Lista04

July 5, 2020

1 lista 04 MCMC

Thiago da Mota Souza - thiagosz@cos.ufrj.br

[16]:
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

1.1 Questão 1

1.1.1 Questão 1.1

Pelo enunciado, o caixa tem dois possíveis estados: com cliente, 1, e sem cliente, 0. Portanto podemos modelar o problema usando a cadeia de Markov On-Off com probabilidade p de trânsição de Off para On e q de On para Off.

$$p(t) = p(t-1)T = p(t-1)\begin{bmatrix}(1-p) & p \\ q & (1-q)\end{bmatrix}$$

1.1.2 Questão 1.2

O Estado estacionário da cadeia é dado por pelo auto-valor 1:

$$\pi(T-I) = \begin{bmatrix}\pi_0 & \pi_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(1-p)-1 & p \\ q & (1-q)-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-p\pi_0 + q\pi_1 & p\pi_0 - q\pi_1\end{bmatrix}$$

logo temos as que:

$$\begin{aligned}-p\pi_0 + q\pi_1 &= 0 \\ \pi_0 + \pi_1 &= 1\end{aligned} \implies \pi = \begin{bmatrix}\frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q}\end{bmatrix}$$

A restrição importa a questão $p < q$ restringe os valores dos possíveis estados estacionários

1.1.3 Questão 1.3

O tempo em que o caixa fica ocioso é dado pelo tempo em que passa no estado 0. Sabemos que, uma vez que o sistema tenha atingido o estado estacionário, o tempo médio, medido em transições, que a rede leva para que seu estado saia de um estado s_0 e retorne a ele é dado por:

$$\tau_{s_0} = \frac{1}{\pi_{s_0}}$$

logo, no caso da rede on-off:

$$\tau_0 = \frac{p+q}{q}, \tau_1 = \frac{p+q}{p}$$

Logo o tempo médio que a cadeia passa no estado 0, sem cliente, é dado por τ_1 que o tempo médio que a cadeia demora a voltar ao estado 1, com cliente, em trânsições discretas. Isso significa que

$$\textit{frac. de tempo do caixa ocioso} = \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_0} = \frac{q}{p+q}$$

1.2 Questão 2

1.2.1 Questão 2.1

O andarilho criado transita entre os vértices i e j com probabilidade:

$$p_{i,j} = \frac{w_{i,j}}{\sum_{k \in V} w_{i,k}}$$

Onde atribui-se $w_{i,j} = 0$ se j não há uma aresta incidente em i originada em j. Logo:

$$\sum_{j \in V} p_{i,j} = \sum_{j \in V} \frac{w_{i,j}}{\sum_{k \in V} w_{i,k}} = 1, \forall i \in V$$

Já que foi restrito pelo enunciado que os pesos são positivos, a equação anterior significa que as probabilidades de transição de um vértice para outro respeitam as restrições impostas as probabilidades.

1.2.2 Questão 2.2

Induzido pelo andarilho não-enviesado, acredito que no estado estacionário a probabilidade do andarilho estar no vértice j é proporcional a soma dos pesos das arestas incidentes a j de forma que:

$$\pi_{chute}(k) = \frac{\sum_j w_{j,k}}{\sum_m \sum_n w_{m,n}}$$

Para simplificar as equações: $S_W = \sum_j \sum_k w_{j,k}$ e $S_j = \sum_k w_{j,k}$.

Segue uma verificação do chute:

$$\pi_{chute}\boldsymbol{P} = \pi_{chute} \begin{bmatrix} \boldsymbol{p_1} \\ \boldsymbol{p_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{p_n} \end{bmatrix} = \sum_i \pi_{chute}(i)\boldsymbol{p_i}$$

Onde p_i é a i-ésima linha de P. O que podemos desenvolver em:

$$\pi_{chute}P(k) = \sum_i \pi_{chute}(i) p_{i,k} = \sum_i \frac{\sum_j w_{j,i}}{\sum_m \sum_n w_{m,n}} p_{i,k} = \frac{1}{\sum_m \sum_n w_{m,n}} \sum_i \sum_j w_{j,i} p_{i,k} = \frac{1}{\sum_m \sum_n w_{m,n}} \sum_i p_{i,k} \sum_j w_{j,i}$$

usando a definção de $p_{i,k}$ na equação anterior e sendo a rede não-direcionada, $w_{i,j} = w_{j,i} \implies \sum_i w_{i,j} = \sum_i w_{j,i}$:

$$\pi_{chute}P(k) = \frac{1}{\sum_m \sum_n w_{m,n}} \sum_i \frac{w_{i,k}}{\sum_l w_{i,l}} \sum_j w_{j,i} = \frac{1}{\sum_m \sum_n w_{m,n}} \sum_i w_{i,k} \pi_{chute}(k)$$

Logo o chute está correto e podemos afirmar que:

$$\pi(k) = \frac{\sum_j w_{j,k}}{\sum_m \sum_n w_{m,n}}$$

1.3 Questão 2.3

Usando a simetria da rede $w_{i,j} = w_{j,i} \implies \sum_i w_{i,j} = \sum_i w_{j,i}$

$$\pi_i p_{i,j} = \frac{\sum_j w_{j,i}}{\sum_m \sum_n w_{m,n}} p_{i,j} = \frac{\sum_j w_{j,i}}{\sum_m \sum_n w_{m,n}} \frac{w_{i,j}}{\sum_{k \in V} w_{i,k}} = \frac{\sum_i w_{i,j}}{\sum_m \sum_n w_{m,n}} \frac{w_{j,i}}{\sum_{k \in V} w_{i,k}} = \pi_j p_{j,i}$$

[ ]: