Analiza numeryczna L 2016/2017

Wykład 2

Podstawowe pojęcia teorii błędów

Błąd względny i bezwzględny:

$$x = 1.23456789$$
$$x' = 1.2345679$$

Błąd bezwzględny: $|x - x'| = 10^{-8}|$

Błąd względny: $|\frac{x-x'}{x} \approx 0.8 * 10^{-8}$

Komputerowa reprezentacja liczb:

Liczby całkowite:

$$l \in Z : l = \pm \sum_{i=0}^{n} e_i 2^i, (e_i \in (0;1], e_n = 1)$$

Reprezentacja stałopozycyjna:

$$| \pm |e_0|e_1|e_2|...|e_n|...|e_d|$$

d+1 bitóe na liczbę całkowitą ze znakiem.
Nie ma problemu, jeśli n < d.
Operacje +,-,*, przy założeniu, że wynik jest reprezentowalny są wykonywane dokładnie.
Liczby rzeczywiste:

$$x \in R\{1,0\} : x = sm2^c, (s \in +, -, me \in [\frac{1}{2};1), c \in Z)$$

Reprezentacja zmiennopozycyjna

t – liczba bitów na mantysę
d-t – liczba bitów na cechę
d+1 – liczba bitów na liczbę ze znakiem

$$|\pm|e_{-1}|e_{-2}|..mantysa..|e_{-t}|..cecha..|$$

Ze względów technicznych mantysę musimy "przybliżać"do t cyfr.

$$m_t = \sum_{i=1}^{t} e*_{-i}\, 2^{-i}$$

rd(x) – reprezentacja zmiennopozycyjna liczby x

Twierdzenie:

$$(x \neq 0), \frac{rd(x) - x}{x} \leq 2^{-t}$$

Fakt: błąd zaokrąglenia mantysy nie przekracza $\frac{1}{2}2^{-t}$

$$|m - m_t| \leq \frac{1}{2}$$

Zbiór X_{el}

1. $m_t \in [\frac{1}{2}; 1)$
2. $l_max = -l_min = 2^{d-t+1} - 1$

Czyli możmy reprezentować tylko liczby $x \neq 0$, spełniajace warunek: $\frac{1}{2D} \leq |x| < D$, gdzie $D = 2^{lm-x}$ **Definicja:** Zbiór liczb zmiennopozycyjnych X_{fl} określamy w następujący sposób:

$$x_{fl} = rd(x)$$

Zmiennopozycyjna realizacja działań arytmetycznych:

$$x, y \in X_{fl} : fl(x \circ y) = (x \circ y)(1 + \epsilon_0), \circ \in +, -, *, /, |\epsilon_0| \leq 2^{-t}$$

$$|\frac{(x \circ y) - fl(x \circ y)}{x \circ y}| = |\epsilon_0|$$

Twierdzenie o kumulacji błędów:
Narzędziem pozwalającym w "prostyśposób analizować realizację zmiennopozycyjną programów komputerowych jest tzw. twierdzenie o kumulacji błędów.

Jeżeli $|\sigma_i| \leq 2^{-t}, (1 \leq i \leq n)$, to zachodzi równość:

$$\Pi_{i=1}^{n}(1 + \sigma_i) = 1 + \eta_n$$

gdzie $\eta_n = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i + \theta(2^{-t})$
Przy pewnych realistycznych założeniach (związanych z architekturą procesora) zachodzi:

$$|\eta_n| < n2^{-t}$$

Zjawisko utraty cyfr znaczących

Zmiennopozycyjne realizacje działań mnożenia i dzielenia uznaje sie za "bezpieczne". Problemy pojawiają się przy odejmowaniu (dodawaniu) liczb, szczególnie tych bliskich sobie.