Analiza numeryczna L 2016/2017

wykład www.ii.uni.wroc.pl/ pwo/

`https://github.com/mtszpater/Analiza-numeryczna-L`

1 Wielomianowa aproksymacja średnio kwadratowa na zbiorze dyskretnym

Zadanie

Ustalmy liczbę naturalną m . Niech dana będzie funkcja f o znanych wartościach dla argumentów parami różnych $x_0, x_1, ..., x_N$ tzn. $y_k = f(x_k), (k = 0, ..., N)$ są dane.
Skonstruować taki wielomian $w_m^* \in \Pi_m$, że:

$$||f - w_m^*||_2 = min_{w_m \in \Pi_m} ||f - w_m||_2 = min_{w_m \in \Pi_m} \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} (y_k - w_n(x_k))^2}$$

Pokażemy jak szybko i efektywnie numerycznie znaleźć W_n^* bez konieczności rozwiązywania układów równań normalnych W tym celu musimy wprowadzić szereg różnych narzędzi.

Definicja - Dyskretny iloczyn skalarny

Dyskretnym iloczynem skalarnym funkcji f i g określony na zbiorze $x_0, x_1, ..., x_N$ nazywamy wyrażenie postaci

$$(f, g)_N = \sum_{k=0}^{N} f(x_k)g(x_k)$$

Własności - Dyskretny iloczyn skalarny

$$(f, f)_N \geq 0 \quad (f, f)_N = 0 \leftrightarrow f(x_k) = 0 \quad k = 0, ..., N$$
$$(f, g)_N = (g, f)_N$$
$$(\alpha f, g)_N = \alpha(f, g)_N$$
$$(f + h, g)_N = (f, g)_N + (h, g)_N$$
$$||f||_2 = \sqrt{(f, f)}$$

Definicja - Ortogonalność

Mówimy, że funkcje f, g są ortogonalne względem iloczynu skalarnego wtw. gdy $(f,g) = 0$

Przykład

$$(f,g)_N = \sum_{k=0}^{3} f(x_k)g(x_k) \qquad x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3}, \quad x_3 = 1$$

$$f(x) = \cos 2x$$

$$g(x) = x^2 - \frac{13}{9}x$$

Sprawdźmy, że f, g są ortogonalne przy takim wyborze iloczynu skalarnego.

$$f(x_0)g(x_0) = 0$$

$$f(x_1)g(x_1) = \frac{5}{27}$$

$$f(x_2)g(x_2) = -\frac{7}{27}$$

$$f(x_3)g(x_3) = -\frac{4}{9}$$

$$(f,g) = 0 + \frac{5}{27} - \frac{7}{27} - \frac{4}{9} = 0$$

Definicja - ortogonalny układ funkcji

Mówimy, że układ funkcji $(f_0, f_1, ..., f_m)$ $\quad m \in N$ nazywamy układem ortogonalnym względem iloczynu skalarnego jeśli

$$\left\{ \begin{array}{ll} (f_i, f_j)_n = 0 & i \neq j \\ (f_i, f_i)_N = 0 & \end{array} \right\}$$

Dowolny układ funkcji liniowo niezależnych $y_0, y_1, ..., y_m$ można zortogonalizować. Służy do tego proces ortogonalizacji Grama-Schmidta.

Algorytm ortogonalizacji

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0(x) = g_0(x) \\ f_k(x) = g_k(x) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(g_k, f_j)_N}{(f_j, f_j)_N} f_j(x) \end{array} \right\}$$

Koszt : trzeba wyznaczyć $\mathrm{O}(m^2)$ iloczynów skalarnych

W wyniku procesu ortogonalizacji otrzymujemy układ funkcji $f_0, f_1, ..., f_N$ spełniający warunki

$$LIN(f_0, ...f_N) = LIN(g_0, ..., g_N)$$

$$(f_i, f_j)_N = 0 \quad i \neq j$$

Uwaga proces ortogonalizacji Grama-Schmidta może być użyty np. do zortonormalizowania układu $(1, x, x^2, ..., x^m)$ Otrzymujemy wtedy bazę ortogonalną przestrzeni Π_m

Przykład

$$(f,g)_N = \sum_{k=0}^{3} f(x_k)g(x_k) \quad x_0 = 0 \quad x_1 = \frac{1}{3} \quad x_2 = \frac{2}{3} \quad x_3 = 1$$

Znajdziemy bazę ortogonalną przestrzeni Π_3

$$g_0(x) = 1 \quad g_1(x) = x \quad g_2(x) = x^2 \quad g_3(x) = x^3$$

$$f_0(x) = g_0(x) = 1$$

$$f_1(x) = g_1(x) - \frac{(g_1, f_0)_N}{(f_0, f_0)_N} f_0(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$f_2(x) = g_2(x) - \frac{(g_2, f_0)_N}{(f_0, f_0)_N} f_0(x) - \frac{(g_2, f_1)_N}{(f_1, f_1)_N} f_1(x) = x^2 - x + \frac{1}{9}$$

$$f_3(x) = g_3(x) - \frac{(g_3, f_0)_N}{(f_0, f_0)_N} f_0(x) - \frac{(g_3, f_1)_N}{(f_1, f_1)_N} f_1(x) - \frac{(g_3, f_2)_N}{(f_2, f_2)_N} f_2(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{47}{90}$$

