V

Nobody

 \mathbf{V}

Theorem:

$$\vdash (P \to Q) \lor (Q \to P)$$

Abbreviations: $\Gamma = (P \to Q) \lor (Q \to P)$ Derivation tree:

$$\frac{-((P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)), P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q}{\neg ((P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)), P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q} \lor I1} \\ \frac{\neg ((P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)), P \rightarrow Q \vdash (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)}{\neg ((P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)) \vdash \neg (P \rightarrow Q)} \lor I1} \\ \frac{\neg ((P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)) \vdash \neg (P \rightarrow Q)}{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P))} \neg I \\ \frac{\neg ((P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)) \vdash \neg (P \rightarrow Q)}{\neg E*} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)) \vdash \neg (P \rightarrow Q)}{\neg E*} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)) \vdash \neg (P \rightarrow Q)}{\neg E*} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)) \vdash \neg (P \rightarrow Q)}{\neg E*} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)) \vdash \neg (P \rightarrow Q)}{\neg E*} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)) \vdash \neg (P \rightarrow Q)}{\neg E*} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)) \vdash \neg (P \rightarrow Q)}{\neg E*} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)) \vdash \neg (P \rightarrow Q)}{\neg E*} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)) \vdash \neg (P \rightarrow Q)}{\neg E*} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)) \vdash \neg (P \rightarrow Q)}{\neg E*} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)) \vdash \neg (P \rightarrow Q)}{\neg E*} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)) \vdash \neg (P \rightarrow Q)}{\neg E*} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)) \vdash \neg (P \rightarrow Q)}{\neg E*} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)) \vdash \neg (P \rightarrow Q)}{\neg E*} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)) \vdash \neg (P \rightarrow Q)}{\neg E*} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)) \vdash \neg (P \rightarrow Q)}{\neg E*} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)) \vdash \neg (P \rightarrow Q)}{\neg E*} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)) \vdash \neg (P \rightarrow Q)}{\neg E*} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)) \vdash \neg (P \rightarrow Q)}{\neg E*} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)) \vdash \neg (P \rightarrow Q)}{\neg E*} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)}{\neg (P \rightarrow Q)} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)}{\neg (P \rightarrow Q)} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)}{\neg (P \rightarrow Q)} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)}{\neg (P \rightarrow Q)} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)}{\neg (P \rightarrow Q)} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)}{\neg (P \rightarrow Q)} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)}{\neg (P \rightarrow Q)} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)}{\neg (P \rightarrow Q)} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)}{\neg (P \rightarrow Q)} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)}{\neg (P \rightarrow Q)} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)}{\neg (P \rightarrow Q)} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)}{\neg (P \rightarrow Q)} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)}{\neg (P \rightarrow Q)} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)}{\neg (P \rightarrow Q)} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)}{\neg (P \rightarrow Q)} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)}{\neg (P \rightarrow Q)} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)}{\neg (P \rightarrow Q)} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)}{\neg (P \rightarrow Q)} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)}{\neg (P \rightarrow Q)} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)}{\neg (P \rightarrow Q)} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)}{\neg (P \rightarrow Q)} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)}{\neg (P \rightarrow Q)} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)}{\neg (P \rightarrow Q)} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)}{\neg (P \rightarrow Q)} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow P)}{\neg (P \rightarrow Q)} \\ \frac{\neg (P \rightarrow Q) \lor (Q \rightarrow$$

$$\frac{-(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)), P, \neg Q, Q \rightarrow P \vdash Q \rightarrow P}{\neg ((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)), P, \neg Q, Q \rightarrow P \vdash (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))} \vee I2 \xrightarrow{\neg ((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)), P, \neg Q, Q \rightarrow P \vdash \neg ((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))} \neg I \xrightarrow{\neg ((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)), P, \neg Q \vdash Q \rightarrow P} \neg E$$

$$\frac{\neg ((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)), P, \neg Q \vdash \neg (Q \rightarrow P)}{\neg ((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)), P, \neg Q \vdash Q \rightarrow P} \neg E$$

$$\frac{\neg((P \to Q) \lor (Q \to P)), P \to Q}{\neg((P \to Q) \lor (Q \to P)) \vdash P \to Q} \to I$$

$$\vdash \neg(P \to Q) \lor Q \to P$$