

1.1 Wektory i przestrzenie liniowe

Wektory są to obiekty, określone najczęściej na ciele liczb rzeczywistych \mathbb{R} , na których zdefiniowano operacje dodawania i mnożenia przez liczbę.

Wektor n -wymiarowy w można zapisać jako obiekt złożony z n elementów v_i :

$$\mathbf{V} = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle. \quad (1.1)$$

W przypadku reprezentacji trójwymiarowego punktu, wektor punktu p składa się z trzech elementów:

$$\mathbf{p} = \langle p_x, p_y, p_z \rangle. \quad (1.2)$$

W reprezentacji macierzowej wektor \mathbf{V} jest n elementową kolumną wartości, a jego transpozycję stanowi n elementowy rząd wartości:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}^T = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]. \quad (1.3)$$

Przestrzeń liniową nazywamy dowolny zbiór wektorów zamknięty ze względu na mnożenie przez liczby i dodawanie, zawierający pewien wyroźniony wektor zerowy $\mathbf{0}$. Dla dowolnych wektorów \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} , oraz liczb a i b zachodzą następujące warunki:

$$\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}, \quad (1.6)$$

$$0\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (1.7)$$

$$1\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad (1.8)$$

$$a(b\mathbf{x}) = (ab)\mathbf{x}, \quad (1.9)$$

$$a(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y}, \quad (1.10)$$

$$(a + b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}. \quad (1.11)$$

Dowolne n wektorów $\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n$ oraz liczb $a_1 \dots a_n$ można zapisać jako kombinację liniową:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n = \sum_{i=1}^n a_i\mathbf{v}_i. \quad (1.12)$$

Zbiór wektorów $\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n$ jest liniowo niezależny, jeżeli nie istnieje zbiór niezerowych liczb rzeczywistych a_i (gdzie $i = 1 \dots n$, $a_i \neq 0$), spełniający równanie:

$$a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}. \quad (1.13)$$

W przeciwnym przypadku zbiór ten nazywany liniowo zależnym. Innymi słowy, zbiór jest liniowo zależny, jeżeli pewien wektor z tego zbioru jest kombinacją liniową pozostałych.

Zbiór liniowo niezależnych wektorów przestrzeni liniowej V nazywamy bazą $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ w tej przestrzeni, jeżeli dla dowolnego wektora \mathbf{x} przestrzeni V istnieją liczby rzeczywiste $a_1 \dots a_n$, takie że:

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{e}_1 + \dots + a_n\mathbf{e}_n. \quad (1.14)$$

Wszystkie bazy przestrzeni liniowej V są równoliczne i składają się z dokładnie n wektorów, gdzie n nazywamy wymiarem tej przestrzeni. Dla dowolnej przestrzeni liniowej można określić nieskończonie wiele baz. Przykładowo, zbiór $\{[1, 0], [0, 1]\}$ jest bazą w przestrzeni \mathbb{R}^2 , natomiast zbiór $\{[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]\}$ jest bazą w przestrzeni \mathbb{R}^3 .

1.1.1 Układ współrzędnych

Załóżmy, że zbiór $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ jest bazą w przestrzeni V , a \mathbf{x} jest dowolnym wektorem w tej przestrzeni, wtedy liczby x_1, \dots, x_n , takie że $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i\mathbf{e}_i$, nazywają się współrzędnymi wektora \mathbf{x} w bazie B .

Układ współrzędnych jest to przyporządkowanie każdemu wektorowi w przestrzeni V ciągu współrzędnych w postaci wektora $\{x_1, \dots, x_n\}$. Baza $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, która służy do określenia układu współrzędnych nazywa się *układem odniesienia*.

1.1.2 Przekształcenia liniowe

Przekształcenie $f : V_1 \rightarrow V_2$ jest liniowe wtedy, gdy dla dowolnych wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ i liczb a, b zachodzi równość:

$$f(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = af(\mathbf{x}) + bf(\mathbf{y}). \quad (1.15)$$

Zbiór wszystkich wektorów $\mathbf{x} \in V_1$, takich że $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in V_2$ nazywamy *jadem przekształcenia*.

Przekształcenie liniowe takie, że $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *funkcjonałem liniowym*. Dowolny funkcyjonal liniowy w n -wymiarowej przestrzeni liniowej V można opisać wzorem

$$f(\mathbf{x}) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n, \quad (1.16)$$

gdzie $\{a_1, \dots, a_n\}$ jest wektorem o wymiarze n . W przypadku *funkcjonalu zeroowego* wszystkie jego współczynniki a_i są równe零.

1.1.3 Normalizacja przekształceń

Norma jest funkcyjonalem $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ określonym przestrzeni liniowej V spełniającym dla dowolnych wektorów \mathbf{x} i \mathbf{y} oraz liczby $a \in \mathbb{R}$ następujące warunki:

$$1) \quad \|\mathbf{x}\| \geq 0 \quad (\text{dodatniość}), \quad (1.17)$$

$$2) \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (1.18)$$

$$3) \quad \|a\mathbf{x}\| = |a| \|\mathbf{x}\| \quad (\text{półliniowość}), \quad (1.19)$$

$$4) \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad (\text{nierówność trójkąta}). \quad (1.20)$$

Pojecie normy jest bezpośrednim uogólnieniem długości wektora. Przestrzeń liniowa, w której określona jest norma nazywamy *przestrzenią unormowaną*.

Najczęściej spotykane normy określa się następująco:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (\text{norma pierwsza}), \quad (1.21)$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad (\text{norma druga}), \quad (1.22)$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1 \dots n} |x_i| \quad (\text{norma nieskończoność}). \quad (1.23)$$

Wektor, którego norma wynosi 1 nosi nazwę wektora jednostkowego.

Norma wektora \mathbf{v} w przestrzeni 3D ma postać:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (1.24)$$

Dowolny wektor \mathbf{v} mający przynajmniej jedną składową niezerową można przekształcić do wektora jednostkowego mnożąc go przez wartość $1/\|\mathbf{v}\|$, taka operacja nazywamy *normalizacją wektora* i jest często stosowana w grafice komputerowej.

1.1.4 Iloczyn skalarny

Iloczyn skalarny dwóch wektorów niezerowych \mathbf{x} i \mathbf{y} to liczba równa iloczynowi długości tych wektorów oraz cosinus kąta zawartego pomiędzy nimi:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \cos \alpha, \quad \text{gdzie } \alpha = \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (1.25)$$

Z drugiej strony iloczyn skalarny może być wyznaczony jako suma iloczynów poszczególnych elementów wektorów:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (1.26)$$

W zapisie macierzowym iloczyn skalarny przyjmuje postać:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad (1.27)$$

wynikiem tej operacji jest macierz o wymiarze 1×1 i jest ona równoważna dwóm poprzednim postaciom.

Ważniejsze właściwości iloczynu skalarnego:

$$1) \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \quad (\text{przemienność}), \quad (1.28)$$

$$2) \quad (ax) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (ay) = a(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}), \quad \text{gdzie } a \in \mathbb{R}, \quad (1.29)$$

$$3) \quad \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \quad (\text{rozdzielnosc mnożenia względem dodawania}), \quad (1.30)$$

$$4) \quad \text{jeżeli } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ i } \mathbf{y} \neq \mathbf{0}, \text{ to} \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \perp \mathbf{y} \quad (1.31)$$

$$5) \quad \text{jeżeli } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ i } \mathbf{y} \neq \mathbf{0}, \text{ to} \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \pm |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| \Leftrightarrow \mathbf{x} \parallel \mathbf{y} \quad (1.32)$$

Przestrzeń, w której określony jest iloczyn skalarny nazywamy *przestrzenią euklidesową*. Wektor, których iloczyn skalarny jest równy 0 są prostopadłe względem siebie i nazywamy się *wektorami ortogonalnymi*. Wektor zerowy jest ortogonalny względem każdego wektora.

Znak iloczynu skalarnego mówi o bliskości kierunków wskazania dwóch wektorów. Wyznaczmy płaszczyznę przechodzącą przez początek wektora \mathbf{x} i prostąpadłą do niego. Wszystkie wektory zakończone po tej samej stronie płaszczyzny mają dodatni znak iloczynu skalarnego z wektorem \mathbf{x} , natomiast te zakończone po przeciwnej stronie – ujemny.

1.1.5 Iloczyn wektorowy

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów niezerowych i nierównoległych \mathbf{x} i \mathbf{y} jest to wektor w spełniający następujące warunki:

1. Długość wektora wynikowego jest iloczynem długości wektorów składowych oraz sinusa kąta wypukiego zawartego pomiędzy nimi:

$$|\mathbf{w}| = |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \sin \alpha, \quad \text{gdzie } \alpha = \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (1.33)$$

2. Wektor wynikowy jest prostopadły do obu wektorów składowych: $\mathbf{w} \perp \mathbf{x}$ i $\mathbf{w} \perp \mathbf{y}$.

3. Zwrot wektora \mathbf{w} jest dobrany tak, aby trójką wektorów \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{w} tworzyła układ o orientacji zgodnej z orientacją układu współrzędnych.

Jeżeli wektory \mathbf{x} i \mathbf{y} są równoległe lub przynajmniej jeden z nich jest wektorem zerowym, to ich iloczyn wektorowy jest wektorem zerowym. Iloczyn wektorowy oznaczamy symbolem $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$.

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów w 3D: $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ i $\mathbf{y} = \langle y_1, y_2, y_3 \rangle$ może być zapisany następującą zależnością:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \langle x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1 \rangle. \quad (1.34)$$

Inną metodą zapisu iloczynu wektorowego jest postać macierzowa:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \quad (1.35)$$

gdzie \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} są wektorami jednostkowymi (wersorami) układu odniesienia:

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle, \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle, \quad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle.$$

Analogicznie powyższy zapis można przedstawić jako:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & \mathbf{i} \\ y_2 & y_3 & \mathbf{j} \\ 1 & 0 & \mathbf{k} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 & \mathbf{i} \\ y_3 & y_1 & \mathbf{j} \\ 0 & 1 & \mathbf{k} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \mathbf{i} \\ y_1 & y_2 & \mathbf{j} \\ 0 & 0 & \mathbf{k} \end{vmatrix}. \quad (1.36)$$

Iloczyn wektorowy może być także wyrażony jako transformacja liniowa jednego wektorów składowych \mathbf{y} za pomocą macierzy utworzonej z drugiego wektora \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad (1.37)$$

Ważniejsze właściwości iloczynu wektorowego:

$$1) \quad \mathbf{x} \times \mathbf{y} = -(\mathbf{y} \times \mathbf{x}) \quad (\text{anyprzemienność}), \quad (1.38)$$

$$2) \quad (ax) \times \mathbf{y} = \mathbf{x} \times (ay) = a(\mathbf{x} \times \mathbf{y}), \quad \text{gdzie } a \in \mathbb{R}, \quad (1.39)$$

$$3) \quad \mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{z} \quad (\text{rozdzielnosc mnożenia względem dodawania}), \quad (1.40)$$

$$4) \quad \text{jeżeli } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ i } \mathbf{y} \neq \mathbf{0}, \text{ to} \quad \mathbf{x} \times \mathbf{y} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \parallel \mathbf{y} \quad (1.41)$$

$$5) \quad \mathbf{x} \times \mathbf{x} = 0 \quad (1.42)$$

Pole równolegloboku S opisanego na wektorach \mathbf{x} i \mathbf{y} jest równe wartości iloczynu wektorowego:

$$S = |\mathbf{x} \times \mathbf{y}|. \quad (1.43)$$

Dowolny wektor $\mathbf{v} \neq 0$ prostopadły do wszystkich wektorów będących elementami pewnej płaszczyzny nazywamy *wektorem normalnym*.

