots.$$

Aplikujeme-li kovariantní funktor $Hom(M, -)$ na injektivní rezolventu $\mathbf{E}$, dostaneme komplex $Hom_R(M, \mathbf{E})$:

$$0 \longrightarrow Hom_R(M, E^0) \xrightarrow{d^0_*} Hom_R(M, E^1) \xrightarrow{d^1_*} Hom_R(M, E^2) \xrightarrow{d^2_*} \cdots.$$

Definujme nyní

$$Ext^n_R(M, N) := H^n(Hom_R(M, \mathbf{E})) = \frac{Ker(d^n_*)}{Im(d^{n-1}_*)},$$

kde

$$d^n_* : Hom_R(M, E^n) \to Hom_R(M, E^{n+1})$$

je dáno předpisem $f \mapsto d^n f$.

Nebudeme zde dokazovat podrobně vlastnosti funktoru Ext, vše je obsaženo například v [5] kapitole 6.2.3. Pouze bez důkazu uvedeme následující tvrzení:

Věta 2.39.

(a) *$Ext^n_R(M, N)$ je nezávislý na volbě injektivní rezolventy modulu N.*

(b) *Pro R komutativní je $Ext^n_R(M, -)$ funktor $Mod(R) \to Mod(R)$.*

2.2.3 Funktor D

Definice 2.40. Nechť S je okruh.

(a) Nechť navíc $M, N \in Mod(S)$ a $M \subseteq N$. Řekneme, že N je esenciálním rozšířením M, pokud $X \cap M \neq 0$ pro každý podmodul $0 \neq X \subseteq N$.

(b) Injektivní obal I modulu $N \in Mod(S)$ je injektivní S-modul I společně s monomorfismem $i : M \to I$, kde I je esenciální rozšíření $Im(i)$.

Náš okruh R je komutativní a lokální, má tedy jednoznačně určený maximální ideál, který budeme značit $\underline{m}$. Jako I budeme dále značit injektivní obal jednoduchého R-modulu $R/\underline{m}$ (jednoduchost plyne z maximality $\underline{m}$).

Definice 2.41. Definujme funktor $D := Hom_R(-, I)$. Funktor D se nazývá duál.

Věta 2.42. *Funktor D je exaktní a kontravariantní funktor*

(a) *$D : mod(R) \to mod(R)$*

(b) *$D : mod(A) \to mod(A^{op})$*

(c) *V obou předchozích případech je funktor D navíc dualita kategorií.*

Důkaz. Víme, že v obou případech D je zleva exaktní kontravariantní funktor v kategorii abelovských grup. Navíc D je exaktní, protože modul I je injektivní dle [5] Proposition 3.25. Dále dokážeme, že D je zároveň funktorem v obou výše uvedených kategoriích:

(a) Nechť $M \in Mod(R)$, pak $Hom_M(R, I) \in mod(R)$. Dokážeme, že máme-li navíc libovolný modul $M' \in Mod(R)$ a $h \in Hom_R(M, M')$, pak $Dh \in Hom_R(DM, DM')$. Nechť tedy $f \in DM'$ a $r \in R$. Pak

$$\begin{aligned} Dh(rf')(m) &= (- \circ h)_I(rf')(m) \\ &= (rf'h)(m') \\ &= r(f'h)(m') \\ &= r(- \circ h)_I(f')(m) \\ &= rDh(f')(m) \end{aligned}$$

pro každé $m \in M$ a tedy

$$Dh(rf') = rDh(f').$$

Platnost rovnosti

$$Dh(f'_1 + f'_2) = Dh(f'_1) + Dh(f'_2)$$

pro každé $f'_1, f'_2 \in DM'$ dokazovat nebudeme a přenecháme ji čtenáři.

(b) Nechť $M \in mod(A)$, pak $Hom_R(M, I) \in Mod(A^{op})$ a navíc je $Hom_R(M, I)$ konečně generovaný jako R-modul a tedy $Hom_R(M, I) \in mod(A^{op})$. Ukážeme pouze, že D zobrazí homomorfismus A-modulů na homomorfismus A^{op}-modulů, zbytek důkazu opět ponecháme čtenáři. Nechť $M, M' \in mod(A)$ a $h \in Hom_A(M, M')$. Pak pro $f' \in DM'$ a $\lambda \in A$ máme

$$\begin{aligned} Dh(f'\lambda)(m) &= (-\circ)_I(f'\lambda)(m) \\ &= (f'\lambda)(\underbrace{h(m)}_{\in M'}) \\ &= f'(\lambda h(m)) \\ &= f'(h(\lambda m)) \\ &= (- \circ h)_I(f')(\lambda m) \\ &= \underbrace{Dh(f')}_{\in Hom_R(M,I)}(\lambda m) \\ &= (Dh(f')\lambda)(m) \end{aligned}$$

pro každé $m \in M$ a tedy

$$Dh(f'\lambda) = Dh(f')\lambda.$$

(c) Dokážeme, že zobrazení $\alpha : 1_{mod(R)} \to D^2$, definované pro $M \in mod(R)$

$$\begin{array}{rcl} \alpha_M : M & \to & Hom_R(Hom_R(M,I),I) \\ m & \mapsto & [f \mapsto f(m)] \end{array}$$

je přirozenou ekvivalencí funktorů. Zvolme pevně $M \in mod(R)$. Zřejmě máme $\alpha_M(m) \in Hom_R(Hom_R(M,I),I)$ pro každé $m \in M$. Mějme $f_1, f_2 \in Hom_R(M,I)$ a $r \in R$, pak

$$\begin{array}{rcl} \alpha_M(m)(rf_1 + f_2) & = & (rf_1 + f_2)(m) \\ & = & rf_1(m) + f_2(m) \\ & = & r\alpha_M(f_1) + \alpha_M(f_2). \end{array}$$

Navíc pro $m_1, m_2 \in M$ a $r \in R$ je

$$\begin{array}{rcl} \alpha_M(rm_1 + m_2)(f) & = & f(rm_1 + m_2) \\ & = & rf(m_1) + f(m_2) \\ & = & r\alpha_M(m_1)(f_1) + \alpha_M(m_2))f \\ & = & (r\alpha_M(m_1) + \alpha_M(m_2))(f) \end{array}$$

pro každé $f \in Hom_R(M,I)$, tedy platí, že

$$\alpha_m(rm_1 + m_2) = r\alpha_M(m_1) + \alpha_M(m_2)$$

a α_M je tedy R-modulovým homomorfismem. Dále dokážeme, že jde o přirozenou transformaci. Nechť $M, M' \in Mod(R)$ a $h \in Hom_R(M, M')$. Pak

$$\begin{array}{rcl} D^2(h) & = & Hom_R(-,I)Hom_R(-,I)(h) \\ & = & Hom_R(-,I)((- \circ h)_I) \\ & = & (- \circ (- \circ h)_I)_I. \end{array}$$

Musíme dokázat, že následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha_M"] \arrow[d, "h"] & Hom_R(Hom_R(M,I),I) \arrow[d, "(-\circ(-\circ h)_I)_I"] \\ M' \arrow[r, "\alpha_{M'}"] & Hom_R(Hom_R(M',I),I) \end{tikzcd}$$

Nechť $m \in M$ a uvažujme následující diagram:

$$\begin{tikzcd} m \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & {[f \mapsto f(m)]} \arrow[d, mapsto, dotted, "?"] \\ h(m) \arrow[r, mapsto] & {[f' \mapsto f'h(m)]} \end{tikzcd}$$

Musíme dokázat, že

$$(- \circ (- \circ h)_I)_I([f \mapsto f(m)]) = [f' \mapsto f'h(m)].$$

Pro $f' \in Hom_R(Hom_R(M',I),I)$ platí, že

$$\begin{array}{rcl} (- \circ (- \circ h)_I)_I([f \mapsto f(m)])(f') & = & [f \mapsto f(m)] \circ (- \circ h)_I(f') \\ & = & [f \mapsto f(m)](f'h) \\ & = & f'h(m) \end{array}$$

a α je přirozenou transformací. Zbývá dokázat, že pro každé $M \in mod(R)$ je α_M izomorfismem R-modulů. Začneme s důkazem, že jde o monomorfismus, neboli že prokaždé $0 \neq m \in M$ existuje $f \in Hom_R(M, I)$, že $\alpha_M(m)(f) = f(m) \neq 0$. Uvažujme homomorfismus R-modulů

$$\begin{aligned} \hat{f} : Rm &\rightarrow I \\ rm &\mapsto r + \underline{m}. \end{aligned}$$

Připomeňme, že $\underline{m}$ značí maximální ideál R. Protože $Rm \subseteq M$ je podmodul, tak inkluze $i : Rm \rightarrow M$ je monomorfismem R-modulů. Z injektivity I existuje R-modulový homomorfismus $f : M \rightarrow I$ takový, že následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd} Rm \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\hat{f}"'] & M \arrow[dl, dotted, "f"] \\ I & \end{tikzcd}$$

Pak

$$f(m) = fi(m) = \hat{f}(m) = \hat{f}(1_R m) = 1_R + \underline{m} \neq 0$$

a α_M je tedy monomorfismem. Že jde zároveň o epimorfismus a tedy i o izomorfismus se dokáže na základě tvrzení [2] Proposition 1.4 (Kapitola 1). Zároveň vynecháme i důkaz, že α_M s výše uvedenou definicí je pro $M \in mod(A)$ izomorfismem A-modulů. Ten se provede přímočaře a přenecháme ho tedy čtenáři.

□

Důsledek 2.43. Pro $R = K$ těleso je funktor D daný vztahem $D = Hom_K(-, K)$ jako funktor $mod(K) \rightarrow mod(K)$.

Důkaz. Pokud R je těleso, pak je jeho maximální ideál $\underline{m} = 0$, tedy

$$R = R/\underline{m} = K.$$

Navíc R jakožto R-modul je injektivní a jelikož každý nenulový podmodul R má s R nenulový průnik, je R svým vlastním injektivním obalem a tedy

$$I = R = K.$$

□

Definice 2.44. Buď $V \in mod(K)$, kde K je libovolné těleso, a nechť

$$B_V := \{v_1, v_2, \ldots, v_l\}$$

je K-báze V. Definujme zobrazení

$$d_{B_V} : B_V \rightarrow D(V)$$

předpisem $d_{B_V}(v_i)(v_j) := \delta_{i,j}$, kde δ je Kroneckerova delta.

Lemma 2.45. *Buď $V \in mod(K)$, kde K je libovolné těleso, a nechť*

$$B_V := \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

je K-báze V. Položme

$$dB_V := \{d_{B_V}(v_1), d_{B_V}(v_2), \ldots, d_{B_V}(v_l)\},$$

lak dB_V je K-báze $D(V)$. Nazveme ji duální bází $D(V)$ vzhledem k B_V.

Důkaz. Nejprve dokážeme, že jsou prvky dB_V lineárně nezávislé. Nechť $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in K$ jsou takové, že $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i d_{B_V}(v_i) = 0$. To znamená, že $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i d_{B_V}(v_i)(v) = 0$ pro každé $v \in V$, neboli, že pro každé $j = 1, 2, \ldots, l$ máme

$$0 = \textstyle\sum_{i=1}^{l} \alpha_i d_{B_V}(v_i)(v_j) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \delta_{i,j} = \alpha_j.$$

A tedy dB_V je lineárně nezávislá množina.

Nyní dokážeme, že libovolné $f \in D(V)$ vyjádříme jako lineární kombinaci prvků dB_V. Máme vztah

$$d_{B_V}(v_i)\left(\sum_{j=1}^{l} \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j d_{B_V}(v_i)(v_j) = \alpha_i.$$

Pro každé $v = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j v_j$ pak platí

$$\begin{aligned} f(v) &= f\left(\sum_{j=1}^{l} \alpha_j v_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{l} \alpha_j f(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^{l} d_{B_V}(v_j)(v) f(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^{l} f(v_j) d_{B_V}(v_j)(v) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{l} f(v_j) d_{B_V}(v_j)\right)(v) \end{aligned}$$

Z toho plyne, že $f = \sum_{j=1}^{l} f(v_j) d_{B_V}(v_j)$ a tím jsme hotovi. $\square$

Důsledek 2.46. Nechť B_V je báze vektorového prostoru V. Koeficienty $f \in D(V)$ vzhledem k bázi dB_V pak spočteme jako obrazy korespondujících prvků báze B_V při zobrazení f.

Lemma 2.47. *Nechť $V, W \in mod(K)$, kde K je těleso. Dále nechť $\xi \in Hom_K(V, W)$ je izomorfismus,*

$$B_V := \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$$

je K-báze V a

$$\xi(B_V) := \{\xi(v_1), \xi(v_2), \dots, \xi(v_l)\}$$

je korespondující K-báze W. Pak pro každé $1 \leq j \leq l$ *máme:*

$$(D\xi^{-1})(d_{B_V}(v_j)) = d_{\xi(B_V)}(\xi(v_j))$$

Důkaz. Nechť $1 \leq j \leq l$ a $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \xi(v_i) \in W$. Pak

$$\begin{aligned}
(D\xi^{-1})(d_{B_V}(v_j)) \left(\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \xi(v_i) \right) &= d_{B_V}(v_j) \circ \xi^{-1} \left(\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \xi(v_i) \right) \\
&= d_{B_V}(v_j) \left(\sum_{i=1}^{l} \alpha_i v_i \right) \\
&= \alpha_j \\
&= d_{\xi(B_V)}(\xi(v_j)) \left(\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \xi(v_i) \right)
\end{aligned}$$

Z toho již přímo plyne hledaná rovnost. □

2.2.4 Funktor $()^*$

Definice 2.48.

(a) Nechť P(A) značí kategorii, jejíž objekty jsou konečně generované projektivní A-moduly a $Hom_{P(A)}(P, P') = Hom_A(P, P')$ pro $P, P' \in P(A)$.

(b) Pro $A, B \in mod(A)$ definujeme esenciální epimorfismus $t \in Hom_A(A, B)$ jako epimorfismus A-modulů takový, že platí: Pro každé $M \in mod(A)$ a $u \in Hom_A(M, A)$ takové, že složený homomorfismus tu je epimorfismus, je u epimorfismus.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "t"] & B \\
M \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "tu"'] &
\end{tikzcd}$$

(c) Projektivní pokrytí modulu X je projektivní A-modul P spolu s esenciálním epimorfismem $t : P \to X$. Poznamenejme, že někdy budeme o projektivním pokrytí referovat jako o dvojici (P, t), jindy pouze jako o modulu či epimorfismu, pokud nebude druhé v našich úvahach potřeba.

Lemma 2.49. *Nechť* $X \in mod(A)$*, pak*

(a) *je-li* P *projektivní pokrytí* X*, pak* $P \in P(A)$ *a* P *je tedy konečně generovaný.*

(b) *projektivní pokrytí modulu X je dáno jednoznačně až na izomorfismus.*

(c) *projektivní pokrytí modulu X existuje.*

Důkaz.

(a) Buď P projektivní pokrytí $X \in mod(A)$. Pak máme esenciální epimorfismus $t \in Hom_A(P, X)$ a navíc jelikož je X konečně generovaný, existuje $n \in \mathbb{N}$ a epimorfismus $u \in Hom_A(A^n, X)$.

$$\begin{tikzcd} & A^n \arrow[dl, dotted, "\exists v"'] \arrow[d, "u"] & \\ P \arrow[r, "t"'] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

Pak existuje $v \in Hom_A(A^n, P)$ takové, že diagram výše komutuje. Protože $tv = u$ je epimorfismus a t je esenciální epimorfismus, musí být také v epimorfismem a modul P konečně generovaný.

(b) Buďte P a P' dvě projektivní pokrytí modulu X a t, t' jejich esenciální epimorfismy. Pak z vlastností projektivního pokrytí existují homomorfismy $h \in Hom_A(P, P')$ a $h' \in Hom_A(P', P)$ takové, že

$$t'h = t \text{ a } th' = t'.$$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, bend right, "h"'] \arrow[d, "t"] & \\ P' \arrow[ur, bend right, "h'"'] \arrow[r, "t'"'] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

Protože t a t' jsou esenciální epimorfismy, th' a $t'h$ epimorfismy, tak jsou i zobrazení h a h' epimorfismy. Dále máme

$$t'(hh') = (t'h)h' = th' = t'$$

a hh' je také epimorfismus. Modul P' je konečně generovaný a hh' je identita. To nám implikuje, že h je monomorfismus a tedy i izomorfimus modulů P a P'.

(c) Plyne z [2] Theorem 4.2, jelikož A je artinovská R-algebra.

□

Poznámka 2.50. Připomeňme, že homomorfismus konečně generovaných A-modulů má jádro v $mod(A)$, které je určeno jednoznačně až na izomorfismus.

Definice 2.51. Minimální projektivní prezentace modulu $X \in mod(A)$ je exaktní posloupnost

$$P_1 \xrightarrow{s} P_0 \xrightarrow{t} X \longrightarrow 0\,,$$

kde P_0 je projektivní pokrytí modulu X a P_1 je projektivní pokrytí modulu $Ker(t) \subseteq P_0$. Přesněji $s = iw$, kde $i : Ker(t) \to P_0$ je kanonická inkluze jádra homomorfismu a $w : P_1 \to Ker(t)$ je projektivní pokrytí modulu $Ker(t)$.

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[rr, "s=iw"] \arrow[dr, "w"'] & & P_0 \arrow[r, "t"] & X \arrow[r] & 0\,, \\ & Ker(t) \arrow[ur, "i"'] & & & \end{tikzcd}$$

Lemma 2.52. *Minimální projektivní prezentace modulu $X \in mod(A)$ je dána jednoznačně až na izomorfismus.*

Důkaz. Mějme následující dvě projektivní prezentace modulu X:

$$P_1 \xrightarrow{s} P_0 \xrightarrow{t} X \longrightarrow 0$$

$$P_1' \xrightarrow{s'} P_0' \xrightarrow{t'} X \longrightarrow 0$$

Uvažujme inkluze

$$\begin{aligned} i : Ker(t) &\to P_0 \\ i' : Ker(t') &\to P_0' \end{aligned}$$

a projekce

$$\begin{aligned} \pi : P_1 &\to Im(s) = Ker(t) \\ \pi' : P_1' &\to Im(s') = Ker(t') \end{aligned}$$

Máme následující diagram:

$$
\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "\pi"] \arrow[dd, dotted, "h_1"] & & P_0 \arrow[r, "t"] \arrow[dd, "h_0", "\simeq"'] & X \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
& Ker(t) \arrow[ur, "i"'] \arrow[dd, dotted, "u", "\simeq"'] & & & \\
P_1' \arrow[rr, "s'"] \arrow[dr, "\pi'"] \arrow[dd, dotted, "h_1'"] & & P_0' \arrow[r, "t'"] \arrow[dd, "h_0'", "\simeq"'] & X' \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
& Ker(t') \arrow[ur, "i'"'] \arrow[dd, dotted, "u'", "\simeq"'] & & & \\
P_1 \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "\pi"] & & P_0 \arrow[r, "t"] & X \arrow[r] & 0 \\
& Ker(t) \arrow[ur, "i"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

Izomorfismy h_0 a h_0' existují dle Lemma 2.49. Existence izomorfismů u a u' takových, že

$$
\begin{aligned}
h_0 i &= i'u \\
h_0' i' &= iu'.
\end{aligned}
$$

plyne z Lemma 2.24.

Protože π' je epimorfismus a P_1 projektivní, existuje $h_1 \in Hom_A(P_1, P_1')$ takové, že

$$u\pi = \pi' h_1.$$

Navíc protože je $u\pi$ epimorfismus a π' esenciální epimorfismus, musí být i h_1 epimorfismus. Ekvivalentně existuje epimorfosmus $h_1 \in Hom_A(P_1, P_1')$ takový, že

$$u'\pi' = \pi h_1'.$$

Složené zobrazení $h_1' h_1$ je epimorfismus a jelikož je modul P_1 dle Lemma 2.49 konečně generovaný, je $h_1' h_1$ izomorfismus. To implikuje, že homomorfismus h_1 je monomorfismem a tedy i izomorfismem. □

Definice 2.53. Definujme hom funktor $()^* := Hom_A(-, A)$.

Věta 2.54. *Funktor* $()^*$ *je*

(a) *kontravariantním zleva exaktním funktorem* $mod(A) \to mod(A^{op})$.

(b) *kontravariantním funktorem* $P(A) \to P(A^{op})$.

Důkaz. Víme, že $Hom_A(-, A)$ je kontravariantním zleva exaktním funktorem abelovských grup.

(a) Buď $M \in mod(A)$, pak $Hom_A(M, A) \in mod(R)$. Definujme na $Hom_A(M, A)$ násobení prvky A zprava předpisem

$$\begin{array}{rcl} Hom_A(M, A) \times A & \to & Hom_A(M, A) \\ f\lambda & \mapsto & [f\lambda(m) \mapsto f(m)\lambda]. \end{array}$$

Že je násobení dobře definované a asociativní ke sčítání homomorfismů je zřejmé. Ověříme, že $()^*$ přenaší homomorfismus A-modulů na homomorfismus A^{op}-modulů. Nechť $M, M' \in mod(A)$, $h \in Hom_A(M, M')$, $f' \in M^{*\prime}$ a $\lambda \in A$. Pak

$$\begin{array}{rcl} (h^*(f'\lambda))(m) & = & ((f'\lambda)h)(m) \\ & = & (f'\lambda)(h(m)) \\ & = & f'(h(m))\lambda \\ & = & (f'h)(m)\lambda \\ & = & ((f'h)\lambda)(m) \\ & = & (h^*(f')\lambda)(m) \end{array}$$

pro všechna $m \in M$ a tedy

$$h^*(f'\lambda) = h^*(f')\lambda.$$

Obdobně se dokáže rovnost

$$h^*(f_1' + f_2') = h^*(f_1' + f_2').$$

Pak $Hom_A(M, A) \in Mod(A^{op}) \cap mod(R)$ a tedy dle Lemma 2.21 máme $Hom_A(M, A) \in mod(A)$.

(b) Buď P projektivní A-modul. Pak dle Věty 2.34 existuje projektivní A-modul P' a $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A^n = P \oplus P'$. Potom máme následující izomorfismus A^{op}-modulů:

$$Hom_A(A^n, A) \simeq Hom_A(P \oplus P', A).$$

Navíc dle Věty 2.22 následující izomorfismy A^{op}-modulů:

$$Hom_A(P, A) \oplus Hom_A(P', A) \simeq Hom_A(A, A).$$

$$Hom_A(A^n, A) \simeq Hom_A(A, A)^n.$$

Pak s využitím Věty 2.33 dostáváme izomorfismus A^{op}-modulů

$$Hom_A(P, A) \oplus Hom_A(P', A) \simeq Hom_A(A^n, A) \simeq (A^{op})^n.$$

Z toho již plyne, že $P^* = Hom_A(P, A)$ je direktním sčítancem $(A^{op})^n$ a tedy projektivní.

$\square$

2.2.5 Funktor Tr

Lemma 2.55. *Nechť $X \in mod(A)$ a posloupnost*

$$P_1 \xrightarrow{s} P_0 \xrightarrow{t} X \longrightarrow 0\,,$$

je minimální projektivní prezentace modulu X. Pak

(a) *Následující posloupnost je exaktní v $mod(A^{op})$:*

$$0 \longrightarrow X^* \xrightarrow{t^*} P_0^* \xrightarrow{s^*} P_1^* \longrightarrow Cok(s^*) \longrightarrow 0$$

(b) *Je-li navíc*

$$P_1' \xrightarrow{s'} P_0' \xrightarrow{t'} X \longrightarrow 0$$

druhá projektivní prezentace modulu X, pak máme izomorfismus A^{op}-modulů:

$$Cok(s^*) \simeq Cok(s'^*)$$

Důkaz.

(a) Plyne z Lemma 2.54 a z toho, že kojádro morfismu konečně generovaných modulů je konečně generované.

(b) Dle Lemma 2.49 existují izomorfismy $h_0 \in Hom_A(P_0, P_0')$ a $h_1 \in Hom_A(P_1, P_1')$ takové, že následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "s"] \arrow[d, dotted, "h_1"'] & P_0 \arrow[r, "t"] \arrow[d, dotted, "h_0"'] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_1' \arrow[r, "s'"] & P_0' \arrow[r, "t'"] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Aplikujeme-li funktor $()^*$ dostaneme následující komutativní diagram:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X^* \arrow[r, "{t'}^*"] \arrow[d, equal] & P_0'^* \arrow[r, "{s'}^*"] \arrow[d, "h_0^*"] & P_1'^* \arrow[r] \arrow[d, "h_1^*"] & Cok({s'}^*) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X^* \arrow[r, "t^*"] & P_0^* \arrow[r, "s^*"] & P_1^* \arrow[r] & Cok(s^*) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Z Lemma 2.24 pak plyne hledaný S^{op}-modulový izomorfismus $Cok(s^*) \simeq Cok({s^*}')$.

□

Definice 2.56. Na základě předchozího Lemma 2.55 definujme zobrazení

$$Tr : mod(A) \to mod(A^{op})$$

předpisem $Tr(X) := Cok(s^*)$, kde

$$P_1 \xrightarrow{s} P_0 \xrightarrow{t} X \longrightarrow 0\,,$$

je libovolná projektivní prezentace modulu X.

Definice 2.57.

(a) Pro $M, N \in mod(A)$ položme:

$$P_A(M,N) := \{f \in Hom_A(M,N) | f \text{ se faktorizuje skrze projektivní modul}\}$$

$$\underline{Hom}_A(M,N) := Hom_A(M,N)/P_A(M,N)$$

(b) Definujme kategorii $\underline{mod}(A)$:

$$Ob(\underline{mod}(A)) := Ob(mod(A))$$

$$Hom_{\underline{mod}(A)}(M,N) := \underline{Hom}_A(M,N)$$

Věta 2.58. *Pro dva moduly $X, X' \in mod(A)$ a jejich dvě projektivní prezentace*

$$P_1 \xrightarrow{s} P_0 \xrightarrow{t} X \longrightarrow 0$$

$$P_1' \xrightarrow{s'} P_0' \xrightarrow{t'} X' \longrightarrow 0\,,$$

dodefinujme $Tr : \underline{Hom}_A(X, X') \to \underline{Hom}_{A^{op}}(Tr(X'), Tr(X))$ předpisem

$$h + P_A(X, X') \mapsto (h_1^*)_{Cok} + P_{A^{op}}(Tr(X'), Tr(X)),$$

kde $h_0 \in Hom_A(P_0, P_0')$ a $h_1 \in Hom_A(P_1, P_1')$ jsou libovolně zvolené homomorfismy takové, že následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd}
X'^* \arrow[r, "t'^*"] \arrow[d, "h^*"] & P_0'^* \arrow[r, "s'^*"] \arrow[d, "h_0^*"] & P_1'^* \arrow[r] \arrow[d, "h_1^*"] & Tr(X') \arrow[r] \arrow[d, "(h_1^*)_{Cok}"] & 0\,, \\
X^* \arrow[r, "t^*"] & P_0^* \arrow[r, "s^*"] & P_1^* \arrow[r] & Tr(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Pak je Tr kontravariantním funktorem $Tr : \underline{mod}(A) \to \underline{mod}(A^{op})$.

Důkaz. Důkaz rozdělíme na 3 části:

(1) Pro morfismy $g_0, h_0 \in Hom_A(P_1, P_1')$ a $g_0, h_0 \in Hom_A(P_0, P_0')$ takové, že následující diagramy komutují,

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "s"] \arrow[d, "h_1"] & P_0 \arrow[r, "t"] \arrow[d, "h_0"] & X \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
P_1' \arrow[r, "s'"] & P_0' \arrow[r, "t'"] & X' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "s"] \arrow[d, "g_1"] & P_0 \arrow[r, "t"] \arrow[d, "g_0"] & X \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
P_1' \arrow[r, "s'"] & P_0' \arrow[r, "t'"] & X' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

platí, že

$$(h_1^*)_{Cok} - (g_1^*)_{Cok} \in P_{A^{op}}(Tr(X'), Tr(X)).$$

Neboli $(h_1^*)_{Cok}$ a $(g_1^*)_{Cok}$ reprezentují stejný prvek z $\underline{Hom}_{A^{op}}(Tr'(X), Tr(X))$.

(2) Pro $h \in P_A(X, X')$ je

$$(h_1^*)_{Cok} \in P_{A^{op}}(Tr(X'), Tr(X)).$$

Neboli prvek $\underline{Hom}_A(X', X)$ se zobrazuje na prvek $\underline{Hom}_{A^{op}}(Tr'(X), Tr(X))$ nezávisle na zvoleném reprezentantu.

(3) Funktor Tr kontravariantním funktorem $\underline{mod}(A) \to \underline{mod}(A^{op})$.

(1) Uvažujme následující diagram:

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[rr, "s"] \arrow[d, bend right, "g_1"'] \arrow[d, bend left, "h_1"] & & P_0 \arrow[r, "t"] \arrow[d, bend right, "g_0"'] \arrow[d, bend left, "h_0"] \arrow[dll, dotted, "u"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
P_1' \arrow[rr, "s'"] \arrow[dr] & & P_0' \arrow[r, "t'"] & X' \arrow[r] & 0 \\
& Ket(t') \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Protože $ht = t'h_0 = t'g_0$, pak $t'(h_0 - g_0) = 0$ a tedy $h_0 - g_0$ se faktorizuje skrze $Ker(t')$. Pak z projektivity P_0 existuje kanonická projekce P_1' na $Im(s') = Ker(t')$ a $(g_0 - h_0)$ se faktorizuje skrze P_1'. Proto existuje $u \in Hom_A(P_0, P_1')$ takové, že

$$s'u = g_0 - h_0.$$

Aplikujeme-li funktor $()^*$, dostaneme následující diagram v $mod(A^{op})$:

$$\begin{tikzcd}
P_0'^* \arrow[r, "s'^*"] \arrow[d, bend right, "g_0'^*"'] \arrow[d, bend left, "h_0'^*"] & P_1'^* \arrow[r, "\hat{t}'"] \arrow[d, bend right, "g_1'^*"'] \arrow[d, bend left, "h_1'^*"] \arrow[dl, "u^*"'] & Tr(X') \arrow[r] \arrow[d, bend right, "(g_1^*)_{Cok}"'] \arrow[d, bend left, "(h_1^*)_{Cok}"] \arrow[dl, dotted, "v"'] & 0 \\
P_0^* \arrow[r, "s^*"] & P_0^* \arrow[r, "\hat{t}"] & X' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Protože platí

$$u^* s'^* = g_0^* - h_0^*,$$

pak

$$s^* u^* s'^* = s^*(g_0^* - h_0^*) = (g_1^* - h_1^*) s'^*$$

a tedy

$$(g_1^* - h_1^* - s^* u^*) s'^* = 0.$$

Pak se $(g_1^* - h_1^* - s^* u^*)$ faktorizuje skrze kojádro s'^*, konkrétně $\hat{t}'$. To znamená, že existuje $u \in Hom_{mod(A^{op})}(Tr(X'), P_1^*)$ takové, že

$$v\hat{t}' = g_1^* - h_1^* - s^* u^*.$$

Přenásobíme-li poslední řádek $\hat{t}$, dostaneme

$$\hat{t}v\hat{t}' = \hat{t}(g_1^* - h_1^* - s^* u^*) = ((g_1^*)_{Cok} - (h_1^*)_{Cok})\hat{t}',$$

a protože $\hat{t}'$ je epimorfismus, pak

$$\hat{t}v = (g_1^*)_{Cok} - (h_1^*)_{Cok}.$$

A tedy $(g_1^*)_{Cok} - (h_1^*)_{Cok}$ se faktorizuje skrze P_1^* a

$$(g_1^*)_{Cok} - (h_1^*)_{Cok} \in P_{A^{op}}(Tr(X'), Tr(X)).$$

(2) Uvažujme diagram:

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[rr, "s"] \arrow[d, "h_1"'] & & P_0 \arrow[r, "t"] \arrow[d, "h_0"] \arrow[dll, dotted, "v"'] \arrow[ddl, dotted, "v"] & X \arrow[r] \arrow[d, "h"] \arrow[dl, dotted, "u"'] & 0 \\
P_1' \arrow[rr, "s'"] \arrow[dr] & & P_0' \arrow[r, "t'"] & X' \arrow[r] & 0 \\
& Ket(t') \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Předpokládejme, že se h faktorizuje skrze projektivní A-modul P. Pak protože t' je epimorfismus, tak se h faktorizuje i skrze t'. Neboli existuje $u' \in Hom_A(X, P_0)$ takové, že

$$t'u = h.$$

Uvažujme A-homomorfismus $(h_0 - ut)$, ten se faktorizuje skrze $Ket(t')$. Přenásobením t' zleva dostaneme rovnost

$$t'(h_0 - ut) = t'h_0 - t'ut = t'h_0 - ht = 0.$$

Pak protože P_0 je projektivní modul a z existence kanonické projekce P'_1 na $Im(s') = Ket(t')$, se musí $h_0 - ut$ faktorizovat skrze P'_1. Tedy existuje $v \in Hom_A(P_0, P'_1)$ takové, že

$$s'v = h_0 - ut.$$

Aplikací funktoru $()^*$ získáme rovnost

$$v^* s'^* = h_0^* - t^* u^*$$

a následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X'^* \arrow[r, "t'^*"] \arrow[d, "h^*"] & P_0'^* \arrow[r, "s'^*"] \arrow[d, "h_0^*"] \arrow[dl, "u^*"'] & P_1'^* \arrow[r, "\hat{t}'"] \arrow[d, "h_1^*"] \arrow[dl, "v^*"'] & Tr(X') \arrow[r] \arrow[d, "(h_1^*)_{Cok}"] \arrow[dl, dotted, "w"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X^* \arrow[r, "t^*"] & P_0^* \arrow[r, "s^*"] & P_1 \arrow[r, "\hat{t}"] & Tr(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ukážeme, že se $(h_1^* - s^*v^*)$ faktorizuje skrze $Cok(s'^*) = Tr(X')$:

$$\begin{aligned}
(h_1^* - s^*v^*)s'^* &= h^*s'^* - s^*v^*s'^* \\
&= h^*s'^* - s^*(h_0^* - t^*u^*) \\
&= h^*s'^* - s^*h_0^* - s^*t^*u^* \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pak existuje $w \in Hom_A(Tr(X'), P_1^*)$ takové, že

$$w\hat{t}' = h_1^* - s^*v^*,$$

a my konečně vidíme, že

$$\hat{w}\hat{t}' = \hat{t}(h_1^* - s^*v^*) = \hat{t}h_1^* = (h_1^*)_{Cok}\hat{t}'.$$

A protože $\hat{t}'$ je epimorfismus, musí být

$$(h_1^*)_{Cok} = \hat{t}w.$$

Tedy $(h_1^*)_{Cok} \in P_{A_{op}}(Tr(X'), Tr(X))$.

