

Analiza numeryczna L 2016/2017

Wykład 12

Kwadratury złożone – całkowanie numeryczne cz.2

Kwadratury złożone

Idea:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx$$

Całkę $\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx$ przybliżamy prostą kwadraturą (np. wzorem trapezów lub Simpsona).

Złożony wzór trapezów:

Przyjmijmy, że $t_k = a + kh$, ($h = \frac{b-a}{m}$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$).

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(t_k) + f(t_{k+1})) - \frac{h^3}{12}f''(\eta_k)$$

$$\eta_k \in (t_k; t_{k+1})$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = h \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx = T_m(f) + R_m^T(f)$$

gdzie $T_m(f) = h \sum_{k=0}^m f(t_k)$ – złożony wzór trapezów.

Σ'' oznacza pierwszy i ostatni składnik pomnożony przez $\frac{1}{2}$

Błąd złożonego wzoru trapezów:

$$R_m^T(f) = -m \frac{h^3}{12} f''(\alpha_m) = -(a-b) \frac{h^2}{12} f''(\alpha_m)$$

$$\alpha_m \in (a; b).$$

Złożony wzór Simpsona:

Niech $m = 2l, t_k = a + kh$

$$\int_{t_{2k}}^{t_{2k+2}} f(x)dx = \frac{h}{3}(f(t_{2k}) + 4f(t_{2k+1}) + f(t_{2k+2})) - \frac{h^5}{90}f^{(5)}(\beta_k)$$

$$\beta_k \in (t_{2k}, t_{2k+2})$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{l-1} \int_{t_{2k}}^{t_{2k+2}} f(x)dx = S_m(f) + R_m^S(f)$$

Złożony wzór Simpsona:

$$S_m(f) = \frac{h}{3} \left(2 \sum_{k=0}^l f(t_{2k}) + 4 \sum_{k=1}^l f(t_{2k-1}) \right)$$

\sum'' oznacza pierwszy i ostatni składnik pomnożony przez $\frac{1}{2}$

Błąd złożonego wzoru Simpsona:

$$R_m^S(f) = -\frac{h^5}{90}f^{(5)}(\gamma_m) = (a-b)\frac{h^4}{180}f^{(5)}(\gamma_m)$$

$\gamma_m \in (a, b)$ **Twierdzenie:** Jeśli $f \in C[a, b]$, to:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Wniosek: złożony wzór Simpsona daje około dwa razy więcej cyfr dokładnych, niż złożony wzór trapezów.

Obserwacja:

$$S_m(f) = \frac{4T_m(f) - T_l(f)}{3}, (m = 2l)$$

Metoda Romberga

Niech będzie $n = 2^k$, $h_k = \frac{b-a}{2^k}$, $x_i^{(k)} = a + ih_k$, czyli podział przedziału na 2^k części.

$$T_{0k} = T_{2^k}(f) = h_k \sum_{i=0}^{2^k-1} f(x_i^{(k)})$$

Wzór metody Romberga:

$$T_{mk} = \frac{4^m T_{m-1,k+1} - T_{m-1,k}}{4^m - 1}$$

W metodzie Romberga konstruujemy trójkątną tablicę przybliżeń całki $I(f)$:

T_{00}

$T_{01}T_{10}$

$T_{02}T_{11}T_{20}$

.

.

.

$T_{0m}T_{1,m-1} \dots T_{m0}$

Własności tablicy Romberga:

$$1^\circ T_{mk} = I(f) - c_m h^{2m+2}, (a_k \neq 0, k \geq 0, m \geq 1)$$

$$2^\circ T_{mk} = \sum_{j=0}^{2^{m+k}} A_j^{(m)} f(x_j^{(m+k)}), A_j > 0$$

3° Kwadratury T_{m0}, T_{m1}, \dots są rzędu $2m+2$

$$4^\circ \lim_{n \rightarrow \infty} T_{mk} = I(f) \text{ (k- ustalone)}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_{mk} = I(f) \text{ (n- ustalone)}$$

Idea konstrukcji kwadratury rzędu $2n+2$:

Mamy $2n+2$ niewiadomych – węzły i współczynniki. Trzeba je dobrać tak, aby:

$$\begin{cases} Q_n(1) = \int_a^b 1 dx \\ Q_n(x^k) = \int_a^b x^k dx \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1} \end{cases}$$

Zatem musi być:

$$\begin{cases} A_0^{(n)} + \dots + A_n(n) = b - a \\ A_0^{(n)} x_0^{(n)} + \dots + A_n(n) x_n^{(n)} = \frac{b^2 - a^2}{2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_0^{(n)} (x_0^{(n)})^{2n+1} + \dots + A_n(n) (x_n^{(n)})^{2n+1} = \frac{b^{2n+2} - a^{2n+2}}{2n+2} \end{cases}$$

Jest to układ $2n+2$ równań nieliniowych.

Można pokazać, że układ ten ma zawsze rozwiązanie. Oznacza to, że istnieje kwadratura rzędu $2n+2$. Nazywamy ją kwadraturą Gaussa.

Kwadratury Gaussa-Legendre'a

Wiemy, że rząd kwadratury liniowej $Q_n \leq 2n + 2$.

Pytania:

1^o Czy istnieje kwadratura liniowa Q_n mająca rząd dokładnie $2n+2$?

2^o Jeśli tak, to jak znaleźć węzły i współczynniki?

Chodzi o znalezienie kwadratury liniowej $Q_n(f)$ przybliżającej wartości całki:

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

i spełniającej warunek:

$$\forall_{w \in \Pi_{2n+1}} Q_n(w) = \int_a^b w(x) dx$$

Przyjmijmy $\mathbf{a} = -\mathbf{1}$, $\mathbf{b} = \mathbf{1}$. Rozważmy tzw. kwadratury Gaussa-Legendre'a postaci:

$$Q_n^{GL}(f) = \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$$

mające rząd $2n+2$.

Twierdzenie: Węzłami kwadratury Gaussa-Legendre'a $Q_n^{GL}(f)$ są miejsca zerowe wielocianu Legendre'a P_{n+1} , gdzie:

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_k(x) = \frac{2k-1}{k} x P_{k-1}(x) - \frac{k-1}{k} P_{k-2}(x) \end{cases}$$

Natomiast współczynniki tej kwadratury dane są wzorami:

$$A_k^{(n)} = \int_{-1}^1 \left(\prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i^{(n)}}{x_n^{(n)} - x_i^{(n)}} \right) dx$$

Uwagi:

1^o Wszystkie miejsca zerowe są rzeczywiste i zawarte w $(-1;1)$.

2^o Można pokazać, że: $x_k^{(n)} = -x_{n-k}^{(n)}$ oraz $A_k^{(n)} = A_{n-k}^{(n)}$