1.1.6 Iloczyn mieszany

Iloczyn mieszany trzech wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ jest to iloczyn postaci:

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}. \quad (1.44)$$

Iloczyn mieszany można obliczyć stosując następujące wyrażenie:

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}, \quad (1.45)$$

Ważniejsze właściwości iloczynu mieszanego:

$$1) (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} \quad (\text{przemienność cykliczna}) \quad (1.46)$$

$$2) (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = -(\mathbf{z} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{x} \quad (\text{anypromienność}), \quad (1.47)$$

$$3) (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{x} = 0 \text{ oraz } (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} = 0 \quad (1.48)$$

Trzy wektory niezerowe $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ są współplaszczyznowe (komplanarne) wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = 0. \quad (1.49)$$

1.2 Macierze

Macierz \mathbf{M} jest to prostokątna tablica obiektów, najczęściej liczb rzeczywistych, zorganizowanych w m rzędach i n kolumnach. Wymiar takiej macierzy określamy jako $(m \times n)$. Jeżeli $m = n$, to mamy do czynienia z macierzą kwadratową. Każdy współczynnik macierzy \mathbf{M} oznaczony jest jako m_{ij} i odpowiada elementowi leżącemu na przecięciu i -tego wiersza i j -tej kolumny. Przykładowo sformułowanie macierzy o wymiarze (2×3) ma następującą postać:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix}. \quad (1.50)$$

Współczynniki macierzy \mathbf{M} , których indeksy $i = j$ tworzą *diagonałę* macierzy. Macierz kwadratowa mająca niezerowe współczynniki wyłącznie na diagonali nazywa się *macierzą diagonalną*. Macierz diagonalna, której wszystkie współczynniki na diagonali są równe 1 nazywa się *macierzą jednostkową* i jest oznaczana symbolem \mathbf{I} . Dla dowolnej macierzy prostokątnej \mathbf{M} i odpowiednio dobranych wymiarów macierzy \mathbf{I} i \mathbf{I}' prawda są zależności:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}$$
 oraz $\mathbf{M}\mathbf{I}' = \mathbf{M}. \quad (1.51)$

Można wyróżnić także *macierz zerową*, czyli taką, której wszystkie współczynniki są zerowe, oraz *macierz jednostkową*, której wszystkie współczynniki są równe 1.

Transpozycja macierzy $\mathbf{M}(m \times n)$, oznaczana symbolem \mathbf{M}^T , jest macierzą, której współczynniki (i, j) są równe współczynnikom (j, i) macierzy wejściowej, czyli:

$$\mathbf{M}_{ij}^T = \mathbf{M}_{ji}. \quad (1.52)$$

Wymiar macierzy transponowanej wynosi $(n \times m)$. Macierz transponowana dla macierzy ze wzoru (1.50) ma postać:

$$\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} \\ m_{12} & m_{22} \\ m_{13} & m_{23} \end{bmatrix}. \quad (1.53)$$

Podstawowymi operacjami na macierzach są dodawanie/odejmowanie i mnożenie przez liczby. Suma macierzy może być realizowana na macierzach o identycznych wymiarach i jest macierzą, której współczynniki są sumami odpowiednich współczynników macierzy wejściowych. Przykładowo, dla danych macierzy \mathbf{A} i \mathbf{B} , ich sumę można zapisać jak poniżej:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}, \quad (1.54)$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}. \quad (1.55)$$

Iloczyn macierzy przez liczbę to operacja mnożenia wszystkich współczynników macierzy przez liczbę. Poniżej zamieszczono przykład dla macierzy z równania (1.50):

$$a\mathbf{M} = \mathbf{M}a = \begin{bmatrix} am_{11} & am_{12} & am_{13} \\ am_{21} & am_{22} & am_{23} \end{bmatrix}. \quad (1.56)$$

Iloczyn \mathbf{AB} dwóch macierzy \mathbf{A} i \mathbf{B} jest macierzą, której współczynniki są równe:

$$(\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}. \quad (1.57)$$

Dwie macierze można mnożyć jeżeli liczba kolumn macierzy \mathbf{A} i liczba wierszy w macierzy \mathbf{B} są takie same i wynoszą n , oraz gdy zdefiniowano operację mnożenia na współczynnikach macierzy \mathbf{A} i \mathbf{B} . Jeżeli wymiar macierzy \mathbf{A} i \mathbf{B} wynosi odpowiednio $(p \times n)$ i $(n \times q)$, to wymiar macierzy wynikowej wyniesie $(p \times q)$. Mnożenie macierzy jest łączne, ale zaawansza nieprzemienne.

Poniżej zamieszczono zestawienie ważnych właściwości operacji na macierzach (założono zgodność wymiarów konieczną do wykonania operacji):

$$1) \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (1.58)$$

$$2) \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \quad (1.59)$$

$$3) \quad a(b\mathbf{A}) = (ab)\mathbf{A} \quad (1.60)$$

$$4) \quad a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a\mathbf{A} + a\mathbf{B} \quad (1.61)$$

$$5) \quad (a + b)\mathbf{A} = a\mathbf{A} + b\mathbf{A} \quad (1.62)$$

$$6) \quad (a\mathbf{A})\mathbf{B} = a(\mathbf{A}\mathbf{B}) \quad (1.63)$$

$$7) \quad (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \quad (1.64)$$

$$8) \quad (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \quad (1.65)$$

$$9) \quad (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A} \quad (1.66)$$

Potraktujmy wiersze lub kolumny macierzy jako zbiór wektorów. Badanie zależności liniowej pomiędzy tymi wektorami służy do wyznaczenia wielkości zwanej rzędem macierzy. Pojęcie *rzędu macierzy* określamy maksymalną liczbę niezależnych liniowo kolumn lub wierszy; można dowieść, że dla dowolnej macierzy te liczby są równe. Macierz, której wszystkie wiersze lub kolumny są liniowo niezależne nazywa się *macierzą pełnego rzędu*. Macierz kwadratowa pełnego rzędu nosi nazwę *macierzy nieosobliwej*. Jedyną macierzą, której rzad jest równy 0 jest macierz zerowa.

Odrotność macierzy kwadratowej \mathbf{M} , oznaczana jako \mathbf{M}^{-1} , jest to macierz spełniająca zależność:

$$\mathbf{MM}^{-1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{I}. \quad (1.67)$$

Swoją odwrotność posiada każda macierz nieosobliwa. Można także dowieść, że iloczyn macierzy nieosobliwych jest macierzą nieosobliwą, oraz że prawdziwa jest zależność:

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}. \quad (1.68)$$

1.2.1 Wyznaczniki

Wyznacznik macierzy \mathbf{M} jest to funkcja określana dla macierzy kwadratowych, oznaczana symbolem $\det(\mathbf{M})$ i spełniający następujące warunki:

- wyznacznik jest funkcją liniową ze względu na dowolną kolumnę macierzy,
- Zamiana miejscami dwóch kolumn macierzy powoduje zmianę znaku wyznacznika na przeciwny,
- wyznacznik macierzy jednostkowej jest równy 1,
- pomnożenie dowolnej kolumny przez stałą a powoduje mnożenie wyznacznika przez tą samą wartość,
- dodanie wielokrotności jednej kolumny do innej kolumny nie zmienia wartości wyznacznika.

Można dowieść prawdziwość następujących właściwości wyznaczników:

- Wartość wyznacznika macierzy jest równa wartości wyznacznika jej transpozycji; dzięki tej właściwości i operacji sformułowane dla kolumn dotyczą także wierszy wyznaczników macierzy:

$$\det(\mathbf{M}) = \det(\mathbf{M}^T) \quad (1.69)$$

- Twierdzenie Cauchego dotyczące wyznaczników

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) \quad (1.70)$$

1.2.2 Wartości i wektory własne

Wektor własny to pewien specjalny wektor \mathbf{v}_i , który po pomnożeniu przez macierz kwadratową \mathbf{M} daje wynik identyczny, jak w przypadku mnożenia tego wektora przez odpowiednią liczbę λ_i zwaną *wartością własną*:

$$\mathbf{M}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \quad (1.71)$$

Dla odwrocalnej macierzy kwadratowej \mathbf{M} o rozmiarze $n \times n$ istnieje n wektorów własnych $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ oraz tyle samo odpowiadających im wartości własne $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Przekształcając powyższe równanie otrzymujemy:

$$(\mathbf{M} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{v}_i = 0, \quad (1.72)$$

gdzie \mathbf{I} jest macierzą jednostkową o rozmiarze $n \times n$. Aby zapobiec sprzeczności w poszukiwaniu wektorów \mathbf{v}_i należy założyć, że macierz $(\mathbf{M} - \lambda_i \mathbf{I})$ jest osobliwa, a zatem jej wyznacznik jest równy 0, czyli:

$$\det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (1.73)$$

Za pomocą powyższego równania macierzowego możemy wyliczyć poszczególne wartości własne. Jako wynik otrzymujemy wielomian stopnia n zależny od λ , który nazywamy *wielomianem charakterystycznym* macierzy \mathbf{M} .

Wektory własne wyznaczamy z równania (1.72) po obliczeniu wartości własnych. Ze względu na osobliwość macierzy $(\mathbf{M} - \lambda_i \mathbf{I})$ układ ma charakter nadmiarowy, a zatem można wyznać nieskończenie wiele rozwiązań. Oczywiście jest, że jeżeli \mathbf{v}_i jest wektorem własnym odpowiadającym wartością własne λ_i , to będzie nim także po przemnożeniu przez dowolną niezerową stałą a . Standardowo jako rozwiązanie przyjmowane są wektory własne o długości jednostkowej.

