# Analiza numeryczna L 2016/2017

## Wykład 9

### Aproksymacja średniokwadratowa na zbiorze dyskretnym

**Idea:** nie interpolujemy, ale wybieramy funkcję, która będzie *blisko* pomiarowej *chmury* punktów. Takich funkcji jest dużo. Będziemy wybierać tą, która w pewnym sensie będzie najbliższa *chmurze* punktów.

**Definicja: (dyskretna norma średniokwadratowa)**

Dla danych parami różnych punktów $x_0, x_1, ..., x_n$ **dyskretną normą średniokwadratową** $||\cdot||_2$ określamy wzorem:

$$||f||_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{n}(f(x_k)^2}$$

**Własności:**
1°

$$||f||_2 > 0, ||f||_2 = 0 \Leftrightarrow f(x_k) = 0, k = 0, 1, ..., n$$

2°

$$||\alpha f||_2 = |\alpha| ||f||_2$$

3° **(nierówność trójkąta)**

$$||f + g||_2 \leq ||f||_2 + ||g||_2$$

**Zadanie (aproksymacja średniokwadratowa)**

Dla danej funkcji $f \in F$, znajdziemy taką funkcję $g^* \in X$, że:

$$||f - g^*||_2 = min_{g \in X}||f - g||$$

# Model 1:

$$X = \{a : a \in R\}$$

Jak w tej sytuacji znaleźć $w^*$?

$w^* \in X \Rightarrow w^*(x) = a^* : ||f - w^*||_2 = min_{w \in X}||f - w||_2 = min_{w \in X}||w - a||_2$

Zauważmy, że:

$$||f - a||_2^2 = \sum_{k=0}^{N}(f(x_k - a)^2 = E(a)$$

gdzie **E** to funkcja błędu. Chcemy znaleźć minimum funkcji błędu:

$E'(a) = 0$ (warunek konieczny ekstremum)

Inna notacja:

$$\frac{\partial E(a)}{\partial a}$$

co oznacza pochodną cząstkową względem zmiennej a funkcji E.

$$E'(a) = -2\sum_{k=0}^{N}(f(x_k - a)^2$$

$$E'(a) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{N}(f(x_k - a) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{N}(f(x_k) - a(N+1) = 0$$

$$a = \frac{\sum_{k=0}^{N}(f(x_k)}{N+1}$$

w tym punkcie $a^*$ przyjmuje minimum.

**Wniosek:** W sensie dyskretnej aproksymacji średniokwadratowej dla modelu $X = \{a : a \in R\} \equiv \sqcap_0$ funkcją najlepiej dopasowaną do danych $x_0, ..., x_n$ oraz $y_0, ..., y_n$ jest $w^* = a^*$, gdzie

$$a^* = \frac{\sum_{k=0}^{N}(f(x_k)}{N+1}$$

## Model 2:

$$X = \{ax^2 : a \in R\}$$

Znajdziemy takie $w^* = a^* \in X$, że:

$$||f - w^*||_2 = min_{w \in X}||f - w||_2 = min_{w \in X}||f(x) - ax^2||_2$$

$$||f(x) - ax^2||_2^2 = \sum_{k=0}^{N}(y_k - ax_k^2)^2 = E(a)$$

$$\frac{\partial E(a)}{\partial a} = -2\sum_{k=0}^{N}(y_k - ax_k)x_k^2 = 0$$

$$\sum_{k=0}^{N}(y_k - ax_k)x_k^2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{\sum_{k=0}^{N} y_k x_k^2}{\sum_{k=0}^{N} x_k^4}$$

**Wniosek:** elementem optymalnym w sensie aproksymacji średniokwadratowej dla danego modelu i danych pomiarowych $x_0, ..., x_n$ oraz $y_0, ..., y_n$ jest $w^* = a^*x^2$, gdzie:

$$a^* = \frac{\sum_{k=0}^{N} y_k x_k^2}{\sum_{k=0}^{N} x_k^4}$$

## Model 3:

$$X = \{ae^2 : a \in R\}$$

Znajdziemy takie $w^* \in X$, że:

$$||f - w^*||_2 = min_{w \in X}||f - w||_2 = min_{w \in X}\sum_{k=0}^{N}(y_k - ae^{x_k})^2 = E(a)$$

Szukamy minimum funkcji błędu:

$$\frac{\partial E(a)}{\partial a} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{\sum_{k=0}^{N} y_k e^{x_k}}{\sum_{k=0}^{N} e^{2x_k}}$$

## Model 4:

$$X = \{ax + b : a, b \in R\} = \sqcap_1$$

Znajdziemy takie $w^* = a^*x + b^*$, że:

$$||f - w^*||_2^2 = min_{a,b,\in R} \sum_{k=0}^{N} (y_k - ax_k - b)^2 = E(a, b)$$

Funkcja błędu zależy od dwóch parametrów. Warunek konieczny dla istnienia ekstremum:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial E(a,b)}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial E(a,b)}{\partial b} = 0 \end{array} \right\}$$

czyli:

$$\left\{ \begin{array}{l} -2\sum_{k=0}^{N}(y_k - a_{x_k} - b)x_k = 0 \\ -2\sum_{k=0}^{N}(y_k - a_{x_k} - b) = 0 \end{array} \right\}$$

Przekształcamy układ do postaci:

$$\left\{ \begin{array}{l} a\sum_{k=0}^{N} x_k^2 + b\sum_{k=0}^{N} x_k = \sum_{k=0}^{N} y_k x_k \\ a\sum_{k=0}^{N} x_k^2 + b(N+1) = \sum_{k=0}^{N} y_k \end{array} \right\}$$

Rozwiązaniam tego układu jest:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{(N+1)s_4 - s_1 s_3}{(N+1)s_2 - s_1^2} \\ b = \frac{s_2 s_3 - s_1 s_4}{(N+1)s_2 - s_1^2} \end{array} \right\}$$

gdzie:
$s_i = \sum_{k=0}^{N} x_k^i, i = 1, 2$
$s_3 = \sum_{k=0}^{N} y_k$
$s_4 = \sum_{k=0}^{N} x_k y_k$

## Wypadek ogólny

Załóżmy, że $X = \{a_0g_0(x) + a_1g_1(x) + ... + a_ng_n(x) : a_k \in R\}$, gdzie g to ustalona funkcja.
Chodzi o znalezienie elementu optymalnego:

$$w^*(x) = \sum_{k=0}^{N} a_?^k g_k(x)$$

spełniającego warunek:

$$||f - w^*||_2 = min_{w \in X}||f - w||_2$$

Funkcja błędu:

$$E(a_0, ..., a_n) = \sum_{k=0}^{N} (y_k - a_0g_0(x_k) - ... - a_ng_n(x_k))^2$$

Warunek na minimalizację błędu E:

$$\frac{\partial E(a_0, ..., a_n}{\partial a_k} = 0, dlak = 0, 1, ..., m$$

jest to układ równań liniowych z niewiadomymi $a_0, ..., a_n$.