Zadania z Analizy danych

zestaw 2

Zadanie 1

Niech zmienną losową będzie *n* oznaczającą liczbę oczek na górnej ściance rzuconej kostki do gry. Znajdź wartość oczekiwaną $\hat{n}$, wariancję $\sigma^2(n)$, skośność μ_3, współczynnik asymetrii γ, współczynnika spłaszczenia μ_4 i kurtozę K rozkładu prawdopodobieństwa tej zmiennej losowej w przypadku

a) kostki idealnie symetrycznej $\left(p_i = \frac{1}{6},\ i = 1,2,\dots,6\right)$.
b) kostki niesymetrycznej o rozkładzie: $p_1 = \frac{11}{60}, p_2 = \frac{12}{60}, p_3 = \frac{9}{60}, p_4 = \frac{9}{60}, p_5 = \frac{10}{60}, p_6 = \frac{9}{60}$.

Odp:

a) $\hat{n} = 3{,}5$, $\sigma^2(n) = 2{,}92$, $\mu_3 = 0$, $\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$, $\mu_4 = 14{,}73$, $K = -1{,}27$.
b) $\hat{n} \approx 3{,}37$, $\sigma^2(n) \approx 2{,}97$, $\mu_3 \approx 0{,}556$, $\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \approx 0{,}109$, $\mu_4 = 14{,}90$, $K = -1{,}31$.

Rozwiązanie

a)

n_i	p_i	$n_i p_i$	$n_i^2 p_i$	$(n_i - \hat{n})^2 p_i$	$(n_i - \hat{n})^3 p_i$	$(n_i - \hat{n})^4 p_i$
1	0,1667	0,1667	0,1667	1,0417	-2,6042	6,5104
2	0,1667	0,3333	0,6667	0,3750	-0,5625	0,8438
3	0,1667	0,5000	1,5000	0,0417	-0,0208	0,0104
4	0,1667	0,6667	2,6667	0,0417	0,0208	0,0104
5	0,1667	0,8333	4,1667	0,3750	0,5625	0,8438
6	0,1667	1,0000	6,0000	1,0417	2,6042	6,5104
Σ	1,0000	3,5000	15,1667	2,9167	0,0000	14,7292

$E(n)$	$E(n^2)$	$\sigma^2(n)$	$E(n^2) - \left(E(n)\right)^2$	μ_3	γ_3	μ_4	K
3,5000	15,1667	2,9167	2,9167	0	0	14,7292	-1,2686

b)

n_i	p_i	$n_i p_i$	$n_i^2 p_i$	$(n_i - \hat{n})^2 p_i$	$(n_i - \hat{n})^3 p_i$	$(n_i - \hat{n})^4 p_i$
1	0,1833	0,1833	0,1833	1,0269	-2,4303	5,7516
2	0,2000	0,4000	0,8000	0,3736	-0,5105	0,6977
3	0,1500	0,4500	1,3500	0,0202	-0,0074	0,0027
4	0,1500	0,6000	2,4000	0,0602	0,0381	0,0241
5	0,1667	0,8333	4,1667	0,4446	0,7262	1,1862

6	0,1500	0,9000	5,4000	1,0402	2,7391	7,2130
Σ	0,1833	3,3666667	14,3	2,965556	0,5552593	14,8753296

$E(n)$	$E(n^2)$	$\sigma^2(n)$	$E(n^2)-\left(E(n)\right)^2$	μ_3	γ_3	μ_4	K
3,3667	14,3000	2,9656	2,9656	0,5553	0,1087	14,8958	-1,3062

Zadanie 2

Pewna zmienna losowa X ma rozkład o postaci

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ -ax(x^2-4), & 0\le x<2.\\ 0, & x\ge 2\end{cases}$$

Znajdź wartość stałej a, a następnie dystrybuantę zmiennej X.

Odp:

$a=0{,}25$, $F(x)=-\frac{1}{16}x^2(x^2-8)$.

