Analiza numeryczna L 2016/2017

Imię i nazwisko autora

github.com/anl

1 Tytuł wykladu

2 Tytuł wykladu

3 Tytuł wykladu

4 Tytuł wykladu

5 Tytuł wykladu

6 Tytuł wykladu

7 Tytuł wykladu

8 Tytuł wykladu

9 Tytuł wykladu

10 Wielomianowa aproksymacja średnio kwadratowa na zbiorze dyskretny,

Zadanie

Ustalmy liczbę naturalną m . Niech dana będzie funkcja f o znanych wartościach dla argumentów parami różnych $x_0, x_1, ..., x_N$ tzn. $y_k = f(x_k), (k = 0, ..., N)$ są dane.
Skonstruować taki wielomian $w_m^* \in \Pi_m$ [1], że:

$$||f - w_m^*||_2 = min_{w_m \in \Pi_m} ||f - w_m||_2 = min_{w_m \in \Pi_m} \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} (y_k - w_n(x_k))^2}$$

Pokażemy jak szybko i efektywnie numerycznie znaleźć W_n^* bez konieczności rozwiązywania układów równań normalnych W tym celu musimy wprowadzić szereg różnych narzędzi.

Definicja - Dyskretny iloczyn skalarny

Dyskretnym iloczynem skalarnym funkcji f i g określony na zbiorze $x_0, x_1, ..., x_N$ nazywamy wyrażenie postaci

$$(f, g)_N = \sum_{k=0}^{N} f(x_k)g(x_k)$$

Własności - Dyskretny iloczyn skalarny

$$(f, f)_N \geq 0 \quad (f, f)_N = 0 \leftrightarrow f(x_k) = 0 \quad k = 0, ..., N$$
$$(f, g)_N = (g, f)_N$$
$$(\alpha f, g)_N = \alpha(f, g)_N$$
$$(f + h, g)_N = (f, g)_N + (h, g)_N$$
$$||f||_2 = \sqrt{(f, f)}$$

Definicja - Ortogonalność

Mówimy, że funkcje f, g są ortogonalne względem iloczynu skalarnego wtw. gdy $(f, g) = 0$

Przykład

$$(f, g)_N = \sum_{k=0}^{3} f(x_k)g(x_k) \qquad x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3}, \quad x_3 = 1$$
$$f(x) = \cos 2x$$
$$g(x) = x^2 - \frac{13}{9}x$$

Sprawdźmy, że f, g są ortogonalne przy takim wyborze iloczynu skalarnego.

$$f(x_0)g(x_0) = 0$$
$$f(x_1)g(x_1) = \frac{5}{27}$$
$$f(x_2)g(x_2) = -\frac{7}{27}$$
$$f(x_3)g(x_3) = -\frac{4}{9}$$

$$(f, g) = 0 + \frac{5}{27} - \frac{7}{27} - \frac{4}{9} = 0$$

Definicja - ortogonalny układ funkcji

Mówimy, że układ funkcji $(f_0, f_1, ..., f_m) \quad m \in N$ nazywamy układem ortogonalnym względem iloczynu skalarnego jeśli

$$\left\{ \begin{array}{ll} (f_i, f_j)_n = 0 & i \neq j \\ (f_i, f_i)_N = 0 & \end{array} \right\}$$

Literatura

[1] aby na pewno ten znaczek? xD