

Analiza numeryczna L 2016/2017

Imię i nazwisko autora

<https://github.com/mtszpater/Analiza-numeryczna-L>

1 Wielomianowa aproksymacja średnio kwadratowa na zbiorze dyskretnym

Zadanie

Ustalmy liczbę naturalną m . Niech dana będzie funkcja f o znanych wartościach dla argumentów parami różnych x_0, x_1, \dots, x_N tzn. $y_k = f(x_k), (k = 0, \dots, N)$ są dane. Skonstruować taki wielomian $w_m^* \in \Pi_m$, że:

$$\|f - w_m^*\|_2 = \min_{w_m \in \Pi_m} \|f - w_m\|_2 = \min_{w_m \in \Pi_m} \sqrt{\sum_{k=0}^N (y_k - w_m(x_k))^2}$$

Pokażemy jak szybko i efektywnie numerycznie znaleźć w_m^* bez konieczności rozwiązywania układów równań normalnych. W tym celu musimy wprowadzić szereg różnych narzędzi.

Definicja - Dyskretny iloczyn skalarny

Dyskretnym iloczynem skalarnym funkcji f i g określony na zbiorze x_0, x_1, \dots, x_N nazywamy wyrażenie postaci

$$(f, g)_N = \sum_{k=0}^N f(x_k)g(x_k)$$

Własności - Dyskretny iloczyn skalarny

$$(f, f)_N \geq 0 \quad (f, f)_N = 0 \Leftrightarrow f(x_k) = 0 \quad k = 0, \dots, N$$

$$(f, g)_N = (g, f)_N$$

$$(\alpha f, g)_N = \alpha (f, g)_N$$

$$(f + h, g)_N = (f, g)_N + (h, g)_N$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)_N}$$

Definicja - Ortogonalność

Mówimy, że funkcje f, g są ortogonalne względem iloczynu skalarnego wtw. gdy $(f, g) = 0$

Przykład

$$(f, g)_N = \sum_{k=0}^3 f(x_k)g(x_k) \quad x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3}, \quad x_3 = 1$$

$$f(x) = \cos 2x$$

$$g(x) = x^2 - \frac{13}{9}x$$

Sprawdźmy, że f, g są ortogonalne przy takim wyborze iloczynu skalarnego.

$$f(x_0)g(x_0) = 0$$

$$f(x_1)g(x_1) = \frac{5}{27}$$

$$f(x_2)g(x_2) = -\frac{7}{27}$$

$$f(x_3)g(x_3) = -\frac{4}{9}$$

$$(f, g) = 0 + \frac{5}{27} - \frac{7}{27} - \frac{4}{9} = 0$$

Definicja - ortogonalny układ funkcji

Mówimy, że układ funkcji (f_0, f_1, \dots, f_m) $m \in N$ nazywamy układem ortogonalnym względem iloczynu skalarnego jeśli

$$\left\{ \begin{array}{l} (f_i, f_j)_N = 0 \quad i \neq j \\ (f_i, f_i)_N = 0 \end{array} \right\}$$

Dowolny układ funkcji liniowo niezależnych y_0, y_1, \dots, y_m można zortogonalizować. Służy do tego proces ortogonalizacji Grama-Schmidta.

Algorytm ortogonalizacji

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0(x) = g_0(x) \\ f_k(x) = g_k(x) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(g_k, f_j)_N}{(f_j, f_j)_N} f_j(x) \end{array} \right\}$$

Koszt : trzeba wyznaczyć $O(m^2)$ iloczynów skalarnych

W wyniku procesu ortogonalizacji otrzymujemy układ funkcji f_0, f_1, \dots, f_N spełniający warunki

$$LIN(f_0, \dots, f_N) = LIN(g_0, \dots, g_N)$$

$$(f_i, f_j)_N = 0 \quad i \neq j$$

Uwaga proces ortogonalizacji Grama-Schmidta może być użyty np. do zortonormalizowania układu $(1, x, x^2, \dots, x^m)$ Otrzymujemy wtedy bazę ortogonalną przestrzeni Π_m

Przykład

$$(f, g)_N = \sum_{k=0}^3 f(x_k)g(x_k) \quad x_0 = 0 \quad x_1 = \frac{1}{3} \quad x_2 = \frac{2}{3} \quad x_3 = 1$$

Znajdziemy bazę ortogonalną przestrzeni Π_3

$$g_0(x) = 1 \quad g_1(x) = x \quad g_2(x) = x^2 \quad g_3(x) = x^3$$

$$f_0(x) = g_0(x) = 1$$

$$f_1(x) = g_1(x) - \frac{(g_1, f_0)_N}{(f_0, f_0)_N} f_0(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$f_2(x) = g_2(x) - \frac{(g_2, f_0)_N}{(f_0, f_0)_N} f_0(x) - \frac{(g_2, f_1)_N}{(f_1, f_1)_N} f_1(x) = x^2 - x + \frac{1}{9}$$

$$f_3(x) = g_3(x) - \frac{(g_3, f_0)_N}{(f_0, f_0)_N} f_0(x) - \frac{(g_3, f_1)_N}{(f_1, f_1)_N} f_1(x) - \frac{(g_3, f_2)_N}{(f_2, f_2)_N} f_2(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{47}{90}$$