Rozwiązanie

a)

$$-a\int_0^2 x(x^2-4)dx=-a\left(\int_0^2 x^3dx-4\int_0^2 xdx\right)=-a\left(\frac{1}{4}2^4-4\frac{1}{2}2^2\right)=-a(4-8)=4a=1,$$

$$a=\frac{1}{4}.$$

b)

$$F(x)=-\frac{1}{4}\int_0^x u(u^2-4)du=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}x^4-4\cdot\frac{1}{2}x^2\right)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{16}x^4=\frac{1}{16}x^2(8-x^2)$$

Zadanie 3

Korzystając z rozkładu z zadania 2 znajdź: wartość średnią, wariancję, współczynnik asymetrii, dominantę i medianę rozkładu.

Odp:

$\hat{x}=\frac{16}{15}\approx 1{,}067$, $\sigma^2=\frac{44}{225}\approx 0{,}196$, $\mu_3\approx -0{,}0108$, $\gamma=\frac{\mu_3}{\sigma^3}\approx -0{,}125$, $x_m=\sqrt{4/3}\approx 1{,}154$, $x_{0,5}\approx 1{,}082$.

Rozwiązanie

$$E(x) = -\frac{1}{4}\int_0^2 x \cdot x(x^2-4)dx = -\frac{1}{4}\left(\int_0^2 x^4 dx - 4\int_0^2 x^2 dx\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}2^5 - 4\frac{1}{3}2^3\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{32}{5} - \frac{32}{3}\right) = \frac{8}{3} - \frac{8}{5} = \frac{40-24}{15} = \frac{16}{15} \approx 1{,}067.$$

$$E(x^2) = -\frac{1}{4}\int_0^2 x^2 \cdot x(x^2-4)dx = -\frac{1}{4}\left(\int_0^2 x^5 dx - 4\int_0^2 x^3 dx\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}2^6 - 4\frac{1}{4}2^4\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{64}{6} - 16\right) = 4 - \frac{16}{6} = \frac{12-8}{3} = \frac{4}{3}.$$

$$\sigma^2(X) = E(x^2) - \big(E(x)\big)^2 = \frac{4}{3} - \left(\frac{16}{15}\right)^2 = \frac{4 \cdot 75}{225} - \frac{256}{225} = \frac{44}{225} \approx 0{,}196.$$

$$\frac{df(x)}{dx} = -\frac{1}{4}\frac{d(x^3-4x)}{dx} = -\frac{1}{4}(3x^2-4) = 0.$$

$$x_m = \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

$$F\big(x_{0,5}\big) = \frac{1}{16}{x_{0,5}}^2\big(8 - {x_{0,5}}^2\big) = \frac{1}{2},$$

$$z = x_{0,5}$$

$$-z^2 + 8z - 8 = 0, \quad \Delta = 64 - 32 = 32,$$

$$z = \frac{-8 \pm 4\sqrt{2}}{-2} = 4 \pm 2\sqrt{2}$$

$$x_{0,5} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \approx 1{,}082.$$

Zadanie 4

Pewna zmienna losowa X ma rozkład trójkątny o postaci

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{2(x-a)}{a(a-b)}, & a \le x < 0 \\ \dfrac{2(x-b)}{b(a-b)}, & 0 \le x < b \\ 0, & x \ge b \end{cases},$$

gdzie $a < 0$ i $b > 0$. Sprawdź, czy rozkład jest unormowany, a następnie znajdź dystrybuantę zmiennej X.

Rozwiązanie

a) Wykres rozkładu tworzy trójkąt o podstawie równej $b - a$ i wysokości $\frac{2}{b-a}$. Pole tego trójkąta jest równe

$$S = \frac{1}{2}(b-a) \cdot \frac{2}{b-a} = 1.$$

A zatem rozkład jest unormowany c.b.d.o.

