Metody Lagrange'a i Hamiltona w Mechanice

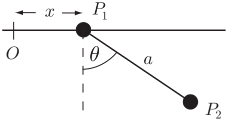
Mariusz Przybycień

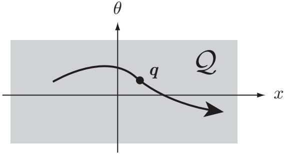
Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 3

Przestrzeń konfiguracyjna

Zbiór współrzędnych uogólnionych $\vec{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)$ wygodnie jest traktować jako punkt w n-wymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej. Pozycja punktu w przestrzeni konfiguracyjnej w pełni określa konfigurację układu poprzez relacje: $\vec{r}_i = \vec{r}_i(\vec{q}), \quad i = 1, ..., N$





Pochodne czasowe $\dot{\vec{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n)$ nazywamy uogólnionymi prędkościami układu S.

Ponieważ $\vec{r}_i = \vec{r}_i(\vec{q})$ oraz $\vec{q} = \vec{q}(t)$, więc prędkości cząstek układu są liniowymi kombinacjami prędkości uogólnionych:

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\,\dot{q}_1 + ... + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n}\,\dot{q}_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\,\dot{q}_j$$

Przyspieszenia cząstek układu dane są przez:

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\,\ddot{q}_j\right] = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k}\,\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\,\ddot{q}_j$$

Energia kinetyczna we współrzędnych uogólnionych

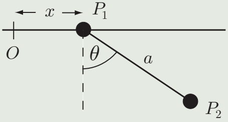
Przykład: Energia kinetyczna układu puktów P_1 i P_2

Ponieważ prędkości punktów są odpowiednio równe:

$$\vec{v}_1 = \dot{x}\vec{i} \quad \text{oraz} \quad \vec{v}_2 = \dot{x}\vec{i} + (a\cos\theta\,\vec{i} + a\sin\theta\,\vec{k})\dot{\theta}$$

więc energia kinetyczna układu wyraża się przez:

$$T = \frac{1}{2}m(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1)+\frac{1}{2}m(\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2) = m\dot{x}^2+\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2+ma\cos\theta\,\dot{x}\dot{\theta}$$



Energia kinetyczna układu cząstek jest jednorodną formą kwadratową w zmiennych $\dot{q}_1$, ..., $\dot{q}_n$:

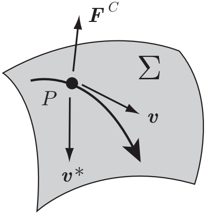
$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\,\dot{q}_j\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\,\dot{q}_k\right) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\vec{q})\dot{q}_j\dot{q}_k$$

gdzie $a_{jk}(\vec{q}) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right)$.

Zasada D'Alembert'a

Równania Newtona dla dowolnego układu S:

$$m_i \dot{\vec{v}}_i = \vec{F}_i^S + \vec{F}_i^C \qquad i = 1, ..., N$$



gdzie $\vec{F}^S$ to siły przyłożone, a $\vec{F}^C$ to więzy.

Wirtualnym przesunieciem nazywamy każde przesuniecie zgodne z nałożonymi więzami, w ustalonej chwili czasu:

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

Zasada d'Alemberta: zakładając, że więzy nie wykonują wirtualnej pracy, tzn. $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^C \cdot \delta\vec{r}_i = 0$ mamy:

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i^S - m_i \dot{\vec{v}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

Wirtualna praca wykonana przy przesunięciu $\delta\vec{r}_i$ wynosi:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^S \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_i^S \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j$$

gdzie $Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^S \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ to tzw. uogólnione siły.

Równania Lagrange'a

Układem standardowym nazywamy układ który jest holonomiczny i w którym więzy nie wykonują wirtualnej pracy.