Można teraz sprawdzić, że

$$LIN(f_0, f_1, f_2, f_3) = \Pi_3$$

$$(f_i, f_j) = 0 \quad i \neq j$$

$$(f_0, f_0) = 4$$

$$(f_1, f_1) = \frac{5}{9}$$

$$(f_2, f_2) = \frac{4}{81}$$

$$(f_3, f_3) = \frac{1}{405}$$

Definicja

Ciąg wielomianów P_0, \dots, P_m nazywamy ciągiem wielomianów ortogonalnych, jeśli $\text{stopień}(P_k) = k$

$$P_k \in \frac{\Pi_k}{\Pi_{k-1}}$$

$$\text{oraz} \left\{ \begin{array}{l} (P_i, P_j)_N = 0 \quad i \neq j \\ (P_i, P_i)_N > 0 \end{array} \right\}$$

Przy ustalonym iloczynie skalarnym ciąg wielomianów ortogonalnych jest określony jednoznacznie (z dokładnością do mnożnika).

Twierdzenie

Niech ciąg wielomianów P_0, \dots, P_n będzie określony w następujący sposób rekurencyjnie.

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x - c_1 \\ P_k(x) = (x - c_k)P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x) \end{array} \right\}$$

$$c_k = \frac{(xP_{k-1}, P_{k-1})_N}{(P_{k-1}, P_{k-1})_N} \quad d_k = \frac{(P_{k-1}, P_{k-1})_N}{(P_{k-2}, P_{k-2})_N}$$

Ciąg P_0, \dots, P_n jest ciągiem wielomianów ortogonalnych względem iloczynu skalarnego tzn.

$$\left\{ \begin{array}{l} P_k \in \frac{\Pi_k}{\Pi_{k-1}} \\ (P_k, P_l)_N = 0 \quad k \neq l \\ (P_k, P_k)_N > 0 \end{array} \right\}$$

Oczywiście $LIM(P_0, \dots, P_n) = \Pi_n$

Wniosek

Stosując to twierdzenie można skonstruować ciąg wielomianów ortogonalnych obliczając jedynie $O(m)$ iloczynów skalarnych.

Przykład

Użyjemy podanego twierdzenia do skonstruowania bazy ortogonalnej przestrzeni Π_3 względem iloczynu skalarnego postaci

$$(f, g)_N = \sum_{k=0}^3 f(x_k)g(x_k) \quad x_0 = 0 \quad x_1 = \frac{1}{3} \quad x_2 = \frac{2}{3} \quad x_3 = 1$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x - c_1 = x - \frac{(xP_0, P_0)_N}{(P_0, P_0)_N} = x - \frac{1}{2}$$

$$P_2(x) = (x - c_2)P_1(x) - d_2P_0(x) = x - \frac{(xP_1, P_1)_N}{(P_1, P_1)_N}P_1(x) - \frac{(P_1, P_1)}{(P_0, P_0)}P_0(x) = x^2 - x + \frac{1}{9}$$

$$P_3(x) = (x - c_3)P_2(x) - d_3P_1(x) = x - \frac{(xP_2, P_2)_N}{(P_2, P_2)_N}P_2(x) - \frac{(P_2, P_2)}{(P_1, P_1)}P_1(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{47}{90}x - \frac{1}{90}$$

Kombinacja liniowa wielomianów spełniających związek rekurencyjny z twierdzenia.

Rozważmy problem obliczenia wartości $S(x) = \sum_{k=0}^N a_k Q_k(x)$ gdzie x jest ustalony oraz wielomiany Q_0, \dots, Q_N spełniają związek rekurencyjny postaci

$$Q_0(x) = \alpha_0 \quad a_1(x) = (\alpha_1 x - \beta_1)a_0(x)$$

$$a_k(x) = (\alpha_k x - \beta_k)a_{k-1}(x) - \gamma_k a_{k-2}(x)$$

$\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ są dane

Zaleca się, aby wartość $s(x)$ obliczać następującym algorytmem Clenshawa [1]

$$B_{n-1} = B_{n-2} = 0$$

$$B_k = \alpha_k + (\alpha_{k+1}x - \beta_{k+1})\beta_{k+1} - \gamma_{k+2}\beta_{k+2}$$

Wtedy $s(x) = \alpha_0\beta_0$

Twierdzenie

Wielomian optymalny $W_m^* \in \Pi_m$ minimalizujący wyrażenie $\|f - w_m\|_2$ wyraża się wzorami

$$W_m^*(x) = \sum_{k=0}^m a_k p_k(x)$$

gdzie P_0, \dots, P_m to wielomiany ortogonalne względem iloczynu skalarnego.

$$a_k = \frac{(f, P_k)_N}{(P_k, P_k)_N}$$

Uwagi

1. Wielomiany P_0, \dots, P_m znajdujemy stosując związek rekurencyjny z twierdzenia.
2. Wartość W_m^* dla danego x obliczamy algorytmem Clenshawa
3. Nie trzeba pamiętać jawnej postaci P_0, \dots, P_m . Wystarczy znać wartości $P_i(x_k)$
4. Zachodzi związek

$$W_m^*(x) = W_{m-1}^*(x) + \frac{(f, P_m)_N}{(P_m, P_m)_N} P_m(x)$$

5. Można sprawdzić

$$\|f - W_m^*\|_2 = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^m \frac{(f, P_k)_N^2}{(P_k, P_k)_N}}$$

[2]

Literatura

[1] ten algorytm lepiej się upewnić

[2] może coś być nie tak :c