b) Dla $a \le x \le 0$ dystrybuanta ma postać

$$F(x) = \int_a^x \frac{2(t-a)}{a(a-b)} dt = \frac{2}{a(a-b)} \left(\int_a^x t dt - a \int_a^x dt \right) = \frac{2}{a(a-b)} \left(\frac{1}{2}(x^2 - a^2) - a(x-a) \right) =$$

$$\frac{x^2 - a^2}{a(a-b)} - \frac{2a(x-a)}{a(a-b)} = \frac{x^2 - 2ax + a^2}{a(a-b)} = \frac{(x-a)^2}{a(a-b)}.$$

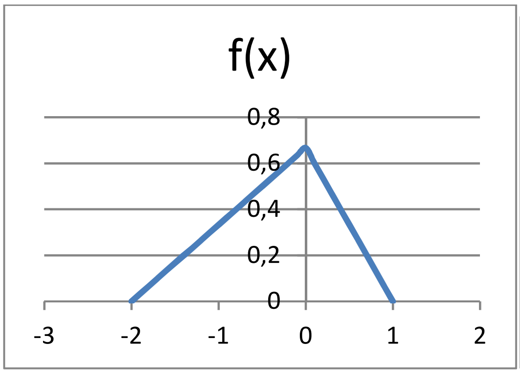
dla $b \ge x > 0$ dystrybuanta przyjmuje postać

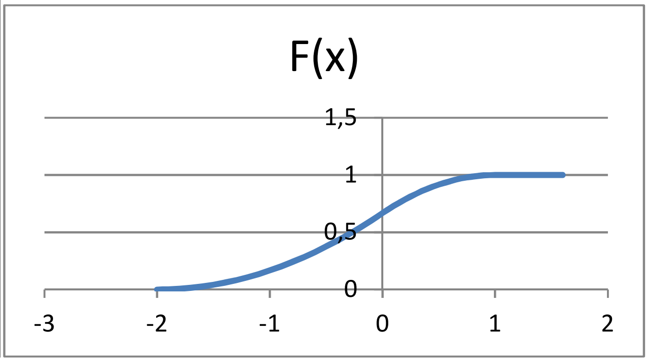
$$F(x) = \int_a^0 \frac{2(t-a)}{a(a-b)} dt + \int_0^x \frac{2(t-b)}{b(a-b)} dt = F(0) + \frac{2}{b(a-b)} \left(\int_0^x t dt - b \int_0^x dt \right) =$$

$$\frac{(0-a)^2}{a(a-b)} + \frac{2}{b(a-b)} \left(\frac{1}{2}x^2 - bx \right) = \frac{a}{a-b} + \frac{x^2 - 2bx}{b(a-b)} = \frac{x^2 - 2bx + ab}{b(a-b)}.$$

Ostatecznie

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad x < a \\ \dfrac{(x-a)^2}{a(a-b)}, \quad a \le x < 0 \\ \dfrac{x^2 - 2bx + ab}{b(a-b)}, \quad 0 \le x \le b \\ 1, \quad x > b \end{cases}.$$





Zadanie 5

Dla rozkładu z zadania 4 znajdź: wartość średnią, wariancję, współczynnik asymetrii, dominantę i medianę rozkładu. Rozważ przypadek rozkładu symetrycznego ($a = -b$) oraz niesymetrycznego, gdy $a = -4b$.

Odp:

$$\hat{x} = \frac{a+b}{3}, \quad \sigma^2(x) = \frac{a^2 - ab + b^2}{18}, \quad x_m = 0, \quad x_{0,5} = \begin{cases} a + \sqrt{\dfrac{a(a-b)}{2}}, & a + b \le 0 \\ b - \sqrt{\dfrac{b(b-a)}{2}}, & a + b > 0 \end{cases}.$$

a) $\hat{x} = 0, \ \sigma^2 = \frac{b^2}{6}, \ \mu_3 = 0, \ \gamma = 0, \ x_m = 0, \ x_{0,5} = 0.$

b) $\hat{x} = -b, \ \sigma^2 = \frac{7}{6}b^2, \ x_m = 0, \ x_{0,5} = b\left(\sqrt{10} - 4\right) \approx -0{,}838b$