(3) Již víme, že zobrazení

$$Tr : Ob(\underline{mod}(A)) \to Ob(\underline{mod}(A^{op}))$$

je dobře definované a z (1) a (2) navíc, že pro $X, X' \in \underline{mod}(A)$ je dobře definované i zobrazení

$$Tr : \underline{Hom}_A(X, X') \to \underline{Hom}_{A^{op}}(Tr(X'), Tr(X)).$$

Zbývá tedy dokázat, že Tr je kompatibilní se skládáním morfismů a že zachovává identitu. Nechť tedy $X, Y, Z \in \underline{mod}(A)$, $f \in Hom_A(X, Y)$ a $g \in Hom_A(Y, Z)$. Chceme ukázat, že

$$Tr(gf) = Tr(f)Tr(g).$$

Máme následující komutativní diagram v $mod(A)$, kde jednotlivé řádky jsou minimální projektivní prezentace modulů X, Y a Z:

$$\begin{tikzcd}
P_{X,1} \arrow[r, "s_X"] \arrow[d, "f_1"] & P_{X,0} \arrow[r, "t_X"] \arrow[d, "f_0"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
P_{Y,1} \arrow[r, "s_Y"] \arrow[d, "g_1"] & P_{Y,0} \arrow[r, "t_Y"] \arrow[d, "g_0"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
P_{Z,1} \arrow[r, "s_Z"] & P_{Z,0} \arrow[r, "t_Z"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dle bodu (1) si můžeme při hledání $Tr(gf)$ zvolit libovolné dva homomorfismy $(gf)_0$ a $(gf)_1$ takové, že následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd}
P_{X,1} \arrow[r, "s_X"] \arrow[d, "(gf)_1"] & P_{X,0} \arrow[r, "t_X"] \arrow[d, "(gf)_0"] & X \arrow[r] \arrow[d, "gf"] & 0 \\
P_{Z,1} \arrow[r, "s_Z"] & P_{Z,0} \arrow[r, "t_Z"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Tuto podmínku jasně splňuje i volba:

$$\begin{aligned}
(gf)_0 &:= g_0 f_0 \\
(gf)_1 &:= g_1 f_1.
\end{aligned}$$

Aplikací funktoru $()^*$ dostaneme následující diagram v $mod(A^{op})$, na který je možné zároveň nahlížet jako na diagram v $\underline{mod}(A^{op})$, kde jednotlivé homomorfismy jsou zástupci svých tříd ekvivalence:

$$\begin{tikzcd}
P^*_{Z,0} \arrow[r, "s^*_Z"] \arrow[d, "g^*_0"] & P^*_{Z,1} \arrow[r, "\hat{t}_Z"] \arrow[d, "g^*_1"] & Tr(Z) \arrow[r] \arrow[d, "Tr(g)"] \arrow[dd, bend left=60, "Tr(gf)"] & 0 \\
P^*_{Y,0} \arrow[r, "s^*_Y"] \arrow[d, "f^*_0"] & P^*_{Y,1} \arrow[r, "\hat{t}_Y"] \arrow[d, "f^*_1"] & Tr(Y) \arrow[r] \arrow[d, "Tr(f)"] & 0 \\
P^*_{X,0} \arrow[r, "s^*_X"] & P^*_{X,1} \arrow[r, "\hat{t}_X"] & Tr(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

V tomto diagramu vidíme následující rovnost

$$Tr(gf)\hat{t}_Z = \hat{t}_X f_1^* g_1^* = \hat{t}_X f_1^* g_1^* = Tr(f)\hat{t}_Y g_1^* = Tr(f)Tr(g)\hat{t}_Z$$

a tedy, protože $\hat{t}_Z$ je epimorfismus, máme

$$Tr(gf) = Tr(f)Tr(g).$$

Nyní zbývá ukázat, že

$$Tr(1_X) = 1_{Tr(X)},$$

pro každé $X \in \underline{mod}(A)$. Uvažme diagram

$$\begin{array}{ccccccc}
P_1 & \xrightarrow{s} & P_0 & \xrightarrow{t} & X & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle 1_{P_0}} & & \downarrow{\scriptstyle 1_{P_1}} & & \downarrow{\scriptstyle 1_X} & & \\
P_1 & \xrightarrow{s} & P_0 & \xrightarrow{t} & X & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Aplikujeme-li funktor $()^*$ dostaneme

$$Tr(1_X) = (1^*_{P_1})_{Cok} = 1_{Tr(X).}$$

□

Poznámka 2.59. Zmiňme bez důkazu ještě několik užitečných vlastností funktoru Tr, jejichž důkaz a věškeré podrobnosti lze nalézt hned v několika zdrojích, například [2]:

(a) $Tr^2 = 1_{\underline{mod}(A)}$.

(b) $Tr(\bigoplus_{i=1}^n M_i) = \bigoplus_{i=1}^n Tr(M_i)$.

(c) $Tr(M) = 0 \Leftrightarrow M$ je projektivní.

(d) $Tr(M) \simeq$ neprojektivní části M.

2.2.6 Funktory δ^* a δ_*

Definice 2.60. Nechť $X \in mod(A)$ a δ značí následující exaktní posloupnost

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0 \cdot$$

(a) Definujme $\delta_*(X)$ exaktností následující posloupnosti R-modulů:

$$0 \longrightarrow Hom_A(L,X) \xrightarrow{(-\circ g)_X} Hom_A(N,X) \xrightarrow{(-\circ f)_X} Hom_A(M,X) \longrightarrow \delta_*(X) \longrightarrow 0$$

(b) Definujme $\delta^*(X)$ exaktností následující posloupnosti R-modulů:

$$0 \longrightarrow Hom_A(X,M) \xrightarrow{(f\circ -)_X} Hom_A(X,N) \xrightarrow{(g\circ -)_X} Hom_A(X,L) \longrightarrow \delta^*(X) \longrightarrow 0$$

Věta 2.61. *Nechť $X, X' \in mod(A)$ a $h \in Hom_A(X, X')$ a δ je jako v definici* *Definici 2.60*. *Pak platí:*

(a) *Položme $\delta_*(h) := ((h \circ -)_M)_{Cok}$ jako na následujícím diagramu:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Hom_A(L,X) \arrow[r, "(-\circ g)_X"] \arrow[d, "(h\circ -)_L"] & Hom_A(N,X) \arrow[r, "(-\circ f)_X"] \arrow[d, "(h\circ -)_N"] & Hom_A(M,X) \arrow[r] \arrow[d, "(h\circ -)_M"] & \delta_*(X) \arrow[r] \arrow[d, "((h\circ -)_M)_{Cok}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Hom_A(L,X') \arrow[r, "(-\circ g)'_X"] & Hom_A(N,X') \arrow[r, "(-\circ f)'_X"] & Hom_A(M,X') \arrow[r] & \delta_*(X') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Spolu s tímto zobrazením je δ_* kovariantní funktor $mod(A) \to mod(R)$.

(b) *Položme $\delta^*(h) := ((- \circ h)_L)_{Cok}$ jako na následujícím diagramu:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Hom_A(X',M) \arrow[r, "(f\circ -)'_X"] \arrow[d, "(-\circ h)_M"] & Hom_A(X',N) \arrow[r, "(g\circ -)'_X"] \arrow[d, "(-\circ h)_N"] & Hom_A(X',L) \arrow[r] \arrow[d, "(-\circ h)_L"] & \delta^*(X') \arrow[r] \arrow[d, "((-\circ h)_L)_{Cok}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Hom_A(X,M) \arrow[r, "(f\circ -)_X"] & Hom_A(X,N) \arrow[r, "(g\circ -)_X"] & Hom_A(X,L) \arrow[r] & \delta^*(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Spolu s tímto zobrazením je δ^* kontravariantní funktor $mod(A) \to mod(R)$.

Důkaz. Dokážeme pouze (a), část (b) se dokáže analogicky. Máme $Hom_A(N, X)$, $Hom_A(M, X) \in mod(R)$ a tedy i $\delta_*(X) \in mod(R)$ jakožto kojádro homomorfismu konečně generovaných R-modulů.

Hom funktory nám zobrazují A-homomorfismy na R-homomorfismy a stejně tak funktor δ_*, jelikož je definovaný jako kojádro zobrazení R-homomorfismů. Dále je zřejmé, že $\delta_*(1_X) = 1_{\delta_*(X)}$.

Zvolme si pevně $X, X', X'' \in mod(A)$, $h \in Hom_A(X, X')$ a $h' \in Hom_A(X', X'')$. Dokážeme, že $\delta_*(h'h) = \delta_*(h')\delta_*(h)$. Máme následující komutativní diagram:

$$\begin{tikzcd}
Hom_A(M,X) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, dotted, "(h\circ -)_M"] \arrow[dd, bend right, "(h'h\circ -)_M"'] & \delta_*(X) \arrow[d, dotted, "\delta_*(h)"'] \arrow[dd, bend left, "\delta_*(h'h)"] \\
Hom_A(M,X') \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, dotted, "(h'\circ -)_M"] & \delta_*(X') \arrow[d, dotted, "\delta_*(h')"'] \\
Hom_A(M,X') \arrow[r, "\pi''"] & \delta_*(X')
\end{tikzcd}$$

Pro každé $u \in Hom_A(M, X)$ platí

$$\begin{aligned}
(h'h \circ -)_M(u) &= h'hu \\
&= (h' \circ -)_M(hu) \\
&= (h' \circ -)_M(h \circ -)_M(u),
\end{aligned}$$

pak $(h'h \circ -)_M = (h' \circ -)_M (h \circ -)_M$. Z komutativity diagramu plyne

$$\begin{aligned}
\delta_*(h'h)\pi &= \pi''(h'h \circ -)_M \\
&= \pi''(h' \circ -)_M (h \circ -)_M \\
&= \delta_*(h')\pi'(h \circ -)_M \\
&= \delta_*(h')\delta_*(h)\pi,
\end{aligned}$$

a protože π je epimorfismus, tak nám tato rovnost implikuje

$$\delta_*(h'h) = \delta_*(h')\delta_*(h).$$

□

Definice 2.62. Funktor

$$\delta_* : mod(A) \to mod(R)$$

se nazývá kovariantní defekt funktor a funktor

$$\delta^* : mod(A) \to mod(R)$$

se nazývá kontravariantní defekt funktor.

2.2.7 Skoro štěpitelné posloupnosti

Lemma 2.63. *Pro následující exaktní posloupnost*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

v $mod - A$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(a) *Existuje $f' \in Hom_A(N, M)$ takové, že $f'f = 1_M$.*

(b) *Existuje $g' \in Hom_A(L, N)$ takové, že $gg' = 1_L$.*

Důkaz. Dokážeme, že z (a) plyne (b). Opačná implikace je analogická. Nechť tedy $f' \in Hom_A(N, M)$ je takový, že $f'f = 1_M$. Uvažujme následující komutativní diagram v $mod(A)$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] \arrow[dl, "f'"'] & L \arrow[r] \arrow[d, dotted, "1_C"] \arrow[dl, dotted, "g'"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "g"] & L \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Položme $h := 1_N - ff'$, pak

$$hf = f - (ff')f = f - f(f'f) = 0,$$

neboli h se faktorizuje skrze $Cok(f) = L$. Což znamená, že existuje homomorfismus $g' \in Hom_A(L, N)$ takový, že

$$g'g = h.$$

Pak $(gg')g = g(g'g) = gh = g1_B - g(ff') = g - (gf)f' = 1_L g$, a protože g je epimorfismus, musí být

$$gg' = 1_C.$$

□

Definice 2.64.

(a) Nechť $M, N \in mod(A)$ a $f \in Hom_A(M, N)$ je epimorfismus. Řekneme, že f je štěpitelný epimorfismus, pokud existuje $f' \in mod_A(N, M)$ takový, že

$$ff' = 1_N.$$

(b) Nechť δ je následující exaktní posloupnost v $mod(A)$

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0,$$

pak řekneme, že δ je štěpitelná posloupnost, pokud splňuje jednu z ekvivalentních podmínek z Lemma 2.63.

Definice 2.65. Nechť δ je následující exaktní posloupnost v $mod(A)$

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0,$$

pak řekneme, že δ je skoro štěpitelná posloupnost, pokud splňuje následující dvě podmínky:

(g je zprava minimální) Pokud $h \in End_A(M)$ a $gh = g$, pak g je izomorfismus.

(g je zprava skoro štěpitelný) Homomorfismus g není štěpitelný epimorfismus a pro každé $Y \in mod(A)$ a $h \in Hom_A(Y, L)$, které není štěpitelný epimorfismus, existuje $u \in Hom_A(Y, N)$ takové, že $h = gu$.

$$\begin{tikzcd} & & & Y \arrow[dl, dashed, "u"'] \arrow[d, "h"] & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "g"] & L \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Poznamenejme, že [2] Proposition 1.14 (Kapitola V) popisuje řadu ekvivalentních definic skoro štěpitelné posloupnosti.

Věta 2.66.

(a) *Všechny skoro štěpitelné posloupnosti v mod(A) jsou tvaru*

$$0 \longrightarrow DTr(X) \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

kde $E \in mod(A)$ a $X \in mod(A)$ je nerozložitelý a neprojektivní.

(b) *Pro každý $X \in mod(A)$ nerozložitelný a neprojektivní modul existuje skoro štěpitelná posloupnost*

$$0 \longrightarrow DTr(X) \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

v $mod(A)$.

Důkaz.

(a) Pokud je

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$$

skoro štěpitelná posloupnost, pak dle [2] Proposition. 1.14 (Kapitola 5) je X nerozložitelný a $Y \simeq DTr(X)$. Pokud by X bylo projektivní, pak by existovalo $g' \in Hom_A(X, E)$ takové, že $gg' = 1_E$ a posloupnost by byla štěpitelná.

(b) Tvrzení plyne z [2] Theorem 1.15 (Kapitola 5).

□

Definice 2.67. Nechť $U, V \in mod(A)$. Označme následující dvě množiny:

(a) $\Upsilon_{U,V} :=$ {Krátké exaktní posloupnosti vedoucí z U do V}

(b) $\hat{\Upsilon}_{U,V} :=$ {Skoro štěpitelné posloupnosti vedoucí z U do V} $\subseteq \Upsilon_{U,V}$

Definujme relaci ekvivalence $\sim$ na $\Upsilon_{U,V}$ respektive na $\hat{\Upsilon}_{U,V}$ tak, že dvě posloupnosti

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow E \longrightarrow V \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow E' \longrightarrow V \longrightarrow 0$$

jsou ekvivalentní, pokud existuje $e \in Hom_A(E, E')$ takové, že následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d, "e"'] & V \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r] & E' \arrow[r] & V \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Poznamenejme, že symetrie této relace plyne z Lemma 2.24, zatímco tranzitivita a reflexivita jsou zřejmé. Zároveň bychom měli relaci indexovat koncovými moduly posloupností U, V, z kontextu je ale vždy zřejmé, k jakým modulům se vztahuje.

Na třídách ekvivalence $\Upsilon_{U,V}/\sim$ nyní zavedeme sčítání (nazývané Baerova suma), s nímž bude mít $\Upsilon_{U,V}/\sim$ strukturu abelovské grupy.

Mějme tedy dvě krátké exaktní posloupnosti vedoucí z U do V

$$\xi_1 : 0 \longrightarrow U \xrightarrow{\beta_1} E \xrightarrow{\alpha_1} V \longrightarrow 0$$

$$\xi_2 : 0 \longrightarrow U \xrightarrow{\beta_2} E' \xrightarrow{\alpha_2} V \longrightarrow 0$$

Nechť $[\xi_1]$ resp. $[\xi_2]$ značí jejich třídy ekvivalence. Definujme $[\xi_1]+[\xi_2] \in \Upsilon_{U,V}/\sim$ následovně: Nechť $f : V \to V \oplus V$ je dáno předpisem $f(v) = (v, v)$ pro všechna $v \in V$ a $g : U \oplus U \to U$ je dáno předpisem $g(u_1, u_2) = u_1 + u_2$ pro všechna $u_1, u_2 \in U$. Nechť $\xi_1 \oplus \xi_2$ je suma

$$\xi_1 \oplus \xi_2 : 0 \longrightarrow U \oplus U \xrightarrow{(\beta_1,\beta_2)} E \oplus E \xrightarrow{(\alpha_1,\alpha_2)} V \oplus V \longrightarrow 0$$

a položme $[\xi_1] + [\xi_2]$ rovno třídě ekvivalence exaktní posloupnosti

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow \tilde{E} \longrightarrow V \longrightarrow 0\,,$$

kterou spočteme následovně jedním ze dvou možných postupů:

(a) Modul E_1 dostaneme jako pushout g a (β_1, β_2). Modul $\tilde{E}$ následně položíme rovno pullbacku h_1 a f.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \oplus U \arrow[r, "(\beta_1,\beta_2)"] \arrow[d, "g"'] & E \oplus E \arrow[r, "(\alpha_1,\alpha_2)"] \arrow[d] & V \oplus V \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d, equal] & E_1 \arrow[r, "h_1"] & V \oplus V \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r] & \tilde{E} \arrow[r] \arrow[u] & V \arrow[r] \arrow[u, "f"'] & 0
\end{tikzcd}$$

(b) Modul E_2 dostaneme jako pullback f a (α_1, α_2). Modul $\tilde{E}$ následně položíme rovno pushoutu h_2 a g.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \oplus U \arrow[r, "(\beta_1,\beta_2)"] & E \oplus E \arrow[r, "(\alpha_1,\alpha_2)"] & V \oplus V \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \oplus U \arrow[r, "h_2"] \arrow[u, equal] \arrow[d, "g"'] & E_2 \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[u, "f"'] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r] & \tilde{E} \arrow[r] & V \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Oběma postupy dospějeme ke stejnému výsledku, jak je znázorněno na následujícím komutativním diagramu:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr, dotted] & & U \oplus U \arrow[rr, "(\beta_1,\beta_2)"] \arrow[dl, "g"'] \arrow[dd, equal] & & E \oplus E \arrow[rr, "(\alpha_1,\alpha_2)"] \arrow[dl] & & V \oplus V \arrow[r, dotted] \arrow[dl, equal] & 0 \\
0 \arrow[r, dotted] & U \arrow[rr] \arrow[dd, equal] & & E_1 \arrow[rr] \arrow[dd] & & V \oplus V \arrow[rr, dotted] & & 0 \\
0 \arrow[rr, dotted] & & U \oplus U \arrow[rr] \arrow[dl, "g"'] & & E_2 \arrow[rr] \arrow[uu] \arrow[dl] & & V \arrow[r, dotted] \arrow[uu, "f"] \arrow[dl, equal] & 0 \\
0 \arrow[r, dotted] & U \arrow[rr] & & \tilde{E} \arrow[rr] & & V \arrow[rr, dotted] \arrow[uu, "f"] & & 0
\end{tikzcd}$$

Nulový prvek $\Upsilon_{U,V}/\sim$ bude exaktní posloupnost

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow U \oplus V \longrightarrow V \longrightarrow 0\,,$$

a inverzní prvek k posloupnosti

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{\beta_1} E \xrightarrow{\alpha_1} V \longrightarrow 0$$

je

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{\beta_1} E \xrightarrow{-\alpha_1} V \longrightarrow 0\,.$$

To, že oba postupy výpočtu Baerovy sumy zaručují stejný výsledek, že je Baerova suma správně definovaná a splňuje všechny axiomy, aby $\Upsilon_{U,V}/\sim$ spolu s ní tvořilo abelovskou grupu, zde dokazovat nebudeme. Prodrobnou konstrukci a důkaz je možné nalézt v [2] Kapitole I Sekci 5.

Zvolme si nyní pevně libovolný nerozložitelný a neprojektivní A-modul X. Budeme s ním pracovat po zbytek této kapitoly.

Definice 2.68. Nechť $\Gamma := \underline{End}_A(X)$.

Lemma 2.69.

(a) *Artinovská R-algebra Γ je lokální okruh.*

(b) *Pokud $M \in mod(\Gamma)$ je nenulový, pak $D(M) \in mod(\Gamma^{op})$ je nenulový.*

(c) *Pokud $M \in mod(\Gamma)$ je jednoduchý, pak $D(M) \in mod(\Gamma^{op})$ je jednoduchý.*

Důkaz.

(a) Dle [2] Theorem 2.2 (Kapitola 2) je $End_A(X)$ lokální okruh. Pak je dle Lemma 2.16 lokálním okruhem i Γ.

(b) Nechť $M \in mod(\Gamma)$ a $m \in M$ je nenulový prvek. Připomeňme, že M je zároveň R-modulem a I je injektivní obal $R/\underline{m}$, kde $\underline{m}$ je maximální ideál R. Nechť $\hat{f} \in Hom_R(Rm, I)$ je daný předpisem

$$\hat{f}(rm) := r + \underline{m}$$

a i je kanonická inkluze

$$i : Rm \to M.$$

Protože I je injektivní, existuje $f \in Hom_R(M, I)$ takové, že

$$fi = \hat{f}$$

a

$$f(m) = fi(m) = \hat{f}(m) = 1_R + \underline{m} \neq 0.$$

A tedy $f \in D(M)$ je nenulový prvek.

(c) Nechť $M \in mod(\Gamma)$ je jednoduchý. Pokud $M = 0$, pak $D(M) = 0$. Nechť tedy je M nenulový modul. Předpokládejme pro spor, že $D(M)$ není jednoduchý Γ^{op}-modul. Pak $D(M)$ obsahuje netriviální podmodul U. To nám dává následující exaktní posloupnost $mod(\Gamma^{op})$:

$$0 \longrightarrow D(D(M)/U) \longrightarrow M \longrightarrow D(U) \longrightarrow 0$$

Připomeňme, že funktor $D = Hom_R(-, I) : mod(\Gamma) \to mod(\Gamma^{op})$ je dualita a tedy máme Γ-modulový izomorfismus $D^2(N) \simeq N$ pro každý $N \in mod(\Gamma)$. Aplikujeme-li tedy funktor D na naši exaktní posloupnost, dostaneme následující posloupnost v $mod(\Gamma)$:

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow D(M) \longrightarrow D(M)/U \longrightarrow 0$$

Protože $U \neq D(M)$, tak $D(M)/U \neq 0$. Pak jelikož je M jednoduchý, tak $D(D(M)/U) \simeq D^2(M)$ a z exaktnosti naší posloupnosti vidíme, že $D(U) = 0$. Pak ale i $D = 0$ dle bodu (a), což je spor s naším předpokladem, že U je netriviální podmodul $D(M)$.

□

Definice 2.70. Nechť S je artinovský okruh, $M \in mod(S)$. Definujme

(a) $Top_S(M) := M/rad(S)M$.

(b) $Soc_S(M) := \sum\{U | U$ je jednoduchý S-podmodul $M\}$.

Lemma 2.71. *Platí:*

(a) $Top_\Gamma(\Gamma)$ *je jednoduchý* Γ*-modul.*

(b) $Soc_\Gamma(D\Gamma) \simeq DTop_{\Gamma^{op}}(\Gamma)$ *jako* Γ*-moduly.*

(c) $Soc_\Gamma(D\Gamma)$ *je jednoduchý* Γ*-modul.*

Důkaz.

(a) Máme izomorfismus $End_\Gamma(\Gamma) = Hom_\Gamma(\Gamma, \Gamma) \simeq \Gamma$. Dle Lemma 2.69 je $End_\Gamma(\Gamma)$ lokální okruh. Protože Γ je artinovská R-algebra, je také artinovským okruhem. Navíc Γ je projektivní Γ-modul. Z toho plyne, že $rad(\Gamma)\Gamma$ je jediný maximální podmodul Γ.

Ukážeme nyní, že $Top_\Gamma(\Gamma) = \Gamma/rad(\Gamma)\Gamma$ je jednoduchý Γ-modul. Nechť M je nenulový podmodul $\Gamma/rad(\Gamma)\Gamma$. Pak M je tvaru

$$M = N/rad(\Gamma)\Gamma$$

pro nějaký Γ-modul N takový, že

$$rad(\Gamma)\Gamma \subseteq N \subseteq \Gamma.$$

Protože M je nenulový je $rad(\Gamma) \neq N$. Protože $rad(\Gamma)\Gamma$ je maximální podmodul Γ, musí být $N = \Gamma$ a tedy

$$M = \Gamma/rad(\Gamma)\Gamma.$$

(b) Uvažujme následující exaktní posloupnost Γ^{op}-modulů:

$$0 \longrightarrow rad(\Gamma) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Gamma/rad(\Gamma) \longrightarrow 0$$

Aplikací funktoru D dostaneme exaktní posloupnost Γ-modulů:

$$0 \longrightarrow D(\Gamma/rad(\Gamma)) \longrightarrow D(\Gamma) \longrightarrow D(rad(\Gamma)) \longrightarrow 0$$

Dle [2] Proposition 3.1 (Kapitola 1) je $\Gamma/rad(\Gamma)$ polojednoduchý Γ^{op}-modul. Tedy z Lemma 2.69 a z komutativity D s konečnými direktními sumami (plyne z Lemma 2.22) je $D(\Gamma/rad(\Gamma))$ polojednoduchý podmodul $D\Gamma$. To znamená, že

$$D(\Gamma/rad(\Gamma)) \subseteq Soc_\Gamma(D\Gamma).$$

Ze stejného důvodu je $DSoc_\Gamma(D\Gamma)$ polojednoduchý Γ^{op}-modul. Navíc

$$Soc_\Gamma(D\Gamma) \subseteq D\Gamma$$

a dosáváme následující komutativní diagram v $mod(\Gamma)$:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & D(\Gamma/rad(\Gamma)) \arrow[r] \arrow[d] & D\Gamma \arrow[d, equal] & & \\
0 \arrow[r] & Soc_\Gamma(D\Gamma) \arrow[r] & D\Gamma \arrow[r] & D\Gamma/Soc_\Gamma(D\Gamma) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Aplikací D dostaneme následující komutativní diagram z exaktními řádky v $mod(\Gamma^{op})$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D(D\Gamma/Soc_\Gamma(D\Gamma)) \arrow[r] & \Gamma \arrow[r, "b"] \arrow[d, equal] & D(Soc_\Gamma(D\Gamma)) \arrow[r] \arrow[d, bend left, "d"] & 0 \\
0 \arrow[r, dotted] & rad(\Gamma) \arrow[r, dotted, "a"] & \Gamma \arrow[r, "c"] & \Gamma/rad(\Gamma) \arrow[r] \arrow[u, bend left, "e"] \arrow[d] & 0 \\
& & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Víme, že $rad(\Gamma)$ je jádro c, tedy ho doplníme do diagramu a dostaneme exaktní řádek. Protože $rad(\Gamma)$ anihiluje polojednoduché Γ^{op}-moduly, je $b1_\Gamma a = 0$. Navíc $\Gamma/rad(\Gamma)$ je kojádro a a tedy musí existovat homomorfismus $e \in Hom_{\Gamma^{op}}(\Gamma/rad(\Gamma), D(Soc_\Gamma(D\Gamma)))$ takový, že

$$ec = b1_\Gamma = b.$$

Navíc protože b je epimorfismus, tak je jím také e. Složení homomorfismů $de \in End_{\Gamma^{op}}(\Gamma/rad(\Gamma))$ je tedy podle [2] Proposition 1.4 (Kapitola 1) izomorfismus, protože $\Gamma/rad(\Gamma)$ je konečně generovaný modul. Z toho plyne že e je navíc epimorfismem, neboli

$$D(Soc_\Gamma(D\Gamma)) \simeq \Gamma/rad(\Gamma) = Top_{\Gamma^{op}}(\Gamma)$$

jakožto Γ^{op}-moduly. A ekvivalentně

$$Soc_\Gamma(D\Gamma) \simeq DTop_{\Gamma^{op}}(\Gamma)$$

jako Γ-moduly.

(c) Plyne z (a), pokud budeme nahlížet na Γ jako na Γ^{op}-modul. Protože $Top_{\Gamma^{op}}(\Gamma)$ je jednoduchý Γ^{op}-modul, plyne z Lemma 2.69 a ze vztahu $Soc_\Gamma(D\Gamma) \simeq DTop_{\Gamma^{op}}(\Gamma)$, že je jednoduchý Γ-modul.

□

Lemma 2.72. *Každý jednoduchý modul M okruhu S může být vygenerován jakýmkoli svým nenulovým prvkem.*

Důkaz. Pokud $m \in M\backslash\{0\}$, pak m generuje nenulový podmodul M, který musí být z jednoduchosti M roven celému M. □

Věta 2.73.

(a) *Nechť $U, V \in mod(A)$. Pak $\Upsilon_{U,V}/\sim$ je abelovská grupa a máme izomorfismus abelovských grup:*

$$Ext^1_A(V, U) \simeq (\Upsilon_{U,V}/\sim)$$

(b) *Nechť $X \in mod(A)$ je nerozložitelný a neprojektivní. Potom můžeme definovat na $\Upsilon_{DTr(X),X}/\sim$ takovou strukturu, že:*

(i) $(\Upsilon_{DTr(X),X}/\sim) \in mod(\Gamma)$,

(ii) $Soc_\Gamma(\Upsilon_{DTr(X),X}/\sim) = (\hat{\Upsilon}_{DTr(X),X}/\sim)$.

Důkaz.

(a) [5] Theorem. 7.21.

(b) Nebudeme zde provádět kompletní důkaz. Všechny podrobnosti je možné nalézt v [2] Kapitole 5. Dále pouze naznačíme důkaz části (i).

(i) Základem je pozorování, že $(\Upsilon_{DTr(X),X}/\sim) \in Mod(\Gamma)$ Důkaz tohoto pozorování provedeme v části věnované konstrukci algoritmu v Lemma 3.12. Potom izomorfismus z (a) přenáší Γ-modulovou strukturu i na $Ext^1_A(X, DTr(X))$ a stává se Γ-izomorfismem. V důkazu Věty 3.17 ukážeme, že $Ext^1_A(X, DTr(X)) = \delta_*(DTr(X))$ pro určitou krátkou exaktní posloupnost δ a protože dle Věty 2.61 je $\delta_*(DTr(X)) \in mod(R)$, pak i $Ext^1_A(X, DTr(X)) \in mod(R)$. A tedy dle Lemma 2.21 vidíme, že oba $Ext^1_A(X, DTr(X))$ i $(\Upsilon_{DTr(X),X}/\sim)$ jsou konečně generované jako Γ-moduly.

$\square$

2.3 Teorie reprezentací

Nyní se přesuneme k Algebrám cest. Namísto okruhu R budeme nyní pracovat s pevně zvoleným zvoleným komutativním tělesem K. K-algebra tak ke struktuře K-modulu dostává navíc strukturu vektorového prostoru nad K.