Można teraz sprawdzić, że

$$LIN(f_0, f_1, f_2, f_3) = \Pi_3$$

$$(f_i, f_j) = 0 \quad i \neq j$$

$$(f_0, f_0) = 4$$

$$(f_1, f_1) = \frac{5}{9}$$

$$(f_2, f_2) = \frac{4}{81}$$

$$(f_3, f_3) = \frac{1}{405}$$

Definicja

Ciąg wielomianów $P_0, ..., P_m$ nazywamy ciągiem wielomianów ortogonalnych, jeśli stopien$(P_k) = $ k

$$P_k \in \frac{\Pi_k}{\Pi_{k-1}}$$

$$oraz \left\{ \begin{array}{ll} (P_i, P_j)_N = 0 & i \neq j \\ (P_i, P_i)_N > 0 & \end{array} \right\}$$

Przy ustalonym iloczynie skalarnym ciąg wielomianów ortogonalnych jest określony jednoznacznie (z dokładnością do mnożnika).

Twierdzenie

Niech ciąg wielomianów $P_0, ..., P_n$ będzie określony w następujący sposób rekurencyjnie.

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x - c_1 \\ P_k(x) = (x - c_k)P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x) \end{array} \right\}$$

$$c_k = \frac{(xP_{k-1}, P_{k-1})_N}{(P_{k-1}, P_{k-1})_N} \qquad d_k = \frac{(P_{k-1}, P_{k-1})_N}{(P_{k-2}, P_{k-2})_N}$$

Ciąg $P_0, ..., P_n$ jest ciągiem wielomianów ortogonalnych względem iloczynu skalarnego tzn.

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_k \in \frac{\Pi_k}{\Pi_{k-1}} & \\ (P_k, P_l)_N = 0 & k \neq l \\ (P_k, P_k)_N > 0 & \end{array} \right\}$$

Oczywiście $LIM(P_0, ..., P_n) = \Pi_n$

Wniosek
Stosując to twierdzenie można skonstruować ciąg wielomianów ortogonalnych obliczając jedynie O(m) iloczynów skalarnych.

Przykład
Użyjemy podanego twierdzenia do skonstruowania bazy ortogonalnej przestrzeni Π_3 względem iloczynu skalarnego postaci

$$(f,g)_N = \sum_{k=0}^{3} f(x_k)g(x_k) \quad x_0 = 0 \quad x_1 = \frac{1}{3} \quad x_2 = \frac{2}{3} \quad x_3 = 1$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x - c_1 = x - \frac{(xP_0, P_0)_N}{(P_0, P_0)_N} = x - \frac{1}{2}$$

$$P_2(x) = (x - c_2)P_1(x) - d_2P_0(x) = x - \frac{(xP_1, P_1)_N}{(P_1, P_1)_N}P_1(x) - \frac{(P_1, P_1)}{(P_0, P_0)}P_0(x) = x^2 - x + \frac{1}{9}$$

$$P_3(x) = (x - c_3)P_2(x) - d_3P_1(x) = x - \frac{(xP_2, P_2)_N}{(P_2, P_2)_N}P_2(x) - \frac{(P_2, P_2)}{(P_1, P_1)}P_1(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{47}{90}x - \frac{1}{90}$$

Kombinacja liniowa wielomianów spełniających związek rekurencyjny z twierdzenia.

Rozważmy problem obliczenia wartości $S(x) = \sum_{k=0}^{N} a_kQ_k(x)$ gdzie x jest ustalony oraz wielomiany $Q_0, ...Q_N$ spełniają związek rekurencyjny postaci

$$Q_0(x) = \alpha_0 \quad a_1(x) = (\alpha_1 x - \beta_1)a_0(x)$$

$$a_k(x) = (\alpha_k x - \beta_k)a_{k-1}(x) - \gamma_k a_{k-2}(x)$$

$\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ są dane

Zaleca się, aby wartość s(x) obliczać następującym algorytmem Clenshawa [1]

$$B_{n-1} = B_{n-2} = 0$$

$$B_k = \alpha_k + (\alpha_{k+1}x - \beta_{k+1})\beta_{k+1} - \gamma_{k+2}\beta_{k+2}$$

Wtedy s(x) $= \alpha_0\beta_0$

Twierdzenie
Wielomian optymalny $W_m^* \in \Pi_m$ minimalizujący wyrażenie $||f - w_m||_2$ wyraża się wzorami

$$W_m^*(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k p_k(x)$$

gdzie $P_0, ...P_m$ to wielomiany ortogonalne względem iloczynu skalarnego.

$$a_k = \frac{(f, P_k)_N}{(P_k, P_k)_N}$$

Uwagi

1. Wielomiany $P_0, ..., P_m$ znajdujemy stosując związek rekurencyjny z twierdzenia.
2. Wartość W_m^* dla danego x obliczamy algorytmem Clenshawa
3. Nie trzeba pamiętać jawnej postaci $P_0, ..., P_m$. Wystarczy znać wartości $P_i(x_k)$
4. Zachodzi związek

$$W_m^*(x) = W_{m-1}^*(x) + \frac{(f, P_M)_N}{(P_m, P_m)_N} P_m(x)$$

5. Można sprawdzić

$$||f - W_m^*||_2 = \sqrt{||f||_2^2 - \sum_{k=0}^{m} \frac{(f, P_k)_N^2}{(P_k, P_k)_N}}$$

[2]

Literatura

[1] ten algorytm lepiej sie upewnić

[2] moze cos byc nie tak :c