Rozwiązanie

Wartość oczekiwana

$$E(X) = \int_a^0 x \frac{2(x-a)}{a(a-b)} dx + \int_0^b x \frac{2(x-b)}{b(a-b)} dx =$$

$$\frac{2}{a(a-b)}\left(\int_a^0 x^2 dx - a\int_a^0 x dx\right) + \frac{2}{b(a-b)}\left(\int_0^b x^2 dx - b\int_0^b x dx\right) =$$

$$\frac{2}{a(a-b)}\left(-\frac{1}{3}a^3 + a\frac{1}{2}a^2\right) + \frac{2}{b(a-b)}\left(\frac{1}{3}b^3 - b\frac{1}{2}b^2\right) =$$

$$\frac{2}{a(a-b)}\frac{a^3}{6} + \frac{2}{b(a-b)}\frac{-b^3}{6} = \frac{a^2 - b^2}{3(a-b)} = \frac{(a-b)(a+b)}{3(a-b)} = \frac{a+b}{3}.$$

Dla ogólnego rozkładu trójkątnego na przedziale a, b i wierzchołkiem w c jest

$$E(X) = \frac{a+b+c}{3}.$$

Wariancja

$$E(X^2) = \int_a^0 x^2 \frac{2(x-a)}{a(a-b)} dx + \int_0^b x^2 \frac{2(x-b)}{b(a-b)} dx =$$

$$\frac{2}{a(a-b)}\left(\int_a^0 x^3 dx - a\int_a^0 x^2 dx\right) + \frac{2}{b(a-b)}\left(\int_0^b x^3 dx - b\int_0^b x^2 dx\right) =$$

$$\frac{2}{a(a-b)}\left(-\frac{1}{4}a^4 + a\frac{1}{3}a^3\right) + \frac{2}{b(a-b)}\left(\frac{1}{4}b^4 - b\frac{1}{3}b^3\right) =$$

$$\frac{2}{a(a-b)}\frac{a^4}{12} + \frac{2}{b(a-b)}\frac{-b^4}{12} = \frac{a^3-b^3}{6(a-b)} = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{6(a-b)} = \frac{a^2+ab+b^2}{6}.$$

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{6} - \left(\frac{a+b}{3}\right)^2 =$$

$$\frac{3a^2+3ab+3b^2-2a^2-4ab-2b^2}{18} = \frac{a^2-ab+b^2}{18}.$$

Dla ogólnego rozkładu trójkątnego na przedziale a, b i wierzchołkiem w c jest

$$\sigma^2(X) = \frac{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}{18}.$$

Dominanta

Na przedziale $< a, 0)$ rozkład jest funkcją rosnącą, a na przedziale $< 0, b >$ funkcja malejąca. A zatem dominanta jest w punkcie 0.

$$x_m = 0.$$

Mediana

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad x < a \\ \dfrac{(x-a)^2}{a(a-b)}, \quad a \le x < 0 \\ \dfrac{x^2-2bx+ab}{b(a-b)}, \quad 0 \le x \le b \\ 1, \quad x > b \end{cases}$$

$$F(0) = \frac{a}{a-b}.$$

Sprawdźmy kiedy

$$\frac{a}{a-b} \ge 0{,}5.$$

Ponieważ $a < 0$ i $a - b < 0$, to

$$2a \le a - b,$$

czyli dla

$$a + b \le 0$$
$$F(0) > 0{,}5.$$

A zatem gdy $a + b \le 0$ to mediany należy szukać w przedziale $(a, 0 >$. W przeciwnym przypadku należy jej szukać w przedziale $(0, b)$.