Těľšo K má právě dva ideály 0 a K, je tedy lokálním i artinovským okruhem a veškerá teorie z předchozí části je aplikovatelná i pro $R = K$.

2.3.1 Toulec a algebra cest

Definice 2.74. Řekneme, že K-algebra A je konečné dimenze, pokud dimenze $dim_K A$ vektorového prostoru A nad K je konečná.

K-vektorový podprostor B K-algebry A je K-podalgebrou A, pokud $1_A \in B$ a $bb' \in B$ pro každý $b, b' \in B$.

Pokud jsou A a B dvě K-algebry, pak okruhový homomorfismus $f : A \to B$ takový, že f je K-linerání, nazveme homomorfismem K-algeber.

Algebra A je souvislá, pokud není direktním součtem dvou algeber (nebo ekvivalentně, pokud 0 a 1 jsou jediné centrální idempotenty A).

Definice 2.75. Buď A K-algebra a $e_1, e_2, \ldots, e_m$ úplná množina primitivních ortogonálních idempotentů A. Pak řekneme, že A je základní, pokud A-moduly $e_i A \not\simeq e_j A$ pro každé $i \neq j$.

V této části budeme pracovat s pravými A-moduly. O levých modulech budeme referovat jako o A^{op}-modulech.

Poznámka 2.76. Nechť A je K-algebra, pak A-modul M je vektorový prostor nad K.

Definice 2.77. A-modul M nazveme konečně dimenzionálním, pokud je $dim_K M$ konečná.

Nyní si zavedeme pojem toulce. Toulec bude obecnější forma grafu, kde připustíme smyčky (cesty nulové délky) a existenci více cest mezi stejnými body (takový graf bývá také běžně označován jako multigraf). Budeme ho značit písmenem Q z anlického slova quiver (=toulec).

Definice 2.78. Toulec Q je čtveřice (Q_0, Q_1, s, t), kde:

(a) Q_0 je množina, jejíž elementy jsou nazývány body či vrcholy.

(b) Q_1 je množina, jejíž elementy jsou nazývány šipky.

(c) s, t jsou dvě zobrazení $Q_1 \to Q_0$, která každé šipce $\alpha \in Q_1$ přiřadí její $s(\alpha) \in Q_0$ počáteční a $t(\alpha) \in Q_0$ koncový vrchol.

Podtoulec toulce Q je toulec $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ takový, že $Q'_0 \subseteq Q_0$, $Q'_1 \subseteq Q_1$ a $s' = s|_{Q'_1}$, $t' = t|_{Q'_1}$.

Toulec Q je souvislý, pokud jeho vrcholy a šipky, při neuvažování jejich orientace, tvoří souvislý graf. Toulec Q je konečný, pokud Q_0 a Q_1 jsou konečné množiny.

Nechť $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ a $a, b \in Q_0$. Cestou délky l z a do b nazýváme posloupnost $(a|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l|b)$, kde $\alpha_k \in Q_1$ pro každé $1 \leq k \leq l$, $s(\alpha_1) = a$, $t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$ pro každé $1 \leq k < l$ a $t(\alpha_l) = b$. Množinu všech cest délky l budeme značit Q_l. Dále každý bod $a \in Q_0$ ztotožněme s cestou nulové délky, tu budeme nazývat triviální a značit $\epsilon_a = (a||a)$. Cestu délky $l \geq 1$ nazveme cyklem, pokud počáteční vrchol a koncový vrchol splývají. Cyklus délky 1 nazveme smyčkou. Toulec je acyklický, pokud neobsahuje žádné cykly.

Definice 2.79. Nechť Q je toulec a K libovolné těleso. Algebra cest KQ toulce Q je K-algebra, jejíž báze je tvořena všemi cestami $(a|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l|b)$ délky $l \geq 0$ v Q a součin bázových vektorů je definován následovně:

$$(a|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l|b)(c|\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k|d) = \delta_{bc}(a|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k|b),$$

kde δ_{bc} je Krocnekerova delta.

Příklad 2.80. Nechť Q je toulec

$$\begin{tikzcd} \circ^1 \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[rr, bend left, "\gamma"] & \circ^2 \arrow[r, "\beta"'] & \circ^3 \end{tikzcd}$$

Báze KQ pak je množina $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta\}$ a násobení bázových prvků je dané tabulkou:

	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	α	β	γ	$\alpha\beta$
ϵ_1	ϵ_1	0	0	α	0	γ	$\alpha\beta$
ϵ_2	0	ϵ_2	0	0	β	0	0
ϵ_3	0	0	ϵ_3	0	0	0	0
α	0	α	0	0	$\alpha\beta$	0	0
β	0	0	β	0	0	0	0
γ	0	0	γ	0	0	0	0
$\alpha\beta$	0	0	$\alpha\beta$	0	0	0	0

Poznámka 2.81. Násobení bázových elementů KQ je rozšířeno na všechny prvky KQ s pomocí distributivity vůči sčítání. Platí:

$$KQ = KQ_0 \oplus KQ_1 \oplus \ldots \oplus KQ_l \oplus \ldots,$$

kde KQ_i je podprostor KQ generovaný množinou Q_i všech cest délky i.

Lemma 2.82. *Nechť Q je toulec a KQ jeho algebra cest. Pak platí:*

(a) *KQ je asociativní algebra.*

(b) *KQ obsahuje jednotku právě tehdy, když je Q_0 konečná množina.*

(c) *KQ je konečně dimenzionální právě, když Q je konečný a acyklický.*

Důkaz.

(a) Součin bázových vektorů je skládání cest a to je asociativní vůči sčítání v KQ.

(b) Triviální cesta $\epsilon_a = (a||a)$ je idempotentem KQ a tedy pro Q_0 konečnou je $\sum_{a\in Q_0} \epsilon_a$ jednotka KQ. Opačně nechť je Q_0 nekonečná a nechť

$$1 = \textstyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\omega_i \ (\lambda_i \in K \text{ a } \omega_i \in Q_1)$$

je jednotka KQ. Množina Q_0' počátečních vrcholů cest ω_i má nejvýše m prvků. Můžeme tedy zvolit $a \in Q_0 \backslash Q_0' \neq \emptyset$. Pak ale $\epsilon_a 1 = 0$, což je spor.

(c) Pokud je Q nekonečný, pak je nekonečná také báze KQ. Pokud máme cyklus $w = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$, pak máme nekonečně mnoho bázových vektorů tvaru $w^t = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l)^t$ a KQ tedy nemůže být konečně dimenzionální. Opačně, pokud Q je konečně dimenzionální, pak obsahuje pouze konečně mnoho cest a tedy KQ je konečně dimenzionální.

□

Důsledek 2.83. Nechť Q je konečný toulec. Pak prvek $1 = \sum_{a\in Q_0} \epsilon_a$ je jednotka KQ a množina $\{\epsilon_a = (a||a) | a \in Q_0\}$ všech triviálních cest je úplná množina primitivních ortogonálních idempotentů KQ.

Důkaz. Plyne z definice násobení, že ϵ_a jsou ortogonální idempotenty KQ. Protože množina Q_0 je konečná, prvek $1 = \sum_{a\in Q_0} \epsilon_a$ je jednotka KQ.

Zbývá ukázat, že idempotenty ϵ_a KQ jsou primitivní, neboli že 0 a ϵ_a jsou jedinými idempotenty $\epsilon_a(KQ)\epsilon_a$. Každý idempotent $\epsilon_a(KQ)\epsilon_a$ může být zapsán ve tvaru $\lambda\epsilon_a + w$, kde $\lambda \in K$ a w je lineární kombinace cest skrze a délky alespoň 1. Rovnost

$$0 = \epsilon_a^2 - \epsilon_a = (\lambda^2 - \lambda)\epsilon_a + (2\lambda - 1)w + w^2$$

nám dává $w = 0$ a $\lambda^2 = \lambda$ a tedy $\lambda = 0$ nebo $\lambda = 1$. V prvním případě je $\epsilon = 0$ a druhém $\epsilon = \epsilon_a$. □

Definice 2.84. Nechť Q je konečný a souvislý toulec. Oboustranný ideál algebry cest KQ generovaný šipkami Q nazýváme šipkový ideál KQ a značíme R_Q.

Poznámka 2.85. Ideál R_Q můžeme rozložit na direktní součet:

$$R_Q = KQ_1 \oplus KQ_2 \oplus \ldots \oplus KQ_l \oplus \ldots$$

Dále pro každé $l \geq 1$ máme $R_Q^l = \bigoplus_{m\geq l} KQ_m$ a tedy R_Q^l je ideál KQ generovaný jako vektorový prostor množinou všech cest délky $\geq l$.

Lemma 2.86. *Nechť Q je konečný toulec. Pak algebra cest KQ je souvislá, právě když Q je souvislý.*

Důkaz. Předpokládejme, že Q není souvislý a Q' buď souvislá komponenta Q. Nechť Q'' je úplný podtoulec Q mající množinu vrcholů $Q_0'' = Q_0 \backslash Q_0'$. Dle předpokladu Q_0' ani Q_0'' nejsou prázdné. Zvolme libovolné $a \in Q_0'$ a $b \in Q_0''$. Protože Q není souvislý, musí být každá cesta w v Q celá obsažena v Q_0' nebo Q_0''. V prvním případě je $w\epsilon_b = 0$ a tedy $\epsilon_a w \epsilon_b = 0$ a tedy $\epsilon_a(KQ)\epsilon_b = 0$. V druhém případě dostaneme, že $\epsilon_b(KQ)\epsilon_a = 0$. Tedy KQ není ani v jednom případě souvislá.

Předpokládejme nyní pro spor, že Q je souvislý, ale KQ není. Algebra KQ je direktním součtem dvou algeber, existuje tedy rozklad Q_0 na disjunktní podmnožiny Q_0' a Q_0'' takové, že pro všechna $a \in Q_0'$ a $b \in Q_0''$ je

$$\epsilon_a(KQ)\epsilon_b = \epsilon_b(KQ)\epsilon_a = 0.$$

Protože Q je souvislý, můžeme zvolit taková $a \in Q_0'$ a $b \in Q_0''$, že budou spojena šipkou $\alpha : a \to b$. To je ale spor, protože

$$\alpha = \epsilon_a \alpha \epsilon_b \in \epsilon_a(KQ)\epsilon_b = 0.$$

□

2.3.2 Přípustný ideál

Definice 2.87. Nechť Q je konečný toulec a R_Q je šipkový ideál algebry cest KQ. Řekneme, že oboustranný ideál I algebry KQ je přípustný, pokud existuje $m \geq 2$ takový, že

$$R_Q^m \subseteq I \subseteq R_Q^2.$$

Pokud I je přípustný ideál KQ, pak dvojici (Q, I) nazveme omezeným toulcem. Algebru KQ/I nazveme algebrou omezeného toulce (Q, I).

Poznámka 2.88. Definice jednoduše říká, že ideál I je přípustný, pokud existuje $m \geq 2$ takové, že I obsahuje včechny cesty délky alespoň m a neobsahuje šipky (cesty délky 1) ani triviální cesty.

V případě acyklického toulce bude přípustný každý ideál obsažený v ideálu R_Q^2.

Příklad 2.89. Nechť Q je toulec

$$\begin{tikzcd} \circ^1 \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[rr, bend left, "\gamma"] & \circ^2 \arrow[r, "\beta"'] & \circ^3 \arrow[loop right, "\delta"] \end{tikzcd}$$

Ideál $I = \{\alpha\beta - \gamma\delta, \delta^2\}$ je přípustný, ale idál $J = \{\alpha\beta - \gamma\delta\}$ přípustný není, protože neobsahuje například cesty $\delta^k \in R_Q^k$ pro žádné $k \geq 2$.

Definice 2.90. Nechť Q je toulec. Relace v Q s koeficienty v K je K-lineární kombinace cest délky alespoň dva se stejným počátkem a koncem. Relaci tvaru $w_1 - w_2$, kde w_1 a w_2 jsou dvě cesty, nazveme relací komutativity.

Pokud množina relací M generuje přípustný ideál, pak řekneme, že je toulec Q omezený množinou relací M.

Lemma 2.91. *Nechť Q je konečný toulec a R_Q šipkový ideál KQ a $\epsilon_a = (a||a)$ pro každé $a \in Q_0$. Množina $\{\bar{\epsilon}_a = \epsilon_a + R_Q | \ a \in Q_0\}$ je úplná množina ortogonálních idempotentů KQ/R_Q a KQ/R_Q je izomorfní direktnímu součtu $K \oplus K \oplus \ldots \oplus K$ kopií tělesa K.*

Důkaz. Máme rozklad na direktní sumu

$$KQ/R_Q = \bigoplus_{a,b \in Q_0} \bar{\epsilon}_a (KQ/R_Q) \bar{\epsilon}_b,$$

který, protože R_Q obsahuje všechny cesty délky alespoň jedna, můžeme ještě zjednodušit na tvar

$$KQ/R_Q = \bigoplus_{a \in Q_0} \bar{\epsilon}_a (KQ/R_Q) \bar{\epsilon}_a.$$

KQ/R_Q je pak generováno jako K-vektorový prostor třídami ekvivalence cest délky 0, tedy množinou $\{\bar{\epsilon}_a = \epsilon_a + R_Q |\ a \in Q_0\}$. To je množina primitivních ortogonálních idempotentů algebry KQ/R_Q. Navíc pro každé $a \in Q_0$ je algebra $\bar{\epsilon}_a(KQ/R_Q)\bar{\epsilon}_a$ generovaná jedním prvkem $\bar{\epsilon}_a$ jako K-vektorový prostor a tedy izomorfní jako K-algebra tělěsu K. Tedy KQ/R_Q je izomorfní součtu $K \oplus K \oplus \ldots \oplus K$. □

Lemma 2.92. *Pokud je I oboustranným nilpotentním ideálem algebry A, pak $I \subseteq rad(A)$. Pokud je navíc algebra A/I izomorfní direktnímu součtu kopií tělesa K, pak $I = rad(A)$.*

Důkaz. [1] Corollary I.1.4. □

Věta 2.93. *Nechť Q je konečný toulec, I přípustný ideál KQ a R_Q je šipkový ideál KQ. Pak platí:*

(a) *Množina $\{e_a = \epsilon_a + I | a \in Q_0\}$ je úplná množina primitivních ortogonálních idempotentů algebry KQ/I.*

(b) *Algebra KQ/I je souvislá, právě když Q je souvislý toulec.*

(c) *Algebra KQ/I je konečně dimenzionální.*

(d) *I je konečně generovaný.*

(e) *Existuje konečná množina relací $\{\rho_1, \ldots, \rho_m\}$ taková, že $I =< \rho_1, \ldots, \rho_m >$.*

(f) *$rad(KQ/I) = R_Q/I$.*

Důkaz.

(a) Protože e_a je obraz ϵ_a kanonickým homomorfismem $KQ \to KQ/I$, plyne z Důsledku 2.83, že daná množina je úplnou množinou ortogonálních idempotentů. Musíme ještě ověřit, že každé e_a je primitivní, neboli že jedinými idempotenty $e_a(KQ/I)e_a$ jsou 0 a e_a. Každý idempotent $e \in e_a(KQ/I)e_a$ může být zapsán jako $e = \lambda e_a + w + I$, kde $\lambda \in K$ a w je lineární kombinace cyklů skrze a délky alespoň 1. Rovnost $e^2 = e$ nám dává

$$(\lambda^2 - \lambda)e_a + (2\lambda - 1)w + w^2 \in I.$$

Protože $I \subseteq R_Q^2$, musí být $\lambda^2 - \lambda = 0$ a tedy $\lambda = 0$ nebo $\lambda = 1$. Nechť $\lambda = 0$, pak $e = w + I$, kde w je idempotent modulo I. Na druhou stranu protože $R_Q^m \subseteq I$ pro nějaké $m \geq 2$, musí být $w^m \in I$ a w je tedy také nilpotent modulo I. Pak $w \in I$ a $e = 0$. Nechť tedy $\lambda = 1$, pak $e_a - e = -w + I$ je také idempotent v $e_a(KQ/I)e_a$ a w je opět idempotent modulo I. Protože je opět nilpotentem modulo I, musí náležet do I. Pak $e_a = e$.

(b) Dokážeme jednu implikaci po druhé:

- $\Rightarrow$ Nechť KQ/I je souvislá. Pokud Q není souvislý toulec, pak KQ není souvislá algebra dle Lemma 2.86. Tedy KQ obsahuje centrální idempotent γ různý od 0 a 1, ten můžeme dle důkazu [1] Lemma II.1.6 zvolit jako sumu cest nulové délky, tedy vrcholů. Pak ale $c = \gamma + I \neq I$. Na druhou stranu $c = 1 + I$ implikuje $1 - \gamma \in I$, což je také nemožné, protože $I \subseteq R_Q^2$. Prvek c je tedy centrálním idempotentem KQ/I a ta není souvislá.
- $\Leftarrow$ Předpokládejme nyní pro spor, že Q je souvislý, ale KQ/I není. Pak je algebra KQ/I direktním součtem dvou algeber, existuje tedy rozklad Q_0 na disjunktní podmnožiny Q_0' a Q_0'' takové, že pro všechna $a \in Q_0'$ a $b \in Q_0''$ je

  $$\epsilon_a(KQ/I)\epsilon_b = \epsilon_b(KQ/I)\epsilon_a = 0.$$

  Protože Q je souvislý, můžeme zvolit taková $a \in Q_0'$ a $b \in Q_0''$, že budou spojena šipkou $\alpha : a \to b$. To je ale spor, protože $\alpha = \epsilon_a \alpha \epsilon_b$ a tedy pro $\bar{\alpha} = \alpha + I$ platí

  $$\bar{\alpha} = \epsilon_a \bar{\alpha} \epsilon_b \in \epsilon_a(KQ/I)\epsilon_b = 0.$$

(c) Protože I je přípustný ideál, existuje $m \geq 2$ takové, že $R_Q^m \subseteq I$, pak existuje surjektivní homomorfismus K-algeber $KQ/R_Q^m \to KQ/I$. Tedy stačí dokázat, že KQ/R_Q^m je konečně dimenzionální. Pak třídy ekvivalence cest délky menší než m tvoří bázi KQ/R_Q^m jako K-vektorového prostoru. Těch je ale konečně mnoho, protože Q je konečný.

(d) Nechť $m \geq 2$ takové, že $R_Q^m \subseteq I$. Máme následující krátkou exaktní posloupnost KQ-modulů:

$$0 \longrightarrow R_Q^m{}_Q \longrightarrow I \longrightarrow I/R_Q \longrightarrow 0$$

Stačí tedy dokázat, že R_Q^m a I/R_Q^m jsou konečně generované jako KQ-moduly. Z definice je R_Q^m generovaný cestami délky m a těch je konečně mnoho. Na druhou stranu I/R_Q^m je dle bodu (c) ideál konečně dimenzionální algebry KQ/R_Q^m. Tedy I/R_Q^m je konečně dimenzionální K-vektorový prostor a tedy konečně generovaný KQ-modul.

(e) Dle bodu (d) je ideál I algebry KQ generován konečnou množinou $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t\}$. Prvky σ_i nejsou obecně relace, protože cesty obsažené v σ_i nemusí mít stejný počátek a konec. Na druhou stranu pro všechny $a, b \in Q_0$ je $\epsilon_a \sigma_i \epsilon_b$ relace a $\sigma_i = \sum_{a,b \in Q_0} \epsilon_a \sigma_i \epsilon_b$. Pak $\{\epsilon_a \sigma_i \epsilon_b |\ a, b \in Q_0,\ i = 1, 2, \ldots t\}$ generuje I.

(f) Protože I je přípustný ideál KQ existuje $m \geq 2$ takové, že $R_Q^m \subseteq I$. Tedy $(R_Q/I)^m = 0$ a R_Q/I je nilpotentní ideál KQ/R_Q. Na druhou stranu dle Lemma 2.91 je algebra

$$(KQ/I)/(R_Q/I) \simeq KQ/R_Q$$

izomorfní direktnímu součinu kopií tělesa K. Pak z Lemma 2.92 plyne, že $R_Q/I = rad(KQ/R_Q)$.

□

Důsledek 2.94. Buď Q konečný toulec, R_Q šipkový ideál KQ a I přípustný ideál KQ. Pak platí:

(a) Pro každé $l \geq 1$ je $rad^l(KQ/I) = (R_Q/I)^l$ a tedy platí, že

$$rad(KQ/I)/rad^2(KQ/I) = (R_Q/I)/(R_Q/I)^l \simeq R_Q/R_Q^2.$$

(b) Algebra omezeného quiveru KQ/I je potom souvislá, konečně dimenzionální s jednotkou, mající R_Q/I jako radikál a $\{e_a := \epsilon_a + I |\ a \in Q_0\}$ úplnou množinu primitivních ortogonálních idempotentů.

Důkaz. Přímý důsledek Věty 2.93, konkrétně bodů (a), (b) a (c). □

Definice 2.95. Nechť A je základní, souvislá a konečně dimenzionální K-algebra a $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ úplná množina primitivních ortogonálních idempotentů A. Definujme vlastní toulec Q_A algebry A následovně:

(a) Body Q_A budou čísla $1, 2, \ldots, n$ která jsou v bijektivní korespondenci s idempotenty $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

(b) Pro každé dva body $a, b \in (Q_A)_0$ budou šipky $\alpha : a \to b$ v bijektivní korespondenci s vektory v bázi K-vektorového prostoru $e_a(radA/rad^2A)e_b$.

Poznámka 2.96. Protože A je konečně dimenzionální, jsou konečně dimenzionální i K-vektorové prostory $e_a(radA/rad^2A)e_b$ pro každé $a, b \in (Q_A)_0$ a toulec Q_A je tedy konečný.

Definice 2.97. Řekneme, že K-algebra A je elementární, pokud je K-algebra $A/rad(A)$ izomorfní direktnímu součtu $K \oplus K \oplus \ldots \oplus K$ kopií tělesa K.

Poznámka 2.98. Poznamenejme, že v případě algebraicky uzavřeného tělesa je K-algebra elementární, právě když je základní.

Lemma 2.99. *Nechť A je konečně dimenzionální, elementární, základní a souvislá K-algebra. Pak platí následující:*

(a) *Toulec Q_A algebry A nezávisí na volbě úplné množiny ortogonálních idempotentů A.*

(b) *Pro každý pár e_a, e_b primitivních ortogonálních idempotentů A je K-lineární zobrazení*

$$\begin{aligned} \xi : e_a(radA)e_b/e_a(rad^2A)e_b &\to e_a(radA/rad^2A)e_b \\ e_axe_b + e_a(rad^2A)e_b &\mapsto e_a(x + rad^2A)e_b \end{aligned}$$

izomorfismus.

(c) *Pro každou šipku* $\alpha : i \to j$ *v* $(Q_A)_1$ *buďte* $x_\alpha \in e_i(radA)e_j$ *takové, že* $\{x_\alpha + rad^2 A | \alpha : i \to j\}$ *je báze* $e_i(radA/rad^2 A)e_j$ *(viz. bod (a)). Pak*

  (i) *pro každé dva body* $a, b \in (Q_A)_0$ *můžeme každý prvek* $x \in e_a(radA)e_b$ *napsat ve tvaru*

$$x = \sum x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_l} \lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l},$$

  kde $\lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l} \in K$ *a suma je počítána přes všechny cesty* $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l$ *v* Q_A *z* a *do* b.

  (ii) *pro každou šipku* $\alpha : i \to j$ *prvek* x_α *určuje jednoznačně nenulový homomorfismus (který není izomorfismem)* $\tilde{x_\alpha} \in Hom_A(e_j A, e_i A)$ *takový, že* $\tilde{x_\alpha}(e_j) = x_\alpha$, $Im\tilde{x_\alpha} \subseteq e_i(radA)$ *a* $Im\tilde{x_\alpha} \nsubseteq e_i(rad^2 A)$.

(d) *Toulec* Q_A *algebry* A *je souvislý.*

Důkaz.

(a) Počet vrcholů Q_A je určen jednoznačně, protože je roven počtu nerozložitelných direktních sčítanců A_A a to je dáno jednoznačně dle [1] I.4.10. Dle stejné věty jsou tyto direktní sčítance určeny jednoznačně až na izomorfismus a jejich pořadí. Mějme tedy dva libovolné rozklady A_A

$$A_A \ = \ \bigoplus_{a=1}^{n} e_a A = \bigoplus_{b=1}^{n} e'_b A$$

kde $e_a A \simeq e'_a A$. Musíme ukázat, že pro každou dvojici a, b je

$$dim_K e_a(rad(A)/rad^2(A))e_b = dim_K e'_a(rad(A)/rad^2(A))e'_b.$$

K-lineární zobrazení

$$\begin{aligned} e_a(rad(A)) &\to e_a(rad(A)/rad^2(A)) \\ e_a x &\mapsto e_a(x + rad^2 A) \end{aligned}$$

má jádro $e_a(rad^2(A))$. Pak

$$e_a(rad(A)/rad^2(A)) \simeq e_a(rad(A))/e_a(rad^2(A)) \simeq (e_a rad(A))/(e_a rad^2(A))$$

Máme tedy izomorfismus vektorových prostorů

$$\begin{aligned} e_a(rad(A)/rad^2(A))e_b &= [rad(e_a A)/rad^2(e_a A)]e_b \\ &= Hom_A(e_b A, rad(e_a A)/rad^2(e_a A)) \\ &= Hom_A(e'_b A, rad(e'_a A)/rad^2(e'_a A)) \\ &= [rad(e'_a A)/rad^2(e'_a A)]e'_b \\ &= e'_a(rad(A)/rad^2(A))e'_b \end{aligned}$$

(b) Je zřejmé, že K-lineární zobrazení

$$\begin{aligned} e_a(rad(A))e_b &\to e_a(rad(A)/rad^2(A))e_b \\ e_a x e_b &\mapsto e_a(x + rad^2 A)e_b \end{aligned}$$

má jádro $e_a(rad^2(A))e_b$. A tedy náš homomorfismus ψ je izmorfismem.

(c-i) Protože jako K-vektorový prostor je

$$rad(A) \simeq rad(A)/rad^2(A) \oplus rad^2(A),$$

máme i izomorfismus

$$e_a(rad(A))e_b \simeq e_a(rad(A)/rad^2(A))e_b \oplus e_a(rad^2(A))e_b.$$

A tedy x může být zapsáno jako

$$x = \sum_{\alpha:a\to b} x_\alpha \lambda_\alpha \text{ modulo } e_a(rad^2(A))e_b,$$

kde $\lambda_a \in K$ pro $a \in Q_1$. Nebo více formálně jako

$$x' = x - \sum_{\alpha:a\to b} x_\alpha \lambda_\alpha \in e_a(rad^2(A))e_b.$$

Rozklad $rad(A) = \bigoplus_{i,j} e_i(rad(A))e_j$ nám implikuje, že

$$e_a(rad^2(A))e_b = \sum_{c\in(Q_A)_0}[e_a(rad(A))e_c][e_c(rad(A))e_b].$$

Tedy $x' = \sum_{c\in(Q_A)_0} x'_c y'_c$, kde $x'_c \in e_a(rad(A))e_c$ a $y'_c \in e_c(rad(A))e_b$. Z předchozí diskuze vyplývá, že $x'_c = \sum_{\beta:a\to c} x_\beta \lambda_\beta$ a $y'_c = \sum_{\gamma:c\to b} x_\gamma \lambda_\gamma$ modulo $rad^2(A)$, kde $\lambda_\beta, \lambda_\gamma \in K$. Tedy

$$\sum_{\alpha:a\to b} x_\alpha \lambda_\alpha + \sum_{\beta:a\to c}\sum_{\gamma:c\to b} x_\beta x_\gamma \lambda_\beta \lambda_\gamma \text{ modulo } e_a(rad^3(A))e_b.$$

Dále pokračujeme indukcí do n takového, že $rad^n(A) = 0$. To existuje z nilpotentnosti $rad(A)$.

(c-ii) Dle předpokladu je prvek $x_\alpha \in e_i(rad(A))e_j$ nenulový a zobrazuje se na nenulový prvek $\tilde{x}_\alpha$ K-lineárním izomorfismem

$$e_i(rad(A))e_j \simeq Hom_A(e_jA, e_i(rad(A))).$$

Z toho plyne, že $\tilde{x}_\alpha(e_j) = x_\alpha$, $Im\tilde{x}_\alpha \subseteq e_i(rad(A))$ a $Im\tilde{x}_\alpha \nsubseteq e_i(rad^2(A))$.

(d) Nechť Q_A není souvislý. Pak lze množinu $(Q_A)_0$ rozdělit na dvě disjunktní neprázdné množiny Q'_0 a Q''_0 takové, že mezi nimi nejsou žádné šipky. Pokud $i \in Q'_0$ a $j \in Q''_0$, pak $e_iAe_j = e_jAe_i = 0$, pak dle [1] Lemma II.1.6 A není souvislá, což je spor.

□

Lemma 2.100. *Nechť Q je konečný a souvislý toulec, I přípustný ideál KQ a $A = KQ/I$. Pak $Q_A = Q$.*

Důkaz. Dle Věty 2.93 (a) je $\{e_a = \epsilon_a | \ a \in Q_0\}$ úplná množina ortogonálních idempotentů $A = KQ/I$. Tedy vrcholy v Q_A jsou v bijektivní korespondenci s vrcholy v Q. A dle Důsledku 2.94 jsou šipky z a do b v Q v bijektivní korespondenci s vektory v bázi K-vektorového prostoru $e_a(rad(A)/rad^2(A))e_b$ a tedy s šipkami z a do b v Q_A. □

Věta 2.101. *Nechť A je základní, souvislá, elementární a konečně dimenzionální K-algebra. Pak existuje přípustný ideál I algebry KQ_A takový, že $A \simeq KQ_A/I$.*

Důkaz. Pro každou šipku $\alpha : i \to j$ v $(Q_A)_1$ buď $x_\alpha \in rad(A)$ takové, že $\{x_\alpha + rad^2(A) | \alpha : i \to j\}$ tvoří bázi $e_i(rad(A)/rad^2(A))e_j$. Definujme dvě zobrazení:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_0 : (Q_A)_0 & \to & A \\ a & \mapsto & e_a \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : (Q_A)_1 & \to & A \\ \alpha & \mapsto & x_\alpha \end{array}$$

Pak prvky $\varphi_0(a)$ tvoří úplnou množinu primitivních ortogonálních idempotentů A a pokud $\alpha : a \to b$, pak máme

$$\varphi_0(a)\varphi_1(\alpha)\varphi_0(b) = e_a x_\alpha e_b = x_\alpha = \varphi_1(\alpha).$$

Dle [1] Proposition II.1.8 lze φ_0 a φ_1 jednoznačně rozšířit na homomorfismus K-algeber

$$\varphi : KQ_A \to A.$$

Tato vlastnost se nazývá univerzální vlastnost K-algeber.

Ukážeme, že φ je epimorfismus. Jeho obraz je generovaný prvky e_a ($a \in (Q_A)_0$) a x_α ($\alpha \in (Q_A)_1$) a tedy stačí ukázat, že tyto prvky generují celé A. Protože K je algebraicky uzavřené, plyne z Wedderburn-Malcevovi věty ([1] I.1.6), že je kanonický homomorfismus $A \to A/rad(A)$ štěpitelný a A je štěpitelné rozšíření polojednoduché algebry $A/rad(A)$ podle $rad(A)$. Protože $A/rad(A)$ je generované prvky e_a, zbývá dokázat, že každý prvek $rad(A)$ může být zapsán jako polynom v x_α. A to plyne z Lemma 2.99 (c).