W przypadku ogólnym wyznaczane wartości własne macierzy mogą być mogły być liczbami zespolonymi. Gwarancja występowania jako wartości własne wyłącznie liczb rzeczywistych jest symetrią macierzy \mathbf{M} .

Macierz kwadratowa jest *symetryczna* wtedy i tylko wtedy dla wszystkich indeksów macierzy i, j odpowiadnie elementy macierzy są identyczne: $(\mathbf{M})_{ij} = (\mathbf{M})_{ji}$; czyli jeśli wartość i na obu stronach osi związanego z diaganonalą jest taka sama, to wartości j na obu stronach osi związanego z diaganonalą są takie same.

1.2.3 Diagonalizacja macierzy

Jeżeli $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ są liniowo niezależnymi wektorami własnymi macierzy \mathbf{M} , to można określić macierz \mathbf{A} złożoną z wektorów własnych:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n], \quad (1.74)$$

taką że:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{MA} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (1.75)$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ są wartościami własnymi macierzy \mathbf{M} .

Prawda jest, że wektory własne symetrycznej macierzy \mathbf{M} są ortogonalne, a zatem macierz \mathbf{A} , złożona z wektorów własnych o jednostkowej długości, jest macierzą ortogonalną, czyli spełnia właściwość $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$. Wtedy macierz *diagonala* \mathbf{D} złożona z wartości własnych macierzy symetrycznej \mathbf{M} ma następującą postać:

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}^T\mathbf{MA}. \quad (1.76)$$

1.3 Układy równań liniowych

Równanie liniowe o n niewiadomych x_1, \dots, x_n ma następującą postać:

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b \quad (1.77)$$

Równanie to można zapisać w postaci wektorowej:

$$\mathbf{ax} = b, \quad (1.78)$$

gdzie: $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$, $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_n]$.

Układ równań liniowych jest zbiorem równań liniowych o wspólnych niewiadomych x_1, \dots, x_n :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.79)$$

Równoważna postać wektorowa układu równań liniowych jest następująca:

$$\mathbf{ax} = \mathbf{b} \quad \text{lub} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (1.80)$$

Układ jest *niesprzeczny* jeśli ma przynajmniej jedno rozwiązanie, a jeśli ma dokładnie jedno rozwiązanie to jest *określony*.

Układ jest *niesprzeczny* wtedy, gdy wektor \mathbf{b} jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Natomiast niesprzeczny układ jest określony wtedy, gdy wektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ są liniowo niezależne.

Zbiory rozwiązań układów równań liniowych charakteryzuje *twierdzenie Kronecker-Capellego*:

Układ równań jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy dla macierzy $[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}]$ jej rzad r jest równy rzędowi macierzy $[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$.

Układ równań, w którym $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ jest układem jednorodnym i jest zawsze nie- sprzeczny.

Jeśli $m = n = r$, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (1.81)$$

Jeśli $m > n = r$, to rozwiązanie układu formułuje się za pomocą regularnego liniowego zadania najmniejszych kwadratów w postaci rozwiązania średnio-kwadratowego. Zadanie polega na minimalizacji wyrażenia $\mathbf{Ax} - \mathbf{b}$ zwanego *residuum układu* poprzez dobór wektora \mathbf{x} .

Jeśli $m < n < r$ to układ jest niesprzeczny, a jednoznaczne rozwiązanie można znaleźć poprzez dodalenie $n - m$ dodatkowych równań liniowych.

Jeżeli $r < m, r < n$ przybliżone rozwiązanie znadaje się najczęściej poprzez sformułowanie nieregularnego liniowego zadania najmniejszych kwadratów.

1.4 Przestrzeń afiniczna

Przestrzeń afiniczna jest to zbiór punktów E , przy zadanej przestrzeni liniowej V , spełniający następujące warunki [Kic00]:

- 1. $\forall_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in E} \forall_{\mathbf{v} \in V} \exists_{\mathbf{q} \in E} : \mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$
— określenie działania odejmowania punktów,
- 2. $\forall_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in E} : (\mathbf{q} - \mathbf{p}) + (\mathbf{r} - \mathbf{q}) = \mathbf{r} - \mathbf{p}$
— spełniona równość trójkąta.

W odróżniu od przestrzeni liniowej, w przestrzeni afinicznej nie wyróżnia się żadnego specjalnego elementu (wektora zerowego). Przestrzeń V nazywa się *przestrzenią wektorów swobodnych* przestrzeni E i jest oznaczana jako $S(E)$. Wyナー przestrzeni afinicznej jest równy wymiarowi przestrzeni jej wektorów swobodnych.

W przestrzeni afinicznej można określić następujące działania dla punktów $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k \in E$ oraz liczb a_1, \dots, a_k :

- *dodawanie punktu i wektora*

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} + \mathbf{v} \quad (1.82)$$

- *kombinacja afiniczna*
Jeżeli $\sum_{i=1}^k a_i = 1$, to wyrażenie $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^k a_i \mathbf{p}_i$ opisuje pewien punkt, który można wyznać następująco:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \sum_{i=2}^k a_i(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_1), \quad (1.83)$$

działanie to jest dobrze określone w przestrzeni E i nie zależy od kolejności składników;

- *kombinacja wypukła – szczególny przypadek kombinacji afinicznej*, gdzie współczynniki $a_i \geq 0$;

- *różnica uogólniona*
Jeżeli $\sum_{i=1}^k a_i = 0$, to wyrażenie $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^k a_i \mathbf{p}_i$ opisuje pewien wektor swobodny $\mathbf{v} \in V$, jako kombinację liniową różnic punktów:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=2}^k a_i(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_1), \quad (1.84)$$

wynik tego działania nie zależy od kolejności składników.

Przestrzeń afiniczna jest *euklidesowa*, jeżeli w przestrzeni wektorów swobodnych określona jest operacja iloczynu skalarnego. W tej sytuacji w przestrzeni określone są pojęcia kąta między prostymi i prostopadłości. W przestrzeni euklidesowej *odległość punktów* p i q równa jest długości wektora $\mathbf{q} - \mathbf{p}$.

Istnieje ścisły związek pomiędzy przestrzenią afinczną a przestrzenią liniową:

1. Przestrzeń liniową V możemy traktować jak przestrzeń afinczą, po określaniu różnicy punktów za pomocą operacji odejmowania wektorów i zaniedbując uprzedwiejszą rolę wektora zerowego. Kombinacje liniowe elementów przestrzeni są uogólnieniem kombinacji afinicznych, bez konieczności sumowania współczynników kombinacji do jedynki.

2. Przestrzeń afinczną możemy potraktować jak liniową po wyborze dowolnego punktu i nazwaniu go wektorem zerowym ($\mathbf{0}$), oraz określaniu kombinacji liniowej z dowolnymi współczynnikami a_1 za pomocą wzoru:

$$\sum_{i=1}^k a_i \mathbf{p}_i = \mathbf{0} + \sum_{i=1}^k a_i(\mathbf{p}_i - \mathbf{0}). \quad (1.85)$$

W szczególnym przypadku, gdy $\sum_{i=1}^k a_i = 1$, kombinacje liniowe są tożsame kombinacjom afinycznym.

1.4.1 Przekształcenia afiniczne

Przekształcenie afiniczne przestrzeni E jest to odwzorowanie $f : E \rightarrow E$, dla którego dowolny zbiór punktów $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$ i współczynników a_1, \dots, a_k , takich że $\sum_{i=1}^k a_i = 1$, spełnia następującą zależność:

$$f\left(\sum_{i=1}^k a_i \mathbf{p}_i\right) = \sum_{i=1}^k a_i f(\mathbf{p}_i). \quad (1.86)$$

Do podstawowych przekształceń afinicznych można zaliczyć: translacje (przesunięcia), obroty, skalowanie, a także rzuty równoległe i prostopadłe (dla przestrzeni euklidesowej), odbicia symetryczne (względem płaszczyzny i punktu), oraz podobieństwa (czyli złożenie jednokrotności i izometrii).

1.4.2 Niezmienne przekształceń afinicznych

Niezmienne przekształceń to właściwości przekształceń obiektu F , które nie ulegają zmianie dla obrazu obiektu F' , jeżeli posiada je sam obiekt F .

Działaj mostotniejszych niezmienności przekształceń afinycznego zaliczamy: współliniowość punktów, równoległość prostych (odcinków), proporcje długości odcinków równejległych, spójność figury, wypukłość figury, proporcje pól powierzchni figur (objętości brył).

Do niezmienników przekształceń afinicznych nie zaliczamy m.in.: prostopadłości prostych, bądź brak spójności figury.

1.5 Układy współrzędnych

1.5.1 Współrzędne kartezjańskie

Kartezjański układ współrzędnych w 3D określamy za pomocą trzech wzajemnie prostopadłych osi zwanych x, y, z . Punkt P można wyrazić następująco:

$$P = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (1.87)$$

gdzie: $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ są wektorami jednostkowymi równoległymi do trzech osi układu, natomiast wartości x, y, z są *współrzędnymi kartezjańskimi* punktu P .

1.5.2 Współrzędne cylindryczne

We współrzędnych cylindrycznych punkt P reprezentowany jest za pomocą zmiennych: r, θ, z , gdzie r jest odległość pomiędzy punktem P a osią z , natomiast kąt θ , zwany *azymutem*, jest kątem nachylenia osi x do linii łączącej rzut punktu P na płaszczyznę x - y oraz początek układu odniesienia. Zmienna z w układzie cylindrycznym ma takie samo znaczenie jak w układzie kartezjańskim.

Współrzędne kartezjańskie (x, y, z) można wyliczyć z danych współrzędnych cylindrycznych za pomocą następującego podstawienia:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (1.88)$$

Z drugiej strony współrzędne cylindryczne można wyliczyć na podstawie współrzędnych kartezjańskich na podstawie przekształcenia:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{sgn}(y) \cos^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ z = z \end{cases} \quad (1.89)$$

Kąt θ można także wyrazić jako:

$$\theta(x, y, z) = \begin{cases} \tan^{-1} \frac{y}{x}, & \text{dla } x > 0 \\ \operatorname{sgn}(y) \frac{\pi}{2}, & \text{dla } x = 0 \\ \tan^{-1} \frac{y}{x} + \pi, & \text{dla } x < 0 \end{cases} \quad (1.90)$$

W powyższych przypadkach wartości kąta θ zawarte są w przedziale $[-\pi, \pi]$.