Jeśli $a + b \leq 0$, to

$$\frac{\left(x_{0,5} - a\right)^2}{a(a-b)} = 0{,}5.$$

$$\left(x_{0,5} - a\right)^2 = \frac{a(a-b)}{2}$$

$$x_{0,5} = a + \sqrt{\frac{a(a-b)}{2}}$$

Jeśli $a + b > 0$, to

$$\frac{x_{0,5}^2 - 2bx_{0,5} + ab}{b(a-b)} = 0{,}5.$$

$$2x_{0,5}^2 - 4bx_{0,5} + b^2 + ab.$$

$$\Delta = 16b^2 - 8b^2 - 8ab = 8b^2 - 8ab = 16\frac{b(b-a)}{2}.$$

$$x_{0,5} = \frac{4b - 4\sqrt{\frac{b(b-a)}{2}}}{4} = b - \sqrt{\frac{b(b-a)}{2}}.$$

Ostatecznie

$$x_{0,5} = \begin{cases} a + \sqrt{\frac{a(a-b)}{2}}, & a + b \leq 0 \\ b - \sqrt{\frac{b(b-a)}{2}}, & a + b > 0 \end{cases}.$$

Przypadek symetryczny $a = -b$

c) $\hat{x} = -b,\ \sigma^2 = \frac{7}{6}b^2,\ \ x_m = 0,\ x_{0,5} = b\left(\sqrt{10} - 4\right) \approx -0{,}838b$

$$E(x) = \frac{a+b}{3} = \frac{-b+b}{3} = 0.$$

$$\sigma^2(X) = \frac{a^2 - ab + b^2}{18} = \frac{b^2 + b^2 + b^2}{18} = \frac{b^2}{6}.$$

$$x_m = 0.$$

$$x_{0,5} = a + \sqrt{\frac{a(a-b)}{2}} = -b + \sqrt{\frac{\left(-b(-b-b)\right)}{2}} = -b + \sqrt{\frac{2b^2}{2}} = 0.$$

Przypadek asymetryczny $a = -4b$

$$E(x) = \frac{a+b}{3} = \frac{-4b+b}{3} = -b.$$

$$\sigma^2(X) = \frac{a^2 - ab + b^2}{18} = \frac{16b^2 + 4b^2 + b^2}{18} = \frac{21b^2}{18} = \frac{7b^2}{6}.$$

$$x_m = 0.$$

$$x_{0,5} = a + \sqrt{\frac{a(a-b)}{2}} = -4b + \sqrt{\frac{\left(-4b(-4b-b)\right)}{2}} = -4b + \sqrt{\frac{20b^2}{2}} = b\left(\sqrt{10} - 4\right)$$

$$\approx -0{,}838b.$$

Zadanie 6

Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej określającej czas życia jąder atomowych pierwiastków promieniotwórczych opisana jest funkcją wykładniczą o postaci

$$f(t) = Ae^{-t/\tau}, \quad t \geq 0,$$

gdzie τ jest parametrem wyznaczanym doświadczalnie, charakterystycznym dla danego pierwiastka, a A stałą normalizacyjną. Znajdź

a) Wartość stałej A
b) Średni czas życia atomów
c) Dystrybuantę
d) Medianę rozkładu (w fizyce mediana tego rozkładu nazywana jest czasem połowiczego zaniku)
e) Wariancję rozkładu
f) Współczynnik skośności.

Odp.

$$A = \tau^{-1},\ \hat{t} = \tau,\ F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}},\ t_{0,5} = \tau\ln(2)\,,\ \sigma^2(t) = \tau,\ \mu_3 = 4\tau^2\ (\gamma = 4).$$

Rozwiązanie

ad a) Wartość stałej A

$$A\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}}dt = A\int_0^{-\infty} e^{u}(-\tau)du = -A\tau e^{u}\Big|_0^{-\infty} = -A\tau(0-1) = A\tau = 1.$$