Można pokazać, że dla takiego układu:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\delta q_j$$

W ten sposób otrzymujemy równania Lagrange'a dla układu standardowego opisanego za pomocą współrzędnych uogólnionych $\vec{q}$, energii kinetycznej $T(\vec{q},\dot{\vec{q}})$ oraz uogólnionych sił $\{Q_j\}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad j = 1, ..., n$$

W przypadku układów zachowawczych $Q_j = -\dfrac{\partial V}{\partial q_j}$ i równania Lagrange'a przyjmują postać, gdzie $V(\vec{q})$ jest energią potencjalną układu:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \qquad j = 1, ..., n$$

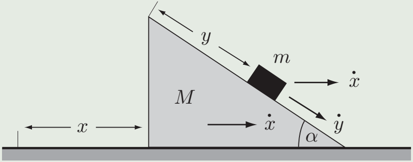
Zastosowania równań Lagrange'a

Przykład: Blok zsuwający się bez tarcia po równi, która także może się poruszać bez tarcia po poziomej powierzchni.

Jako współrzędne uogólnione wybieramy x oraz y jak na rysunku. Obliczamy energie kinetyczną i potencjalną układu:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha\right)$$

$$V = -mgy\sin\alpha$$



Obliczamy wielkości potrzebne do równań Lagrange'a:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + m\cos\alpha\,\dot{y}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\cos\alpha\,\dot{x} + m\dot{y}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -mg\sin\alpha.$$

Równania Lagrange'a przyjmują postać:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(M+m)\dot{x} + m\cos\alpha\,\dot{y}\right] - 0 = 0$$

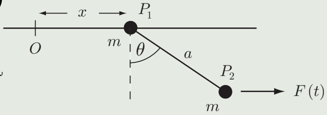
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m\cos\alpha\,\dot{x} + m\dot{y}\right] - 0 = mg\sin\alpha$$

Po zróżniczkowaniu i rozwiązaniu układu równań otrzymujemy:

$$\ddot{x} = \frac{mg\sin\alpha\,\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha} \qquad \ddot{y} = \frac{(M+m)g\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$

Zastosowania równań Lagrange'a

Przykład: Znajdź równania Lagrange'a dla układu przedstawionego na rysunku. Punkt P_1 ślizga się bez tarcia. Brak siły grawitacji. Na punkt P_2 działa siła $\vec{F}(t)$.



Jako współrzędne uogólnione wybieramy x oraz θ jak na rysunku.
Siła zależna od czasu nie może być przedstawiona za pomocą potencjału. W tej sytuacji musimy obliczyć siły uogólnione z definicji.

Ponieważ $\vec{F}_1^S = 0$, $\vec{F}_2^S = F(t)\vec{i}$, $\vec{r}_1 = x\vec{i}$, $\vec{r}_2 = (x + a\sin\theta)\vec{i} - a\cos\theta\,\vec{k}$ więc:

$$Q_x = \vec{F}_1^S \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial x} + \vec{F}_2^S \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial x} = 0 + F(t)\vec{i}\cdot\vec{i} = F(t)$$

$$Q_\theta = \vec{F}_1^S \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta} + \vec{F}_2^S \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \theta} = 0 + F(t)\vec{i}\cdot(a\cos\theta\vec{i} + a\sin\theta\,\vec{k}) = a\cos\theta\,F(t)$$

Energia kinetyczna układu $T = m\dot{x}^2 + (ma\cos\theta)\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2$

Równania Lagrange'a:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[2m\dot{x} + (ma\cos\theta)\dot{\theta}\right] = F(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(ma\cos\theta)\dot{x} + m\dot{\theta}\right] - \left[-(ma\sin\theta)\dot{x}\dot{\theta}\right] = (a\cos\theta)F(t)$$

Układy standardowe z ruchomymi więzami

Teorię równań Lagrange'a można rozszerzyć na klasę problemów z więzami zależnymi od czasu. Konfiguracja układu określona jest za pomocą relacji:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(\vec{q}, t) \qquad i = 1, ..., N$$

Prędkości cząstek dane są przez: $\dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$

Natomiast energia kinetyczna jest niejednorodną formą kwadratową:

$$T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\vec{q}, t)\dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^{n} b_j(\vec{q}, t)\dot{q}_j + c(\vec{q}, t)$$

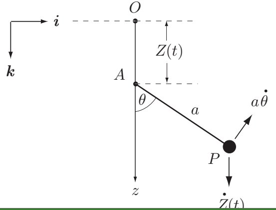
Ponieważ ruchome więzy wykonują pracę nad układem, więc całkowita energia $T + V$ nie jest zachowana.

Jednak wykonana przez więzy praca wirtualna $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^C \cdot (\partial \vec{r}_i / \partial q_j)\delta q_j = 0$, a więc spełnione są równania Lagrange'a.

Rozważmy wahadło, którego punkt zawieszenia porusza się w zadany sposób, np. $Z(t) = Z_0 \cos pt$.

Wektor wodzący punktu P:

$$\vec{r} = (a \sin\theta)\vec{i} + (Z(t) + a\cos\theta)\vec{k}$$



Układy standardowe z ruchomymi więzami

Energia kinetyczna i potencjalna układu dane są odpowiednio przez:

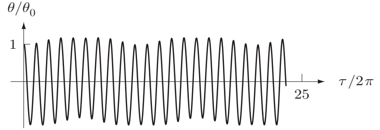
$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\left(a^2\dot{\theta}^2 + \dot{Z}^2 - 2a\dot{\theta}\dot{Z}\sin\theta\right) \\ V &= -mg(Z + a\cos\theta) \end{aligned}$$

Równanie Lagrange'a dla współrzędnej θ ma postać:

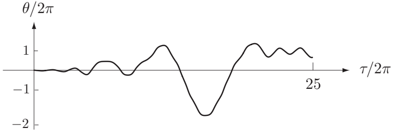
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}ma(a\dot{\theta} - \dot{Z}\sin\theta) + ma\dot{\theta}\dot{Z}\cos\theta = -mga\sin\theta$$

Wprowadzając oznaczenie $\Omega^2 = g/a$ oraz przymując $Z(t) = Z_0\cos pt$ dostajemy:

$$\ddot{\theta} + \left(\Omega^2 + \frac{Z_0p^2}{a}\cos pt\right)\sin\theta = 0$$



W celu znalezienia rozwiązań numerycznych wprowadzamy bezwymiarowe parametry: $\tau = pt$, p/Ω oraz Z_0/a:



$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2} + \left(\frac{\Omega^2}{p^2} + \left(\frac{Z_0}{a}\right)\cos\tau\right)\sin\theta = 0$$

Lagrangian i zasada Hamiltona

Ponieważ dla układów zachowawczych mamy $T = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ oraz $V = V(\vec{q})$, więc równania Lagrange'a mozna zapisać w postaci:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial V}{\partial q_j} \qquad j = 1, ..., n$$

Wprowadzając tzw. lagrangian $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) - V(\vec{q})$, możemy równania Lagrange'a zapisać w postaci:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad j = 1, ..., n$$

W przypadku więzów ruchomych jedyną zmianą jest to, ze teraz $L = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$.
Zasada Hamiltona: Spośród wszystkich możliwych dróg, po których układ dynamiczny może przejść z jednego punktu w przestrzeni konfiguracyjnej do innego, w zadanym przedziale czasu, realizowana jest ta droga, która odpowiada wartości stacjonarnej działania czyli całki po czasie z lagrangianu układu:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)\mathrm{d}t$$

Równania Eulera odpowiadające powyższemu problemowi wariacyjnemu, są identyczne z równaniami Lagrange'a.

Energia potencjalna zależna od prędkości

Istnieją układy w których przyłożone siły nie są zachowawcze (tzn. nie istnieje energia potencjalna), a mimo to można zapisać równania ruchu za pomocą równań Lagrange'a. Jest to możliwe w sytuacji kiedy uogólnione siły daje zapisać w postaci:

$$Q_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j} \qquad j = 1, ..., n$$

gdzie $U(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ jest energią potencjalną zależną od prędkości. W tej sytuacji mozna zbudować Lagrangian:

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) - U(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$$

Przykład: Lagrangian cząstki naładowanej poruszającej się w statycznym polu elektrycznym i statycznym polu magnetycznym.

Można pokazać, że siłę Lorentza $\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B}$ daje się wyprowadzić z równań Lagrange'a wprowadzając energię potencjalną zależną od prędkości

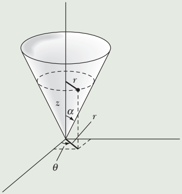
$$U = e\phi(\vec{r}) - e\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r})$$

gdzie ϕ i $\vec{A}$ to tzw. petencjały skalarny i wektorowy, z których mozna skonstruować pola $\vec{E} = -grad\phi$ oraz $\vec{B} = rot\vec{A}$. Sam Lagrangian cząstki przyjmuje postać: $L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} - e\phi(\vec{r}) + e\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r})$

Równania Lagrange'a - przykład

Przykład: Cząstka o masie m ślizga się po wewnętrznej powierzchni stożka (rysunek). Znajdź równanie ruchy cząstki.