Zbývá ukázat, že $I = Ker\varphi$ je přípustný. Nechť R značí šipkový ideál algebry KQ_A. Z definice φ máme $\varphi(R) \subseteq rad(A)$ a tedy $\varphi(R^l) \subseteq rad^l(A)$ pro $l \geq 1$. Protože $rad(A)$ je nilpotentní, existuje $m \geq 1$ takový, že $rad^m(A) = 0$ a tedy $R^m \subseteq Ker\varphi = I$. Nyní dokážeme, že $I \subseteq R^2$. Buď $x \in I$, pak můžeme x zapsat jako

$$x = \textstyle\sum_{a \in (Q_A)_0} \epsilon_a \lambda_a + \sum_{\alpha \in (Q_A)_1} \alpha \mu_\alpha + y,$$

kde $\lambda_a, \mu_\alpha \in K$ a $y \in R^2$. Pokud $(x) = 0$, pak

$$0 = \textstyle\sum_{a \in (Q_A)_0} e_a \lambda_a + \sum_{\alpha \in (Q_A)_1} x_\alpha \mu_\alpha + \varphi(y).$$

Pak ale máme

$$\textstyle\sum_{a \in (Q_A)_0} e_a \lambda_a = -\sum_{\alpha \in (Q_A)_1} x_\alpha \mu_\alpha - \varphi(y) \in rad(A).$$

Protože $Rad(A)$ je nilpotentní a e_a jsou ortogonální idempotenty, musí být $\lambda_a = 0$ pro každé $a \in (Q_A)_0$. Podobně máme

$$\sum_{\alpha \in (Q_A)_1} x_\alpha \mu_\alpha = -\varphi(y) \in rad^2(A)$$

a tedy $\sum_{\alpha \in (Q_A)_1} (x_\alpha + rad^2(A))\mu_\alpha = 0$ platí v $rad(A)/rad^2(A)$. Ale množina $\{x_\alpha + rad^2(A) | \alpha \in (Q_A)_1\}$ je z báze $rad(A)/rad^2(A)$ a tedy $\mu_\alpha = 0$ pro každé $\alpha \in (Q_A)_1$ a tím pádem $x = y \in R^2$. □

2.3.3 Reprezentace a moduly

Definice 2.102. Nechť Q je toulec. K-lineární reprezentaci M toulce Q definujeme následovně:

(a) Každému bodu $a \in Q_0$ přiřadíme K-vektorový prostor M_a.

(b) Každé šipce $\alpha : a \to b \in Q_1$ přiřadíme K-lineární zobrazení $\varphi_\alpha : M_a \to M_b$.

Takovou reprezentaci budeme značit $M = (M_a, \varphi_\alpha)_{a \in Q_0, \alpha \in Q_1}$, nebo jednoduše $M = (M_a, \varphi_\alpha)$. Nazveme ji konečnou, pokud každý vektorový prostor M_a je konečně dimenzionální.

Nechť $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ a $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)$ jsou dvě reprezentace toulce Q. Morfismus reprezentací $f : M \to M'$ je množina $f = (f_a)_{a \in Q_0}$ K-lineárních zobrazení $f_a : M_a \to M'_a$ takových, že jsou kompatibilními se zobrazeními φ_a a φ'_a, neboli pro každou šipku $\alpha : a \to b$ máme $\varphi'_\alpha f_a = f_b \varphi_\beta$ a tedy následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd} M_a \arrow[r, "\varphi_a"] \arrow[d, "f_a"] & M_b \arrow[d, "f_b"] \\ M'_a \arrow[r, "\varphi'_a"] & M'_b \end{tikzcd}$$

Nechť jsou $f : M \to M'$ a $g : M' \to M''$ dva morfismy reprezentací Q, kde $f = (f_a)_{a \in Q_0}$ a $g = (g_a)_{a \in Q_1}$. Jejich složení definujme jako množinu $gf = (g_a f_a)_{a \in Q_1}$. Složením dvou morfismů reprezentací vznikne opět morfismus reprezentací.

K-lineární reprezentace toulce Q nám tedy spolu s jejich morfismy a skládáním morfismů tvoří kategorii $Re_K(Q)$. Jako $rep_k(Q)$ označíme její úplnou podkategorii sestávající z konečně dimenzionálních reprezentací.

Lemma 2.103. *Nechť Q je konečný toulec, pak jsou $Rep_K(Q)$ a $rep_K(Q)$ abelovské K-kategorie.*

Důkaz. [1] Lemma III.1.3. □

Definice 2.104. Nechť Q je konečný toulec a $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ reprezentace Q. Pro každou netriviální cestu $\omega = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l$ z a do b definujme vyhodnocení M na cestě ω jako K-lineární zobrazení z M_a do M_b definované:

$$\varphi_\omega : \varphi_{\alpha_l} \varphi_{\alpha_l - 1} \cdots \varphi_{\alpha_1}.$$

Definici vyhodnocení dále rozšíříme na K-lineární kombinace cest se stejným počátkem a koncem. Nechť

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \omega_i$$

je taková kombinace, kde pro každé i je $\lambda_i \in K$ a ω_i je cesta v Q, pak

$$\varphi_\rho = \sum_{i=1}^m \lambda_i \rho_{\omega_i}.$$

Definice 2.105. Nechť Q je konečný toulec a I přípustný ideál KQ. Řekneme, že reprezentace $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ toulce Q je omezená ideálem I, nebo že splňuje všechny relace z I, pokud

$$\varphi_\rho = 0, \text{ pro každou relaci } \rho \in I$$

Úplnou podkategorii $Rep_K(Q)$ (resp. $rep_K(Q)$) sestávající z reprezentací Q omezených ideálem I budeme značit $Rep_K(Q, I)$ (resp. $rep_K(Q, I)$).

Příklad 2.106. Nechť Q je toulec

$$\begin{tikzcd}
 & & \circ^3 \arrow[dl, "\beta"'] & \\
\circ^1 & \circ^2 \arrow[l, "\lambda"'] & & \circ^5 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\
 & & \circ^4 \arrow[ul, "\delta"] &
\end{tikzcd}$$

omezený relací komutativity $\alpha\beta = \gamma\delta$. Pak obě následující reprezentace jsou touto relací také omezeny:

$$\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[dl, "\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]"'] & \\
K & K^2 \arrow[l, "{[1,1]}"'] & & 0 \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & & K \arrow[ul, "\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[dl, "1"'] & \\
K & K \arrow[l, "1"'] & & K \arrow[ul, "1"'] \arrow[dl, "1"] \\
 & & K \arrow[ul, "1"] &
\end{tikzcd}$$

Naopak následující reprezentace touto relací omezená není:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[dl] & \\
K & K \arrow[l, "1"'] & & K \arrow[ul] \arrow[dl, "1"] \\
 & & K \arrow[ul, "1"] &
\end{tikzcd}$$

Věta 2.107. *Nechť $A = KQ/I$, kde Q je konečný souvislý toulec a I přípustný ideál KQ. Pak existuje K-lineární ekvivalence kategorií*

$$F : ModA \xrightarrow{\simeq} Rep_K(Q, I)$$

a její restrikce na konečné moduly a reprezentace

$$F : modA \xrightarrow{\simeq} rep_K(Q, I) \cdot$$

Důkaz.

(1) Nejprve zkonstruujeme funktor $F : mod(A) \to rep_K(Q, I)$. Nechť M_A je A-modul. Definujme K-lineární reprezentaci $F(M) = (M_a, \varphi_\alpha)_{a\in Q_0, \alpha\in Q_1}$ toulce Q následujícím způsobem:

(i) Pro $a \in Q_0$ buď $M_a := Me_a$, kde $e_a = \epsilon_a + I$ je idempotent $A = KQ/I$.

(ii) Pro $\varphi : a \to b$ v Q_1 definujme

$$\begin{array}{rcl}\varphi_\alpha : M_a & \to & M_b \\ x & \mapsto & x\overline{\alpha}(= xe_a\overline{\alpha}e_b),\end{array}$$

kde $\overline{\alpha} = \alpha + I$ je třída reprezentantů α modulo I.

Protože M je A-modul, tak φ_α je K-lineární zobrazení. Pak $F(M)$ je omezené ideálem I, protože pro relaci $\rho = \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i$ z a do b v I, kde $w_i = \alpha_{i,1}\alpha_{i,2}\dots\alpha_{i,l_i}$, máme

$$\begin{aligned}\varphi_\rho(x) &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_{w_i}(x) \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_{\alpha_{i,l_i}}\dots\varphi_{\alpha_{i,1}}(x) \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i(x\overline{\alpha}_{i,1}\dots\overline{\alpha}_{i,l_i}) \\ &= x\cdot\sum_{i=1}^m \lambda_i(\overline{\alpha}_{i,1}\dots\overline{\alpha}_{i,l_i}) \\ &= x\cdot\overline{\rho} = x0 = 0.\end{aligned}$$

Tím je definován náš funktor na objektech. Nechť $f : M_A \to M'_A$ je homomorfismus A-modulů. Chceme definovat morfismus $F(f) : F(M_A) \to F(M'_A)$ v $Rep_K(Q, I)$. Pro $a \in Q_0$ a $x = xe_a \in Me_a = M_a$ máme

$$f(xe_a) = f(xe_a^2) = f(xe_a)e_a \in M'e_a = M'_a.$$

Tedy restrikce f_a homomorfismu f na M_a je K-lineární zobrazení $f_a : M_a \to M'_a$. Položme $F(f) : (f_a)_{a\in Q_0}$. Zbývá ověřit, že pro každou šipku $\alpha : a \to b$ máme $\varphi'_\alpha f_a = f_b\varphi_\alpha$, z čehož plyne, že $F(f)$ je morfismem reprezentací. Nechť $x \in M_a$, pak

$$f_b\varphi_\alpha(x) = f_b(x\overline{\alpha}) = f(x)\overline{\alpha} = f_a(x)\overline{\alpha} = \varphi'_\alpha f_a(x).$$

Ověření toho, že F je K-lineární funktor $Mod(A) \to Rep_K(Q, I)$ a že se restriktuje na K-lineární funktor $mod(A) \to rep_K(Q, I)$ je již přímořaré a přenecháme ho čtenáři.

(2) Nyní zkonstruujeme K-lineární funktor $G : rep_K(Q, I) \to mod(A)$. Nechť (M_a, φ_α) je objekt $Rep_K(Q, I)$. Položme

$$G(M) := \bigoplus_{a\in Q_0} M_a$$

a definujme strukturu K-vektorového prostoru následujícím způsobem. Protože $A = KQ/I$, můžeme nejprve na $G(M)$ definovat KQ-modulovou strukturu a poté ukázat, že je anihilovaný ideálem I. Nechť tedy $(x_a)_{a\in Q_0}$ je z $G(M)$. Stačí nám definovat součin tvaru xw, kde w je libovolná cesta v Q. Pro $w = \epsilon_a$ stacionární cestu v a položíme

$$xw = x\epsilon_a = x_a.$$

Nechť $w = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_l$ je netriviální cesta z a do b a uvažujme K-lineární zobrazení $\varphi_w = \varphi_{\alpha_l}\dots\varphi_{\alpha_1} : M_a \to M_b$. Položme

$$(xw)_c = \delta_{bc}\varphi_w(x_a),$$

kde δ značí Kroneckerovu deltu. Jednoduše řečeno, xw je prvkem $G(M) = \bigoplus_{a\in Q_0} M_a$, jehož jedinou nenulovou složkou je $(xw)_b = \varphi_w(x_a) \in M_b$. Tím jsme ukázali, že $G(M)$ je KQ-modul. Navíc plyne z definice $G(M)$, že pro každou $\rho \in I$ a $x \in G(M)$ je $x\rho = 0$. Tedy $G(M)$ je i KQ/I-modulem při ztotožnění

$$x(v + I) = xv,$$

pro $x \in G(M)$ a $v \in KQ$. Tím je dán náš funktor na objektech. Nechť $(f_a)_{a\in Q_0}$ je morfismus z $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ do $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)$ v $Rep_K(Q, I)$. Chceme zkonstruovat morfismus A-modulů $f : G(M) \to G'(M)$. Protože $G(M) = \bigoplus_{a\in Q_0} M_a$ a $G(M) = \bigoplus_{a\in Q_0} M'_a$ jako K-vektorové prostory, existuje K-lineární zobrazení

$$f = \bigoplus_{a\in Q_0} f_a : G(M) \to G(M').$$

Ukážeme, že f je homomorfismus A-modulů, neboli, že pro každé $x \in G(M)$ $w \in KQ/I$ platí $f(xw) = f(x)w$. Postačí nám to dokázat pro $x = x_a \in M_a$ a $w = w + I$, kde w je cesta z a do b v Q. Pak

$$\begin{aligned} f(xw) &= f(x_a w) \\ &= f_b\varphi_w(x_a) \\ &= \varphi'_w f_a(x_a) \\ &= f_a(x_a)w \\ &= f(x)w. \end{aligned}$$

Nyní je již přímočaré dokázat, že G je K-lineární funktor, který se restriktuje na K-lineární funktor $modA \to rep_K(Q, I)$. A je jednoduché ověřit, že $FG \simeq 1_{Rep_K(Q,I)}$ a $GF \simeq 1_{Mod(A)}$.

(3) Druhá část tvrzení plyne z toho, že protože Q je konečný, tak pro K-lineární reprezentaci $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ omezeného toulce (Q, I), je

$$dim_K(\bigoplus_{a\in Q_0} M_a) < \infty$$

právě tehdy, když $dim_K M_a < \infty$ pro každé $a \in Q_0$.

$\square$

Důsledek 2.108. Nechť Q je konečný, souvislý a acyklický toulec. Pak existuje ekvivalence kategorií $ModKQ \simeq Rep_K(Q)$ a její restrikce $modKQ \simeq rep_K(Q)$.

Důkaz. Jelikož je Q konečný, tak algebra KQ je konečně dimenzionální dle Lemma 2.82. Tvrzení plyne z Věty 2.107, položíme-li $I = 0$. $\square$

Poznámka 2.109. Soubor $\{e_a | a \in Q_0\}$ je úplná množina primitivních ortogonálních idempotentů algebry A. Rozklad $A_A = \bigoplus_{a\in Q_0} e_a A$ je rozkladem A_A na direktní součet po dvou neizomorfních nerozložitelných projektivních $A-$modulů.

V následující větě popíšeme projektivní moduly $P(a) = e_a A$ jako reprezentace toulce Q.

Věta 2.110. *Nechť (Q, I) je omezený toulec, $A = KQ/I$ a $P(a) = \epsilon_a A$, kde $a \in Q_0$. Pokud $P(a) = (P(a)_b, \varphi_\beta)$ jako reprezentace Q, pak $P(a)_b$ je K-vektorový prostor s množinou generátorů $\{\bar{\omega} = \omega + I |\ \omega$ je cesta z a do $b\}$ a pro šipku $\beta : b \to c$ je K-lineární zobrazení $\varphi_\beta : P(a)_b \to P(a)_c$ definované jako násobení zprava $\bar{\beta} = \beta + I$.*

Důkaz. Z definice funktoru ekvivalence ve Větě 2.107 plyne, že pro korespondující reprezentaci A-modulu $P(a)_A = e_a A$ máme pro každé $b \in Q_0$:

$$P(a)_b = P(a)e_b = e_a A e_b = e_a(KQ/I)e_b = (\epsilon_a(KQ)\epsilon_b)/(\epsilon_a I \epsilon_b).$$

Navíc je-li $(\beta : b \to c) \in Q_1$, pak $\varphi_\beta : e_a A e_b \to e_a A e_c$ je dáno násobením zprava $\bar{\beta} = \beta + I$, neboli máme-li $\bar{\omega} = \omega + I$ třídu cest z a do b, pak $\varphi_\beta(\bar{\omega}) = \bar{\omega}\bar{\beta}$. $\square$

Definice 2.111. Definujme pro každé $a \in Q_0$ reprezentaci $S(a)$ toulce Q následovně:

(a) Položme vektorový prostor $S(a)_a = K$ a všechny ostatní vektorové prostory $S(a)_b$, kde $b \neq a$, položme rovné nule.

(b) Všem šipkám z Q_1 přiřaďme nulová zobrazení.

Poznámka 2.112. Poznamenejme, že pro každé $a \in Q_0$ je $S(a)$ jednoduchý modul.

3. Algoritmus

V této kapitole popíšeme algoritmus pro nalezení generátoru skoro štěpitelných posloupností končících v nerozložitelném a neprojektivním modulu X. Konstrukce algoritmu je vychází z diplomové práce [3] Tea Sormbroen Lian: Computing almost split sequences. Co se týče teorie, tak navážeme na části 2.2 a A-modulem budeme rozumět levý modul.

V první části zkonstruujeme čtyři potřebné izomorfismy pro obecný komutativní, artinovský, lokální okruh R. V druhé části konečně popíšeme algoritmus pro jednodušší případ, kdy $R = K$ bude těleso.

3.1 Konstrukce potřebných izomorfismů

V celé této části budeme pracovat nad pevně zvoleným komutativním, artinovským, lokálním okruhem R a artinovskou R-algebrou A. Dále nechť X je pevně zvolený, neprojektivní, nerozložitelný A-modul a zvolme pevně jeho projektivní prezentaci

$$P_1 \xrightarrow{s} P_0 \xrightarrow{t} X \longrightarrow 0$$

a jako δ označme libovolnou krátkou exaktní posloupnost A-modulů

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0 \cdot$$

3.1.1 Izomorfismus $\varphi_{P,Y}$

Naším cílem je zkonstruovat R-izomorfismus

$$\varphi_{P,Y} : Hom_A(P,Y) \to Hom_A(P,A) \otimes_A Y,$$

kde $P, Y \in mod(A)$ a P je projektivní.

Lemma 3.1. *Nechť $Y \in mod(A)$ a $P \in P(A)$. Definujme zobrazení*

$$\alpha_{P,Y} : Hom_A(P,A) \otimes_A Y \to Hom_A(P,Y)$$

předpisem

$$\alpha_{P,Y}(f \otimes y) := [p \mapsto f(p)y].$$

Zobrazení $\alpha_{P,Y}$ je homomorfismem R-modulů přirozeným ve složkách P i Y.

Důkaz. Vidíme, že $[p \mapsto f(p)y] \in Hom_A(P,Y)$ pro libovolný $f \in Hom_A(P,Y)$ a $y \in Y$, protože

$$f(p + \lambda p')y = f(p)y + f(p')y$$

pro každé $p, p' \in P$ a $\lambda \in A$. Nechť navíc $r \in R$, $f \in Hom_A(P,A)$ a $y \in Y$. Pak

$$\begin{aligned} r \cdot \alpha_{P,Y}(f \otimes y) &= r[p \mapsto f(p)y] \\ &= [p \mapsto r(f(p)y)] \\ &= [p \mapsto (rf(p))y] \\ &= [p \mapsto (rf)(p)y] \\ &= \alpha_{P,Y}(rf \otimes y) \\ &= \alpha_{P,Y}(r \cdot f \otimes y) \end{aligned}$$

a $\alpha_{P,Y}$ je homomorfismem R-modulů.

Dokážeme nyní, že $\alpha_{P,Y}$ je přirozené v P. Mějme libovolné $P, P' \in P(A)$ a $h \in Hom_A(P,P')$. Musíme dokázat, že následující diagram komutuje:

$$
\begin{tikzcd}
Hom_A(P',A)\otimes_A Y \arrow[r, "\alpha_{P',Y}"] \arrow[d, "(-\circ h)_A\otimes 1_Y"'] & Hom_A(P',Y) \arrow[d, "(-\circ h)_Y"] \\
Hom_A(P,A)\otimes_A Y \arrow[r, "\alpha_{P,Y}"] & Hom_A(P,Y)
\end{tikzcd}
$$

Nechť $f \otimes y \in Hom_A(P', A) \otimes_A Y$, pak

$$(- \circ h)_A \otimes \alpha_{P',Y}(f \otimes y) = (- \circ h)_A \otimes ([p' \mapsto f(p')y]) = [p \mapsto f(h(p))y]$$

a

$$\alpha_{P,Y} \circ [(- \circ h)_A \otimes 1_Y](f \otimes y) = \alpha_{P,Y}(fh \otimes y) = [p \mapsto f(h(p))y].$$

Diagram tedy komutuje.

Dále dokážeme přirozenost $\alpha_{P,Y}$ v Y. Nechť tedy $Y, Y' \in mod(A)$ a $g \in Hom_A(Y, Y')$. Musíme dokázat, že následující diagram komutuje:

$$
\begin{tikzcd}
Hom_A(P,A)\otimes_A Y \arrow[r, "\alpha_{P,Y}"] \arrow[d, "1_{Hom_A(P,A)}\otimes g"'] & Hom_A(P,Y) \arrow[d, "(g\circ -)_P"] \\
Hom_A(P,A)\otimes_A Y' \arrow[r, "\alpha_{P,Y'}"] & Hom_A(P,Y')
\end{tikzcd}
$$

Nechť $f \otimes y \in Hom_A(P, A) \otimes_A Y$. Pak

$$(g \circ -)_P \circ \alpha_{P,Y}(f \otimes y) = (g \circ -)_P([p \mapsto f(p) \cdot y]) = [p \mapsto g(f(p) \cdot y)]$$

a

$$\alpha_{P,Y'} \circ [1_{Hom_A(P,A)} \otimes g](f \otimes y) = \alpha_{P,Y'}(f \otimes g(y)) = [p \mapsto f(p) \cdot g(y)].$$

Protože $f(p) \in A$ a pro každé $p \in P$ je g A-modulovým homomorfismem, tak máme rovnost

$$g(f(p) \cdot y) = f(p) \cdot g(y).$$

Diagram tedy komutuje i tímto směrem a náš homomorfismus je přirozený v obou proměných P i Y. □

Lemma 3.2. *Nechť $Y \in mod(A)$. Definujme zobrazení*

$$\varphi_{A,Y} : Hom_A(A, Y) \to Hom_A(A, A) \otimes_A Y$$

předpisem

$$\varphi_{A,Y}(g) := 1_A \otimes g(1_A).$$

Zobrazení $\varphi_{A,Y}$ je homomorfismem R-modulů a je inverzní k $\alpha_{A,Y}$.

Důkaz. Jasně $1_A \otimes g(1_A) \in Hom_A(A, A) \otimes_A Y$. Nejprve ukážeme, že $\varphi_{A,Y}$ je homomorfismus R-modulů. Nechť $r \in R$ a $g \in Hom_A(A, Y)$. Pak

$$\begin{aligned}
\varphi_{A,Y}(rg) &= 1_A \otimes (rg)(1_A) \\
&= 1_A \otimes (r1_A)(g(1_A)) \\
&= r1_A \otimes (g(1_A)) \\
&= r \cdot 1_A \otimes (g(1_A)) \\
&= r\varphi_{A,Y}(g).
\end{aligned}$$

Dále ukážeme, že platí následující dvě rovnosti:

$$\begin{aligned}
\varphi_{A,Y}\alpha_{A,Y} &= 1_{Hom_A(A,A)\otimes_A Y} \\
\alpha_{A,Y}\varphi_{A,Y} &= 1_{Hom_A(A,Y)}
\end{aligned}$$

Nechť $f \in Hom_A(A, A)$, $g \in Hom_A(A, Y)$ a $y \in Y$, pak

$$\begin{aligned}
\varphi_{A,Y}\alpha_{A,Y}(f \otimes g) &= \varphi_{A,Y}([\lambda \mapsto f(\lambda)y]) \\
&= 1_A \otimes f(1_A)y5 \\
&= 1_A f(1_A) \otimes Y \\
&= f \otimes y
\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}
\alpha_{A,Y}\varphi_{A,Y}(g) &= \alpha_{A,Y}(1_A \otimes g(1_A)) \\
&= [\lambda \mapsto 1_A(\lambda)g(1_A)] \\
&= [\lambda \mapsto \lambda g(1_A) = g(\lambda)] = g.
\end{aligned}$$

Pak $\varphi_{A,Y}$ a $\alpha_{A,Y}$ jsou vzájemně inverzní homomorfismy. □

Lemma 3.3. *Nechť $P, Y \in mod(A)$, pak platí:*

(a) $P^* = Hom_A(P, A) \in mod(A^{op})$

(b) $P^* \otimes Y = Hom_A(P, A) \otimes_A Y \in mod(R)$, *kde násobení prvky R definujeme následovně:*

$$r \cdot f \otimes y := (rf) \otimes y$$

(c) $Hom_A(P, Y) \in mod(R)$, *kde násobení prvky R definujeme následovně:*

$$(rf)(p) := r(f(p))$$

Důkaz. To že je modulová struktura u (b) a (c) dobře definovaná je zřejmé. Ověříme pouze u všech tří případů, že se jedná o konečně generované moduly.

(a) Funktor $()^*$ je funktorem $P(A) \to P(A^{op})$ a tedy P^* je projektivní modul, který je dle Věty 2.31 direktním součtem konečného počtu A-modulů generovaných jedním prvkem. Je tedy sám konečně generovaný.

(b) Tenzorový součin $P^* \otimes Y$ je faktor R-modulu kartézského součinu dvou konečně generovaných R-modulů a je tedy sám konečně generovaný.

(c) Plyne z (b) a z izomorfismu z Lemma 3.2.

$\square$

Homomorfismy $\varphi_{A,Y}$ a $\alpha_{A,Y}$ jsou vzájemně inverzní, jde tedy o izomorfismy. Označme $\varphi^n_{A,Y}$ diagonální $n \times n$ matici, jejíž všechny nenulové prvky jsou rovny $\varphi_{A,Y}$. Ta definuje zobrazení

$$\varphi^n_{A,Y} : Hom_A(A,Y)^n \to (Hom_A(A,A) \otimes_A Y)^n$$

předpisem

$$\{f_i\}_{i=1}^n \mapsto \{\varphi_{A,Y}(f_i)\}_{i=1}^n.$$

Víme, že $\varphi_{A,Y}$ je izomorfismus, pak je jím také $\varphi^n_{A,Y}$.

Nyní se již pustíme do konstrukce cílového homomorfismu $\varphi_{P,Y}$. Následující diagram ilustruje postup, kterým ve třech krocích nalezneme hledaný izomorfismus $\varphi_{P,Y} : Hom_A(P,Y) \to Hom_A(P,A) \otimes_A Y$:

$$\begin{tikzcd}
(Hom_A(A,Y))^n \arrow[r, "\varphi^n_{A,Y}"] & (Hom_A(A,A) \otimes_A Y)^n \arrow[d] \\
Hom_A(A^n,Y) \arrow[u] \arrow[r, dotted, "\varphi_{A^n,Y}"'] & Hom_A(A^n,A) \otimes_A Y \arrow[d] \\
Hom_A(P \oplus P',Y) \arrow[u] \arrow[r, dotted, "\varphi_{P\oplus P',Y}"'] & Hom_A(P \oplus P',A) \otimes_A Y \arrow[d] \\
Hom_A(P,Y) \arrow[u] \arrow[r, dotted, "\varphi_{P,Y}"'] & Hom_A(P,A) \otimes_A Y
\end{tikzcd}$$

Budeme tímto diagramem postupovat odshora, od nám již známého izomorfismu $\varphi^n_{A,Y}$ k hledanému izomorfismu $\varphi_{P,Y}$.

Krok 1: Buď $\{\nu_i : A \to A^n\}_{i=1}^n$ množina kanonických inkluzí a $\{\rho_i : A^n \to A\}_{i=1}^n$ množina kanonických projekcí. Definujme homomorfismus A^{op}-modulů

$$\xi_1 : Hom_A(A^n,Y) \to (Hom_A(A,Y))^n$$

předpisem $f \mapsto \{f\nu_i\}_{i=1}^n$ a homomorfismus R-modulů

$$\xi_2 : (Hom_A(A,A) \otimes_A Y)^n \to Hom_A(A^n,A) \otimes_A Y$$

předpisem $\{g_i \otimes y_i\}_{i=1}^n \mapsto \sum_{i=1}^n g_i\rho_i \otimes y_i$. Složíme-li nyní ξ_1 a ξ_2 s izomorfismem $\varphi^n_{A,Y}$ na $\varphi_{A^n,Y} := \xi_2 \circ \varphi^n_{A,Y} \circ \xi_1$, dostaneme diagram:

$$\begin{tikzcd}
(Hom_A(A,Y))^n \arrow[r, "\varphi^n_{A,Y}"] & (Hom_A(A,A) \otimes_A Y)^n \arrow[d, "\xi_2 : \{g_i \otimes \omega_i\}_{i=1}^n \mapsto \sum_{i=1}^n g_i\rho_i \otimes \omega_i"] \\
Hom_A(A^n,Y) \arrow[u, "\xi_1 : f \mapsto \{f\nu_i\}_{i=1}^n"'] \arrow[r, dotted, "\varphi_{A^n,Y}"'] & Hom_A(A^n,A) \otimes_A Y
\end{tikzcd}$$

Pro $h \in Hom_A(A^n, Y)$ platí:

$$\begin{aligned}
\varphi_{A^n,Y}(h) &= \xi_2 \circ \varphi^n_{A,Y} \circ \xi_1(h) \\
&= \xi_2 \circ \varphi^n_{A,Y}(\{h\nu_i\}_{i=1}^n) \\
&= \xi_2(\{\varphi_{A,Y}(h\nu_i)\}_{i=1}^n) \\
&= \xi_2(\{1_A \otimes h\nu_i(1_A)\}_{i=1}^n) \\
&= \sum_{i=1}^n \rho_i \otimes h\nu_i(1_A)
\end{aligned}$$

Krok 2: Nyní přejdeme k dalšímu kroku. Dle Věty 2.34 existuje $n \in \mathbb{N}$ a projektivní A-modul P_0' takové, že $P_0 \oplus P_0' \simeq A^n$. Označme tento A-modulový izomorfismus $\psi : P_0 \oplus P_0' \simeq A^n$. Izomorfismus ψ nám definuje další dva R-modulové homomorfismy:

$$\begin{aligned}
(- \circ \psi^{-1})_Y &: Hom_A(P \oplus P', Y) \to Hom_A(A^n, Y) \\
(- \circ \psi)_A \otimes 1_Y &: Hom_A(A^n, A) \otimes_A Y \to Hom_A(P \oplus P', A) \otimes_A Y
\end{aligned}$$

Položme nyní $\varphi_{P \oplus P',Y} := [(- \circ \psi)_A \otimes 1_Y] \circ \varphi_{A^n,Y} \circ [(- \circ \psi^{-1})_Y]$. Celý krok ilustruje následující diagram:

$$\begin{tikzcd}
Hom_A(A^n, Y) \arrow[r, dotted, "\varphi_{A^n,Y}"'] & Hom_A(A^n, A) \otimes_A Y \arrow[d, "(-\circ\psi)_A \otimes 1_Y"] \\
Hom_A(P \oplus P', Y) \arrow[u, "(-\circ\psi^{-1})_Y"] \arrow[r, dotted, "\varphi_{P\oplus P',Y}"'] & Hom_A(P \oplus P', A) \otimes_A Y
\end{tikzcd}$$

Pak pro $h \in Hom_A(P \oplus_A P', Y)$ platí:

$$\begin{aligned}
\varphi_{P \oplus P',Y}(h) &= [(- \circ \psi)_A \otimes 1_Y] \circ \varphi_{A^n,Y} \circ [(- \circ \psi^{-1})_Y](h) \\
&= [(- \circ \psi)_A \otimes 1_Y] \circ \varphi_{A^n,Y}(h\psi^{-1}) \\
&= [(- \circ \psi)_A \otimes 1_Y](\sum_{i=1}^n \rho_i \otimes h\psi^{-1}\nu_i(1_A)) \\
&= \sum_{i=1}^n \rho_i\psi \otimes h\psi^{-1}\nu_i(1_A)
\end{aligned}$$

Krok 3: Postupme nyní k poslednímu třetímu kroku konstrukce. Uvažujme kanonickou projekci

$$\pi : P \oplus P' \to P$$

modulu $P \oplus P'$ na P a kanonickou inkluzi

$$\mu : P \to P \oplus P'$$

modulu P do $P \oplus P'$. Ty nám definují dva R-modulové homomorfismy:

$$\begin{aligned}
(- \circ \pi)_Y &: Hom_A(P, Y) \to Hom_A(P \oplus P', Y) \\
(- \circ \mu) \otimes 1_Y &: Hom_A(P \oplus P', A) \otimes_A Y \to Hom_A(P, A) \otimes_A Y
\end{aligned}$$

Definujme homomorfismus $\varphi_{P,Y} : Hom_A(P,Y) \to Hom_A(P,A) \otimes_A Y$ vztahem:

$$\varphi_{P,Y} := [(- \circ \mu) \otimes 1_Y] \circ \varphi_{P\otimes P',Y} \circ (- \circ \pi)_Y$$

$$\begin{tikzcd}
Hom_A(P \oplus P', Y) \arrow[r, dotted, "\varphi_{P\oplus P',Y}"'] & Hom_A(P \oplus P', A) \otimes_A Y \arrow[d, "((-\circ\mu)_A \otimes 1_Y"] \\
Hom_A(P,Y) \arrow[u, "(-\circ\pi)_Y"] \arrow[r, dotted, "\varphi_{P,Y}"'] & Hom_A(P,A) \otimes_A Y
\end{tikzcd}$$

Pro $h \in Hom_A(P,Y)$ pak platí:

$$\begin{aligned}
\varphi_{P,Y}(h) &= [(- \circ \mu) \otimes 1_Y] \circ \varphi_{P\otimes P',Y} \circ (- \circ \pi)_Y(h) \\
&= [(- \circ \mu) \otimes 1_Y] \circ \varphi_{P\otimes P',Y}(h\pi) \\
&= [(- \circ \mu) \otimes 1_Y][\sum_{i=1}^{n} \rho_i\psi \otimes h\pi\psi^{-1}\nu_i(1_A)] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \rho_i\psi\mu \otimes h\pi\psi^{-1}\nu_i(1_A)
\end{aligned}$$

Věta 3.4. *Zobrazení $\varphi_{P,Y} : Hom_A(P,Y) \to Hom_A(P,A) \otimes_A Y$, definované*

$$\varphi_{P,Y}(h) := \textstyle\sum_{i=1}^{n} \rho_i\psi\mu \otimes h\pi\psi^{-1}\nu_i(1_A)$$

pro $h \in Hom_A(P,Y)$, je izomorfismem R-modulů, který je přirozený v P a Y.