Stąd

$$A = \tau^{-1}.$$

ad b) Średni czas życia atomów

$$u = -\frac{t}{\tau},\ t = -u\tau,\ dt = -\tau du.$$

$$\int x^n e^{ax}dx = \frac{x^n}{a}e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx = n!\,e^{ax}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{n-k}}{(n-k)!\,a^{k+1}}.$$

$$\int te^{-\frac{t}{\tau}}dt = 1!\,e^{-\frac{t}{\tau}}\left((-1)^0\frac{t^1}{1!\,(-\tau^{-1})^1} + (-1)^1\frac{t^0}{0!\,(-\tau^{-1})^2}\right) = e^{-\frac{t}{\tau}}(-t\tau - \tau^2) = -\tau e^{-\frac{t}{\tau}}(t+\tau)$$

$$E(t) = \tau^{-1}\int_0^{\infty} te^{-\frac{t}{\tau}}dt = \tau^{-1}\left(-\tau e^{-\frac{t}{\tau}}(t+\tau)\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\tau}\tau^2 = \tau.$$

ad c) Dystrybuanta

$$F(t) = \frac{1}{\tau}\int_0^{t} e^{-\frac{x}{\tau}}dx = \frac{1}{\tau}(-\tau)\,e^{-\frac{x}{\tau}}\Big|_0^{t} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

ad d) Mediana (czas połowicznego zaniku)

$$1-e^{-\frac{t_{0,5}}{\tau}}=\frac{1}{2},$$
$$e^{-\frac{t_{0,5}}{\tau}}=\frac{1}{2}$$

$$e^{\frac{t_{0,5}}{\tau}}=2$$

$$t_{0,5}=\tau\ln 2.$$

ad e) Wariancja

$$n!\,e^{ax}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{n-k}}{(n-k)!\,a^{k+1}}.$$

$$\int t^2e^{-\frac{t}{\tau}}dt=2!\,e^{-\frac{t}{\tau}}\left((-1)^0\frac{t^2}{2!\,(-\tau^{-1})^1}+(-1)^1\frac{t^1}{1!\,(-\tau^{-1})^2}+(-1)^2\frac{t\text{^}0}{0!\,(-\tau^{-1})^3}\right)=$$

$$2e^{-\frac{t}{\tau}}(-\frac{1}{2}\tau t^2-\tau^2t-\tau^3)$$

$$E(t^2)=\tau^{-1}\int_0^\infty t^2e^{-\frac{t}{\tau}}dt=\frac{1}{\tau}2e^{-\frac{t}{\tau}}(-\frac{1}{2}\tau t^2-\tau^2t-\tau^3)\Big|_0^\infty=2\tau^2.$$

$$\sigma^2(t)=2\tau^2-\tau^2=\tau^2.$$

W poniższych zadaniach pomocne będą całki typu

$$I(t)\equiv I(t)\equiv\int_0^\infty x^te^{-ax^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{\left(2\sqrt{a}\right)^{t+1}}\frac{\Gamma(\mathrm{t}+1)}{\Gamma\left(\frac{\mathrm{t}}{2}+1\right)}$$

gdzie

$$\Gamma(z)\equiv\int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx$$

jest tzw. funkcją Gamma Eulera. Funkcja ta ma następujące własności:

$$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi},\ \ \Gamma(1)=1,\ \ \Gamma(t+1)=t\Gamma(t).$$

Stąd

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma(1)=1,$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1,$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4},$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2,$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8},$$

$$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3\Gamma(3) = 6.$$

$$\Gamma(5) = \Gamma(4+1) = 4\Gamma(4) = 24.$$

Potrzebne całki

$$I_0 = I(0) = \int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\left(2\sqrt{a}\right)^{0+1}}\frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma\left(\frac{0}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$$

$$I_1 = I(1) = \int_0^\infty xe^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\left(2\sqrt{a}\right)^{1+1}}\frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{4a}\frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{2a}$$

$$I_2 = I(2) = \int_0^\infty x^2 2e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\left(2\sqrt{a}\right)^{2+1}}\frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma\left(\frac{2}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\left(2\sqrt{a}\right)^3}\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\left(\sqrt{a}\right)^3}$$

$$I_3 = I(3) = \int_0^\infty x^3 e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\left(2\sqrt{a}\right)^{3+1}}\frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{16a^2}\frac{\Gamma(4)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{1}{2a^2}$$

$$I_4 = I(4) = \int_0^\infty x^4 2e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\left(2\sqrt{a}\right)^{4+1}}\frac{\Gamma(4+1)}{\Gamma\left(\frac{4}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\left(2\sqrt{a}\right)^5}\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(3)} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8\left(\sqrt{a}\right)^5}$$

$$I_5 = I(5) = \int_0^\infty x^5 2e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\left(2\sqrt{a}\right)^{5+1}}\frac{\Gamma(5+1)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\left(2\sqrt{a}\right)^6}\frac{\Gamma(6)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{1}{a^3}.$$

