

Analiza numeryczna L 2016/2017

Imię i nazwisko autora

`github.com/anl`

- 1 Tytuł wykładu
- 2 Tytuł wykładu
- 3 Tytuł wykładu
- 4 Tytuł wykładu
- 5 Tytuł wykładu
- 6 Tytuł wykładu
- 7 Tytuł wykładu
- 8 Tytuł wykładu
- 9 Tytuł wykładu
- 10 Wielomianowa aproksymacja średnio kwadratowa na zbiorze dyskretny,

Zadanie

Ustalmy liczbę naturalną m . Niech dana będzie funkcja f o znanych wartościach dla argumentów parami różnych x_0, x_1, \dots, x_N tzn. $y_k = f(x_k)$, ($k = 0, \dots, N$) są dane.

Skonstruować taki wielomian $w_m^* \in \Pi_m$ [1], że:

$$\|f - w_m^*\|_2 = \min_{w_m \in \Pi_m} \|f - w_m\|_2 = \min_{w_m \in \Pi_m} \sqrt{\sum_{k=0}^N (y_k - w_m(x_k))^2}$$

Pokażemy jak szybko i efektywnie numerycznie znaleźć w_n^* bez konieczności rozwiązywania układów równań normalnych W tym celu musimy wprowadzić szereg różnych narzędzi.



Definicja - Dyskretny iloczyn skalarny

Dyskretnym iloczynem skalarnym funkcji f i g określony na zbiorze x_0, x_1, \dots, x_N nazywamy wyrażenie postaci

$$(f, g)_N = \sum_{k=0}^N f(x_k)g(x_k)$$

Własności - Dyskretny iloczyn skalarny

$$(f, f)_N \geq 0 \quad (f, f)_N = 0 \Leftrightarrow f(x_k) = 0 \quad k = 0, \dots, N$$

$$(f, g)_N = (g, f)_N$$

$$(\alpha f, g)_N = \alpha(f, g)_N$$

$$(f + h, g)_N = (f, g)_N + (h, g)_N$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}$$

Definicja - Ortogonalność

Mówimy, że funkcje f, g są ortogonalne względem iloczynu skalarnego wtw. gdy $(f, g) = 0$ **Przykład**

$$(f, g)_N = \sum_{k=0}^3 f(x_k)g(x_k) \quad x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3}, \quad x_3 = 1$$

$$f(x) = \cos 2x$$

$$g(x) = x^2 - \frac{13}{9}x$$

Sprawdźmy, że f, g są ortogonalne przy takim wyborze iloczynu skalarnego.

$$f(x_0)g(x_0) = 0$$

$$f(x_1)g(x_1) = \frac{5}{27}$$

$$f(x_2)g(x_2) = -\frac{7}{27}$$

$$f(x_3)g(x_3) = -\frac{4}{9}$$

$$(f, g) = 0 + \frac{5}{27} - \frac{7}{27} - \frac{4}{9} = 0$$

Definicja - ortogonalny układ funkcji

Mówimy, że układ funkcji (f_0, f_1, \dots, f_m) $m \in N$ nazywamy układem ortogonalnym względem iloczynu skalarnego jeśli

$$\left\{ \begin{array}{l} (f_i, f_j)_N = 0 \quad i \neq j \\ (f_i, f_i)_N = 0 \end{array} \right\}$$

Literatura

[1] aby na pewno ten znaczek? xD