1.5.3 Współrzędne sferyczne

We współrzędnych sferycznych punkt P reprezentowany jest za pomocą trzech zmiennych: r, θ, φ , gdzie r jest odległość pomiędzy punktem P a początkiem układu odniesienia, kąt θ , zwany *azymutem*, jest kątem nachylenia osi x do linii łączącej rzut punktu P na płaszczyznę x - y oraz początek układu odniesienia, natomiast kąt φ , zwany *zenitalnym*, to kąt pomiędzy osią z a linią łączącą punkt P ze środkiem układu odniesienia. Kąt zenitalny określony jest w przedziale $[0, \pi]$.

Współrzędne kartezjańskie (x, y, z) można wyliczyć z danych współrzędnych sferycznych za pomocą następującego podstawienia:

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \quad (1.91)$$

Z drugiej strony współrzędne sferyczne można wyliczyć na podstawie współrzędnych kartezjańskich na podstawie przekształcenia:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \operatorname{sgn}(y) \cos^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \varphi = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases} \quad (1.92)$$

Kąt θ można także wyrazić jako:

$$\theta(x, y, z) = \begin{cases} \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, & \text{dla } z > 0 \\ \pi/2, & \text{dla } z = 0 \\ \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} + \pi, & \text{dla } z < 0 \end{cases} \quad (1.93)$$

1.5.4 Współrzędne barycentryczne

Dane są punkty P_0, \dots, P_n stanowiące bazę n -wymiarowej przestrzeni afinicznej (żaden z nich nie jest kombinacją afinyczną pozostałych). Przyprzadkowujemy tym punktom liczby, odpowiednio: m_0, \dots, m_n , i nazywamy je dalej *masami*. Masy mogą przyjmować zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne, bądź zero. Jeżeli suma tak określonych mas jest różna od zera, to można zdefiniować zależność na *środek ciężkości* tych punktów:

$$P = \frac{\sum_{i=0}^n m_i P_i}{\sum_{i=0}^n m_i}. \quad (1.94)$$

Współrzędne barycentryczne a_0, \dots, a_n tak określonego punktu P w układzie odniesienia punktów P_0, \dots, P_n można określić jako:

$$a_i = \frac{m_i}{\sum_{j=0}^n m_j}. \quad (1.95)$$

Znając współrzędne kartezjańskie punktów $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$, oraz współrzędne barycentryczne a_1, a_2, a_3 punktu P w układzie odniesienia punktów P_1, P_2, P_3 , możemy obliczyć współrzędne kartezjańskie punktu $P = (x, y)$:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.96)$$

Rozdział 2

Przekształcenia geometryczne

Zawartość niniejszego rozdziału stanowi zestawienie przekształceń geometrycznych 2D i 3D z wykorzystaniem współrzędnych kartezjańskich oraz współrzędnych jednorodnych. Opisano metody składania przekształceń. Rozdział powstał w oparciu o pozycje: [FvDE+01].

2.1 Przekształcenia 2D

Przekształcenia będą definiowane dla dowolnego punktu na płaszczyźnie danego jako $P = [x \ y]^T$, oraz jego obrazu $P' = [x' \ y']^T$. Przekształceniu podlega każdy punkt rozpatrywanego obiektu P .

Przesunięcie

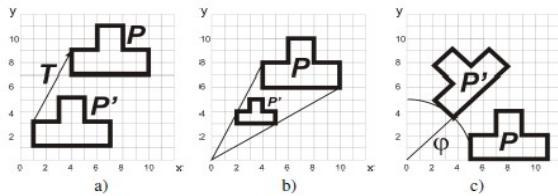
Operacja *przesunięcia (translacji)* jest realizowana przez dodanie do współrzędnych obiektu pewnej wielkości przesunięcia. Uwzględniając składowe przesunięcia d_x wzdłuż osi x , oraz d_y wzdłuż osi y , można tą operację zapisać jako:

$$\begin{cases} x' = x + d_x \\ y' = y + d_y \end{cases} \quad (2.1)$$

Powyższy zapis może być także zrealizowany w postaci wektorowej z uwzględnieniem wektora przesunięcia $T = [d_x \ d_y]^T$ jako wyrażenie:

$$P' = P + T. \quad (2.2)$$

Na rysunku 2.1a) zilustrowano operację przesunięcia dla $T = [3, 6]$.



Rysunek 2.1: Przekształcenia geometryczne na płaszczyźnie: a) przesunięcie, b) skalowanie, c) obrót

Skalowanie

Operacja *skalowania* odbywa się poprzez przemnożenie współrzędnych obiektu przez współczynnik skali zadany rozłącznie jako składowe s_x wzduł osi x , oraz s_y wzduł osi y . Operację tą można zapisać jako:

$$\begin{cases} x' = s_x x, \\ y' = s_y y. \end{cases} \quad (2.3)$$

Powyższy zapis może być także zrealizowany z uwzględnieniem macierzy skali S jako wyrażenie:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \text{ albo } P' = P \cdot S \quad (2.4)$$

Operacja skalowania realizowana jest względem środka układu współrzędnych. Jeżeli współczynniki skalowania $s_x = s_y$, to skalowanie nazywamy *jednorodnym* i zachowane są proporcje przekształcanego obiektu. W przeciwnym przypadku, gdy $s_x \neq s_y$, skalowanie nazywamy *niejednorodnym*.

Na rysunku 2.1b) zilustrowano opreację skalowania dla $s_x = s_y = 1/2$.

Obrót

Operacja *obrotu* realizowana jest o zadany kąt φ wokół początku układu współrzędnych zgodnie z następującym wyrażeniem:

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{cases} \quad (2.5)$$

Powyższy zapis może być także zrealizowany z uwzględnieniem macierzy obrotu R jako wyrażenie:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \text{ albo } P' = P \cdot R. \quad (2.6)$$

Na rysunku 2.1c) zilustrowano opreację obrótu dla $\varphi = 45^\circ$.

2.2 Przekształcenia 2D w układzie jednorodnym

Predstawione macierzowo przekształcenia przesunięcia, skalowania i obrót, nie są operacjami jednorodnymi ze względu na różne wymiary macierzy przekształceń. Zagadnienie to staje się jednolite po wyrażeniu reprezentacji obiektu we *współrzędnych jednorodnych*. Konwersja reprezentacji punktu do współrzędnych jednorodnych polega na rozszerzeniu wymiaru punktu o jeden, i tak:

$$(x, y) \rightarrow [x \ y \ 1]^T \quad (2.7)$$

$$(x', y') \rightarrow [x' \ y' \ 1]^T \quad (2.8)$$

W przypadku przekształceń 2D w układzie jednorodnym, macierze przekształceń mają jednakowy rozmiar 3×3 . Poszczególne macierze i równania przekształceń elementarnych można zapisać jako:

Przesunięcie

$$P' = P \cdot T(d_x, d_y), \quad (2.9)$$

$$T(d_x, d_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ d_x & d_y & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Skalowanie

$$P' = P \cdot S(s_x, s_y), \quad (2.11)$$

$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Obrót

$$P' = P \cdot R(\varphi), \quad (2.13)$$

$$R(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

2.3 Składanie przekształceń w 2D

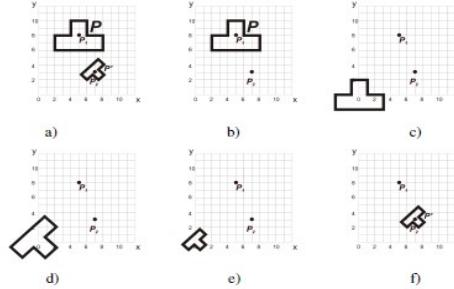
Składanie przekształceń geometrycznych polega na łączeniu przekształceń elementarnych w celu uzyskania pożądanego efektu. Dzięki wykorzystaniu współrzędnych jednorodnych sekwencję przekształceń elementarnych można zastąpić przez operację mnożenia macierzy przekształceń.

Na przykładzie przekształceń z rysunku 2.2 przedstawiono mechanizm składania przekształceń geometrycznych. Uzyskanie odpowiedniego przekształceń uzyskano w następujących krokach.

1. Przesunięcie wybranego punktu obrotu/skalowania P_1 figury P do początku układu współrzędnych (rys. 2.2a-c).
2. Obrót figury o zadany kąt wokół środka układu współrzędnych (rys. 2.2d-e).
3. Skalowanie figury (rys. 2.2d-e).
4. Przesunięcie figury ze środka układu współrzędnych do punktu końcowego P_2 (rys. 2.2f-f).

Poszczególne kroki przekształceń można zapisać w postaci następującej sekwencji:

$$P' = P \cdot T(-x_1, -y_1) \cdot R(\varphi) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(x_2, y_2). \quad (2.15)$$



Rysunek 2.2: Składanie przekształceń 2D

Po podstawieniu wartości numerycznych otrzymujemy następujące wyrażenie:

$$P' = P \cdot T(-5, -8) \cdot R(-135^\circ) \cdot S(1/2, 1/2) \cdot T(7, 3). \quad (2.16)$$

2.4 Przekształcenia w 3D

Konwersja reprezentacji punktu do współrzędnych jednorodnych polega na rozszerzeniu wymiaru punktu o jeden, i tak:

$$(x, y, z) \rightarrow [x \ y \ z \ 1]^T \quad (2.17)$$

$$(x', y', z') \rightarrow [x' \ y' \ z' \ 1]^T \quad (2.18)$$

W przypadku przekształceń 3D w układzie jednorodnym, macierze przekształceń mają rozmiar 4×4 . Do przekształceń elementarnych tego typu można zaliczyć: przesunięcie, skalowanie, obrót wokół osi x, y, z . Poszczególne macierze i równania przekształceń elementarnych można zapisać jako:

Przesunięcie

$$P' = P \cdot T(d_x, d_y, d_z), \quad (2.19)$$

$$T(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ d_x & d_y & d_z & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Skalowanie

$$P' = P \cdot S(s_x, s_y, s_z), \quad (2.21)$$

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Obrót wokół osi x

$$P' = P \cdot R_x(\varphi), \quad (2.23)$$

$$R_x(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Obrót wokół osi y

$$P' = P \cdot R_y(\varphi), \quad (2.25)$$

$$R_y(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

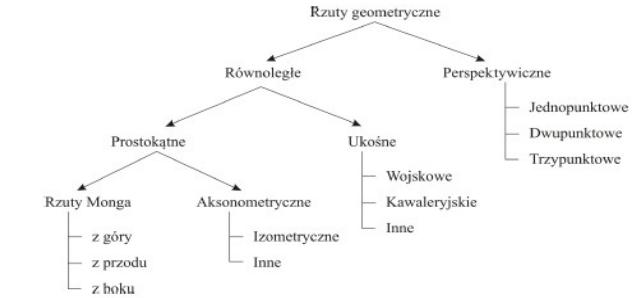
Obrót wokół osi z

$$P' = P \cdot R_z(\varphi), \quad (2.27)$$

$$R_z(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

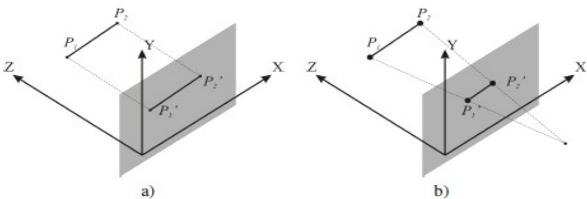
2.5 Rzutowanie

Operacja rzutowania z przestrzeni 3D polega na przekształceniu punktów do układu współrzędnych 2D. W niniejszym rozdziale rozpatrujemy rzuty zwane *planarnymi rzutami geometrycznymi*, czyli odwzorowanie obiektów geometrycznych na płaszczyznę. Podstawowy podział na klasy rzutów obejmuje rzuty: *równoległe* i *perspektywiczne*.