Jako współrzędne uogólnione wybieramy współrzędne cylindryczne r, θ oraz z.



Korzystając z równania więzów $z = r/tan\alpha$ możemy wyeliminować jedną ze współrzędnych.

Energia kinetyczna:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 \operatorname{ctg}^2\alpha) = \dot{r}^2/\sin^2\alpha + \frac{r^2}{\dot{\theta}^2}$$

Energia potencjalna ($V(z=0)=0$): $V = mgz = mgr\operatorname{ctg}\alpha$

Lagrangian: $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2/\sin^2\alpha + r^2\dot{\theta}^2) - mgr\operatorname{ctg}\alpha$

Ponieważ L nie zależy bezpośrednio od θ więc mamy:

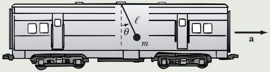
$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = const$ – moment pędu wokół osi z.

Równanie ruchu dla współrzędnej r: $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\sin^2\alpha + g\sin\alpha\cos\alpha = 0$

Równania Lagrange'a - przykład

Przykład: Znajdź okres małych drgań wahadła matematycznego umieszczonego w wagonie poruszającym się z przyspieszeniem $\vec{a}$ w kierunku osi x.

Warunki początkowe: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$.

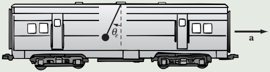


(a)

Pozycja i prędkość masy m:

$$x = v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 + l \sin\theta \qquad y = -l\cos\theta$$
$$\dot{x} = v_0 + at + l\dot{\theta}\sin\theta \qquad \dot{y} = l\dot{\theta}\cos\theta$$

Lagrangian: $L = T - V =$
$$\frac{1}{2} m (v_0 + at + l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + \frac{1}{2} m (l\dot{\theta}\sin\theta)^2 + mgl\cos\theta$$



(b)

Równanie ruchu dla współrzędnej θ: $\quad \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta - \frac{a}{l}\cos\theta$

Znajdujemy punkt równowagi $\theta = \theta_e$ żądając aby $\ddot{\theta} = 0$:

$$0 = g\sin\theta_e + a\cos\theta_e \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\theta_e = -\frac{a}{g}$$

Rozważamy małe drgania wokół punktu równowagi, tzn. $\theta = \theta_e + \eta$ gdzie η jest małe:

$$\ddot{\theta} = \ddot{\eta} = -\frac{g}{l}\sin(\theta_e + \eta) - \frac{a}{l}\cos(\theta_e + \eta)$$

Równania Lagrange'a - przykład

Przykład: Znajdź okres małych drgań wahadła matematycznego umieszczonego w wagonie poruszającym się z przyspeiszeniem $\vec{a}$ w kierunku osi x.

Zachowując wiodące wyrazy w rozwinięciu $\sin\eta$ i $\cos\eta$ otrzymujemy równanie:

$$\ddot{\eta} = -\frac{1}{l}(g\cos\theta_e - a\sin\theta_e)\eta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\eta} = -\frac{\sqrt{a^2+g^2}}{l}\eta$$

Rozwiązaniem tego rówania jest ruch harmoniczny o okresie $T = 2\pi\frac{\sqrt{l}}{\sqrt[4]{a^2+g^2}}$

Funkcja energii h

Rozważamy układ opisany za pomocą lagranżjanu $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ Pomnóżmy j-te równanie Lagrange'a obustronnie przez $\dot{q}_j$ i wysumujmy po indeksie j:

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - L \right] + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

gdzie $h = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - L$ nazywamy funkcją energii układu S, która jest uogólnieniem pojęcia energii. Interpretacja funkcji energii h:

- $L = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ oraz $\partial L / \partial t \neq 0$; h nie jest zachowane oraz $h \neq T + V$
- $L = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ wtedy $\partial L / \partial t = 0$; h jest stałe,
- S jest standardowym układem zachowawczym: h jest zachowane i równe energii całkowitej układu $T + V$.