Zadanie 7

Wykonano dużą liczbę strzałów do tarczy. Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej r określającej odległość r trafień do tarczy od jej centrum opisano funkcją

$$f(r) = Are^{-h^2r^2}, \qquad r \geq 0.$$

Znajdź

a) Wartość stałej normalizacyjnej A
b) Modę rozkładu, czyli wartość r, dla której gęstość prawdopodobieństwa jest największa
c) Wartość oczekiwaną (średnią) zmiennej r
d) Wariancję zmiennej r.

Rozwiązanie

ad a) Stała normalizacyjna

$$A\int_0^\infty re^{-h^2r^2}dr = AI(1) = A\frac{1}{2h^2} = 1.$$
$$A = 2h^2$$

ad b) Dominanta

$$\frac{d\left(re^{-h^2r^2}\right)}{dr} = e^{-h^2r^2} + re^{-h^2r^2}(-2rh^2) = e^{-h^2r^2}(1-2r^2h^2) = 0,$$
$$2r^2h^2 = 1,$$
$$r_m = \frac{\sqrt{2}}{2h}.$$

ad c) Wartość oczekiwana

$$E(r) = 2h^2\int_0^\infty r^2e^{-h^2r^2}dr = 2h^2I(2) = 2h^2\frac{\sqrt{\pi}}{4\left(\sqrt{h^2}\right)^3} = \frac{\sqrt{\pi}}{2h}.$$

ad d) Wariancja

$$E(r^2) = 2h^2\int_0^\infty r^3e^{-h^2r^2}dr = 2h^2I(3) = 2h^2\frac{1}{2h^4} = \frac{1}{h^2}.$$
$$\sigma^2(R) = \frac{1}{h^2} - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2h}\right)^2 = \frac{4-\pi}{4h^2}.$$

Zadanie 8

Rozkład Maxwella opisuje rozkład szybkości (długości wektora prędkości) v atomów gazu doskonałego. Ma on postać

$$f(v) = Cv^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}, \qquad v \geq 0,$$

gdzie, m jest masą atomu, T temperaturą w skali bezwzględnej, a k stałą Boltzmana. Znajdź

a) Wartość stałej normalizacyjnej C
b) Średnią szybkość atomów
c) Modę rozkładu, czyli szybkość, dla której gęstość prawdopodobieństwa jest największa
d) Wariancję szybkości
e) Oszacuj szybkości otrzymane w punktach b)-d) dla azotu w temperaturze pokojowej

Rozwiązanie

ad a) Stała normalizacyjna

$$C\int_0^\infty v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}dv = CI(2) = C\frac{\sqrt{\pi}}{4\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}}} = 1.$$

$$C = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2^2 2^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

ad b) Średnia szybkość atomów

$$< v >= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{\frac{3}{2}} I(3) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{2\left(\frac{m}{2kT}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{2^2}{2}\left(\frac{m}{kT}\right)^{-2} = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \approx 1{,}596\sqrt{\frac{kT}{m}}.$$

ad c) Dominanta

$$\frac{d\left(v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\right)}{dv} = 2ve^{-\frac{mv^2}{2kT}} + v^2\left(-\frac{mv}{kT}\right)e^{-\frac{mv^2}{2kT}} = e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\left(2 - \frac{mv^2}{kT}\right) = 0,$$

$$\frac{mv^2}{kT} = 2,$$

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \approx 1{,}414\sqrt{\frac{kT}{m}} < \hat{v}.$$