Rysunek 2.3: Klasifikacja rzutów geometrycznych

W rzutowaniu równoległym punkty obiektu P_1, P_2 odwzorowywane są na płaszczyznę rzutowania, zwaną *rzutnią*, wzduł prostych równoległych (2.3a). Punkty przecięcia prostych rzutowania z rzutnią są obrazami rzutowanych punktów.



Rysunek 2.4: Rzuty: a) równoległy, b) perspektywiczny

W przypadku rzutowania perspektywicznego punkty obiektu są przeniesione na rzutnię wzdłuż prostych przecinających się w jednym punkcie, zwany średkiem projekcji (2.4a). Punkty przecięcia prostych rzutowania z rzutnią są obrazami rzutowanych punktów.

2.5.1 Rzutowanie Monge'a

Rzutowanie Monge'a jest metodą prostopadłego rzutowania punktów na płaszczyźnie rzutowanie (rzutni). Metoda ta jest powszechnie stosowana do jednoznacznego przedstawiania obiektów 3D na płaszczyźnie. Metoda Monge'a posiada szerokie zastosowanie do tworzenia rysunków technicznych.

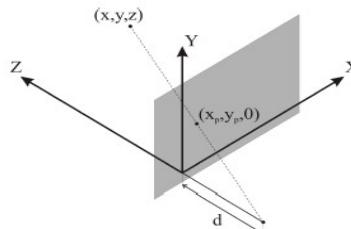
Możemy zdefiniować trzy płaszczyzny rzutni: xy – rzut z przodu, xz – rzut z boku, yz – rzut z góry.

Jeżeli rzutnia jest II jest płaszczyzna xy , to równania opisujące związek pomiędzy współrzędnymi rzutowanego punktu (x, y, z) , a współrzędnymi jego rzutu (x_p, y_p, z_p) sa następujące:

$$\begin{cases} x_p = x \\ y_p = y \\ z_p = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

W przypadku rzutów Monge'a odwzorowania odcinków równoległych do rzutni mają taką samą długość jak te odcinki, natomiast rzuty odcinków prostopadłych do rzutni są punktami.

2.5.2 Rzutowanie perspektywiczne



Rysunek 2.5: Rzut perspektywiczny

Na podstawie rys. 2.5 można wyznaczyć za pomocą układu równań parametrycznych zależność pomiędzy współrzędnymi punktu (x, y, z) a pewnego punktu (x', y', z') na prostej rzutowania przechodzącej przez środek projekcji:

$$\begin{cases} x' = x - xu \\ y' = y - yu \\ z' = z - (z+d)u \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (2.30)$$

W celu wyznaczenia współrzędnych rzutu punktu $(x_p, y_p, 0)$ na płaszczyznę rzutni II należy obliczyć wartość parametru u dla $z' = 0$, czyli:

$$z' = z - (z+d)u = 0 \quad (2.31)$$

W wyniku otrzymujemy zależność:

$$u = \frac{z}{z+d} \quad (2.32)$$

Po podstawieniu wyliczonego parametru u do wyprowadzonego równania parametrycznego prostej (x', y', z') otrzymujemy:

$$\begin{cases} x_p = x \left(\frac{d}{z+d} \right) \\ y_p = y \left(\frac{d}{z+d} \right) \end{cases} \quad (2.33)$$

W przypadku granicznym, gdy $d \rightarrow \infty$ rzut perspektywiczny jest tożsamy rzutowi pinowemu.

Punkty zbieżności w rzutowaniu perspektywicznym

W przypadku rzutowania perspektywicznego można przeprowadzić klasyfikację tych rzutów w zależności od położenia rzutni. Kryterium klasifikacji jest liczba osi globalnego układu współrzędnych (x_w, y_w, z_w) , które przecinają rzutnię w układzie obserwatora $(x_v - y_v)$. W takiej klasifikacji można wyożnić perspektywę: jedno-, dwu- i trójpunktową.

Perspektywa jednopunktowa ma miejsce, gdy rzutnia $(x_v - y_v)$ leży na płaszczyźnie $(x_w - y_w)$ układu globalnego. W tego typu obrazowaniu perspektywicznym proste, będące przedłużeniem płaszczyzn prostopadłych do rzutni zbiegają się w jednym punkcie, zwany *pozornym punktem zbieżności* (ang. vanishing point).

Perspektywa dwupunktowa ma miejsce, gdy dwie osie układu współrzędnych globalnych (x_w, y_w, z_w) przecinają rzutnię $(x_v - y_v)$. W obrazie perspektywicznym tego typu pojawiają się dwa pozorne punkty zbieżności.

Perspektywa trójpunktowa ma miejsce, gdy wszystkie trzy osie układu współrzędnych globalnych (x_w, y_w, z_w) przecinają rzutnię $(x_v - y_v)$. W obrazie perspektywicznym tego typu można wyznaczyć trzy pozorne punkty zbieżności.

Rozdział 3

Powierzchnie analityczne w postaci uwikłanej

Postać uwikłana równania powierzchni w przestrzeni:

$$f(x, y, z) = 0 \quad (3.1)$$

Rozważania dotyczące postaci uwikłanej równania powierzchni przeprowadzimy na przykładzie powierzchni drugiego stopnia (kwadryki).

3.1 Powierzchnie drugiego stopnia (kwadryki)

Równanie ogólne powierzchni drugiego stopnia (kwadryki) ma następującą postać:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & Ax^2 + By^2 + Cz^2 + \\ & + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz + \\ & + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0 \end{aligned}$$

Powyższe równanie posiada równoważnik w postaci równania macierzowego:

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & D & F & G \\ D & B & E & H \\ F & E & C & J \\ G & H & J & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

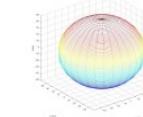
Przykłady powierzchni drugiego stopnia:

1. Płaszczyzna

$$\begin{aligned} A = B = C = D = E = F = 0 \\ f(x, y, z) = 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

2. Sfera

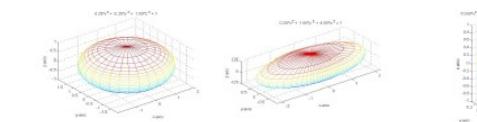
$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \quad (3.4)$$



Rysunek 3.1: Kwadryki: sfera

3. Elipsoida

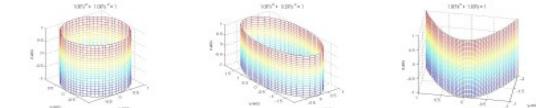
$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (3.5)$$



Rysunek 3.2: Kwadryki: elipsoida

4. Walec

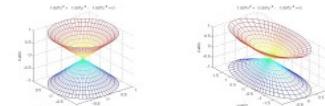
$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (3.6)$$



Rysunek 3.3: Kwadryki: walec, walec eliptyczny

5. Stożek

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} - y^2 - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (3.7)$$



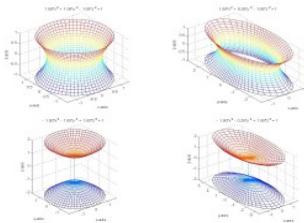
Rysunek 3.4: Kwadryki: stożek

6. Hiperboloida

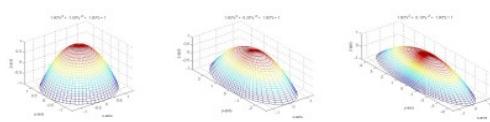
$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (3.8)$$

7. Paraboloida

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} - 4fy + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (3.9)$$



Rysunek 3.5: Kwadryki: hiperboloida jednopowłokowa, hiperboloids dwupowłokowa



Rysunek 3.6: Kwadryki: paraboloida

Rozdział 4

Krzywe parametryczne

4.1 Modelowanie krzywych i powierzchni

Modelowanie krzywych i powierzchni jest poddziedzina szerszego działu *modelowania brył* [FvDF+01]. Modelowanie brył obejmuje reprezentacje objętościowe całkowicie otoczone przez powierzchnie. Zagadnienia związane z modelowaniem objętościowym brył omówiono w rozdz. 2.

Niniejszy wykład obejmuje modelowanie *wielomianowych krzywych parametrycznych* definiowanych za pomocą trzech wielomianów z parametrem t , odpowiednio dla x , y i z , określających punkty na krzywej w przestrzeni 3D. Parametry wielomianów są dopierowane odpowiednio dla pożądanego przebiegu krzywej. Najpopularniejszym przypadkiem jest wykorzystanie do reprezentacji krzywych wielomianów trzeciego stopnia, jednakże w niektórych podejściach stopień wielomianu może być wyższy i jest uzależniony od liczby punktów definiujących krzywą, zwanych *punktami kontrolnymi*.

Najpopularniejszymi reprezentacjami powierzchni 3D są:

- siatki wielokątów,
- powierzchnie drugiego stopnia,
- powierzchnie parametryczne,

Siatka wielokątów jest zbiorem powierzchni płaskich ograniczonych przez ląmane zamknięte. Stanowią one reprezentację będącą przybliżeniem form reprezentowanych przez powierzchnie krzywoliniowe. Dokładność aproksymacji powierzchni przez siatki wielokątów zależy od liczby i złożoności wielokątów składowych, niestety przekłada się to znacząco na złożoność czasową i pamięciową wykorzystywanych algorytmów przetwarzania. Szczegóły reprezentacji i przetwarzania struktur z wykorzystaniem siatek wielokątów omówiono w rozdziale 5.