Důkaz. Zobrazení $\varphi_{P,Y}$ je konstruováno pouhým skládáním homomorfismů R-modulů, je tedy také R-modulovým homomorfismem.

Abychom dokázali, že se jedná o izomorfismus, dokážeme, že je inverzní k homomorfismu $\alpha_{P,Y}$ definovanému v Lemma 3.1. Nechť tedy $h \in Hom_A(P,Y)$, pak

$$\begin{aligned}
\alpha_{P,Y}\varphi_{P,Y}(h) &= \alpha_{P,Y}\left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i\psi\mu \otimes h\pi\psi^{-1}\nu_i(1_A)\right) \\
&= \left[p \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\rho_i\psi\mu(p)}_{\in A} \cdot \underbrace{h\pi\psi^{-1}\nu_i}_{A-hom.}(1_A)\right)\right] \\
&= \left[p \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} h\pi\psi^{-1}\nu_i\rho_i\psi\mu(p)\right)\right] \\
&= \left[p \mapsto h\pi\psi^{-1} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \nu_i\rho_i\right)}_{=1_{A^n}} \psi\mu(p)\right] \\
&= [p \mapsto h(p)] \\
&= h.
\end{aligned}$$

Opačně nechť $f \otimes y \in Hom_A(P, A) \otimes_A Y$, pak

$$\begin{aligned}
\varphi_{P,Y}\alpha_{P,Y}(f \otimes y) &= \varphi_{P,Y}([p \mapsto f(p) \cdot y]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \rho_i\psi\mu \otimes [p \mapsto f(p) \cdot y](\pi\psi^{-1}\nu_i(1_A)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \rho_i\psi\mu \otimes \underbrace{f\pi\psi^{-1}\nu_i(1_A)}_{\in A} \cdot y \\
&= \sum_{i=1}^{n} \rho_i\psi\mu \cdot \underbrace{f\pi\psi^{-1}\nu_i(1_A)}_{\in A} \otimes y \\
&= \left[p \mapsto \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\rho_i\psi\mu(p)}_{\in A} \cdot \underbrace{f\pi\psi^{-1}\nu_i}_{A-hom.}(1_A)\right] \otimes y \\
&= \left[p \mapsto \sum_{i=1}^{n} f\pi\psi^{-1}\nu_i(\rho_i\psi\mu(p))\right] \otimes y \\
&= f\pi\psi^{-1}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \nu_i\rho_i}_{=1_{A^n}}\right)\psi\mu \otimes y \\
&= f \otimes y.
\end{aligned}$$

Homomorfismus $\varphi_{P,Y}$ je tedy inverzní k $\alpha_{P,Y}$ a tedy izomorfimus. Přirozenost v P a Y plyne z přirozenosti $\alpha_{P,Y}$ v P a Y dokázané v Lemma 3.1. □

3.1.2 Izomorfismus $\sigma_{\delta,X}$

Naším cílem je zkonstruovat $\underline{End}_A(X)^{op}$-izomorfismus

$$\sigma_{\delta,X} : \delta^*(X) \to Ker(1_{Tr(X)} \otimes f).$$

Aplikujme funktor $()^*$ na minimální projektivní prezentaci modulu X. Dostaneme následující krátkou exaktní posloupnost v $mod(A^{op})$, kde $\hat{t}$ značí kanonickou projekci $Hom_A(P_1, Y) \to Tr(X) = Cok((- \circ s)_A)$:

$$Hom_A(P_0, A) \xrightarrow{(-\circ s)_A} Hom_A(P_1, A) \xrightarrow{\hat{t}} Tr(X) \longrightarrow 0 \qquad *$$

Dále připomeňme následující funktory, kde $Y \in mod(A)$:

$$Hom_A(-, Y) : mod(A) \to mod(R)$$

$$- \otimes_A Y : Mod(A^{op}) \to Mod(R)$$

Aplikujeme-li funktor $Hom_A(-, Y)$ na minimální projektivní prezentaci modulu X a funktor $-\otimes_A Y$ na posloupnost $*$, dostaneme následující komutativní diagram s exaktními řádky v $mod(R)$ (moduly ve spodním řádku jsou konečně generované jakožto izomorfní obrazy konečně generovaných modulů v horním řádku):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Hom_A(X,Y) \arrow[r, "(-\circ t)_Y"] & Hom_A(P_0,Y) \arrow[r, "(-\circ s)_Y"] \arrow[d, "\varphi_{P_0,Y}"] & Hom_A(P_1,Y) \arrow[d, "\varphi_{P_1,Y}"] & & \\
& & Hom_A(P_0,A)\otimes_A Y \arrow[r, "(-\circ s)_A\otimes 1_Y"] & Hom_A(P_1,A)\otimes_A Y \arrow[r, "\hat{t}\otimes 1_Y"] & Tr(X)\otimes_A Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Definice 3.5. Nechť $Y \in mod(A)$. Definujme homomorfismus R-modulů

$$\phi_Y : Hom_A(P_1, Y) \to Tr(X) \otimes_A Y$$

vztahem

$$\phi_Y := [\hat{t} \otimes 1_Y] \circ \varphi_{P_1,Y}.$$

Poznámka 3.6. Pro $h \in Hom_A(P_1, Y)$ máme

$$\begin{aligned}
\phi_Y(h) &= [\hat{t} \otimes 1_Y] \circ \varphi_{P_1,Y}(h) \\
&= [\hat{t} \otimes 1_Y] \left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i \psi \mu \otimes h\pi\psi^{-1}\nu_i(1_A) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \hat{t}(\rho_i \psi \mu) \otimes h\pi\psi^{-1}\nu_i(1_A)
\end{aligned}$$

Lemma 3.7. *Homomorfismus R-modulů ϕ_Y je přirozený v Y a následující posloupnost R-modulů je exaktní:*

$$0 \longrightarrow Hom_A(X,Y) \xrightarrow{(-\circ t)_Y} Hom_A(P_0,Y) \xrightarrow{(-\circ s)_Y} Hom_A(P_1,Y) \xrightarrow{\phi_Y} Tr(X) \otimes_A Y \longrightarrow 0$$

Důkaz. Diagram komutuje díky přirozenosti $\varphi_{P,Y}$. Exaktnost posloupnosti plyne z definice ϕ_Y a Lemma 2.25.

Ukážeme nyní, že ϕ_Y je přirozené v Y. Nejprve ukážeme, že homomorfismus $\hat{t} \otimes 1_Y$ je v Y přirozený. Nechť $Y, Y' \in mod(A)$ a nechť $h \in Hom_A(Y, Y')$. Pak

$$\begin{tikzcd}
Hom_A(P_1,Y)\otimes_A Y \arrow[r, "\hat{t}\otimes 1_Y"] \arrow[d, "1_{Hom_A(P_1,Y)}\otimes h"'] & Tr(X)\otimes_A Y \arrow[d, "1_{Tr(X)}\otimes h"] \\
Hom_A(P_1,Y)\otimes_A Y' \arrow[r, "\hat{t}\otimes 1'_Y"] & Tr(X)\otimes_A Y'
\end{tikzcd}$$

zřejmě komutuje, protože

$$[1_{Tr(X)} \otimes h] \circ [\hat{t} \otimes 1_Y] = \hat{t} \otimes h = [\hat{t} \otimes 1'_Y] \circ [1_{Hom_A(P_1,A)} \otimes h].$$

Navíc protože dle Věty 3.4 je $\varphi_{P_1,Y}$ přirozený v Y, je jejich složení ϕ_Y také přirozené v Y. $\square$

Připomeňme, že jsme si jako na začátku této kapitoly zvolili pevně exaktní posloupnost A-modulů δ

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0 \cdot$$

Věta 3.8. *Následující diagram je komutativní a jeho řádky i sloupce jsou exaktní posloupnosti R-modulů:*

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & Ker(1_{Tr(X)} \otimes f) \arrow[d, hook] & \\
0 \arrow[r] & Hom_A(X,M) \arrow[r, "(-\circ t)_M"] \arrow[d, "(f\circ -)_X"'] & Hom_A(P_0,M) \arrow[r, "(-\circ s)_M"] \arrow[d, "(f\circ -)_{P0}"'] & Hom_A(P_1,M) \arrow[r, "\phi_M"] \arrow[d, "(f\circ -)_{P1}"'] & Tr(X) \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, "1_{Tr(X)}\otimes f"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & Hom_A(X,N) \arrow[r, "(-\circ t)_N"] \arrow[d, "(g\circ -)_X"'] & Hom_A(P_0,N) \arrow[r, "(-\circ s)_N"] \arrow[d, "(g\circ -)_{P0}"'] & Hom_A(P_1,N) \arrow[r, "\phi_N"] \arrow[d, "(g\circ -)_{P1}"'] & Tr(X) \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d, "1_{Tr(X)}\otimes g"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & Hom_A(X,L) \arrow[r, "(-\circ t)_L"] \arrow[d] & Hom_A(P_0,L) \arrow[r, "(-\circ s)_L"] \arrow[d] & Hom_A(P_1,L) \arrow[r, "\phi_L"] \arrow[d] & Tr(X) \otimes_A L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \delta^*(X) \arrow[d] & 0 & 0 & 0 & \\
 & 0 & & & &
\end{tikzcd}$$

Důkaz. Exaktnost řádků a komutativita pravých čtverců plyne z Lemma 3.7. Zbytek diagramu komutuje z asociativity skládání homomorfismů R-modulů. Exaktnost levého sloupce plyne z exaktnosti zleva funktoru $Hom_A(X,-)$ a definice $\delta^*(X)$. Prostřední dva sloupce jsou exaktní z projektivity A-modulů P_0 a P_1. A konečně pravý sloupec je exaktní, protože $Tr(X) \otimes_A -$ je zprava exaktní funktor. □

Definice 3.9. Definujme zobrazení $\sigma_{\delta,X} : \delta^*(X) \to Ker(1_{Tr(X)} \otimes f)$ následujícím algoritmem:

Vstup: $\bar{h} \in \delta^*(X)$

Výstup: $\sigma_{\delta,X}(\bar{h})$

Průběh:

(a) Nejprve zvolme vzor $h \in Hom_A(X,L)$ prvku $\bar{h}$.

(b) Zvolme libovolné $u \in Hom_A(P_0,N)$ takové, že $gu = ht$.

(c) Nalezněme $v \in Hom_A(P_1,M)$ takové, že $fv = us$.

(d) Položme $\sigma_{\delta,X}(\bar{h}) := \phi_M(v)$.

Věta 3.10. *Zobrazení $\sigma_{\delta,X}$ je izomorfismus $\underline{End}_A(X)^{op}$-modulů*

$$\sigma_{\delta,X} : \delta^*(X) \to Ker(1_{Tr(X)} \otimes f),$$

který je přirozený v δ a X.

Důkaz. Nebudeme zde podrobně dokazovat, že $\sigma_{\delta,X}$ je dobře definovaný (nezávislý na volbě h, u a v), zobrazuje do $Ker(1_{Tr(X)} \otimes f)$ a že je přirozený v δ i X. Podrobný důkaz je možné nalézt v [3] Proposition 76.

Naznačíme zde alespoň jakým způsobem jsou obě strany $\underline{End}_A(X)^{op}$-moduly, čímž lépe porozumíme jejich struktuře pro naši další práci. Struktura $\underline{End}_A(X)^{op}$-modulu na $\delta^*(X)$ je dána následujícím způsobem

$$\begin{array}{rcl} \delta^*(X) \times \underline{End}_A(X) & \to & \delta^*(X) \\ (\bar{h}, \bar{e}) & \mapsto & \overline{h \circ e}, \end{array}$$

kde $h \in Hom_A(X, L)$ a $e \in End_A(X)$ jsou libovolní reprezentanti prvků $\bar{h}$ a $\bar{e}$. A v druhém případě je $\underline{End}_A(X)^{op}$-modulová struktura na $Ker(1_{Tr(X)} \otimes f)$ dána zobrazením

$$\begin{array}{rcl} Ker(1_{Tr(X)} \otimes f) \times \underline{End}_A(X)^{op} & \to & Ker(1_{Tr(X)} \otimes f) \\ (q \otimes a, \bar{e}) & \mapsto & (Tr(e) \otimes 1_M)_{Ker} \underbrace{(q \otimes a)}_{\in Ker(1_{Tr(X)} \otimes f)} = \\ & & = (Tr(e) \otimes 1_M) \underbrace{(q \otimes a)}_{\in Tr(X) \otimes_A M} \end{array}$$

jak je ilustrováno na následujícím diagramu:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Ker(1_{Tr(X)} \otimes f) \arrow[r] \arrow[d, "(Tr(e)\otimes 1_M)_{Ker}"] & Tr(X) \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, "Tr(e)\otimes 1_M"] & Tr(X) \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d, "Tr(e)\otimes 1_N"] & Tr(X) \otimes_A L \arrow[r] \arrow[d, "Tr(e)\otimes 1_L"] & 0 \cdot \\ 0 \arrow[r] & Ker(1_{Tr(X)} \otimes f) \arrow[r] & Tr(X) \otimes_A M \arrow[r] & Tr(X) \otimes_A N \arrow[r] & Tr(X) \otimes_A L \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Zbytek důkazu tedy vynecháme. □

3.1.3 Izomorfismus $\gamma_{\delta,X}$

Nejprve připomeňme izomorfismus abelovských group z Věty 2.23

$$\theta_{M,N,L} : Hom_R(M \otimes_A N, L) \to Hom_A(N, Hom_R(M, L)),$$

kde $M \in Mod(A^{op})$, $N \in Mod(A)$ a $L \in Mod(R)$, přirozený ve všech složkách. Ten využijeme ke konstrukci izomorfismu

$$\gamma_{\delta,X} : D(Ker(1_{Tr(X)} \otimes f)) \to \delta_*(DTr(X)),$$

kterému poté dodefinujeme strukturu $\underline{End}_A(X)$-modulového homomorfismu.

Budeme opět pracovat s diagramem z Věty 3.8 a naší posloupností δ. Připomeňme si funktor duálu $D = Hom_R(-, I)$ a uvažujme endomorfismus $h \in$

$End_A(X)$. Potom je $Tr(h) \in End_R(Tr(X))$. Máme následující komutativní diagram:

$$\begin{tikzcd}
Ker(1_{Tr(X)} \otimes f) \arrow[r] \arrow[d, "(Tr(h)\otimes 1_M)_{ker}"'] & Tr(X) \otimes_A M \arrow[r, "1_{Tr(X)}\otimes f"] \arrow[d, "Tr(h)\otimes 1_M"'] & Tr(X) \otimes_A N \arrow[d, "Tr(h)\otimes 1_N"'] \\
Ker(1_{Tr(X)} \otimes f) \arrow[r] & Tr(X) \otimes_A M \arrow[r, "1_{Tr(X)}\otimes f"] & Tr(X) \otimes_A N
\end{tikzcd}$$

Aplikujeme-li na jeho levý čverec funktor D, dostaneme následující komutativní diagram:

$$\begin{tikzcd}
DKer(1_{Tr(X)} \otimes f) = Hom_R(Ker(1_{Tr(X)} \otimes f), I) \arrow[r] \arrow[d, "(-\circ(Tr(h)\otimes 1_M)_{ker})_I"'] & Hom_R(Tr(X) \otimes_A M, I) \arrow[d, "(-\circ Tr(h)\otimes 1_M)_I"'] \\
DKer(1_{Tr(X)} \otimes f) = Hom_R(Ker(1_{Tr(X)} \otimes f), I) \arrow[r] & Hom_R(Tr(X) \otimes_A M, I)
\end{tikzcd}$$

Na základě tohoto diagramu zformulujeme následující lemma.

Lemma 3.11. *R-modul $DKer(1_{Tr(X)} \otimes f)$ je spolu s násobením*

$$\underline{End}_A(X) \times DKer(1_{Tr(X)} \otimes f) \to DKer(1_{Tr(X)} \otimes f)$$

definovaným

$$\bar{h} \cdot \bar{z} := (- \circ (Tr(h) \otimes 1_M)_{Ker})_I(\bar{z}) = \bar{z} \circ (Tr(h) \otimes 1_M)_{Ker}$$

$\underline{End}_A(X)$-modulem.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že

$$\bar{h} \cdot \bar{z} := \bar{z} \circ (Tr(h) \otimes 1_M)_{Ker} = 0$$

pro všechny $h \in P_A(X, X)$ a $z \in DKer(1_{Tr(X)} \otimes f)$. V důkazu Věty 3.10 jsme viděli, že $(Tr(h) \otimes 1_M)_{Ker} = 0$ pro všechny $h \in P_A(X, X)$. Tím jsme hotovi.

Dále, protože I je injektivní modul, pro každé $\bar{z} \in DKer(1_{Tr(X)} \otimes f)$ existuje $z \in D(Tr(X) \otimes_A M)$ takové, že

$$\bar{z} = zi.$$

Uvažujme následující diagram v $mod(R)$:

$$\begin{tikzcd}
Ker(1_{Tr(X)} \otimes f) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "(Tr(h)\otimes 1_M)_{Ker}"'] & Tr(X) \otimes_A M \arrow[r, "1_{Tr(X)}\otimes f"] \arrow[d, "Tr(h)\otimes 1_M"] & Tr(X) \otimes_A N \\
Ker(1_{Tr(X)} \otimes f) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\bar{z}"'] & Tr(X) \otimes_A M \arrow[r, "1_{Tr(X)}\otimes f"] \arrow[dl, dotted, "z"'] & Tr(X) \otimes_A N \\
I & &
\end{tikzcd}$$

Vidíme, že

$$\bar{h}\bar{z} = \bar{z} \circ (Tr(h) \otimes 1_M) = z \circ (Tr(h) \otimes 1_M) \circ i \qquad *$$

pro každé z splňující $\bar{z} = zi$.

Pro $q \otimes a \in Ker(1_{Tr(X)} \otimes f)$ platí

$$\begin{aligned}(\bar{h}\bar{z})(q \otimes a) &= \bar{z}((Tr(h) \otimes 1_M)_{Ker})(q \otimes a) \\ &= z(Tr(h) \otimes 1_M)i(q \otimes a) \\ &= z(Tr(h)(q) \otimes a).\end{aligned}$$

Nyní ověříme, že násobení splňuje axiom asociativity. Nechť $\bar{z} \in DKer(1_{Tr(X)} \otimes f)$, $\bar{h}_1, \bar{h}_{\in}\bar{End}_A(X)$, předpokládejme, že $z \in D(Tr(X) \otimes_A M)$ splňuje podmínku $\bar{z} = zi$ a $Tr(h_1)$ a $Tr(h_2)$ jsou reprezentanti $Tr(\bar{h}_1)$ a $Tr(\bar{h}_2)$. Pak

$$\begin{aligned}\bar{h}_1(\bar{h}_2\bar{z}) &\stackrel{*}{=} \bar{h}_1(\underbrace{z \circ (Tr(h_2) \otimes 1_M) \circ i}_{\in DKer(1_{Tr(X)} \otimes f)}) \\ &\stackrel{*}{=} z \circ (Tr(h_2) \otimes 1_M) \circ (Tr(h_1) \otimes 1_M) \circ i \\ &= z(Tr(h_2)Tr(h_1) \otimes 1_M) \circ i \\ &= z(Tr(h_2h_1) \otimes 1_M) \circ i \\ &\stackrel{*}{=} (\bar{h}_1\bar{h}_2)\bar{z}.\end{aligned}$$

Zbytek axiomů ověřovat nebudeme, jejich ověření je přímočaré a ponecháme ho čtenáři. $\square$

Lemma 3.12. *Definujme na množině $\Upsilon_{DTr(X),L}/\sim$ tříd ekvivalence krátkých exaktních posloupností vedoucích z $DTr(X)$ do L násobení*

$$\underline{End}_A(X) \times (\Upsilon_{DTr(X),L}/\sim) \to (\Upsilon_{DTr(X),L}/\sim)$$

předpisem

$$\bar{h} \cdot (0 \to DTr(X) \to E \to L \to 0) \mapsto (0 \to DTr(X) \to E' \to L \to 0),$$

kde modul E' je pushout diagramu:

$$\begin{tikzcd} DTr(X) \arrow[r] \arrow[d, "DTr(h)"] & E \\ DTr(X) & \end{tikzcd}$$

Pak je $\Upsilon_{DTr(X),L}/\sim$ spolu s výše definovaným násobením $\underline{End}_A(X)$-modulem.

Důkaz. Nejprve nechť $h_1, h_2 \in \underline{End}_A(X)$. Pak

$$\bar{h}_1(\bar{h}_2(0 \to DTr(X) \to E \to L \to 0))$$

nám dává následující diagram:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & DTr(X) \arrow[r] \arrow[d, "DTr(h_2)"] & E \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & DTr(X) \arrow[r] \arrow[d, "DTr(h_1)"] & E' \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & DTr(X) \arrow[r] & E'' \arrow[r] & L \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Potřebujeme dokázat, že spodní řádek diagramu obdržíme i jako:

$$(\bar{h}_1\bar{h}_2)(0 \to DTr(X) \to E \to L \to 0) = (\overline{h_1h_2})(0 \to DTr(X) \to E \to L \to 0)$$

Neboli, že E'' je zároveň pushoutem diagramu i následujícího diagramu:

$$\begin{tikzcd}
DTr(X) \arrow[r] \arrow[d, "DTr(h_1h_2)"] & E \\
DTr(X) &
\end{tikzcd}$$

Protože jsou D i Tr kontravariantní funktory, pak

$$DTr(h_1h_2) = DTr(h_1)DTr(h_2).$$

Z vlastností pushoutu je zřejmé, že E'' společně s korespondujícím homomorfismem z $Hom_A(DTr(X), E'')$ a složením pushoutových morfismů z $Hom_A(E, E')$ a $Hom_A(E, E'')$ z původního diagramu splní první vlastnost pushoutu, neboli udělá následující diagram komutativní:

$$\begin{tikzcd}
DTr(X) \arrow[r] \arrow[d, "DTr(h_1h_2)"] & E \arrow[d] \\
DTr(X) \arrow[r] & E''
\end{tikzcd}$$

Ještě je třeba dokázat univerzální vlastnost pushoutu. Využijeme toho, že E' a E'' jsou pushouty následujících diagramů:

$$\begin{tikzcd}
DTr(X) \arrow[r] \arrow[d, "DTr(h_2)"] & E \\
DTr(X) &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
DTr(X) \arrow[r] \arrow[d, "DTr(h_1)"] & E' \\
DTr(X) &
\end{tikzcd}$$

Mějme nějaké $E''' \in mod(A)$ spolu s morfismy z $Hom_A(E, E'')$ a $Hom_A(DTr(X), E''')$ takovými, že následující diagram komutuje

$$\begin{tikzcd}
DTr(X) \arrow[r] \arrow[d, "DTr(h_1h_2)"] & E \arrow[d] \\
DTr(X) \arrow[r] & E'''
\end{tikzcd}$$

Protože $DTr(h_1h_2) = DTr(h_1)DTr(h_2)$, existuje z univerzální vlastnosti pushoutu E' jednoznačný homorfismus z $Hom_A(E', E''')$ s odpovídajícími vlastnostmi. A z univerzální vlastnosti E'' dostaneme stejným způsobem homomorfismus $Hom_A(E'', E''')$. Je zřejmé, že následující diagram komutuje

$$\begin{tikzcd}
DTr(X) \arrow[r] \arrow[d, "DTr(h_2)"] \arrow[dd, bend right=60, "DTr(h_1h_2)"'] & E \arrow[d] & \\
DTr(X) \arrow[r] \arrow[d, "DTr(h_1)"] & E' \arrow[d] \arrow[dr, dotted] & \\
DTr(X) \arrow[r] \arrow[drr] & E'' \arrow[dr, dotted] & \\
& & E'''
\end{tikzcd}$$

a E'' je tedy pushoutem diagramu

$$\begin{tikzcd}
DTr(X) \arrow[r] \arrow[d, "DTr(h_1h_2)"] & E \\
DTr(X) &
\end{tikzcd}$$

a asociativita našeho násobení je dokázána. □

Lemma 3.13. *R-moduly $Ext^1(L, DTr(X))$ a $\delta_*(DTr(X))$ jsou zároveň $\underline{End}_A(X)$-moduly.*

Důkaz. Dle Věty 2.73 máme izomorfismus abelovských grup

$$Ext^1(L, DTr(X)) \simeq \Upsilon_{DTr(X),L}/\sim,$$

který přenáší strukturu $\underline{End}_A(X)$-modulu i na $Ext^1(L, DTr(X))$. Dále je

$$\delta_*(DTr(X)) \subseteq Ext^1(L, DTr(X))$$

jakožto R-modul. Potřebujeme dokázat, že $\delta_*(DTr(X))$ je $\underline{End}_A(X)$-podmodul $Ext^1(L, DTr(X))$. Postupovat budeme tak, že identifikujeme každý prvek modulu $\delta_*(DTr(X))$ s prvkem $\Upsilon_{DTr(X),L}/\sim$ a poté dokážeme, že násobením výsledného prvku prvkem $\bar{h} \in \underline{End}_A(X)$ dostaneme opět prvek $\Upsilon_{DTr(X),L}/\sim$ korespondující s nějakým prvkem $\delta_*(DTr(X))$. Tím bude dána struktura $\underline{End}_A(X)$-modulu i na $\delta_*(DTr(X))$.

Mějme tedy libovolný prvek $\bar{y} \in \delta_*(DTr(X))$. Protože z definice máme

$$\delta_*(DTr(X)) = Hom_A(M, DTr(X))/Im((- \circ f)_I),$$

můžeme zvolit $y \in Hom_A(M, DTr(X))$ takové, že

$$\bar{y} = y + Im((- \circ f)_I).$$

Dle [5] Proposition 5.13 pushout v kategorii modulů vždy existuje. Pak nám pushout E homomorfismů f a y dává následující komutativní diagram v $mod(A)$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "y"] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & DTr(X) \arrow[r] & E \arrow[r] & L \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Spodní řádek diagramu je krátká exaktní posloupnost, kterou identifikujeme s prvkem $\bar{y} \in \delta_*(DTr(X))$. Je možné dokázat, že je určena jednoznačně až na ekvivalenci $\sim$ (viz. [5, Ch.7]).

Vynásobíme-li tuto posloupnost prvkem $\bar{h} \in \underline{End}_A(X)$, dostaneme exaktní posloupnost

$$0 \longrightarrow DTr(X) \longrightarrow E' \longrightarrow L \longrightarrow 0\,,$$

která při našem ztotožnění odpovídá prvku $DTr(h)y \in Hom_A(M, DTr(X))$, který je reprezentant třídy $\overline{DTr(h)y} \in \delta_*(DTr(X))$. Vše ilustruje následující diagram:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "y"] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & DTr(X) \arrow[r] \arrow[d, "DTr(h)"] & E \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & DTr(X) \arrow[r] & E' \arrow[r] & L \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

A tedy $\delta_*(DTr(X))$ je $\underline{End}_A(X)$-podmodul $Ext^1(L, DTr(X)) \simeq \Upsilon_{DTr(X),L}/\sim$. □

Věta 3.14. *Nechť* $(- \circ \iota)_I$ *je kanonická projekce*

$$D(Tr(X) \otimes_A M) \to DKer(1_{Tr(X)} \otimes f).$$

Izomorfismus $\gamma_{\delta,X} : D(Ker(1_{Tr(X)} \otimes f)) \to \delta_*(DTr(X))$ *existuje a je dán předpisem*

$$\begin{aligned} \gamma_{\delta,X}(\bar{z}) &= \theta_{Tr(X),M,I}(z) + Im((- \circ f)_{DTr(X)}) \\ &= [m \mapsto z(- \otimes m)] + Im((- \circ f)_{DTr(X)}), \end{aligned}$$

kde $z \in D(Tr(X) \otimes_A M)$ *je takové, že* $\bar{z} = (- \circ \iota)_I(z) = zi$.

Důkaz. Nejprve dokážeme existenci tohoto izomorfismu. Aplikujeme-li funktor D na exaktní posloupnost z Věty 3.8

$$0 \longrightarrow Ker(1_{Tr(X)} \otimes f) \longrightarrow Tr(X) \otimes_A M \longrightarrow Tr(X) \otimes_A N \longrightarrow Tr(X) \otimes_A L \longrightarrow 0$$

a $Hom_A(-, DTr(X))$ na posloupnost δ, dostaneme následující diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D(Tr(X) \otimes_A L) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_{Tr(X),L,I}", "\simeq"'] & D(Tr(X) \otimes_A N) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_{Tr(X),N,I}", "\simeq"'] & D(Tr(X) \otimes_A M) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_{Tr(X),M,I}", "\simeq"'] & D(Ker(1_{Tr(X)} \otimes f)) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\gamma_{\delta,X}", "\simeq"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & Hom_A(L, DTr(X)) \arrow[r] & Hom_A(N, DTr(X)) \arrow[r] & Hom_A(M, DTr(X)) \arrow[r] & \delta_*(DTr(X)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Pak protože $\theta_{Tr(X),M,I}$, $\theta_{Tr(X),N,I}$ i $\theta_{Tr(X),L,I}$ jsou izomorfismy abelovských grup, existuje dle Lemma 2.24 takový izomorfismus abelovských grup

$$\gamma_{\delta,X} : D(Ker(1_{Tr(X)} \otimes f)) \to \delta_*(DTr(X)),$$

že diagram komutuje.

Pro $\bar{h} \in \underline{End}_A(X)$ máme

$$\begin{aligned}
\gamma_{\delta,X}(\bar{h}\bar{z}) &= \gamma_{\delta,X}(z \circ (Tr(h) \otimes 1_M) \circ i) \\
&= [a \mapsto z(Tr(h)(-) \otimes a)] + Im((- \circ f)_{DTr(X)})
\end{aligned}$$

Ukážeme, že stejný prvek $\Upsilon_{DTr(X),L}/\sim$ obdržíme

(1) identifikováním $[a \mapsto z(Tr(h)(-) \otimes a)] + Im((- \circ f)_{DTr(X)})$ s třídou ekvivalence v $\Upsilon_{DTr(X),L}/\sim$.

(2) identifikováním $[a \mapsto z(- \otimes a)] + Im((- \circ f)_{DTr(X)})$ s třídou ekvivalence v $\Upsilon_{DTr(X),L}/\sim$ a poté vynásobením $\bar{h}$, jako v Lemma 3.13.

Poznamenejme, že první případ vede ke krátké exaktní posloupnosti vzniklé jako pushout f a $[a \mapsto z(Tr(h)(-) \otimes a)]$, zatímco druhý případ k pushoutu f a složeného zobrazení

$$DTr(h) \circ [a \mapsto z(- \otimes a)] = [a \mapsto DTr(h)(z(- \otimes a))].$$

Protože

$$\begin{aligned}
DTr(h)(z(- \otimes a)) &= (- \circ Tr(h))_I(z(- \otimes a)) \\
&= z(- \otimes a) \circ Tr(h) \\
&= z(Tr(h)(-) \otimes a),
\end{aligned}$$

vidíme, že

$$DTr(h) \circ [a \mapsto z(- \otimes a)] = [a \mapsto z(Tr(h)(-) \otimes a)].$$

Právě jsme ukázali, že $\gamma_{\delta,X}(\bar{h}\bar{z}) = \bar{h}\gamma_{\delta,X}(\bar{z})$ pro všechny $\bar{z} \in D(Ker(1_{Tr(X)} \otimes f))$ a $\bar{h} \in \underline{End}_A(X)$. Tedy, že jde o izomorfismus $\underline{End}_A(X)$-modulů.

Přirozenost našeho izomorfismu dokazovat nebudeme. Důkaz je možné nalézt v [3] na stranách 109-113. □

3.1.4 Izomorfismus $\omega_{\delta,X}$

Věta 3.15. *Položme*

$$\omega_{\delta,X} := \gamma_{\delta,X} D\sigma_{\delta,X}^{-1}.$$

Pak $\omega_{\delta,X}$ je izomorfismem $\underline{End}_A(X)$-modulů

$$\omega_{\delta,X} : D\delta^*(X) \to \delta_*(DTr(X)),$$

který je přirozený v δ a X.

