Analiza numeryczna L 2016/2017

Wykład 5

Postać wielomianu

Π_n – zbiór wielomianów stopnia $\leq$ n.

Postać naturalna(potęgowa):

$$w \in \Pi_n : w(x) = sum_{k=0}^{n} a_k x^k, (dane : a_0, a_1, ..., a_n)$$

Schemat Hornera:

$w_1 = a_1$
$w_k = w_{k-1}x + a_k, (k = n-1, n-1, ...0)$
wtedy:
$W(x) = w_0$

Twierdzenie: Algorytm Hornera jest algorytmem numerycznie poprawnym.

Twierdzenie: zachodzi następujące oznaczenie:

$$|\frac{fl(w_0) - w(x)}{w(x)}| \leq E\frac{\sum_{k=0}^{n} |a_x x^k|}{\sum_{k=0}^{n} |a_x x^k|}$$

Uogólniony schemat Hornera

$w_1 = b_1$
$w_k = w_{k+1}(x - x_k) + b_k, (k = n-1, n-1, ..., 0)$
wtedy $w(x) = w_0$

Twierdzenie: Uogólniony schemat Hornera jest algorytmem numerycznie poprawnym.

Postać iloczynowa wielomianu

Definicja: Wielomiany Czebyszewa

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, T_1(x) = x \\ T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), (k = 1, 2, 3, ...) \end{cases}$$

Własności wielomianu Czebyszewa:
$1^o T_n \in \Pi_n \setminus \Pi_{n-1}$, czyli T_n jest wielomian dokładnie n-tego stopnia.
$2^o T_n(x) = 2^{n-1}x^n + ...(n \geq 1)$
3^o Dla $xin[-1;1]$ mamy:

$$T_n(x) = cos(narcos(x))$$

4^o