Powierzchnie drugiego stopnia zwane *kwadrykami* definiowane są bezpośrednio za pomocą równania $f(x, y, z) = 0$, gdzie funkcja f jest wielomianem drugiego stopnia zmiennymi x, y, z .

Powierzchnie parametryczne określone najczęściej za pomocą *parametrycznych wielomianowych płyt* powierzchni wyznaczane są z wykorzystaniem dwóch parametrów s i t umożliwiających określenie punktów na powierzchni krzywoliniowej. Brzegi płyt stanowią ograniczenia powierzchni i są określone za pomocą parametrycznych krzywych wielomianowych. W przypadku zastosowania do parametrycznej reprezentacji powierzchniowej wielomianów trzeciego stopnia, utworzone powierzchnie noszą nazwę *powierzchni bikubicznych*.

4.2 Równania parametryczne krzywych

4.2.1 Równanie ogólne krzywej

Równanie parametryczne krzywej w postaci ogólnej można zapisać następująco:

$$Q(t) = \begin{cases} x(t) = f_x(t) \\ y(t) = f_y(t), \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max} \\ z(t) = f_z(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

Funkcje f_x, f_y, f_z mają postać wielomianową. Ważny jest odpowiedni dobór stopnia wielomianów. Zbyt niski stopień oznacza małą elastyczność krzywej, natomiast określenie wielomianów o wysokim stopniu może powodować trudne do opanowania oscylacje funkcji i wzrost złożoności obliczeniowej. Innym zagadnieniem od rozstrzygnięcia jest odpowiedni dobór współczynników wielomianów, tak aby uzyskać pożądaną kształt modelowanej krzywej.

4.2.2 Równanie krzywej trzeciego stopnia

W przypadku krzywych trzeciego stopnia wielomiany określające kształt krzywej zadanej równaniem $Q(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]^T$ mają postać:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x \\ y(t) &= a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y, \quad 0 \leq t \leq 1 \\ z(t) &= a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ograniczamy parametr t do przedziału $[0, 1]$. Tak określona krzywa można przedfinować do postaci równania macierzowego. Oznaczając wektor parametrów T :

$$T = [t^3 \ t^2 \ t \ 1]^T \quad (4.3)$$

oraz macierz współczynników C :

$$C = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_y & b_y & c_y & d_y \\ a_z & b_z & c_z & d_z \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

otrzymujemy w wyniku następującą postać równania:

$$Q(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]^T = C \cdot T \quad (4.5)$$

Z powyższych równań wynika, że aby jednoznacznie określić przebieg krzywej w postaci ogólnej należy podać 12 parametrów.

4.3 Ciągłość elementów krzywej

Na podstawie równania 4.5 Zdefiniujemy pochodną krzywej $Q(t)$ jako parametryczny wektor styczny do krzywej:

$$\frac{d}{dt} Q(t) = [\frac{d}{dt} x(t) \ \frac{d}{dt} y(t) \ \frac{d}{dt} z(t)]^T = \frac{d}{dt} C \cdot T \quad (4.6)$$

W przypadku krzywej trzeciego stopnia powyższe równanie przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Q(t) &= C \cdot [3t^2 \ 2t \ 1 \ 0]^T = \\ &= [3a_x t^2 + 2b_x t + c_x \ 3a_y t^2 + 2b_y t + c_y \ 3a_z t^2 + 2b_z t + c_z]^T \end{aligned} \quad (4.7) \quad (4.8)$$

Segmenty krzywej mogą łączyć się ze sobą na różne sposoby [FvDF+01].

Jżeli segmenty krzywej stykają się ze sobą to krzywa posiada *ciągłość geometryczną* G^0 . Jeżeli kierunki wektorów stycznych segmentów krzywej są zgodne

w punkcie połączenia (długości tych wektorów nie muszą być równe), to krzywa ma *ciągłość geometryczną* G^1 . Ten typ ciągłości oznacza, że geometryczne nachylenia segmentów są równe w punkcie połączenia.

Jeżeli wektory styczne dwóch segmentów krzywej są równe co do kierunku i długości w punkcie połączenia to krzywa ma *ciągłość parametryczną* C^1 . Ciągłość parametryczną można rozszerzyć aż do n-tego stopnia jeżeli zgadzają się kierunki i długości w punkcie styku wektorów będących n-tą pochodną parametryczną krzywej $\frac{d^n}{dt^n} Q(t)$.

Interpretację fizyczną dla wektora stycznego $Q'(t)$ można wyrazić jako prędkość punktu na krzywej względem parametru t . Rozumując analogicznie drugą pochodną wektora krzywej $Q''(t)$ możemy określić jako przyspieszenie. Dzięki temu można nie tylko budować gładko połączone krzywe, ale wyeliminować też niejednostajny ruch wzdłuż krzywej, np. przy animacji.

4.4 Krzywa Hermita

Krzywa wielomianowa trzeciego stopnia określona przez ograniczenia dotyczące punktów końcowych i wektorów stycznych w punktach końcowych. Krzywa realizowana za pomocą czterech parametrów (patrzrys. 4.1):

- $P_0 = (P_{0x}, P_{0y}, P_{0z})$ – współrzędne punktu początkowego,
- $P_1 = (P_{1x}, P_{1y}, P_{1z})$ – współrzędne punktu końcowego,
- $R_0 = (R_{0x}, R_{0y}, R_{0z})$ – wektor styczny do krzywej w punkcie początkowym,
- $R_1 = (R_{1x}, R_{1y}, R_{1z})$ – wektor styczny do krzywej w punkcie końcowym.



Rysunek 4.1: Parametry krzywej Hermita
Równanie krzywej Hermita:

$$Q(t) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{T}, \quad (4.9)$$

gdzie:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} P_{0x} & P_{1x} & R_{0x} & R_{1x} \\ P_{0y} & P_{1y} & R_{0y} & R_{1y} \\ P_{0z} & P_{1z} & R_{0z} & R_{1z} \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczanie macierzy bazowej Hermite'a M_H

Postać ogólną krzywej $Q(t)$ można zdekomponować na iloczyn macierzy składowych G_H i M_H :

$$Q(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{G}_H \cdot \mathbf{M}_H \cdot \mathbf{T} \quad (4.10)$$

Postać macierzowa krzywej może być rozpisana jako:

$$Q(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{Hx} \\ \mathbf{G}_{Hy} \\ \mathbf{G}_{Hz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} & m_{41} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} & m_{42} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{43} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

gdzie:

M_H – macierz bazowa Hermite'a (poszukiwana),

G_H – macierz geometrii krzywej (wyznaczona na podstawie ograniczeń krzywej).

Wyznaczenie macierzy bazowej Hermite'a następuje na podstawie wektorów geometrii Hermite'a G_H będących współczynnikami wielomianu ograniczeń dla krzywej. Przyjęto macierz ograniczeń geometrii krzywej G_H jako:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{Hx} \\ \mathbf{G}_{Hy} \\ \mathbf{G}_{Hz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{0x} & P_{1x} & R_{0x} & R_{1x} \\ P_{0y} & P_{1y} & R_{0y} & R_{1y} \\ P_{0z} & P_{1z} & R_{0z} & R_{1z} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Można zauważyć, że:

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x = \mathbf{G}_{Hx} \cdot \mathbf{M}_H \cdot [t^3 \ t^2 \ t \ 1]^T \quad (4.13)$$

$$\text{gdzie: } \mathbf{G}_{\mathbf{Hx}} = [P_{0x} \quad P_{1x} \quad R_{0x} \quad R_{1x}]$$

Równania ograniczeń dla wektorów stycznych otrzymujemy poprzez zróżniczkowanie równania względem t :

$$x'(t) = \mathbf{G}_{\mathbf{Hx}} \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{H}} \cdot [3t^2 \quad 2t \quad 1 \quad 0]^T \quad (4.14)$$

Zatem powyższe równania dla zadanych ograniczeń kształtuje się następująco:

$$x(0) = P_{0x} = \mathbf{G}_{\mathbf{Hx}} \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{H}} \cdot [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \quad (4.15)$$

$$x(1) = P_{1x} = \mathbf{G}_{\mathbf{Hx}} \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{H}} \cdot [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T \quad (4.16)$$

$$x'(0) = R_{0x} = \mathbf{G}_{\mathbf{Hx}} \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{H}} \cdot [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T \quad (4.17)$$

$$x'(1) = R_{1x} = \mathbf{G}_{\mathbf{Hx}} \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{H}} \cdot [3 \quad 2 \quad 1 \quad 0]^T \quad (4.18)$$

Powyższe cztery ograniczenia z równań można przepisać w postaci macierzowej:

$$[P_{0x} \quad P_{1x} \quad R_{0x} \quad R_{1x}] = \mathbf{G}_{\mathbf{Hx}} \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{H}} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Aby powyższe równanie było spełnione, macierz $\mathbf{M}_{\mathbf{H}}$ musi być odwrotnością wyliczonej macierzy, czyli:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Po przekształceniach krzywą Hermita $Q(t)$ możemy zapisać w postaci równania parametrycznego:

$$Q(t) = [x(t) \quad y(t) \quad z(t)]^T = \mathbf{G}_{\mathbf{Hx}} \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{H}} \cdot T \quad (4.21)$$

$$\text{gdzie } \mathbf{G}_{\mathbf{Hx}} = [P_0 \quad P_1 \quad R_0 \quad R_1]$$

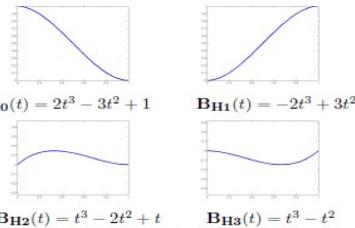
Równanie wielomianowe krzywej

Na podstawie równania (4.21) można wyprowadzić jego rozwinięcie wielomianowe (rys. 4.2) w którym wyróżniono tzw. funkcje bazowe Hermita $\mathbf{B}_{\mathbf{H}}$. Funkcje bazowe Hermita można potraktować jako elementy wagowe dla każdego wektora składowego macierzy geometrii $\mathbf{G}_{\mathbf{H}}$.

$$Q(t) = \mathbf{G}_{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{H}} \cdot T = \mathbf{G}_{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{B}_{\mathbf{H}} = \quad (4.22)$$

$$\begin{bmatrix} P_{0x} \\ P_{0y} \\ P_{0z} \end{bmatrix} (2t^3 - 3t^2 + 1) + \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{1z} \end{bmatrix} (-2t^3 + 3t^2) + \begin{bmatrix} R_{0x} \\ R_{0y} \\ R_{0z} \end{bmatrix} (t^3 - 2t^2 + t) + \begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{1z} \end{bmatrix}$$

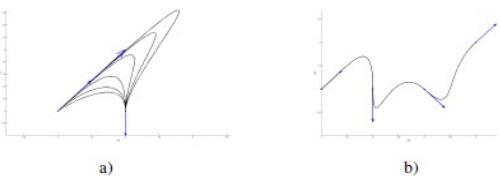
Na rys. 4.2 przedstawiono przebieg funkcji bazowych Hermita.