Důkaz. Protože

$$\sigma_{\delta,X}^{-1} : Ker(1_{Tr(X)} \otimes f) \to \delta^*(X)$$

je izomorfismem $\underline{End}_A(X)$-modulů, je

$$D\sigma_{\delta,X}^{-1} : D\delta^*(X) \to DKer(1_{Tr(X)} \otimes f)$$

také izomorfismem $\underline{End}_A(X)$-modulů. Pak je $\gamma_{\delta,X} D\sigma_{\delta,X}^{-1}$ jakožto homomorfismus vzniklý složením dvou izomorfismů $\underline{End}_A(X)$-modulů také izomorfismem $\underline{End}_A(X)$-modulů.

Protože D je funktor, plyne přirozenost $D\sigma_{\delta,X}^{-1}$ v δ a X z přirozenosti $\sigma_{\delta,X}^{-1}$ ve stejných proměnných.

Navíc protože je složení dvou přirozených transformací opět přirozená transformace, je i $\omega_{\delta,X} := \gamma_{\delta,X} D\sigma_{\delta,X}^{-1}$ přirozená v proměnných v δ a X. $\square$

3.2 Algoritmus pro nalezení skoro štěpitelné posloupnosti

Nyní popíšeme samotný algoritmus a dokážeme jeho správnost. Nadále budeme namísto okruhu R pracovat s libovolným komutativním tělesem K. Funktor D tedy bude dle Lemma 2.43 tvaru $D = Hom_K(-, K) : mod(K) \to mod(K)$. Navíc budeme pracovat s jednou pevně zvolenout exaktní poslupností δ

$$0 \longrightarrow \Omega \xrightarrow{i} P_0 \xrightarrow{t} X \longrightarrow 0\,,$$

kde (P_0, t) je projektivní pokrytí modulu X, $\Omega := Ker(t)$ a i kanonické vnoření. Nechť navíc (P_1, ω) je projektivní pokrytí Ω a $s := i\omega$. Pak máme projektivní prezentaci modulu X:

$$P_1 \xrightarrow{s} P_0 \xrightarrow{t} X \longrightarrow 0\,,$$

Pevná volba posloupnosti δ je možná, protože moduly P_0, P_1 a Ω jsou určeny modulem $X \in mod(A)$ jednoznačně až na izomorfismus.

Navíc si vzledem k pevné volbě δ jednodušeji označme homomorfismy z předchozí kapitoly. Položme:

(a) $\sigma_X := \sigma_{\delta,X} : \delta^*(X) \to Ker(1_{Tr(X)} \otimes i)$

(b) $\gamma_X := \gamma_{\delta,X} : DKer(1_{Tr(X)\otimes i}) \to \delta_*(DTr(X))$

(c) $\omega_X := \omega_{\delta,X} : D\delta^*(X) \to \delta_*(DTr(X))$

V následujících několika tvrzeních zjednodušíme výsledky z předchozích částí, poté již zformulujeme algoritmus.

Lemma 3.16. *Nechť $Y \in mod(A)$, pak $\delta^*(Y) = \underline{Hom}_A(Y, X)$.*

Důkaz. Připomeňme, že pro $Y \in mod(A)$ je $\delta^*(Y)$ definováno exaktností následující posloupnosti:

$$0 \longrightarrow Hom_A(Y, \Omega) \xrightarrow{(i\circ-)_Y} Hom_A(Y, P_0) \xrightarrow{(t\circ-)_Y} Hom_A(Y, X) \longrightarrow \delta^*(Y) \longrightarrow 0$$

Tedy $\delta^*(Y)$ je kojádro $(t \circ -)_Y$, neboli

$$\delta^*(Y) = Hom_A(Y, X)/Im((t \circ -)_Y) \qquad *$$

Zbývá dokázat, že $Im(t \circ -)_Y = P(Y, X)$.

Pokud $u \in Im(t\circ-)_Y$, tak se u faktorizuje skrze projektivní A-modul P_0. Opačně, pokud se u faktorizuje skrze nějaký projektivní A-modul P, tak dle Lemma 2.27 se u také faktorizuje skrze $P(X)$. Pak dle (*) dostáváme

$$\delta^*(Y) = Hom_A(Y, X)/P(Y, X) = \underline{Hom}_A(Y, X).$$

□

Věta 3.17. *ω_X je izomorfismem $\underline{End}_A(X)$-modulů:*

$$\omega_X : D\underline{End}_A(X) \to Ext^1_A(X, DTr(X))$$

Důkaz. Připomeňme z Věty 3.15, že

$$\omega_X : D\delta^*(X) \to \delta_*(DTr(X))$$

Lemma 3.16 imlikuje, že $\delta^*(X) = \underline{End}_A(X)$ a tedy

$$D\delta^*(X) = D\underline{End}_A(X) \qquad .$$

Navíc protože $X \in mod(A)$, máme $Tr(X) \in mod(A^{op})$ a $DTr(X) \in mod(A)$. Aplikováním kontravariatního funktoru $Hom_A(-, DTr(X))$ na δ dostaneme dle [5] Theorem 7.3 následující exaktní posloupnost:

$$\begin{aligned} 0 \to Hom_A(X, DTr(X)) \to Hom_A(P_0, DTr(X)) \to Hom_A(\Omega(X), DTr(X)) \to \dots \\ \dots \to Ext^1_A(X, DTr(X)) \to Ext^1_A(P_0, DTr(X)) \end{aligned}$$

Protože je P_0 projektivní, je $Ext^1_A(P_0, DTr(X)) = 0$ a my dostáváme posloupnosti z Definice 2.60, kde je X nahrazeno $DTr(X)$. A tedy:

$$\delta_*(DTr(X)) = Ext^1_A(X, DTr(X)).$$

□

Připomeňme Lemma 3.13, že $Ext^1_A(X, DTr(X)$ má strukturu konečně generovaného $\underline{End}_A(X)$-modulu (tu jsme přenesli ztotožněním jeho prvků s třídami ekvivalence krátkých exaktních posloupností). Dále dle věty Věty 2.73 máme izomorfismy:

$$\begin{aligned} Soc_\Gamma(\Upsilon_{DTr(X),X}/\sim) &\simeq (\hat{\Upsilon}_{DTr(X),X}/\sim) \\ Ext^1_A(V,U) &\simeq (\Upsilon_{U,V}/\sim) \end{aligned}$$

Tedy $Soc_\Gamma(Ext^1_A(X, DTr(X))$ koresponduje s množinou $\tilde{\Upsilon}_{DTr(X),X}/\sim$ tříd ekvivalence skoro štěpitelných posloupností $mod(A)$ končících v X.

Navíc $Soc_\Gamma(Ext^1_A(X, DTr(X))$ je jako $\underline{End}_A(X)$-modul jednoduchý a tedy dle Lemma 2.72 může být vygenerován každým svým prvkem. Díky izomorfismu ω_X ve tvaru z Věty 3.17

$$\omega_X : D\underline{End}_A(X) \to Ext^1_A(X, DTr(X)),$$

vidíme, že každý nenulový prvek $e \in Soc_\Gamma(D\underline{End}_A(X))$ může být použit k vygenerování celého $\tilde{\Upsilon}_{DTr(X),X}/\sim$, jelikož

$$\omega_X(e) \in Soc_\Gamma(Ext^1_A(X, DTr(X)) \simeq (\tilde{\Upsilon}_{DTr(X),X}/\sim)$$

bude nenulový.

Lemma 3.18. *Uvažujme identitu $\bar{1_X} \in \underline{End}_A(X)$. Nechť*

$$B_{Ker(1_{Tr(X)} \otimes i)} := \{\sigma_X(\bar{1_X}), \omega_2 \dots, \omega_l\}$$

je K-báze $Ker(1_{Tr(X)} \otimes i)$. Pak

$$\gamma_X(d_{B_{Ker(1_{Tr(X)}\otimes i)}}(\sigma_X(\bar{1}_X))) \in Soc_\Gamma(Ext^1_A(X, DTr(X)))$$

je generátor.

Důkaz. Nechť

$$\sigma_X^{-1}(B_{Ker(1_{Tr(X)}\otimes i)}) := \{\bar{1}_X, \sigma_X^{-1}(\omega_2), \dots, \sigma_X^{-1}(\omega_l)\}$$

je K-báze $\underline{End}_A(X)$ korespondující s $B_{Ker(1_{Tr(X)}\otimes i)}$. Víme, že

$$\bar{1}_X \in Top_{\Gamma^{op}}(\underline{End}_A(X))$$

je nenulový prvek, pak dle Věty 2.71 je

$$(d_{\sigma_X^{-1}(B_{Ker(1_{Tr(X)}\otimes i)})})(\bar{1}_X) \in Soc_\Gamma(D\underline{End}_A(X))$$

nenulový prvek a tedy protože ω_X je izomorfismem $\underline{End}_A(X)$-modulů, je

$$\omega_X((d_{\sigma_X^{-1}(B_{Ker(1_{Tr(X)}\otimes i)})})(\bar{1}_X)) = \underbrace{\gamma_X(D\sigma_X^{-1})((d_{\sigma_X^{-1}(B_{Ker(1_{Tr(X)}\otimes i)})})(\bar{1}_X))}_{\in Soc_\Gamma(Ext^1_A(X,DTr(X)))}$$

nenulový prvek. Navíc dle Lemma 2.47 víme, že

$$(D\sigma_X^{-1})(d_{\sigma_X^{-1}(B_{Ker(1_{Tr(X)}\otimes i)})}(\bar{1}_X)) = d_{B_{Ker(1_{Tr(X)}\otimes i)}}(\sigma_X(\bar{1}_X))$$

a tedy

$$\omega_X((d_{\sigma_X^{-1}(B_{Ker(1_{Tr(X)}\otimes i)})})(\bar{1}_X)) = \gamma_X(d_{B_{Ker(1_{Tr(X)}\otimes i)}}(\sigma_X(\bar{1}_X))).$$

Potom dle Lemma 2.72 je tento nenulový prvek generátorem $Soc_\Gamma(Ext^1_A(X, DTr(X)))$. □

Lemma 3.19. *Algoritmus výpočtu $\sigma_{\delta,X}$ nám při našem pevně zvoleném δ a vstupu $\bar{1}_X$ vrátí*

$$\sigma_X(\bar{1}_X) = \phi_\Omega(\omega),$$

kde ω je projektivní pokrytí Ω. (ϕ_Ω jsme zavedli v Definici 3.5)

Důkaz. Podívejme se znovu na diagram z Věty 3.8 a upravme ho dle naší posloupnosti δ:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & Ker(1_{Tr(X)} \otimes i) \arrow[d, hook] & \\
0 \arrow[r] & Hom_A(X, \Omega) \arrow[r, "(-\circ t)_\Omega"] \arrow[d, "(i\circ -)_X"'] & Hom_A(P_0, \Omega) \arrow[r, "(-\circ s)_\Omega"] \arrow[d, "(i\circ -)_{P0}"'] & Hom_A(P_1, \Omega) \arrow[r, "\phi_\Omega"] \arrow[d, "(i\circ -)_{P1}"'] & Tr(X) \otimes_A \Omega \arrow[r] \arrow[d, "1_{Tr(X)}\otimes i"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & Hom_A(X, P_0) \arrow[r, "(-\circ t)_{P_0}"] \arrow[d, "(t\circ -)_X"'] & End_A(P_0) \arrow[r, "(-\circ s)_{P_0}"] \arrow[d, "(t\circ -)_{P0}"'] & Hom_A(P_1, P_0) \arrow[r, "\phi_{P_0}"] \arrow[d, "(t\circ -)_{P1}"'] & Tr(X) \otimes_A P_0 \arrow[r] \arrow[d, "1_{Tr(X)}\otimes t"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & End_A(X) \arrow[r, "(-\circ t)_X"] \arrow[d] & Hom_A(P_0, X) \arrow[r, "(-\circ s)_X"] \arrow[d] & Hom_A(P_1, X) \arrow[r, "\phi_X"] \arrow[d] & Tr(X) \otimes_A X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \underline{End}_A(X) \arrow[d] & 0 & 0 & 0 & \\
 & 0 & & & &
\end{tikzcd}
$$

Provedeme σ_X-algoritmus pro prvek $\bar{1}_X \in \underline{End}_A(X)$. Jeho vzorem je prvek $1_X \in End_A(X)$. Jako $u \in End_A(P_0)$ takový, že $tu = t$, zvolíme jednoduše 1_{P_0}. Dále hledáme prvek $v \in Hom_A(P_1, \Omega)$ takový, že $iv = s$, což z definice splňuje projektivní pokrytí ω modulu Ω. To pak zobrazíme na $\phi_\Omega(\omega)$. $\square$

Algoritmus pro výpočet generátoru $\tilde{\Upsilon}_{DTr(X),X}/\sim$

Vstup: $X \in mod(A)$ nerozložitelný a neprojektivní.

Výstup: Generátor $0 \to DTr(X) \to E \to X \to 0$ množiny $\tilde{\Upsilon}_{DTr(X),X}/\sim$.

Průběh:

(a) Spočtěme projektivní pokrytí (P_0, t) modulu X

$$
\begin{tikzcd}
Ker(t) \arrow[r, hook, "i"] & P_0 \arrow[r, "t"] & X
\end{tikzcd},
$$

a položme $\Omega := Ker(t)$.

(b) Vezměme $\phi_\Omega(\omega) \in Ker(1_{Tr(X)} \otimes i)$, kde (P_1, ω) je projektivní pokrytí Ω a rozšiřme ho na K-bázi:

$$B_{Ker(1_{Tr(X)} \otimes i)} := \{\phi_\Omega(\omega), \omega_2, \ldots, \omega_l\}.$$

$$
\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "\omega"] & \Omega \arrow[r, hook, "i"] & P_0 \arrow[r, "t"] & X
\end{tikzcd},
$$

(c) Rozšiřme $B_{Ker(1_{Tr(X)} \otimes i)}$ na K-bázi

$$B_{Tr(X) \otimes \Omega} := \{\phi_\Omega(\omega), \omega_2, \ldots, \omega_l, \omega_{l+1}, \ldots, \omega_{l+m}\}.$$

(d) Definujme homomorfismus A-modulů $\xi : \Omega \to DTr(X)$ následovně. Pro $a \in \Omega$ definujme $\xi(a) : Tr(X) \to K$ předpisem

$$q \mapsto [\text{první K-koeficient } q \otimes a \text{ vzhledem k bázi } B_{Tr(X)\otimes_A \Omega}].$$

(e) Položme E rovno pushoutu i a ξ.

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "i"'] & DTr(X) \arrow[d, dotted, no head] \\ P_0 \arrow[r, dotted, no head] & E \end{tikzcd}$$

Věta 3.20. *Algoritmus vrací generátor*

$$0 \to DTr(X) \to E \to X \to 0$$

všech skoro štěpitelných posloupností v $mod(A)$ končících v X.

Důkaz. Dle Lemma 3.19 máme

$$\sigma_X(\bar{1}_X) = \phi_\Omega(w)$$

a $B_{Ker(1_{Tr(X)}\otimes i)}$ je jako v Lemma 3.18 a tedy

$$\gamma_X \underbrace{\left(d_{B_{Ker(1_{Tr(X)}\otimes i)}}(\phi_\Omega(w))\right)}_{a} =: \bar{y}$$

generuje $Soc_\Gamma(Ext^1_A(X, DTr(X)))$.

Stejně jako v důkazu Lemma 3.13 je prvek $\hat{\Upsilon}/\sim$ obdržen jako pushout E morfismů i a libovolného reprezentantu $y \in Hom_A(\Omega, DTr(X))$ prvku $\bar{y}$. Protože γ_X je kojádro zobrazení $\theta_{Tr(X),\Omega,K}$, tak pokud je

$$y := \theta_{Tr(X),\Omega,K}(z),$$

pro libovolný reprezentant $z \in (Tr(X) \otimes_A \Omega)$ prvku $\bar{z}$, pak je y reprezentant prvku $\gamma_X(\bar{z}) = \bar{y}$. Nechť μ značí inkluzi

$$\mu : Ker(1_{Tr(X)} \otimes i) \to Tr(X) \otimes_A \Omega.$$

Pak

$$D\mu = (- \circ \mu)_K : D(Tr(X) \otimes_A \Omega) \to DKer(1_{Tr(X)} \otimes i)$$

je kanonická projekce a pro každé $z \in D(Tr(X) \otimes_A \Omega)$ takové, že

$$z\mu = \bar{z},$$

je reprezentantem $\bar{z}$. Ukážeme, že volba

$$z := d_{B_{Ker(1_{Tr(X)}\otimes i)}}(\phi_\Omega(w))$$

tuto podmínku splňuje.

Nechť $q \otimes a \in Ker(1_{Tr(X)} \otimes i)$. Aplikace našeho zvoleného z na $q \otimes a$ koresponduje s vyjádřením $q \otimes a$ vzhledem k bázi $B_{Ker(1_{Tr(X)} \otimes i)}$ a extrakcí prvního K-koeficientu. Protože $B_{Tr(X) \otimes_A \Omega}$ je pouze rozšířením $B_{Ker(1_{Tr(X)} \otimes i)}$, tak se výsledek nezmění, pokud $q \otimes a$ vnoříme do $Tr(X) \otimes_A \Omega$ a vyjádříme ho vzhledem k bázi $B_{Tr(X) \otimes_A \Omega}$ před extrakcí prvního K-koeficientu, což odpovídá aplikaci $d_{B_{Tr(X) \otimes_A \Omega)}}(\phi_\Omega(w))\mu$ na $q \otimes a$.

Pak musíme spočíst pushout i a $\theta_{Tr(X),\Omega,K}(d_{B_{Tr(X) \otimes_A \Omega)}}(\phi_\Omega(w)))$, abychom obdrželi hledanou skoro štěpitelnou posloupnost. Připomeňme Větu 2.23, že

$$\begin{aligned} \theta_{Tr(X),\Omega,K}(d_{B_{Tr(X) \otimes_A \Omega)}}(\phi_\Omega(w)))(a) &= [q \mapsto d_{B_{Tr(X) \otimes_A \Omega)}}(\phi_\Omega(w))(q \otimes a)] \\ &= [q \mapsto 1.\, koef.\, q \otimes a\, vzhledem\, k\, B_{Tr(X) \otimes_A \Omega)}] \\ &= \xi(a) \end{aligned}$$

pro každé $a \in \Omega$. A tedy

$$\theta_{Tr(X),\Omega,K}(d_{B_{Tr(X) \otimes_A \Omega)}}(\phi_\Omega(w))) = \xi,$$

tím je důkaz hotov a my se můžeme pustit do jeho implementace. $\square$

4. Implementace

V této části implementujeme Algoritmus pro nalezení generátoru skoro štěpitelných posloupností modulu X nad algebrou cest KQ toulce Q, kde K je libovolné těleso. Algoritmus implementujeme v sytému [GAP] (Groups, Algorithms, Programming - a System for Computational Discrete Algebra) s využitím balíku [QPA] (Quivers and path algebras).

Algoritmem projdeme krok po kroku. Většina částí obsahuje nejprve teoretický popis a poté algoritmus implementovaný v knihovně [QPA]. Syntaxe skriptovacího jazyka užitého v systému [GAP] je podobná mnoha jiným jazykům a nepotřebuje podrobnější výklad. Čtenář by měl být schopen většině komentovaných ukázek kódu porozumět bez větších problémů.

Teorie vychází převážně z části 2.3 a tedy $Mod(A)$ bude značit kategorií pravých modulů, což je navíc v souladu s balíkem [QPA]. O levých modulech budeme tedy referovat jako o A^{op}-modulech.

4.1 Značení v kódu QPA

Moduly budeme značit velkými písmenem s prefixem m. Tak například snadno odlišíme A jako algebru a A jako modul - značíme mA. Morfismy budeme psát malými písmeny a řecké znaky jejich přepisem latinkou (používaným v LaTeX). Například rho, pi, ...

Dále se budeme držet značení, které je využívano v celém [QPA] balíku, tedy například jako PP budeme značit pole nerozložitelných projektivních modulů tvaru e_iA pro primitivní idempotent e_i algebry A.

4.2 Vstup a výstup algoritmu

Nechť K je komutativní těleso. Mějme konečný toulec Q a K-algebru cest KQ. Toulec je konečný, jde tedy o algebru s jednotkou (Lemma 2.82). Dále mějme libovolný přípustný ideál I algebry KQ. Pokuď je Q bez cyklů, pak můžeme zvolit $I = 0$. Dále položme $A = KQ/I$.

Vstupem algoritmu je K-algebra A a $X \in mod(A)$ nerozložitelný, konečně generovaný a neprojektivní A-modul.

Výstupem algoritmu bude $0 \to DTr(X) \to E \to X \to 0$ generátor všech skoro štěpitelných posloupnosté v $mod(A)$ končících v X.

Příklad 1

Toulec Q: $\begin{tikzcd} \circ^1 \arrow[r, "a"'] \arrow[rr, bend left, "c"] & \circ^2 \arrow[r, "b"'] & \circ^3 \end{tikzcd}$ $\quad I = \emptyset \quad$ A-modul X: $\begin{tikzcd} K^2 \arrow[r, "\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]"'] \arrow[rr, bend left, "\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]"] & K^2 \arrow[r, "\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]"'] & K^1 \end{tikzcd}$

```
K := Rationals;
Q := Quiver(3, [ [1, 2, "a"],
```

```
                  [2, 3, "b"],
                  [1, 3, "c"] ]);
KQ := PathAlgebra(K,Q);
A := KQ;
matrices := [ ["a", [[1,0],[0,1]]],
               ["b", [[0],[1]]],
               ["c", [[1],[0]]] ];
mX := RightModuleOverPathAlgebra(A,matrices);
```

Příklad 2

$$Q\colon \begin{tikzcd} \circ^1 \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "b"'] & \circ^2 \arrow[loop above, "c"] \arrow[r, "d"'] & \circ^3 \arrow[ll, bend left=60, "e"] \end{tikzcd} \qquad I = \{c^2, acd - bd, ea, eb\} \qquad X\colon \begin{tikzcd} K^2 \arrow[r, bend left, "{\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]}"] \arrow[r, bend right, "{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]}"'] & K^2 \arrow[loop above, "{\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]}"] \arrow[r, "{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]}"'] & K^2 \arrow[ll, bend left=60, "{\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]}"] \end{tikzcd}$$

```
K := Rationals;
Q := Quiver(3, [ [1, 2, "a"],
                  [1, 2, "b"],
                  [2, 2, "c"],
                  [2, 3, "d"],
                  [3, 1, "e"] ]);
KQ := PathAlgebra(K, Q);
gen := GeneratorsOfAlgebra(KQ);
a := gen[4];
b := gen[5];
c := gen[6];
d := gen[7];
e := gen[8];
rels := [c^2,a*c*d-b*d,e*a,e*b];
A := KQ/rels;
mat :=[["a", [[0,1],[1,1]]],
       ["b", [[1,0],[1,0]]],
       ["c", [[0,0],[1,0]]],
       ["d", [[1,1],[0,1]]],
       ["e", [[0,0],[0,0]]]
      ];
mX := RightModuleOverPathAlgebra(A,mat);
```

4.3 Modul Ω

Spočteme projektivní pokrytí P_0 modulu X

$$Ker(t) \xrightarrow{i} P_0 \xrightarrow{t} X,$$

položíme $\Omega := Ker(t)$. Dostaneme krátkou exaktní posloupnost

$$0 \to \Omega \xrightarrow{i} P_0 \xrightarrow{t} X \to 0.$$

Dále označme P_1 projektivní pokrytí Ω. Výsledkem je minimální projektivní prezentace modulu X:

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "s=iw"] \arrow[dr, "w"'] & P_0 \arrow[r, "t"] & X \arrow[r] & 0 \\
& \Omega \arrow[u, "i"'] & &
\end{tikzcd}$$

Kanonickou inkluzi $i : \Omega \to P_0$ budeme v kódu značit $kernel\_inc$, aby nedocházelo k záměně s iterační proměnnou i.

```
t           := ProjectiveCover(mX);
mP0         := Source(t);
mOmega      := Kernel(t);
omega       := ProjectiveCover(mOmega);
kernel_inc  := KernelInclusion(t);
s           := omega * kernel_inc;
mP1         := Source(omega);
```

Dále budeme potřebovat algebru A^{op} a pole $[e_1A, e_2A, \ldots, e_mA]$ nerozložitelných projektivních A-modulů, kde $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ je úplná množina primitivních ortogonálních idempotentů algebry A, a jemu korespondující pole algebry A^{op}. Toto pole spočteme s pomocí funkce $IndecProjectiveModules$.

```
A_op  := OppositePathAlgebra(A);
PP    := IndecProjectiveModules(A);
PP_op := IndecProjectiveModules(A_op);
```

Navíc ještě zkonstruujeme A jako pravý A-modul. Ten je dle Věty 2.29 direktním součtem $A = e_1A \oplus e_2A \oplus \ldots \oplus e_mA$.

```
mA := DirectSumOfModules(PP);
```

4.4 Rozložení $A^n \simeq P_1 \oplus P_1'$

Algebra A může být zapsána dle Věty 2.29 jako direktní součet $A = e_1A \oplus e_2A \oplus \ldots \oplus e_mA$ a tedy dle Věty 2.31 lze projektivní modul P_1 vyjádřit jako $P_1 \simeq (e_1A)^{n_1} \oplus (e_2A)^{n_2} \oplus \ldots \oplus (e_mA)^{n_m}$. Položme $n := max_{i=1,\ldots,m}(n_i)$, pak

$$A^n \simeq P_1 \oplus (e_1A)^{n-n_1} \oplus (e_2A)^{n-n_2} \oplus \ldots \oplus (e_mA)^{n-n_m}.$$

Definujeme-li

$$P_1' := (e_1A)^{n-n_1} \oplus (e_2A)^{n-n_2} \oplus \ldots \oplus (e_mA)^{n-n_m},$$

dostáváme hledaný vztah

$$A^n \simeq P_1 \oplus P_1'.$$

S pomocí funkce $IndecProjectiveModules(A)$; spočteme moduly e_iA a následně spočteme, kolikrát je každý z nich obsažen v rozkladu modulu P na direktní součet nerozložitelných projektivních podmodulů. Číslo n bude maximum z těchto čísel. Výsledkem tedy bude čtveřice

$$[\ n,\ P',\ [n_1, n_2, \dots, n_m],\ [n-n_1, n-n_2, \dots, n-n_m]\ ]$$

taková, že

$$A^n \quad \simeq \quad \underbrace{((e_1A)^{n_1} \oplus \dots \oplus (e_mA)^{n_m})}_{=P_1} \oplus \underbrace{((e_1A)^{n-n_1} \oplus \dots \oplus (e_mA)^{n-n_m})}_{=P_1'}.$$

Algoritmus níže je zapsaný obecně pro libovolný projektivní A-modul. V našem případě $mP := P_1$.

```
SuppProjModule := function(mP)
  local A, PP, mPs, n, common, i, j, diff,
        in_multiplicities, ou_multiplicities;

  A := RightActingAlgebra(mP);
  PP:= IndecProjectiveModules(A);
  in_multiplicities := [];
  ou_multiplicities := [];
  n := 0;

  # Přes všechny moduly e_iA.
  for i in [1..Length(PP)] do
    Add(in_multiplicities, 0);

    # Zkoušíme kolikrát je daný e_iA obsažen v P.
    repeat
      common := CommonDirectSummand(mP, PP[i]);
      if IsList(common) then
        in_multiplicities[i] := in_multiplicities[i] + 1;
        mP := common[2];
      fi;
    until IsList(common) = false;

    n := Maximum([n, in_multiplicities[i]]);
  od;

  # Spočteme P'.
  mPs := [];
  for i in [1..Length(PP)] do
    diff := n - in_multiplicities[i];
```

```
    ou_multiplicities[i] := diff;

    for j in [1..diff] do
      Add(mPs, PP[i]);
    od;
  od;
  mPs := DirectSumOfModules(mPs);

  return [n, mPs, in_multiplicities, ou_multiplicities];
end;
```

Tuto funkci využijeme a dopočítáme další moduly potřebné pro náš výpočet.

```
supp := SuppProjModule(mP1);
mP1s := supp[3];                                    # P_1'
n    := supp[2];
mP1_mP1s := DirectSumOfModules([mP1, mP1s]);
mAn := DirectSumOfModules( List([1..n], i -> mA) ); # A^n
```

4.5 Pomocné funkce

Nejprve definujeme pomocnou funkci, kterou použijeme ještě několikrát později. Funkce vrátí pole *as_algebra_element* velikosti m. Každé *as_algebra_element*$[i]$ spočteme následovně:

Uvažujme bázi B_i modulu e_iA. Modul e_iA je generovaný jedním prvkem a to primitivním idempotentem e_i, takže všechny ostatní bázové prvky dostaneme působením algebry A na něj. Položme *as_algebra_element*$[i][j] = \lambda \in A$, kde λ je prvkem algebry A takovým, že $e_i\lambda = B_i[j]$.

```
ProjectiveBasisVectorGens := function(PP)
  local A;

  A := RightActingAlgebra(PP[1]);

  return List(BasisOfProjectives(A), b -> Flat(b));
end;
```

Druhá funkce bude konstruovat matice homomorfismu z obrazů báze modulu, jež je jeho definičním oborem.

Mějme například dva A-moduly M, N a homomorfismus $f : M \to N$. Označme vektory dimenze reprezentací M a N po řadě $[m_1, m_2, \ldots, m_k]$ a $[n_1, n_2, \ldots, n_k]$ a položme $m := \sum_{i=1}^{k} m_i$ a $n := \sum_{i=1}^{k} n_i$. Dále mějme bázi $B_M = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ modulu M, bázi $B_N = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ modulu N a matici i velikosti $m \times n$, kde se na j-tém řádku nachází $f(m_j)$ vzhledem k bázi B_N. Potom matice homomorfismu f jsou následující:

$$
\begin{matrix}
\underbrace{\begin{bmatrix} i[1,1] & \cdots & i[1,d_1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ i[c_1,1] & \cdots & i[c_1,d_1)] \end{bmatrix}}_{f_1} & & & & \cdots \; i[1,n] \\
& \underbrace{\begin{bmatrix} i[c_1+1,d_1+1] & \cdots & i[c_1+1,d_1+d_2] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ i[c_1+c_2,d_1+1] & \cdots & i[c_1+c_2,d_1+d_2)] \end{bmatrix}}_{f_2} & & & \vdots \\
& & \ddots & & \\
\vdots & & & \underbrace{\begin{bmatrix} i[m-c_{k-1}+1,n-d_{k-1}+1] & \cdots & i[m-c_{k-1}+1,n] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ i[m,n-d_{k-1}+1] & \cdots & i[m,n] \end{bmatrix}}_{f_k} & \\
i[m,1] \; \cdots & & & &
\end{matrix}
$$

Naše funkce pak vátí pole $[f_1, f_2, \ldots, f_k]$ obsahující k matic. Ty slouží jako vstupní parametr pro výpočet homomorfismu funkcí $RightModuleHomOverAlgebra$.

```
ExtractHomMatrices := function(matrix, mM, mN)
  local A, Q, d_mM, d_mN, used_x, used_y, i, j, k, dx, dy;

  A := RightActingAlgebra(mM);
  Q := QuiverOfPathAlgebra(A);

  matrices := [];
  d_mM := DimensionVector(mM);
  d_mN := DimensionVector(mN);
  used_x := 0;
  used_y := 0;
  for i in [1..NumberOfVertices(Q)] do
    dx := d_mN[i];
    dy := d_mM[i];

    matrices[i] := [];

    if dy = 0 and dx = 0 then
      Add(matrices[i], [0]);
    elif dy = 0 then
      Add(matrices[i], List([1..dx], j -> 0));
    elif dx = 0 then
      Add(matrices[i], List([1..dy], j -> [0]));
    else
      for j in [1+used_y..dy+used_y] do
        Add(matrices[i],
            List([1+used_x..dx+used_x], k -> matrix[j][k])
          );
      od;
    fi;

```

```
    used_x := used_x + dx;
    used_y := used_y + dy;
  od;

  return matrices;
end;
```

4.6 Dualita P_1^*

Nyní nám nastává problém jak vyjádřit libovolný homomorfismus $f : P_1 \to A$ jakožto prvek reprezentace $P_1^* := Hom_A(P_1, A)$. Využijeme dvou izomorfismů z Věty 2.33 a Věty 2.31:

$$Hom_A(e_iA, A) \simeq Ae_i \text{ daný předpisem } f \mapsto f(e_i) \tag{*}$$

$$P_1 \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{n_i} e_iA \tag{**}$$

Z definice P_1^*, (**) a Věty 2.22 dostáváme vztah:

$$\begin{aligned} P_1^* &\equiv Hom_A(P_1, A) \\ &\simeq Hom_A(\bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{n_i} e_iA, A) \\ &\simeq \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{n_i} Hom_A(e_iA, A) \end{aligned}$$

Na tuto posloupnost použijeme ještě izomorfismus (*) a dostaneme izomorfismus, který homomorfismu $P_1 \to A$ přiřadí korespondující prvek reprezentace P_1^*:

$$\begin{aligned} Hom_A(P_1, A) &\simeq \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{n_i} Ae_i \\ f &\mapsto \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} f(e_i) \end{aligned}$$

Samotná implemetace v knihovně QPA bude složitější a provedena v několika krocích. To je způsobeno tím, že $f(e_i)$ není automaticky prvkem A^{op}-modulu e_iA, ale z definice homomorfismu f stále prvkem A-modulu A. Opačný jemu korespondující prvek musíme teprve spočíst. Stejně tak musíme prvky e_i nejprve vnořit z modulů e_iA do P_1. Pro každý sčítanec z rozkladu P_1 na direktní součet modulů e_iA zobrazíme $e_i \in e_iA$ následujícím řetězcem zobrazení:

$$\begin{tikzcd}
 & & & e_1A \\
e_iA \arrow[r, hook, "\eta_{i,j}"] & P_1 \arrow[r, "f"] & A \arrow[ur, "\beta_1"] \arrow[dr, "\beta_m"'] & \vdots \\
 & & & e_mA
\end{tikzcd}$$

kde $\eta_{i,j}$ je kanonické vnoření $e_iA \to P_1$ a β_i kanonická projekce $A \to e_iA$. Prvek $\beta_k f \eta_{i,j}(e_i)$ je prvkem modulu e_kA a je tedy tvaru $e_k\lambda_{i,j,k}$ pro nějaké $\lambda_{i,j,k} \in A$ a e_k generátor modulu e_kA odpovídající indempotentu e_k algebry A. My vyjádříme prvky $\lambda_{i,j,k}$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ jako prvky algebry A a následně je všechny sečteme na $\tilde{\lambda}_{i,j} = \sum_{i=1}^{m} e_k\lambda_{i,j,k} \in A$.