ad d) Wariancja

$$< v^2 >= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty v^4 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{\frac{3}{2}} I(4) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{3\sqrt{\pi}}{8\left(\frac{m}{2kT}\right)^{5/2}} =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{3\cdot\sqrt{\pi}\cdot 2^{\frac{5}{2}}}{8}\left(\frac{m}{kT}\right)^{-\frac{5}{2}}=3\ \frac{kT}{m}.$$

$$\sigma^2(V)=\frac{3kT}{m}-\left(\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}\right)^2=\frac{(3\pi-8)kT}{\pi m}\approx 0{,}454\frac{kT}{m}$$

ad e) Dla azotu

$$m=4{,}65\cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg}.$$
$$k=1{,}38\cdot 10^{-23}\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}.$$
$$T=300\ \mathrm{K}.$$

średnia szybkość

$$<v>\approx 476\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

szybkość najbardziej prawdopodobna

$$v_m\approx 422\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

średnia szybkość kwadratowa

$$\sqrt{<v^2>}\approx 517\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

wariancja szybkości

$$\sigma^2(v)\approx 40378\frac{\mathrm{m}^2}{s^2}.$$

odchylenie standardowe

$$\sigma(v)\approx 201\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Zadanie 9

Na podstawie rozkładu Maxwella z zadania 8 znajdź rozkład prawdopodobieństwa energii kinetycznej cząstek gazu doskonałego i oblicz modę tego rozkładu oraz średnią energię kinetyczną cząstek. Porównaj otrzymany wynik z prawem o ekwipartycji energii.

Rozwiązanie

$$f(v)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}v^2e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

$$E_k=\frac{mv^2}{2}$$

$$v=\sqrt{\frac{2E_k}{m}}$$

$$g(E_k)=\left|\frac{dv}{dE_k}\right|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}v^2e^{-\frac{mv^2}{2kT}}=\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{E_k}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{2E_k}{m}\ e^{-\frac{E_k}{kT}}=2\sqrt{\frac{E_k}{\pi kT}}\frac{1}{kT}e^{-\frac{E_k}{kT}}.$$

$$\int_0^\infty g(E_k)dE_k = \int_0^\infty 2\sqrt{\frac{E_k}{\pi kT}}\,\frac{1}{kT}\;e^{-\frac{E_k}{kT}}dE_k = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u^{\frac{1}{2}}\frac{1}{kT}\;e^{-u}kTdu = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u^{\frac{1}{2}}e^{-u}du$$

$$\Gamma(t) \equiv \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx,$$

$$\int_0^\infty u^{\frac{1}{2}}e^{-u}du = \int_0^\infty u^{\frac{3}{2}-1}e^{-u}du = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ostatecznie

$$\int_0^\infty g(E_k)dE_k = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1. \qquad \text{ok.}$$

Dominanta

$$\frac{d\left(\sqrt{E_k}e^{-\frac{E_k}{kT}}\right)}{dE_k} = e^{-\frac{E_k}{kT}}\left(\frac{1}{2\sqrt{E_k}} - \frac{\sqrt{E_k}}{kT}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{E_k}} = \frac{\sqrt{E_k}}{kT}$$

$$E_k = \frac{kT}{2}.$$

Średnia energia kinetyczna

$$< E_k >= \int_0^\infty E_k\, 2\sqrt{\frac{E_k}{\pi kT}}\frac{1}{kT}dE_k = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \left(\frac{E_k}{kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_k}{kT}}dE_k =$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u^{\frac{3}{2}}e^{-u}kTdu = \frac{2kT}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{2kT}{\sqrt{\pi}}\frac{3\sqrt{\pi}}{4} = \frac{3}{2}kT.$$

Otrzymany wynik jest zgodny z zasadą ekwipartycji energii, zgodnie z którą średnia energia cząsteczki rozkłada się równo pomiędzy wszystkie stopnie swobody cząsteczki i na każdy z nich przypada średnio $\frac{1}{2}kT$ energii. Dla gazu doskonałego cząsteczki mają 3 stopnie swobody stąd

$$< E_k >= \frac{3}{2}kT.$$