Rysunek 4.2: Przebieg funkcji bazowych Hermita

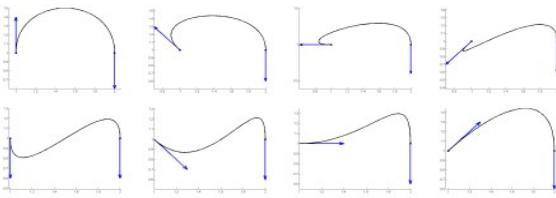
Właściwości krzywej Hermita

Krzywa Hermita określana jest przy pomocy wielomianów 3-go stopnia. Parametrami krzywej są: dwa punkty (początkowy i końcowy), oraz dwa wektory styczne do krzywej w tych punktach. Punkt początkowy i końcowy należą do krzywej. Sterowanie przebiegiem krzywej odbywa się przez dobór wartości wektorów stycznych. Dosyć trudno uzyskać pożądany przebieg krzywej.



Rysunek 4.3: a) Przebieg krzywej Hermita w zależności od długości początkowego wektora stycznego, b) łączenie krzywych Hermita

Wpływ długości wektora stycznego na kształt krzywej przedstawiono na rys. 4.3a. Im dłuższe wektory styczne, tym większy ich wpływ na przebieg krzywej.



Rysunek 4.4: Wpływ kierunku wektora stycznego na przebieg krzywej Hermita

Wpływ kierunku wektora stycznego na kształt krzywej przedstawiono na rys. 4.4.

Krzywe Hermita można łączyć w sposób płynny wymuszając ciągłość połączenia (C^0 , C^1 lub G^1) przez odpowiednie dopasowanie wektorów stycznych (rys. 4.3b).

4.5 Krzywa Beziera

Krzywa wprowadzona przez Pierre'a Beziera [Bez/2] opracowana w pracowni projektowej Renault.

Krzywa parametryczna określona za pomocą zbioru $n+1$ punktów kontrolnych:

$$\mathbf{P}_k = (P_{kx}, P_{ky}, P_{kz}), \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (4.23)$$

Punkt początkowy P_0 i końcowy P_n należą do krzywej, pozostałe punkty kontrolne (P_1 do P_{n-1}) sterują jej przebiegiem.

Równanie krzywej Beziera w postaci układu równań parametrycznych:

$$Q(t) = \begin{cases} x(t) = \sum_{k=0}^n P_{kx} B_k^n(t) \\ y(t) = \sum_{k=0}^n P_{ky} B_k^n(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \\ z(t) = \sum_{k=0}^n P_{kz} B_k^n(t) \end{cases} \quad (4.24)$$

gdzie:

$$B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad - \text{wielomiany Bernsteina},$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad - \text{symbol Newtona}.$$

Wielomiany Bernsteina

Wyrażenia $B_k^n(t)$ zdefiniowane są jako wielomiany Bernsteina [Kic00]. Punkty kontrolne krzywej Beziera są współczynnikami krzywej w bazie wielomianów Bernsteina.

Wielomiany Bernsteina spełniają zależność rekurencyjną (4.25), przy czym $B_0^0(t) = 1$.

$$B_k^n(t) = (1-t)B_{k-1}^{n-1}(t) + tB_{k-1}^{n-1}(t) \quad (4.25)$$

Wielomiany Bernsteina, jako funkcje bazowe dla krzywych Beziera, spełniają następujące właściwości:

$$\text{Rozkład jedynki: } \sum_{k=0}^n B_k^n(t) = 1, \quad (4.26)$$

$$\text{Dodatniość: } t \in [0, 1] \Rightarrow B_k^n(t) \geq 0, \quad (4.27)$$

$$\text{Symetria: } B_k^n(t) = B_{n-k}^n(1-t), \quad (4.28)$$

$$\text{Pochodna: } \frac{d}{dt} B_k^n(t) = n(B_{k-1}^{n-1}(t) - B_{k-1}^{n-1}(t)). \quad (4.29)$$

Stopień wielomianów $B_k^n(t)$ zależy od liczby punktów kontrolnych.

Dla krzywych Beziera styczne do krzywej w punktach: początkowym i końcowym, spełniają następujące warunki:

$$Q'(0) = n(P_1 - P_0) \quad (4.30)$$

$$Q'(1) = n(P_n - P_{n-1}) \quad (4.31)$$

Podwyższenie stopnia krzywej Beziera

Podwyższenie stopnia krzywej Beziera polega na dodaniu nowego punktu do zbioru punktów kontrolnych krzywej. Można udowodnić prawdziwość następującego przekształcenia [Kic00]:

$$Q(t) = \sum_{k=0}^n P_k B_k^n(t) = \sum_{k=0}^{n+1} \widehat{P}_k B_k^{n+1}(t) \quad (4.32)$$

gdzie dla $k = 0, \dots, n+1$:

$$\widehat{P}_k = \frac{n+1-k}{n+1} P_k + \frac{k}{n+1} P_{k-1}. \quad (4.33)$$

Powyższy wzór jest dobrze określony nawet w wyrażeniu dla \widehat{P}_0 i \widehat{P}_{n+1} , gdzie nieokreślone punkty P_{-1} i P_{n+1} są redukowane przez mnożenie przez zero.

Celem podwyższania stopnia krzywej Beziera jest: uzyskanie swobody manipulacji punktami kontrolnymi, uzgadnienie przebiegu krzywych (przy łączeniu).

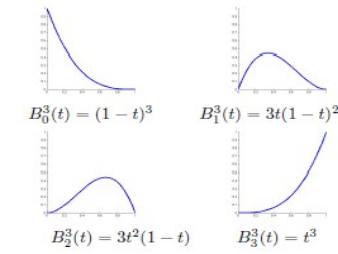
Przebieg i właściwości krzywej Beziera

W przypadku czterech punktów kontrolnych ($n = 3$) równanie krzywej Beziera możemy rozwinąć do postaci wielomianowej:

$$Q(t) = P_0 B_0^3(t) + P_1 B_1^3(t) + P_2 B_2^3(t) + P_3 B_3^3(t) \quad (4.34)$$

$$Q(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3 \quad (4.35)$$

Na rys. 4.2 przedstawiono przebieg wielomianów Bernsteina dla $n = 3$.



Rysunek 4.5: Przebieg wielomianów Bernsteina dla $n = 3$

Krzywa Beziera jest określona wielomianami o stopniu zależnym od liczby punktów kontrolnych. Pierwszy i ostatni punkt kontrolny należą do krzywej. Sterowanie przebiegiem krzywej odbywa się przez manipulację punktów kontrolnych. Przesunięcie jednego punktu kontrolnego ma wpływ na kształt całej krzywej.

4.6 Krzywe sklejane

Dotychczas rozwijane krzywe posiadały niedogodną własność globalnego odkształcania całej krzywej przy zmianach pozycji nawet pojedynczych punktów kontrolnych. Niedogodnością w przypadku krzywych Beziera był wzrostający stopień wielomianu proporcjonalnie do liczby punktów kontrolnych. Rada na te problemy może być wprowadzenie konstrukcji krzywej złożonych z segmentów połączonych ze sobą tak, aby miejsca złączeń były gładkie, czyli niewidoczne

dla obserwatora. Zagadnienie *gładkości* połączenia rozstrzygają pojęcia ciągłości geometrycznej i parametrycznej.

Równanie ogólne krzywej parametrycznej złożonej z segmentów zapisujemy następująco:

$$\begin{cases} x(t) = f_x(t) \\ y(t) = f_y(t) \\ z(t) = f_z(t) \end{cases} \quad t_0 \leq t \leq t_s \quad (4.36)$$

Poszczególne funkcje $f_x(t)$, $f_y(t)$, $f_z(t)$ zdefiniowane jako połączenie funkcji poszczególnych segmentów dla odpowiednich podprzedziałów. W przypadku funkcji $F_x(t)$ definicja ta wygląda następująco:

$$f_x(t) = \begin{cases} f_{x1}(t) & t_0 \leq t < t_1 \\ \dots \\ f_{xk}(t) & t_{k-1} \leq t < t_k, \\ \dots \\ f_{xs}(t) & t_{s-1} \leq t < t_s \end{cases} \quad (4.37)$$

Definicje powyższych funkcji są bliźniczo podobne z dokładnością do indeksów x, y, z :

$$f_y(t) = \begin{cases} f_{y1}(t) & t_0 \leq t < t_1 \\ \dots \\ f_{yk}(t) & t_{k-1} \leq t < t_k, \\ \dots \\ f_{ys}(t) & t_{s-1} \leq t < t_s \end{cases}, \quad f_z(t) = \begin{cases} f_{z1}(t) & t_0 \leq t < t_1 \\ \dots \\ f_{zk}(t) & t_{k-1} \leq t < t_k, \\ \dots \\ f_{zs}(t) & t_{s-1} \leq t < t_s \end{cases} \quad (4.38)$$

Dziedzinę parametryczną krzywej stanowi przedział $[t_0, t_s]$. Przedział ten podzielono na podprzedziały: $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{s-1}, t_s]$ i dla każdego z tych przedziałów zdefiniowano odpowiednio grupy funkcji: $(f_{x1}(t), f_{y1}(t), f_{z1}(t))$, $(f_{x2}(t), f_{y2}(t), f_{z2}(t)), \dots, (f_{xs}(t), f_{ys}(t), f_{zs}(t))$. Punkty t_0, t_1, \dots, t_s nazywamy *węzłami krzywej*.