Spočteme opačný prvek $\tilde{\lambda}_{i,j}^{op} \in A^{op}$, ten musí být ze vztahu výše z ideálu Ae_i, přesněji v [QPA] implementaci z ideálu $e_i^{op}A^{op}$. Dále spočteme prvek $e_i^{op}\tilde{\lambda}_{i,j}^{op}$ jakožto prvek reprezentace $e_i^{op}A^{op}$ a vnoříme ho kanonickým vnořením $\eta'_{i,j} : Ae_i \to P^*$ do P_1^*.

Všechny takto vnořené prvky sečteme a dostaneme tak hledaný prvek odpovídající homomorfismu f.

Samotný izomorfismus $Hom_A(P_1, A) \to \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{n_i} Ae_i$ bude tedy, pomineme-li přechody mezi reprezentací A a algebrou A v samotné implementaci, dán předpisem:

$$f \mapsto \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \eta'_{i,j}(e_i^{op}(\sum_{k=1}^{m} \beta_k f \eta_{i,j}(e_i))^{op})$$

Níže je algoritmus zapsán obecně pro P projektivní modul a homomorfismus $f : P \to A$. Prvním parametrem je $f : P \to A$ a druhým modul P^*.

```
FromHomToProjRep := function(f, mP_star)
  local i, j, incl, incl2, proj, mu, mu_f, pi, mu2,
    A, e_i, e_i_op, fe_i, result, mP, me_iA, PP, mA,
    as_algebra_element, lambda, lambda_op, pi_f_ei, coeffs;

  mP := Source(f);
  mA := Range(f);
  A := RightActingAlgebra(mP);

  # Moduly e_iA.
  PP := IndecProjectiveModules(A);

  incl := DirectSumInclusions(mP);
  incl2:= DirectSumInclusions(mP_star);
  proj := DirectSumProjections(mA);
  as_algebra_element := ProjectiveBasisVectorGens(PP);

  result := Zero(mP_star);

  # Přes všechny inkluze z direktních sčítanců P tedy moduly e_iA.
  for i in [1..Length(incl)] do
    # Slozime s inkluzi na homomorfismus e_iA --> P -> A.
    mu := incl[i];
    mu_f := mu * f;

```

```
    # Spočteme e_iA a e_i.
    me_iA := Source(mu_f);
    e_i := MinimalGeneratingSetOfModule(me_iA)[1];

    # Zobrazíme e_i homomorfismem f.
    fe_i := ImageElm(mu_f, e_i);

    # Nyní budeme prvek f(e_i) projektovat do modulů e_iA ...
    # ... k jeho obrazům najdeme korespondující prvek ...
    # ... algebry A a výsledky sečteme.
    lambda := Zero(A);
    for j in [1..Length(proj)] do
      pi := proj[j];
      pi_f_ei := ImageElm(pi, fe_i);
      coeffs  := Coefficients(Basis(PP[j]), pi_f_ei);
      lambda  := lambda + coeffs * as_algebra_element[j];
    od;

    # Spočteme opposite prvek.
    lambda_op := OppositePathAlgebraElement(lambda);

    # Vnoříme do P*.
    mu2 := incl2[i];
    e_i_op := MinimalGeneratingSetOfModule(Source(mu2))[1];
    result := result + ImageElm(mu2, e_i_op ^ lambda_op);
  od;

  return result;
```

Tento izomorfismus budeme potřebovat i v opačném směru. Z důkazu věty Věty 2.33 máme inverzní izomorfismus k (*) a to:

$$\begin{array}{rcl} Ae_i & \to & Hom_A(e_iA, A) \\ \lambda e_i & \mapsto & [e_i\lambda' \mapsto \lambda e_i\lambda'] \end{array}$$

Podobně jako v prvním případě, pak dostáváme izomorfismus:

$$\begin{array}{rcl} P_1^* & \to & Hom_A(P, A) \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j}e_i & \mapsto & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}[e_i\lambda' \mapsto \lambda_{i,j}e_i\lambda'] \end{array}$$

Implementace bude opět složitější. Budeme-li pro nějaký prvek $p \in P_1^*$ hledat odpovídající homomorfismus $P_1 \to A$, budeme postupovat následovně. Pro každé $i = 1, 2, \dots, m$ a $j = 1, 2, \dots, n_i$ zobrazíme p na Ae_i kanonickou projekcí $\varrho'_{i,j} : P_1^* \to Ae_i$. Poté spočteme prvek $\lambda \in A^{op}$, pro který je $\varrho'_{i,j}(e_i) = \lambda e_i$. K němu spočteme opačný prvek $\lambda^{op} \in A$. Výsledný homomorfismus $P_1 \to A$ je tvaru

$$\alpha_i[e_i\lambda' \mapsto e_i\lambda^{op}\lambda']\varrho_{i,j},$$

kde α_i je inklize $e_iA \to A$ a $\varrho_{i,j}$ je projekce $P_1 \to e_iA$. Všechna tato zobrazení následně sečteme.

A zde je již výsledná funkce hledající korespondující homomorfismus k prvku x projektivního A^{op}-modulu P^*, dalšími parametry jsou A-modul P, A^{op}-modul P^*, A jako A-modul a prvek 1_A.

```
FromProjRepToHom := function(p, mP, mP_star, mA, 1_mA)
  local proj, proj2, i, j, k, Ae_i, e_iA, proj_p, coeffs,
    as_algebra_element, PP, PP_op, A, A_op, lambda,
    lambda_op, v, proj2_v, matrix, as_algebra_element2,
    lambda2, result, K, image, matrices;

  A    := RightActingAlgebra(mP);
  A_op := RightActingAlgebra(mP_star);
  K    := LeftActingDomain(A);

  # Moduly e_iA resp. Ae_i.
  PP    := IndecProjectiveModules(A);
  PP_op := IndecProjectiveModules(A_op);

  # Projekce P*->Ae_i resp. P->e_iA
  proj  := DirectSumProjections(mP_star);
  proj2 := DirectSumProjections(mP);

  as_algebra_element := ProjectiveBasisVectorGens(PP_op);
  as_algebra_element2 := ProjectiveBasisVectorGens(PP);

  result := [];

  # Přes všechny projekce Ae_i->P*.
  for j in [1..Length(proj)] do
    Ae_i := Range(proj[j]);

    # Zjistíme na které Ae_i projektujeme.
    for i in [1..Length(PP_op)] do
      if (IsomorphicModules(PP_op[i], Ae_i)) then
        break;
      fi;
    od;

    # Projektujeme p do Ae_i, spočteme korespondující prvek
    # algebry A_op a k němu opposite prvek algebry A.
    proj_p := ImageElm(proj[j], p);
    coeffs := Coefficients(Basis(Ae_i), proj_p);
    lambda := coeffs * as_algebra_element[i];
    lambda_op := OppositePathAlgebraElement(lambda);

```

```
    # Sestavíme matici odpovídající zobrazení P->A.
    matrix := [];
    for v in BasisVectors(Basis(mP)) do
      e_iA := Range(proj2[j]);

      # Projektujeme v do e_iA.
      proj2_v := ImageElm(proj2[j], v);

      # Spočteme odpovídající prvek algebry A.
      coeffs := Coefficients(Basis(e_iA), proj2_v);
      lambda2 := coeffs * as_algebra_element2[i];
      image := (1_mA ^ lambda_op) ^ lambda2;

      Add(matrix, Coefficients(Basis(mA), image));
    od;

    result := result + matrix;
  od;

  matrices := ExtractHomMatrices(result, mP, mA);

  return RightModuleHomOverAlgebra(mP, mA, matrices * One(K));
end;
```

4.7 Modul $Tr(X)$

Připomeňme následující definice:

(a) $()^* := Hom(-, A)$ kontravariantní funktor $mod(A) \to mod(A^{op})$

(b) Použijeme funktor $()^*$ na následující krátkou exaktní posloupnost v $mod(A)$

$$0 \to \Omega \xrightarrow{i} P_0 \xrightarrow{t} X \to 0,$$

dostaneme exaktní posloupnost v $mod(A^{op})$

$$X^* \xrightarrow{t^*} P_0^* \xrightarrow{s^*} P_1^* \xrightarrow{\hat{t}} Cok(s^*) \longrightarrow 0$$

Definujme funktor $Tr(X) := Cok(s^*) : \underline{mod}(A) \to \underline{mod}(A^{op})$.

Než se pustíme do funktoru Tr, tak budeme nejprve potřebovat spočíst moduly P_0^* a P_1^*. Z Části 4.6 již víme, že pro $i = 1, 2$ existují $m, n_1, n_2, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$

taková, že:

$$P_i^* \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{n_i} Ae_i$$
$$P_i \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{n_i} e_iA.$$

Výpočet je tedy jednoduchý:

```
multiplicities0 := SuppProjModule(mP0)[3];
mP0_star := [];
for i in [1..Length(multiplicities0)] do
  for j in [1..multiplicities0[i]] do
    Add(mP0_star, PP_op[i]);
  od;
od;
mP0_star := DirectSumOfModules(mP0_star);

multiplicities1 := SuppProjModule(mP1)[3];
mP1_star := [];
for i in [1..Length(multiplicities1)] do
  for j in [1..multiplicities1[i]] do
    Add(mP1_star, PP_op[i]);
  od;
od;
mP1_star := DirectSumOfModules(mP1_star);
```

Dále budeme potřebovat spočítat prvek 1_A jakožto prvek pravého A-modulu A. Toulec Q je konečný, jednotka 1_A dle Lemma 2.82 a Důsledku 2.94 existuje a navíc je tvaru:

$$\sum_{i \in Q_0} e_i$$

Budeme počítat přes všechny nerozložitelné projektivní moduly e_iA, které získáme z rozkladu modulu A na nerozložitelné direktní sčítance. Projektivní modul e_iA je jako vektorový prostor dle věty Věty 2.110 generován množinou všech cest z vrcholu $i \in Q_0$. První dimenze je dána triviální cestou $(i||i)$ odpovídající idempotentu e_i algebry A. Prvek modulu e_iA korespondující s idempotentem e_i tedy získáme takto:

```
e_i := MinimalGeneratingSetOfModule(e_iA)[1];
```

A zde je již celý výpočet:

```
# Spočteme prvek 1_A reprezentace A  jakožto součet prvků
# e_i z reprezentací e_iA  vnořených do A.
1_mA := Zero(mA);
incl := DirectSumInclusions(mA);
for i in [1..Length(incl)] do
```

```
  e_iA := Source(incl[i]);
  e_i := MinimalGeneratingSetOfModule(e_iA)[1];
  1_mA := 1_mA + ImageElm(incl[i], e_i);
od;
```

Nyní spočteme $Tr(X)$. V [QPA] obsažená funkce $TransposeOfModule$ pro výpočet $Tr(X)$ vrací pouze modul $Tr(X)$. My ale potřebujeme pracovat i s projekcí $\hat{t}$. Proto vytvoříme funkci S_Star, která nám vrátí homomorfismus $s^* : P_0^* \to P_1^*$, jehož je $Tr(X)$ kojádro.

Postupovat budeme, tak že si každý prvek báze P_0^* vyjádříme s pomocí duality P_0^* a $Hom_A(P_0, A)$ (Část 4.6) jako homomorfismus $P_0 \to A$. Ten složíme s $s : P_1 \to P_0$ na homomorfismus z $Hom_A(P_1, A)$ a ten si s pomocí inverzní duality vyjádříme jako prvek P_1^*. Z takto získaných obrazů báze P_0^* již snadno spočteme výsledný homomorfismus. Postup ilustuje následující diagram:

$$
\begin{tikzcd}
P_0^* \arrow[r, dotted, "s^*"] \arrow[d, "\simeq"] & P_1^* \\
Hom_A(P_0, A) \arrow[r, "(-\circ s)_A"] & Hom_A(P_1, A) \arrow[u, "\simeq"']
\end{tikzcd}
$$

```
S_Star := function(s, mP0, mP1, mP0_star, mP1_star, mA, 1_mA)
  local v, f, fs, image, matrix, matrices, A, K;

  A := RightActingAlgebra(mP1);
  K := LeftActingDomain(A);

  matrix := [];
  for v in BasisVectors(Basis(mP0_star)) do
    f  := FromProjRepToHom(v, mP0, mP0_star, mA, 1_mA);
    fs := s * f;
    image := FromHomToProjRep(fs, mP1_star);
    Add(matrix, Coefficients(Basis(mP1_star), image));
  od;

  matrices := ExtractHomMatrices(matrix, mP0_star, mP1_star);

  return RightModuleHomOverAlgebra(mP0_star, mP1_star, matrices);
end;
```

Nyní již můžeme spočíst s^*, $\hat{t}$, $Tr(X)$ i $DTr(X)$. Navíc si spočteme bázi K-vektorového prostoru $Hom_A(\Omega, DTr(X))$, kterou budeme později potřebovat při výpočtu tenzorového součinu $Tr(X) \otimes_A \Omega$. Tuto bázi spočteme jako pole složené z jednotlivých homomorfismů.

```
s_star := S_Star(s, mP0, mP1, mP0_star, mP1_star, mA, 1_mA);
t_hat  := CoKernelProjection(s_star);
```

```
mTrX    := Range(t_hat);
mDTrX   := DualOfModule(mTrX);
B_hom_mDTrX_mOmega := HomOverAlgebra(mOmega, mDTrX);
```

4.8 Izomorfismus $P_1 \oplus P_1' \simeq A^n$

Máme následující dva izomorfismy:

$$A^n \simeq (e_1A \oplus \ldots \oplus e_mA)^n$$

$$P_1 \oplus P_1' \simeq ((e_1A)^{n_1} \oplus \ldots \oplus (e_mA)^{n_m}) \oplus ((e_1A)^{n-n_1} \oplus \ldots \oplus (e_mA)^{n-n_m})$$

Pro každé $i = 1, 2, \ldots, m$ je počet modulů e_iA v obou rozkladech stejný. Uvažujme následující kononické projekce:

$$\begin{aligned}
\pi &: P_1 \oplus P_1' \to P \\
\pi' &: P_1 \oplus P_1' \to P' \\
\varrho_{i,j} &: P_1 \to e_iA, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n_i \\
\varrho_{i,j}' &: P_1' \to e_iA, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n - n_i
\end{aligned}$$

a následující kononická vnoření:

$$\begin{aligned}
\nu_j &: A \to A^n, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\
\alpha_{i,j} &: e_iA \to A, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}$$

Ty nám znázorňuje následující diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & & e_1A \arrow[dr, "\alpha 1{,}j"] & & \\
 & P_1 \arrow[ur, "\varrho_{1,j}"] \arrow[dr, "\varrho_{n,j}"'] & \ldots & A \arrow[ddr, bend left, "\nu_j"] & \\
 & & e_mA \arrow[ur, "\alpha n{,}j"'] & & \\
P_1 \oplus P_1' \arrow[uur, bend left, "\pi"] \arrow[ddr, bend right, "\pi'"'] & & & & A^n \\
 & & e_1A \arrow[dr, "\alpha 1{,}j"] & & \\
 & P_1' \arrow[ur, "\varrho_{1,j}'"] \arrow[dr, "\varrho_{n,j}'"'] & \ldots & A \arrow[uur, bend right, "\nu_j"'] & \\
 & & e_mA \arrow[ur, "\alpha n{,}j"'] & &
\end{tikzcd}$$

Náš hledaný izomorfismus ψ pak bude součtem

$$\psi := \sum_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1,\dots,n_i} \nu_j \alpha_{i,j} \varrho_{i,j} \pi + \sum_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1,\dots,n-n_i} \nu_{n-j} \alpha_{i,n-j} \varrho'_{i,j} \pi',$$

což je součet $m \times n$ izomorfismů jednotlivých podmodulů $e_i A$ z rozkladů A^n a $P_1 \oplus P_1'$ na direktní součty nerozložitelných podmodulů.

```
IsomorphismProjAndAn := function(mP1_P2, mAn)
  local iso, used, i, j,
        proj_P1_P2, proj_P1_P2_fin, proj_PX,
        incl_An, incl_An_fin, incl_A,
        f, g;

  # Projekce P1_P2 ->> P1 resp. P1_P2 ->> P2 ...
  proj_P1_P2 := DirectSumProjections(mP1_P2);

  # ... složíme s projekcemi P1 ->> e_iA resp. P2 ->> e_iA.
  proj_P1_P2_fin := [];
  for f in proj_P1_P2 do
    proj_PX := DirectSumProjections( Range(f) );

    for g in proj_PX do
      Add(proj_P1_P2_fin, f * g);
    od;
  od;

  # Inkluze A -> A^n ...
  incl_An := DirectSumInclusions(mAn);

  # ... složíme s inkluzemi e_iA ->> A.
  incl_An_fin := [];
  for f in incl_An do
    incl_A := DirectSumInclusions( Source(f) );

    for g in incl_A do
      Add(incl_An_fin, g * f);
    od;
  od;

  # Nyní spárujeme spočtené projekce a inkluze
  # a vzniklá zobrazení P1_P2 -> A^n sečteme.
  iso := ZeroMapping(mP1_P2, mAn);
  used := [1..Length(incl_An_fin)];
  for g in proj_P1_P2_fin do
    for i in [1..Length(incl_An_fin)] do
      f := incl_An_fin[i];

      if (not used[i] = true) and Source(f) = Range(g) then
        iso := iso + g * f;
        used[i] := true;
```

```
      break;
    fi;
  od;
od;

return iso;
end;
```

Kromě izomorfismu ψ budeme potřebovat jeho inverzi. Tu můžeme v [QPA] jednoduše spočíst následujícím příkazem:

```
psi_inv := InverseOfIsomophism(psi);
```

To je ale poměrně neefektivní, o mnoho rychleší bude v tomto jednoduchém si zavést funkci $IsomorphismAnAndProj$, která bude počítat přesně opačně k naší funkci $IsomorphismProjAndAn$.

Namísto sčítání projekcí $P_1 \oplus P_1' \to e_iA$ složených s vnořeními $e_iA \to A^n$ sečteme projekce $A^n \to e_iA$ složené s patřičnými vnořeními $e_iA \to P_1 \oplus P_1'$. Vstup inverzní funkce bude tedy stejný jako u funkce původní.

```
  IsomorphismAnAndProj := function(mP1_P2, mAn)

  ...

  return iso;
end;
```

Všimněme si, že naše funkce $IsomorphismAnAndProj$ zpracovává oba parametry stejným způsobem. Platí tedy vztah

```
IsomorphismAnAndProj(nAn,mP1_P2)=IsomorphismProjAndAn(mAn,mP1_P2);
```

a obě tyto funkce jsou totožné, mající pouze jinak pojmenované proměnné. Navíc není použitelná pouze pro dvojici s A^n, ale jediná podmínka nalezení izomorfismu je, že oba parametry musí být direktní sumou direktních sum nerozložitelných projektivních A-modulů e_iA a ty musejí být v obou rozkladech ve stejném počtu.

4.9 Izomorfismus $\varphi_{P_1,\Omega}$

Dle Věty 3.4 máme izomorfismus

$$\varphi_{P_1,\Omega} : Hom_A(P_1, \Omega) \to Hom_A(P_1, A) \otimes_A \Omega$$

daný předpisem pro $h \in Hom_A(P_1, \Omega)$ následovně

$$h \mapsto \textstyle\sum_{i=1}^{n} \rho_i \psi \mu \otimes h \pi \psi^{-1} \nu_i(1_A),$$

kde jednotlivá zobrazení jsou:

$\mu : P_1 \to P_1 \oplus P_1'$ kanonická inkluze
$\psi : P_1 \oplus P_1' \simeq A^n$ izomorfismus konstruovaný v Sekci 4.8
$\rho_i : A^n \to A$ kanonická projekce
$\nu_i : A \to A^n$ kanonická inkluze
$\pi : P_1 \oplus P_1' \to P_1$ kanonická projekce

Spočteme jednotlivé homomorfismy nutné pro výpočet $\varphi_{P_1,\Omega}$:

```
# Levá strana tenzorového součinu
mu      := DirectSumInclusions(mP1_mP1s)[1];
psi     := IsomorphismProjAndAn(mP1_mP1s, mAn);
rho     := DirectSumProjections(mAn);

# Pravá strana tenzorového součinu
nu      := DirectSumInclusions(mAn);
psi_inv:= IsomorphismAnAndProj(mP1_mP1s, mAn);
pi      := DirectSumProjections(mP1_mP1s)[1];
```

Zatím si ale ponecháme $\varphi_{P_1,\Omega}$ jako jednotlivé složky. Výsledné zobrazení spočteme později, jelikož zatím neumíme spočíst tenzorový součin obou stran.

4.10 Dualita $DTr(X)$

Nyní budeme řešit podobný problém jako v případě duality P_1^* (Sekce 4.6). Jak vyjádřit libovolný homomorfismus z $Hom_K(Tr(X), K)$ jako prvek reprezentace $DTr(X)$?

Připomeňme, že $Tr(X) \in mod(A^{op})$. Pojmenujme vrcholy našeho toulce $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ čísly $1, 2, \ldots, m$ (tedy $Q_0 = \{1, \ldots, m\}$). Uvažujme o $DTr(X)$ nejprve jako o $Hom_K(Tr(X), K)$. Ze vztahu modulů a reprezentací (Věta 2.107) vypadá reprezentace $(DTr(X)_i, \varphi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ toulce Q korespondující s modulem $DTr(X)$ následovně:

(a) Vektorový prostor $DTr(X)_i$ (pro $i \in Q_0$) je generovaný homomorfismy z množiny:

$$DTr(X)e_i = \{fe_i = f(e_i^{op} \cdot -) | f \in DTr(X)\}$$

Bází vektorového prostoru $DTr(X)_i$ jsou tedy homomorfismy z $DTr(X)$, které jsou nenulové právě na $e_i^{op}Tr(X) \subseteq Tr(X)$.

(b) Homomorfismus f_α (kde $\alpha \in Q_1$ je šipka $i \to j$, $i, j \in Q_0$) je homomorfismus

$$f_\alpha : DTr(X)_i \to DTr(X)_j$$

dáný předpisem $f \mapsto f(e_i^{op} v^{op} e_j^{op} \cdot -)$.

Nyní buď $(Tr(X)_i, \psi_\alpha)_{i\in Q_0, \alpha\in Q_1}$ reprezentace Q korespondující s modulem $Tr(X)$, $n_i := dim_K(Tr(X)_i)$ a mějme kanonickou bázi

$$B_{Tr(X)} = \{v_1^1, v_1^2, \ldots, v_1^{n_1}, v_2^1, v_2^2, \ldots, v_2^{n_2}, \ldots, v_m^1, v_m^2, \ldots, v_m^{n_m}\},$$

kde v_i^j je vektor s 1 na j-té souřadnici vektorového prostoru $Tr(X)_i$ a nulami všude jinde. Báze $B_{Tr(X)}$ je kanonická báze vektorového prostoru $(Tr(X)_i, \psi_\alpha)$. Pak máme duální bázi

$$B_{DTr(X)} = \{g_i : Tr(X) \to K | g_i^j(v_l^k) = \delta_{i,l}\delta_{j,k},\ i, l \in Q_0,\ j = 1, \ldots, n_i,\ k = 1 \ldots n_l\}$$

reprezentace $DTr(X)$ o velikosti $\sum_{i\in Q_0} dim_K(Tr(X)_i)$, kde δ značí Kroneckerovu deltu.

Máme-li homomorfismus $f : Tr(X) \to K$, pak jemu korespondujícím elementem reprezentace $DTr(X)$ vzhledem k bázi $B_{DTr(X)}$ bude prvek

$$((f(v_1^1), f(v_1^2), \ldots, f(v_1^{n_1})), (f(v_2^1), f(v_2^2), \ldots, f(v_2^{n_2})), \ldots, (f(v_m^1), f(v_m^2), \ldots, f(v_m^{n_m}))).$$

Příklad

Nechť toulec Q, algebra A a A-modul X jsou dány následovně:

$$Q: \begin{tikzcd} \circ^1 \arrow[r, "a"'] \arrow[rr, bend left, "c"] & \circ^2 \arrow[r, "b"'] & \circ^3 \end{tikzcd}, \quad A = KQ \quad, \ X: \begin{tikzcd} K^2 \arrow[r, "\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}"'] \arrow[rr, bend left, "\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}"] & K^3 \arrow[r, "\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}"'] & K^2 \end{tikzcd}$$

Pak A^{op}-modul $Tr(X)$ pak vypadá následovně

$$\begin{tikzcd} K^3 \arrow[r, "\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}"'] \arrow[rr, bend left, "\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}"] & K^2 \arrow[r, "\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}"'] & K^3 \end{tikzcd}$$

kde jsou parametry reprezentace a jednotlivých vektorových prostorů $m = 3$,

$n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$. Báze reprezentace $Tr(X)$ jako vektorového prostoru je:

$$\begin{aligned} B_{Tr(X)} = \quad & \{ \\ v_1^1 \quad = \quad & ((1,0,0),(0,0),(0,0,0)), \\ v_1^2 \quad = \quad & ((0,1,0),(0,0),(0,0,0)), \\ v_1^3 \quad = \quad & ((0,0,1),(0,0),(0,0,0)), \\ v_2^1 \quad = \quad & ((0,0,0),(1,0),(0,0,0)), \\ v_2^2 \quad = \quad & ((0,0,0),(0,1),(0,0,0)), \\ v_3^1 \quad = \quad & ((0,0,0),(0,0),(1,0,0)), \\ v_3^2 \quad = \quad & ((0,0,0),(0,0),(0,1,0)), \\ v_3^3 \quad = \quad & ((0,0,0),(0,0),(0,0,1)) \\ \} & \end{aligned}$$

Což nám dává duální bázi reprezentace $DTr(X)$:

$$B_{DTr(X)} = \{g_i^j : Tr(X) \to K \mid i \in \{1,2,3\},\ j \in 1,\dots,n_i,\ g_i^j(v_l^k) = \delta_{i,l}\delta_{j,k}\}$$

Homomorfismu $f : Tr(X) \to K$ z A-modulu $DTr(X)$, pak v $DTr(X)$ jakožto reprezentaci Q odpovídá prvek (zapsaný vzhledem k bázi $B_{DTr(X)}$):

$$(\underbrace{(f(v_1^1), f(v_1^2), f(v_1^3),)}_{\in DTr(X)_1}, \underbrace{(f(v_2^1), f(v_2^2),)}_{\in DTr(X)_2}, \underbrace{(f(v_3^1), f(v_3^2), f(v_3^3))}_{\in DTr(X)_3})$$

4.11 Tenzorový součin $Tr(X) \otimes_A \Omega$

Dle Věty 2.23 máme následující izomorfismus

$$Hom_K(M \otimes_A N, L) \simeq Hom_A(N, Hom_K(M, L))$$

daný předpisem

$$f \mapsto [n \mapsto f(- \otimes n)].$$

Ten nám pro $M = Tr(X)$, $N = \Omega$ a $L = K$ dává izomorfismus

$$Hom_K(Tr(X) \otimes_A \Omega, K) \simeq Hom_A(\Omega, Hom_K(Tr(X), K)),$$

který můžeme dále upravit z defnice funktoru $D = Hom_K(-, K)$ na

$$D(Tr(X) \otimes_A \Omega) \simeq Hom_A(\Omega, DTr(X)).$$

Aplikujeme-li funktor D ještě jednou, dostaneme izomorfismus:

$$\begin{aligned} Tr(X) \otimes_A \Omega \quad & \simeq \quad DHom_A(\Omega, DTr(X)) \\ t \otimes \omega \quad & \mapsto \quad [f \mapsto f(\omega)(t)] \end{aligned}$$

Ten využijeme k našemu výpočtu.

Tenzorový součin $Tr(X) \otimes_A \Omega$ je tedy izomorfní jako K-vektorový prostor s $DHom_A(\Omega, DTr(X))$, s nímž budeme v dalších částech pracovat. Otázkou ale zůstává, jak libovolné dvojici $(t, \omega) \in Tr(X) \times \Omega$ přiřadit K-homomorfismus

$$\begin{array}{rcl} f & \in & DHom_A(\Omega, DTr(X)) \\ f & : & Hom_A(\Omega, DTr(X)) \to K \end{array}$$

odpovídající prvku tenzorového součinu $t \otimes \omega \in Tr(X) \otimes_A \Omega$. V [QPA] spočteme poměrně jednoduše bázi

$$B_{Hom_A(\Omega, DTr(X))} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\},$$

spočíst jednoduše $DHom_A(\Omega, DTr(X))$ už ale nejde. Proto použijeme následující algoritmus, počítající na základě výše uvedeného izomorfismu:

Vstup: Báze $B_{Hom_A(\Omega, DTr(X))} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ a dvojice $(t, \omega) \in Tr(X) \times \Omega$.

Výstup: Vektor K-homomorfismu $Hom_A(\Omega, DTr(X)) \to K$ (vzhledem k bázi $B_{Hom_A(\Omega, DTr(X))}$) odpovídající prvku tenzorového součinu $t \otimes \omega$.

Průběh:

(1) Pro každý $f_i \in B_{Hom_A(\Omega, DTr(X))}$:

- **(a)** Dosadíme ω, čímž dostaneme $f_i(\omega) \in DTr(X)$ jakožto prvek reprezentace.
- **(b)** Dle sekce 4.10 spočteme obrazy báze $B_{Tr(X)}$ při zobrazení $f_i(\omega)$.
- **(c)** Spočteme koeficienty prvku $t \in Tr(X)$ vzhledem bázi $B_{Tr(X)}$ a na základě obrazů bázových vektorů spočtených v předchozím bodě spočteme i $f_i(\omega)(t) \in K$.

(2) Hledaný vektor je $(f_1(\omega)(t), f_2(\omega)(t), \dots, f_n(\omega)(t)) \in K^n$.

