Analiza numeryczna L 2016/2017

Wykład 12

Kwadratury złożone – całkowanie numeryczne cz.2

Kwadratury złożone

Idea:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t_k}^{tk+1} f(x)dx$$

Całkę $\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx$ przybliżamy prostą kwadraturą (np. wzorem trapezów lub Simpsona).

Złożony wzór trapezów:
Przyjmijmy, że $t_k = a + kh, (h = \frac{b-a}{m}, k = 0, 1, 2, ..., m)$.

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(t_k) + f(t_{k+1})) - \frac{h^3}{12} f''(\eta_k)$$

$\eta_k \in (t_k; t_{k+1})$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = h \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx = T_m(f) + R_m^T(f)$$

gdzie $T_m(f) = h \sum_{k=0}^{m} f(t_k)$ – złożony wzór trapezów.

Błąd złożonego wzoru trapezów:

$$R_m^T(f) = m\frac{h^3}{12} f''(\alpha_m) = (a-b)\frac{h^2}{12} f''(\alpha_m)$$

$\alpha_m \in (a; b)$.

Złożony wzór Simpsona:
Niech $m = 2l, t_k = a + kh$

$$\int_{t_{2k}}^{t_{2k+2}} f(x)dx = \frac{h}{3}(f(t_{2k} + 4f(t_{2k+1}) + f(t_{2k+2})) - \frac{h^5}{90} f^{(n)}(\beta_k)$$

$\beta_k \in (t_{2k}; t_{2k+2}$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{l-1} \int_{t_{2k}}^{t_{2k+2}} f(x)dx = S_m(f) + R_m^S(t)$$

Złożony wzór Simpsona:

$$S_m(f) = \frac{h}{3}(2\sum_{k=0}^{l} f''(t_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{l} f(t_{2k-1}))$$

$\sum''$ oznacza pierwszy i ostatni składnik pomnożony przez $\frac{1}{2}$

Błąd złożonego wzoru Simpsona:

$$R_m^S(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(m)}(\gamma_m) = (a-b)\frac{h^4}{180} f^{(m)}(\gamma_m)$$

$\gamma_m \in (a; b)$ **Twierdzenie:** Jeśli $f \in C[a, b]$, to:

$$lim_{n \to \inf} T_n(f) = lim_{n \to \inf} S_n(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Wniosek: złożony wzór Simpsona daje około dwa razy więcej cyfr dokładnych, niż złożony wzór trapezów.
Obserwacja:

$$S_m(f) = \frac{4T_m(f) - T_l(f)}{3}, (m = 2l)$$

Metoda Romberga

Niech będzie $n = 2^k, h_k = \frac{b-a}{2^k}, x_i^{(k)} = a + ih_k$, czyli podział przedziału na 2^k części.

$$T_{0k} = T_{2^k}(f) = h_k \sum^2 k''_{i=0} f(x_i^{(k)}$$

Wzór metody Romberga:

$$T_{mk} = \frac{4^m T_{m-1,k+1} - T_{m-1,k}}{4^m - 1}$$

W metodzie Romberga konstruujemy trójkątną tablicę przybliżeń całki I(f):
T_{00}
$T_{01} T_{10}$
$T_{02} T_{11} T_{20}$
.
.
.
$T_{0m} T_{1,m-1} \ . \ . \ . \ T_{m0}$

Własności tablicy Romberga:

$1^o T_m k = I(f) - c_m h^{2m+2}, (a_k \neq 0, k \geq 0, m \geq 1)$

$2^o T_{mk} = sum_{j=0}^{2^{m+k}} A_j^{(m)} f(x_j^{(m+k)}), A_j > 0$

3^o Kwadratury $T_{m0}, T_{m1}, ...$ są rzędu **2m+2**

$4^o \lim_{n \to \inf} T_{mk} = I(f)$ (k- ustalone)

$\lim_{k \to \inf} T_{mk} = I(f)$ (n- ustalone)

Idea konstrukcji kwadratury rzędu 2n+2:
Mamy 2n+2 niewiadomych – węzły i współczynniki. Trzeba je dobrać tak, aby:

$$\begin{cases} Q_n(1) = \int_a^b 1dx \\ Q_n(x^k) = \int_a^b x^k dx \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1} \end{cases}$$

Zatem musi być:

$$\begin{cases} A_0^{(n)} + ... + A_n(n) = b - a \\ A_0^{(n)} x_0^{(n)} + ... + A_n(n) x_n^{(n)} = \frac{b^2-a^2}{2} \\ . \\ . \\ . \\ A_0^{(n)} (x_0^{(n)})^{2n+1} + ... + A_n(n)(x_n^{(n)})^{2n+1} = \frac{b^{2n+2}-a^{2n+2}}{2n+2} \end{cases}$$

Jest to układ 2n+2 równań nieliniowych.
Można pokazać, że układ ten ma zawsze rozwiązanie. Oznacza to, że instnieje kwadratura rzędy 2n+2. Nazywamy ją kwadraturą Gaussa.

Kwadratury Gaussa-Legendre'a

Wiemy, że rząd kwadratury liniowej $Q_n \leq 2n + 2$.

Pytania:
1^o Czy isynieje kwadratura liniowa Q_n mająca rząd dokładnie 2n+2?
2^o Jeśli tak, to jak znaleźć węzły i współczynniki?

Chodzi o znalezienie kwadratury liniowej $Q_n(f)$ przybliżającej wartości całki:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

i spełniającej warunek:

$$\forall_{w \in \Pi_{2n+1}} Q_n(w) = \int_a^b w(x)dx$$

Przyjmijmy **a = -1, b = 1**. Rozważmy tzw. kwadratury Gaussa-Legendre'a postaci:

$$Q_n^{GL}(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$$

mające rząd 2n+2.

Twierdzenie: Węzłami kwadratury Gaussa-Legendre'a $Q_n^{GL}(f)$ są miejsca zerowe wieloianu Legendre'a P_{n+1}, gdzie:

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_k(x) \frac{2k-1}{k} x P_{k-1}(x) - \frac{k-1}{k} P_{k-2}(x) \end{cases}$$

Natomiast współczynniki tej kwadratury dane są wzorami:

$$A_k^{(n)} = \int_{-1}^{1} (\Pi_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i^{(n)}}{x_n^{(n)} - x_i^{(n)}}) dx$$

Uwagi:
1^o Wszystkie miejsca zerowe są rzeczywiste i zawarte w (-1;1).
2^o Można pokazać, że: $x_k^{(n)} = -x_{n-k}^{(n)}$ oraz $A_k^{(n)} = A_{n-k}^{(n)}$