4.6.1 Jednorodne krzywe B-sklejane

Krzywe B-sklejane składają się z segmentów z osobno zdefiniowanymi wielomianami, których współczynniki zależą tylko od kilku sąsiadujących punktów kontrolnych. Zmiana położenia punktów kontrolnych tylko lokalnie wpływa na przebieg krzywej. Przebieg krzywych B-sklejanych nie interpoluje położenia punktów kontrolnych, inny sposób krzywa taką nie musi przechodzić przez jakikolwiek punkt kontrolny. W tym przypadku warunki ciągłości stykających się segmentów krzywej wynikają z położenia sąsiadnych punktów kontrolnych. Przebieg krzywej najlepiej opisać jednocześnie definiując wszystkie jej segmenty i zależności pomiędzy nimi.

Krzywe b-sklejane trzeciego stopnia umożliwiają aproksymację $n + 1$ punktów kontrolnych P_k , gdzie $k = 0, 1, \dots, n$, oraz $n \geq 3$. Krzywa składa się z $n - 2$ segmentów zbudowanych z wielomianów trzeciego stopnia:

$$Q_3(t), Q_4(t), \dots, Q_i(t), \dots, Q_n(t). \quad (4.39)$$

Każdy segment $Q_i(t)$ krzywej zdefiniowany jest w osobnym przedziale zmienności $t \in [t_i, t_{i+1}]$ dla $i \in [3, n]$. Punkty t_i są połączeniami segmentów $Q_i(t)$ i $Q_{i+1}(t)$. Punkty te wraz z punktami brzegowymi t_3 oraz t_n tworzą uporządkowany zbiór *węzłów krzywej*.

Krzywa b-sklejana jest jednorodna, jeżeli jej węzły leżą w jednakowych odstępach ze względu na parametr t , czyli spełniają warunek:

$$t_3 = 0 \quad \text{oraz} \quad t_{i+1} - t_i = 1. \quad (4.40)$$

Konstrukcja krzywej B-sklejanej

Krzywa B-sklejana składa się z $n - 2$ segmentów, z których każdy określony jest przez cztery punkty kontrolne. Konstrukcja poszczególnych segmentów krzywej odbywa się wg następującego schematu:

- segment $Q_3(t)$ krzywej określony jest przez punkty P_0, P_1, P_2, P_3 dla zakresu $t \in [0, 1]$,
- segment $Q_4(t)$ krzywej określony jest przez punkty P_1, P_2, P_3, P_4 dla zakresu $t \in [1, 2]$,
- ...
- segment $Q_i(t)$ krzywej określony jest przez punkty $P_{i-3}, P_{i-2}, P_{i-1}, P_i$ dla zakresu $t \in [i-3, i-2]$,

W konsekwencji macierz geometrii G_{Bi} odpowiadająca segmentowi Q_i krzywej przyjmuje następującą postać:

$$G_{Bi} = [P_{i-3} \ P_{i-2} \ P_{i-1} \ P_i], \quad 3 \leq i \leq n. \quad (4.41)$$

Każdy punkt kontrolny krzywej (oprócz końcowych i początkowych) wpływa na cały segment krzywej. Przesunięcie pojedynczego punktu kontrolnego powoduje zatem modyfikację czterech segmentów krzywej. Taką właściwość nazywamy lokalnym sterowaniem przebiegiem krzywej.

Dla wektora parametrów zadanej zależnością:

$$T_i = [(t - t_i)^3 \ (t - t_i)^2 \ (t - t_i) \ 1]^T \quad (4.42)$$

i-ty segment krzywej można zapisać następująco:

$$Q_i(t) = G_{Bi} \cdot M_{BS} \cdot T_i, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}. \quad (4.43)$$

Podobnie jak w przypadku krzywej Hermita, macierz geometrii krzywej G_B oraz współczynniki wielomianu T powiązane są w wzorze za pomocą macierzy bazowej M_{BS} przyjmującej w przypadku krzywych B-sklejanych następującą postać [BBB87]:

$$M_{BS} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

Przy wyznaczaniu macierzy M_{BS} przyjęto założenie ciągłości geometrycznej G^0 oraz ciągłości parametrycznej C^2 .

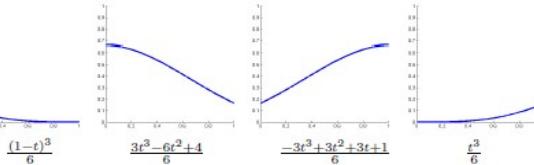
Po przesunięciu parametru t do początku układu odniesienia, czyli zastąpieniu zmiennej t wyrażeniem $t - t_i$, otrzymujemy następującą zależność:

$$Q_i(t - t_i) = G_{Bi} \cdot M_{BS} \cdot T_i, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (4.45)$$

Na podstawie zależności [4.45] i [4.44] otrzymujemy postać wielomianową wzoru na krzywą B-sklejaną z wyspecyfikowanymi funkcjami bazowymi w przedziale $t \in [0, 1]$:

$$Q_i(t - t_i) = P_{i-3} \frac{(1-t)^3}{6} + P_{i-2} \frac{3t^3 - 6t^2 + 4}{6} + P_{i-1} \frac{-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{6} + P_i \frac{t^3}{6}. \quad (4.46)$$

Na rys. 4.6 przedstawiono przebieg wielomianów tworzących jednorodną krzywą B-sklejaną.



Rysunek 4.6: Przebieg wielomianów tworzących krzywą B-sklejaną jednorodną

Właściwości jednorodnych krzywych B-sklejanych

1. Krzywa określona z użyciem wielomianów trzeciego stopnia.
2. Przebieg krzywej regulują punkty kontrolne.
3. Zmiana położenia punktu kontrolnego powoduje lokalną modyfikację przebiegu krzywej.
4. Krzywa nie zaczyna się ani nie kończy w pierwszym, bądź ostatnim punkcie kontrolnym.

4.6.2 Niejednorodne krzywe B-sklejane

Główna różnicą w porównaniu z jednorodnymi krzywymi B-sklejonymi jest nierównomierny przedział parametru pomiędzy kolejnymi węzłami. Krzywa interpoluje pierwszy i ostatni punkt kontrolny. Do niejednorodnej krzywej B-sklejanej można łatwo dodać nowy węzeł tak, aby uprościć proces modyfikacji krzywej wynikowej.

Niejednorodną krzywą B-sklejaną określa $n + 1$ punktów kontrolnych $P_k = (P_{kx}, P_{ky}, P_{kz})$ w przedziale $k = 0, 1, \dots, n$, przy czym $n \geq 3$. Krzywa składa się z wielomianów stopnia p i jest określona zbiorem równań parametrycznych:

sie z wielomianów stopnia p i jest określona zbiorem równań parametrycznych:

$$Q(t) = \begin{cases} x(t) = \sum_{k=0}^n P_{kx} N_k^p(t) \\ y(t) = \sum_{k=0}^n P_{ky} N_k^p(t) \\ z(t) = \sum_{k=0}^n P_{kz} N_k^p(t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq n-p+2 \quad (4.47)$$

Węzły krzywej są sekwencją niemalejących wartości węzlowych t w przedziale $0 \leq t \leq n - p + 2$. Wielomiany bazowe $N_k^p(t)$ zdefiniowane są w sposób rekurencyjny [Wat00]:

$$N_k^1(t) = \begin{cases} 1, & t_k \leq t \leq t_{k+1} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \quad (4.48)$$

$$N_k^2(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} N_k^1(t) + \frac{t_{k+2} - t}{t_{k+2} - t_{k+1}} N_{k+1}^1(t), \quad (4.49)$$

$$N_k^3(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+2} - t_k} N_k^2(t) + \frac{t_{k+3} - t}{t_{k+3} - t_{k+1}} N_{k+1}^2(t), \quad (4.50)$$

$$N_k^4(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+3} - t_k} N_k^3(t) + \frac{t_{k+4} - t}{t_{k+4} - t_{k+1}} N_{k+1}^3(t), \quad (4.51)$$

$$\dots \quad (4.52)$$

$$N_k^p(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+p-1} - t_k} N_{k-1}^{p-1}(t) + \frac{t_{k+p} - t}{t_{k+p} - t_{k+1}} N_{k+1}^{p-1}(t). \quad (4.53)$$

Wartości węzłów krzywej t_i wyliczane są wg następującej reguły:

$$t_i = \begin{cases} 0 & \text{dla } i < t, \\ i - p + 1 & \text{dla } i \leq t \leq n, \quad i = 0, 1, \dots, n + p \\ n - p + 2 & \text{dla } i > n, \end{cases} \quad (4.54)$$

Sekwencja węzłów przyjmuje wartości niemalejące. Jeżeli kolejne wartości parametru t są równe to wartość parametru nazywa się *węzłem wielokrotnym*, natomiast liczba jednakowych wartości parametru nazywa się *wielokrotnością węzła*. Pojedyńczy węzeł ma wielokrotność 1.

Właściwości niejednorodnych krzywych B-sklejanych

1. Krzywa określona z użyciem wielomianów stopnia p , możliwy jest dobór odpowiedniego stopnia wielomianu.
2. Przebieg krzywej regulują punkty kontrolne.
3. Zmiana położenia punktu kontrolnego powoduje lokalną modyfikację przebiegu krzywej.
4. Krzywa zaczyna się w pierwszym a kończy w ostatnim punkcie kontrolnym.

4.6.3 Krzywe NURBS

Mianem *krzywych NURBS* określamy niejednorodne ważone krzywe B-sklejane (ang. *Non-Uniform Rational B-Splines*). Krzywe NURBS sa rozszerzeniem konceptu niejednorodnych krzywych B-sklejanych. W tym przypadku na kształt krzywej, oprócz położenia punktów sterujących, mają wpływ wagiprzypisane poszczególnym węzłom.

Krzywą NURBS określa $n + 1$ punktów kontrolnych $P_k = (P_{kx}, P_{ky}, P_{kz})$ w przedziale $k = 0, 1, \dots, n$, przy czym $n \geq 3$ oraz wag w_k . Krzywa składa się z wielomianów stopnia p i jest określona zbiorem równań parametrycznych:

$$Q_{NURBS}(t) = \begin{cases} x(t) = \frac{\sum_{k=0}^n w_k P_{kx} N_k^p(t)}{\sum_{k=0}^n w_k N_k^p(t)} \\ y(t) = \frac{\sum_{k=0}^n w_k P_{ky} N_k^p(t)}{\sum_{k=0}^n w_k N_k^p(t)} \\ z(t) = \frac{\sum_{k=0}^n w_k P_{kz} N_k^p(t)}{\sum_{k=0}^n w_k N_k^p(t)} \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq n-p+2 \quad (4.55)$$

gdzie: $N_k^p(t)$ są wielomianami bazowymi stopnia p , natomiast w_k – wagami punktów kontrolnych P_k .