Algoritmus je zde zapsaný obecně, v našem případě je:

$$\begin{array}{rcl} mM & := & Tr(X) \\ mN & := & \Omega \\ m & := & t \\ n & := & \omega \\ mDM & := & DTr(X) \\ B\_hom\_mN\_mDM) & := & Hom_A(\Omega, DTr(X)) \end{array}$$

```
TensorProductMap := function(m, n, mM, mN, mDM, B_hom_mN_mDM)
 local coeffs_m, coeffs_f_i_n, i, B_hom_images, f_i_n;

 coeffs_m := Coefficients(Basis(mM), m);
 B_hom_images := [];
```

```

  f_i_n := List(B_hom_mN_mDM, f_i -> ImageElm(f_i, n));

  for i in [1..Length(f_i_n)] do
    coeffs_f_i_n := Coefficients(Basis(mDM), f_i_n[i]);

    B_hom_images[i] := coeffs_m * coeffs_f_i_n;
  od;

  return B_hom_images;
end;
```

4.12 Hlavní bázový prvek $\phi_\Omega(\omega)$

V této části spočteme prvek $\psi_\Omega(\omega) \in Tr(X) \otimes_A \Omega$, který bude hlavním prvkem báze tohoto tenzorového součinu, kterou budeme vzápětí konstruovat. V Části 4.9 jsme spočetli jdenotlivé složky izomorfismu

$$\varphi_{P_1,\Omega} : Hom_A(P_1, \Omega) \to Hom_A(P_1, A) \otimes_A \Omega$$

daného předpisem

$$h \mapsto \textstyle\sum_{i=1}^n \rho_i \psi \mu \otimes h \pi \psi^{-1} \nu_i(1_A).$$

Připomeňme ještě komutativní diagram s exaktními řádky z Části 3.1.2:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Hom(X,\Omega) \arrow[r, "(-\circ t)_\Omega"] & Hom(P_0,\Omega) \arrow[r, "(-\circ s)_\Omega"] \arrow[d, "\varphi_{P_0,\Omega}"] & Hom(P_1,\Omega) \arrow[d, "\varphi_{P_1,\Omega}"] & & \\
& & Hom(P_0, A) \otimes_A \Omega \arrow[r, "(-\circ s)_A \otimes 1_\Omega"] & Hom(P_1, A) \otimes_A \Omega \arrow[r, "\hat{t} \otimes 1_\Omega"] & Tr(X) \otimes_A \Omega \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Definujme homomorfismus

$$\phi_\Omega := [\hat{t} \otimes 1_\Omega]\varphi_{P_1,\Omega} : \; Hom_A(P_1, \Omega) \to Tr(X)$$

a zobrazme jím homomorfismus $\omega \in Hom_A(P_1, \Omega)$ projektivního pokrytí modulu Ω. Dostaneme:

$$\begin{aligned}
\phi_\Omega(w) &= [\hat{t} \otimes 1_\Omega]\varphi_{P_1,\Omega}(w) \\
&= [\hat{t} \otimes 1_\Omega] \sum_{i=1}^n \rho_i \psi \mu \otimes w \pi \psi^{-1} \nu_i(1_A) \\
&= \sum_{i=1}^n \hat{t}(\rho_i \psi \mu) \otimes w \pi \psi^{-1} \nu_i(1_A)
\end{aligned}$$

```
mu_psi_rho := mu * psi * rho;
omega_pi_psi_inv_nu := nu * psi_inv * pi * omega;

# omega * pi * psi^(-1) * nu(1_A).
omega_pi_psi_inv_nu_1_A := List(omega_pi_psi_inv_nu,
    f -> ImageElm(f, 1_mA)
  );

# Spočteme zobrazení mu_psi_rho jako elementy modulu P1*.
mu_psi_rho_el := List(mu_psi_rho,
    f -> FromHomToProjRep(f, mP1_star)
  );
t_mu_psi_rho_el := List(mu_psi_rho_el, el -> ImageElm(t_hat, el));

# Spočteme náš hlavní bázovy prvek.
psi_omega := [];
for i in [1..Length(t_mu_psi_rho_el)] do
  m := t_mu_psi_rho_el[i];
  n := omega_pi_psi_inv_nu_1_A[i];

  Add(psi_omega, TensorProductMap(
      m, n, mTrX, mOmega, mDTrX, B_hom_mDTrX_mOmega)
    );
od;
psi_omega := Sum(psi_omega);
```

4.13 Báze $Tr(X) \otimes_A \Omega$

Naším cílem je nyní nalézt prvky $g_1, g_2, \dots, g_n \in Tr(X) \otimes_A \Omega$ tak, aby

$$B_{Tr(X)\otimes_A\Omega} = \{\phi_\Omega(w), g_1, g_2, \dots, g_n\}$$

byla bází $Tr(X) \otimes_A \Omega$. Nechť B_Ω je báze Ω a $B_{Tr(X)}$ je báze $Tr(X)$. Spočteme množinu

$$\{t \otimes \omega | t \in B_{Tr(X)}, \omega \in B_\Omega\}.$$

Ta nám zaručeně generuje celý K-vektorový prostor $Tr(X) \otimes_A \Omega$. Spočteme tedy $Tr(X) \otimes_A \Omega$ jako K-vektorový prostor a vezmeme jeho kakonickou bázi $B_c = \{g_1, g_2, \dots, g_{n+1}\}$. Víme, že dle úvahy v sekci 2.2 $\phi_\Omega(w)$ je nenulový vektor. Nechť je i-tá pozice vektoru $\phi_\Omega(w)$ nenulová. Pak můžeme zvolit

$$B_{Tr(X)\otimes_A\Omega} = \{\phi_\Omega(w), g_1, g_2, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_n\}.$$

```
# Pole obsahující na i-té pozici pole
# [t_1\otimes\omega_i, ... ,t_n\otimes\omega_i].
# To využijeme v následující části. Z důvodu
```

```
# efektivnosti si ho ale předpočítáme nyní.
mTrX_mOmega := [];

# Pole nenulových prvků t_i\otimes\omega_i.
B_mTrX_mOmega := [];

# Spočteme bázi tenzorového součinu TrX a Omega.
B_mOmega := BasisVectors(Basis(mOmega));
B_mTrX := BasisVectors(Basis(mTrX));
for n in B_mOmega do
  n_images := [];

  for m in B_mTrX do
    m_n := TensorProductMap(
        m, n, mTrX, mOmega, mDTrX, B_hom_mDTrX_mOmega
      );

    Add(n_images, m_n);
    if not Sum(m_n) = 0 and not Sum(m_n) = Zero(K) then
      Add(B_mTrX_mOmega, m_n);
    fi;
  od;

  Add(mTrX_mOmega, n_images);
od;

# Jeden bázový prvek nahradíme význačným prvkem z přechozí sekce.
V := VectorSpace(K, B_mTrX_mOmega);
B_V := CanonicalBasis(V);
B_V_new := [psi_omega];
added := false;
for i in [1..Length(B_V)] do
  if not psi_omega[i] = Zero(K) and not added then
    added := true;
  else
    Add(B_V_new, B_V[i]);
  fi;
od;
```

4.14 Homomorfismus $\xi : \Omega \to DTr(X)$

Naším cílem je spočíst matice homomorfismu

$$\xi : \Omega \to DTr(X)$$

daného předpisem

$$\omega \mapsto [t \mapsto (\text{první koeficient } t \otimes \omega \text{ vzhledem k bázi } B_{Tr(X)\otimes_A \Omega})].$$

Při výpočtu báze 4.13 $Tr(X) \otimes_A \Omega$ jsme již spočetli pole *mTrX_mOmega* tvaru

$$mTrX\_mOmega[i] = [t_1 \otimes \omega_i, \ldots, t_n \otimes \omega_i],$$

kde $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ je báze $Tr(X)$ a $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$ je báze Ω. Každý prvek $t_i \otimes \omega_i$ si vyjádříme vzhledem bázi $Tr(X) \otimes_A \Omega$ a první souřadnici si uložíme do pole *images* na pozici $images[i][j]$.

```
images := [];
for i in [1..Length(B_mOmega)] do
  Add(images, List(mTrX_mOmega[i],
      v -> Coefficients(Basis(V, B_V_new), v)[1]
    ));
od;
```

A zkonstruujeme hledaný homomorfismus:

```
matrices := ExtractHomMatrices(images, mOmega, mDTrX);
xi := RightModuleHomOverAlgebra(mOmega, mDTrX, matrices * One(K));
```

4.15 Hledaný generátor E

E spočteme jako pushout homomorfismů i a ξ.

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "i"'] & DTr(X) \arrow[d, dotted, dash] \\
P_0 \arrow[r, dotted, dash] & E
\end{tikzcd}$$

```
mE := PushOut(kernel_inc, xi);
```

Stejně jako u funkce *AlmostSplitSequence* vrátíme pole obsahující na prvním místě homomorfismus $DTr(X) \to E$ a na druhém jeho kojádro, tedy homomorfismus $E \to X'$, kde X' nemusí být přímo X, ale nějaký modul X izomorfní.

```
return [mE[1], CoKernelProjection(mE[1])];
```

Tím jsme hotovi.

5. Příklady použití a testování časové náročnosti

Vyzkoušíme nyní algoritmus na několika příkladech. Poté provedeme srovnání času potřebného pro výpočet s algoritmem *AlmostSplitSequence* implementovaným v [QPA]. Náš algoritmus pojmenujeme jednoduše *AlmostSplitSequence*2.

Pro testování času necháme každý algoritmus provést výpočet několikrát následujícím skriptem, kde ve funkci *GetModule* znovu vytvoříme modul pro který počítáme. Modul, jeho algebru i quiver je třeba vždy vytvořit znova, aby GAP nemohl jeho generátor skoro štěpitelných posloupností a další vlastnosti, které mohou zkreslit konečný čas, cacheovat (neboli pamatovat si předchozí výpočty pro urychlení budoucích operací).

```
GetModule := function(i)
  local K, Q, KQ, A, matrices, mX;

  K := Rationals;
  Q := Quiver(3, [[1, 2, "a"], [2, 3, "b"],[1, 3, "c"]]);
  A := PathAlgebra(K,Q);
  matrices := [ ["a", [[1,0,0],[0,1,0]]],
                ["b", [[0,1],[1,0],[0,1]]],
                ["c", [[0,0],[1,0]]] ];
  mX := RightModuleOverPathAlgebra(A,matrices);

  return mX;
end;

TestPerformance := function(iter)
  local i, time;

  time := Runtime();
  for i in [1..iter] do
    AlmostSplitSequence( GetModule(i) );
  od;
  time := Float((Runtime() - time) / iter / 1000);
  Print("Execution time for AlmostSplitSequence: ", time, "\n");

  time := Runtime();
  for i in [1..iter] do
    AlmostSplitSequence2( GetModule(i) );
  od;
  time := Float((Runtime() - time) / iter / 1000);
  Print("Execution time for AlmostSplitSequence2: ", time, "\n");
end;

TestPerformance(100);
```

Příklad 1

Nechť K je těleso racionálních čísel a toulec Q, přípustný ideál I a A-modul X, kde algebra $A = KQ/I$, jsou dány následovně:

Toulec Q: $\begin{tikzcd} \circ^1 \arrow[r, "a"'] \arrow[rr, bend left, "c"] & \circ^2 \arrow[r, "b"'] & \circ^3 \end{tikzcd}$ $\quad I = \emptyset \quad$ A-modul X: $\begin{tikzcd} K^2 \arrow[r, "\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]"'] \arrow[rr, bend left, "\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]"] & K^2 \arrow[r, "\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]"'] & K^1 \end{tikzcd}$

Výsledný generátor množiny skoro štěpitelných posloupností je:

$$\begin{tikzcd}
DTr(X) \arrow[dd] & K^4 \arrow[r, "\left[\begin{smallmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{smallmatrix}\right]"'] \arrow[rr, bend left, "\left[\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right]"] \arrow[dd, dotted, "\left[\begin{smallmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{smallmatrix}\right]"'] & K^3 \arrow[r, "\left[\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right]"'] \arrow[dd, dotted, "\left[\begin{smallmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{smallmatrix}\right]"] & K^3 \arrow[dd, dotted, "\left[\begin{smallmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{smallmatrix}\right]"] \\
 & & & \\
E \arrow[dd] & K^6 \arrow[r, "\left[\begin{smallmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{smallmatrix}\right]"'] \arrow[rr, bend left, "\left[\begin{smallmatrix}1&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{smallmatrix}\right]"] \arrow[dd, dotted] & K^5 \arrow[r, "\left[\begin{smallmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{smallmatrix}\right]"'] \arrow[dd, dotted] & K^4 \arrow[dd, dotted] \\
 & & & \\
X & K^2 \arrow[r, "\left[\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{smallmatrix}\right]"'] \arrow[rr, bend right, "\left[\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right]"'] & K^3 \arrow[r, "\left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]"'] & K^2
\end{tikzcd}$$

Náš algoritmus byl v tomto poměrně jednoduchém případě pomalejší. Integrovaná funkce *AlmostSplitSequence* běžela v průměru ze 100 běhů 0,171s a naše funkce *AlmostSplitSequence*2 průměrně 0.238s.

Příklad 2

Otestujeme nyní algoritmus na mírně složitějším příkladě. Nechť K je těleso racionálních čísel a toulec Q, přípustný ideál I a A-modul X, kde algebra $A = KQ/I$, jsou dány následovně:

$$
Q\colon\quad
\begin{tikzcd}
\circ^1 \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "b"'] & \circ^2 \arrow[loop above, "c"] \arrow[r, "d"'] & \circ^3 \arrow[ll, bend left=60, "e"]
\end{tikzcd}
\qquad
I = \{c^2, acd - bd, ea, eb\}
\qquad
X\colon\quad
\begin{tikzcd}
K^2 \arrow[r, bend left, "\left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}\right]"] \arrow[r, bend right, "\left[\begin{smallmatrix}1&0\\1&0\end{smallmatrix}\right]"'] & K^2 \arrow[loop above, "\left[\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right]"] \arrow[r, "\left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right]"'] & K^2 \arrow[ll, bend left=60, "\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right]"]
\end{tikzcd}
$$

Výsledný generátor množiny skoro štěpitelných posloupností je:

$$
\begin{tikzcd}
DTr(X) \arrow[dd] & & K^{10} \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[dd, dotted] & K^6 \arrow[loop above] \arrow[r] \arrow[dd, dotted] & K^4 \arrow[ll, bend left=60] \arrow[dd, dotted] \\
\\
E \arrow[dd] & & K^{12} \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[dd, dotted] & K^8 \arrow[loop above] \arrow[r] \arrow[dd, dotted] & K^6 \arrow[ll, bend left=60] \arrow[dd, dotted] \\
\\
X & & K^2 \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & K^2 \arrow[loop above] \arrow[r] & K^2 \arrow[ll, bend left=60]
\end{tikzcd}
$$

Náš algoritmus již byl v tomto mírně složitějším případě rychlejší. Integrovaná funkce *AlmostSplitSequence* běžela v průměru ze 20 běhů 25s a naše funkce *AlmostSplitSequence*2 průměrně 4s.

Příklad 3

Nyní si ukážeme, jak je možné algoritmus u algeber nad konečným tělesem, které mají až na izomorfismus konečně mnoho nerozložitelných reprezentací, využít k jejich výpočtu. Začneme s libovolným neprojektivním a nerozložitelným modulem X. Spočteme jeho skoro štepitelnou posloupnost

$$0 \to DTr(X) \to E \to X \to 0.$$

Poté modul E rozložíme na nerozložitelné direktní sčítance a postup opakujeme s každým z nich. Po konečném počtu kroků obdržíme již pouze moduly izomorfní dříve nalezeným. Užitý postup nebudeme dokazovat ani dopodrobna rozebírat, jde jen o základní ilustraci využití zkonstruovaného algoritmu.

Nechť $K = GF(13)$ (Galois Field), K-algebra $A = KQ$, kde toulec Q je dán následovně:

$$
\begin{tikzcd}
 & \circ^{2} & \\
 & \circ^{1} \arrow[u] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\circ^{3} & & \circ^{4}
\end{tikzcd}
$$

Začněme s neprojektivním jednoduchým nerozložitelným modulem $S(1)$:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 & \\
 & K \arrow[u] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
0 & & 0
\end{tikzcd}
$$

Ten i všechny ostatní moduly budeme pro jednoduchost zapisovat následovně s vynecháním šipek:

$$
\begin{array}{ccc}
 & 0 & \\
 & 1 & \\
0 & & 0
\end{array}
$$

Máme jeho skoro štěpitelnou posloupnost

$$
DTr(X) = \begin{array}{ccc} & 1 & \\ & 2 & \\ 1 & & 1 \end{array} \longrightarrow E_1 = \begin{array}{ccc} & 1 & \\ & 3 & \\ 1 & & 1 \end{array} \longrightarrow S(0) = \begin{array}{ccc} & 0 & \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{array},
$$

kde E_1 rozložíme na 3 nerozložitelné direktní sčítance N_1, N_2, N_3 a dostaneme diagram:

$$
\begin{tikzcd}
 & N_1 = \begin{smallmatrix} & 0 & \\ & 1 & \\ 1 & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[dr] & \\
DTr(X) = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & 2 & \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & N_2 = \begin{smallmatrix} & 0 & \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix} \arrow[r] & S(1) = \begin{smallmatrix} & 0 & \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{smallmatrix} \\
 & N_3 = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Dále postup zopakujeme pro $DTr(X)$ a dostaneme diagram:

$$
\begin{tikzcd}
 & N_4 = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix} \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix} & 0 & \\ & 1 & \\ 1 & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[dr] & \\
P(1) = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & N_5 = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & 1 & \\ 1 & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[r] & \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & 2 & \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \begin{smallmatrix} & 0 & \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix} \arrow[r] & \begin{smallmatrix} & 0 & \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{smallmatrix} \\
 & N_6 = \begin{smallmatrix} & 0 & \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix} \arrow[ur] & & \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Pokud nyní spočteme skoro štěpitelné posloupnosti pro moduly N_4, N_5 a N_6, tak všechny budou procházet projektivním modulem $P(1)$ a začínat v jednom ze tří zbylých nerozložitelných projektivních modulů. Tím jsme hotovi a náš diagram je kompletní:

$$\begin{tikzcd}
\begin{smallmatrix} & 0 & \\ & 0 & \\ 1 & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix} \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix} & 0 & \\ & 1 & \\ 1 & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[dr] & \\
\begin{smallmatrix} & 0 & \\ & 0 & \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix} \arrow[r] & \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & 1 & \\ 1 & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[r] & \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & 2 & \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \begin{smallmatrix} & 0 & \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix} \arrow[r] & \begin{smallmatrix} & 0 & \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{smallmatrix} \\
\begin{smallmatrix} & 1 & \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[ur] & & \begin{smallmatrix} & 0 & \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix} \arrow[ur] & & \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{smallmatrix} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Při našem pojmenování

$$\begin{tikzcd}
P(3) \arrow[dr] & & N_4 \arrow[dr] & & N_1 \arrow[dr] & \\
P(4) \arrow[r] & P(1) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & N_5 \arrow[r] & DTr(S(1)) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & N_2 \arrow[r] & S(1) \\
P(2) \arrow[ur] & & N_6 \arrow[ur] & & N_3 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

máme následující posloupnosti skoro štěpitelné posloupnosti

$$\begin{gathered}
0 \to P(3) \to P(1) \to N_4 \to 0 \\
0 \to P(4) \to P(1) \to N_5 \to 0 \\
0 \to P(2) \to P(1) \to N_6 \to 0 \\
0 \to N_4 \to DTr(S(1)) \to N_1 \to 0 \\
0 \to N_5 \to DTr(S(1)) \to N_2 \to 0 \\
0 \to N_6 \to DTr(S(1)) \to N_3 \to 0 \\
0 \to DTr(S(1)) \to N_1 \oplus N_2 \oplus N_3 \to S(1) \to 0 \\
0 \to P(1) \to N_4 \oplus N_5 \oplus N_6 \to DTr(S(1)) \to 0
\end{gathered}$$

a navíc platí, že

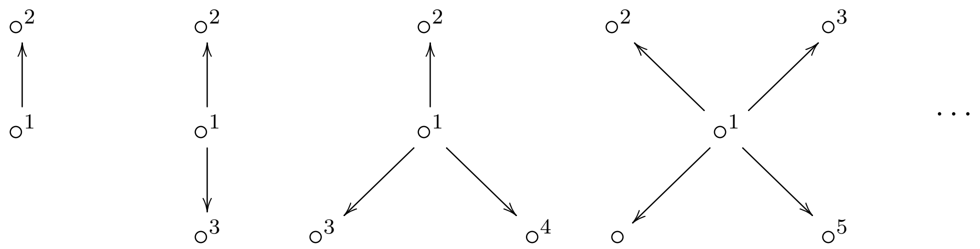
$$\begin{aligned}
P(4) &= S(4) = DTr(N_5) \\
P(3) &= S(3) = DTr(N_6) \\
P(2) &= S(2) = DTr(N_4) \\
P(0) &= DTrDTr(S(1)) \\
N_4 &= DTr(N_3) \\
N_5 &= DTr(N_2) \\
N_6 &= DTr(N_1).
\end{aligned}$$

Měli jsme tedy více možností, jak při výpočtu postupovat a například modul N_6 jsme mohli spočíst jako první modul skoro štěpitelné posloupnosti končící v modulu N_3.

Příklad 4

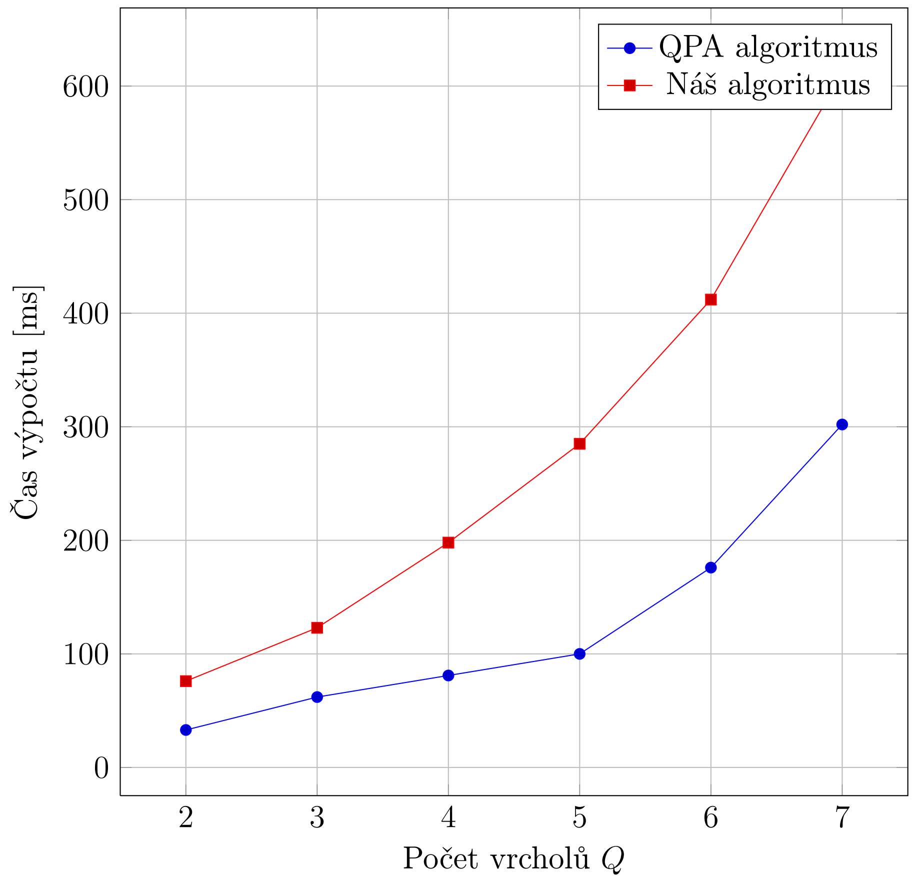
Zkusme nyní na srovnat rychlost obou algoritmů ve vztahu k počtu vrcholů a hran.

Nejprve budeme zvyšovat počet vrcholů a hran současně. Opět položme $K = GF(13)$ (Galois Field) a K-algebru $A = KQ$, kde toulci Q budeme postupně navyšovat počet vrcholů od 2 do 20:

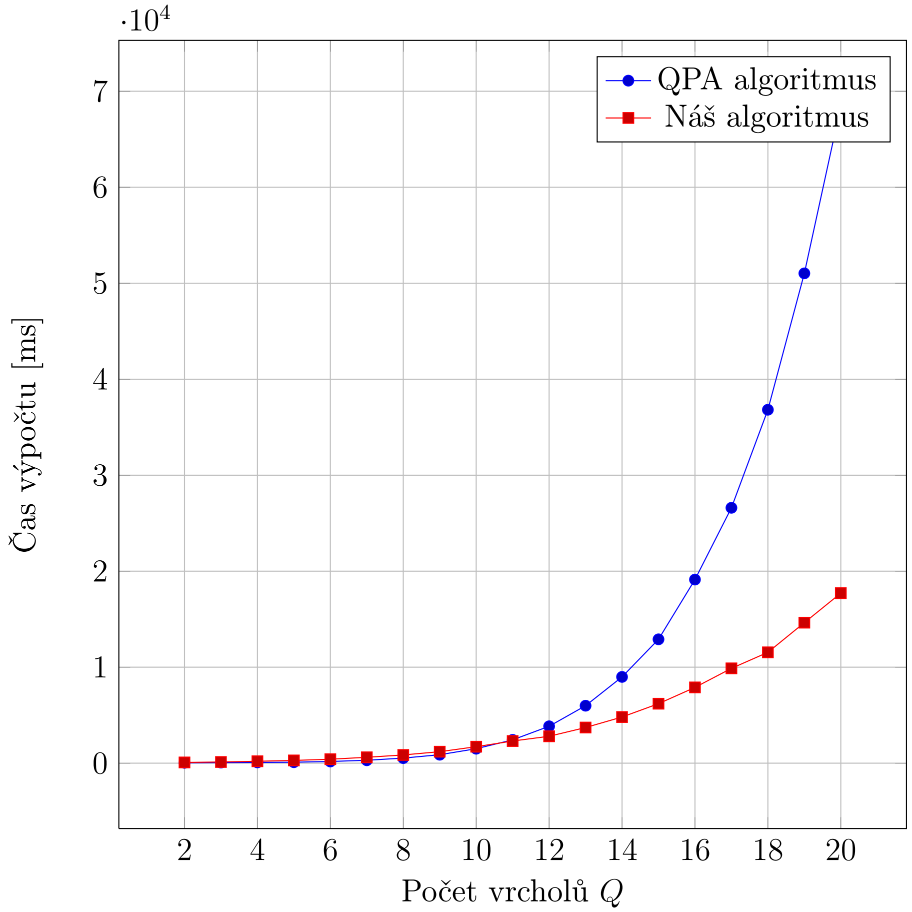


Jako modul X, jehož skoro štěpitelnou posloupnost budeme hledat, zvolíme neprojektivní, nerozložitelný a jednoduchý modul $S(1)$. Tedy modul, který vrcholu 1 přiřazuje vektorový prostor K, ostatním vrcholům nulový vektorový prostor a šipkám nulová zobrazení.

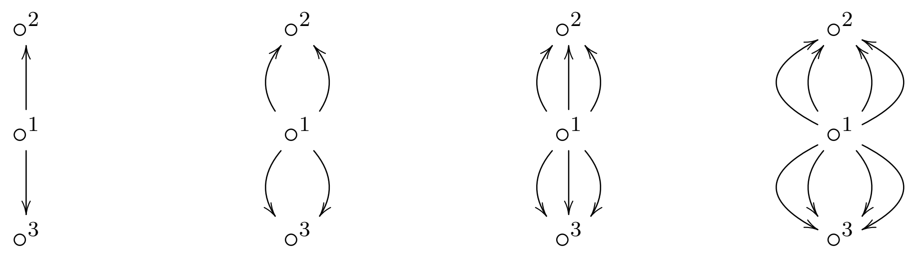
Nejprve se podíváme na rychlost v případě nízkého počtu vrcholů toulce Q a to $1, 2, \ldots, 7$:



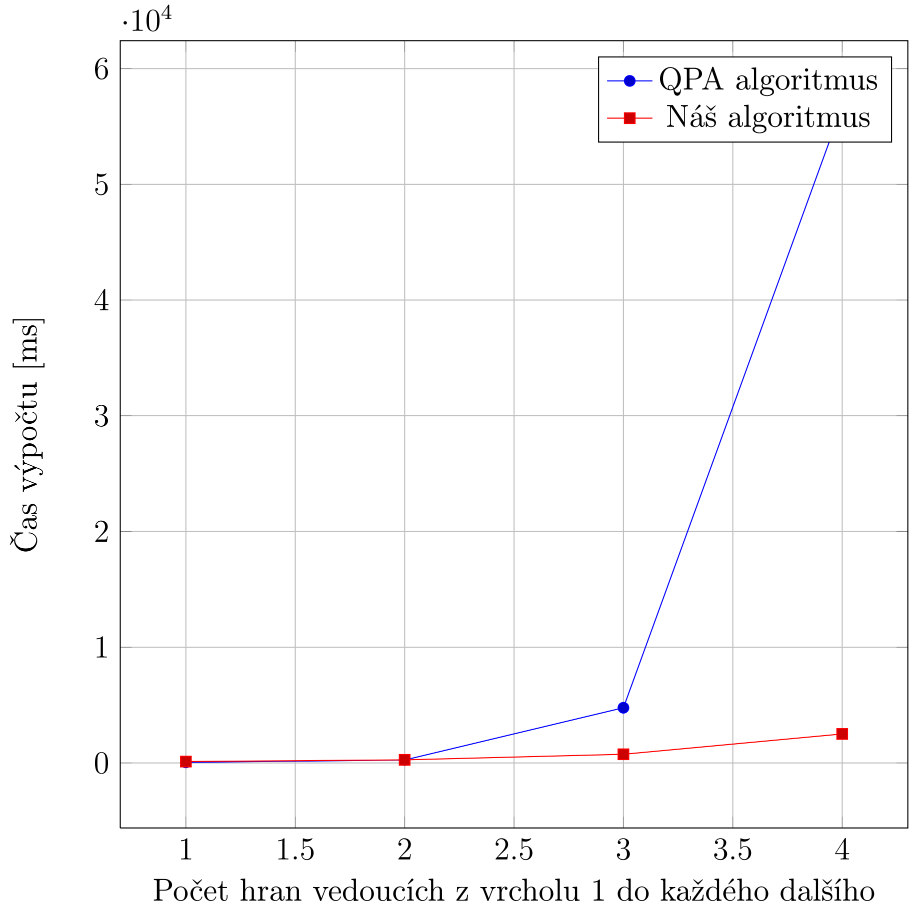
Jak vidíme, pro nízký počet vrcholů je náš algoritmus méně efektivní. Zhruba od velikosti toulce $|Q_0| = 10$ ale začne původní algoritmus zaostávat a to exponenciální rychlostí, jak je vidět na následujícím grafu:



Zkusme nyní zafixovat počet vrcholů na počtu 3 a zvyšovat počet hran. Toulec Q budeme postupně ve 4 krocích konstruovat následovně:



Jako modul X opět jednoduše zvolíme modul $S(1)$. Z následujícího grafu je vidět ještě markatnější rozdíl v růstu výpočetního času mezi oběma algoritmy:


·10^4
6
5
4
3
2
1
0
Čas výpočtu [ms]
QPA algoritmus
Náš algoritmus
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
Počet hran vedoucích z vrcholu 1 do každého dalšího

6. Závěr

V této práci jsme prošli konstrukcí algoritmu pro výpočet generátoru skoro štěpitelných posloupností od základů dané problematiky až po důkaz jeho správnosti. V následujících částech jsme provedli implementaci v teorii reprezentací, uvedli několik příkladů a srovnali algoritmus s jiným již implementovaným.

Podívejme se nyní na implementaci algoritmu. Samotný kód je poměrně rozsáhlý a konstrukce složitá, ale velké množství pomocných funkcí použitých během výpočtu nám dává mnoho možností pro pozdější optimalizaci za účelem zvýšení rychlosti. Přesto je již nyní tato implementace v mnoha případech složitějšího toulce rychlejší než aktuální algoritmus v balíku [QPA].

Samotná práce by při svojí podrobnosti měla obsahovat vše potřebné pro pochopení algoritmu i jeho implementace a může sloužit jako vstupní brána do teorie reprezentací a systému [GAP] bez jakýchkoliv předchozích znalostí dané problematiky.

Literatura

[1] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński: *Elements of the representation theory of associative algebras.*
Vol. 1, CUP 2006.

[2] M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smalo: *Representation theory of Artin algebras.*
CUP 2005.

[3] Tea Sormbroen Lian: *Computing almost split sequences.*
Vol. 1, CUP 2006.

[4] Frank W. Anderson, Kent R. Fuller: *Rings and Categories of Modules.*
Second edition, 1992.

[5] J. Rotman: *An Introduction To Homological Algebra.*
Number v. 85 in Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 1979.

[GAP] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming.*;
Version 4.6.4, 2013,
`http://www.gap-system.org`.

[QPA] The QPA-Team, *QPA – Quivers and path algebras.*
Version 1.11, 2013,
`http://www.math.ntnu.no/~oyvinso/QPA/`,
`http://sourceforge.net/projects/quiverspathalg/`.

Přílohy

(1) Kód algoritmu - umístěn na přiloženém kompaktním (CD).

(2) Kód příkladů použití a testování časové náročnosti - umístěn na přiloženém kompaktním (CD).