MODELLI PROBABILISTICI

INTRODUZIONE

- SI DEFINISCE SPAZIO DEI CAMPIONI O SPAZIO CAMPIONARIO (Ω) L'INSIEME DI TUTTI I POSSIBILI EVENTI GENERABILI DA UN ESPERIMENTO CONCETTUALE O REALE.

- UN EVENTO (A) È UN SOTTOINSIEME POSSIBILE O IMPOSSIBILE DELLO SPAZIO CAMPIONARIO.

- L'INTERSEZIONE TRA DUE EVENTI RAPPRESENTA UN TERZO EVENTO COMUNE AI DUE. $A \cap B = C$

- L'UNIONE DI DUE EVENTI È UN EVENTO COMPOSTO DALL'ACCADIMENTO DI ENTRAMBI.

LA DEFINIZIONE CLASSICA INDICA LA PROBABILITÀ DI UN EVENTO COME IL RAPPORTO TRA IL NUMERO DEI CASI FAVOREVOLI E IL NUMERO DEI CASI POSSIBILI.

ESEMPIO

DATO Ω = NUMERO DEI CASI POSSIBILI, $|\Omega| = n$ LA SUA CARDINALITÀ, CON A UN EVENTO E CON n_A IL NUMERO DI CASI FAVOREVOLI AD A, LA PROBABILITÀ DI A È INDICATA CON:

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

→ LA PROBABILITÀ DEL VERIFICARSI DI UNO DI DUE EVENTI INCOMPATIBILI, OVVERO CHE NON POSSONO VERIFICARSI SIMULTANEAMENTE, È PARI ALLA SOMMA DELLE PROBABILITÀ DEI DUE EVENTI:

$$P(A \cup B) = \frac{n_{A \cup B}}{n} = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n}$$

- LA FREQUENZA DI UN EVENTO È CALCOLABILE PARTENDO DA S_A COME NUMERO DI SUCCESSI DELL'EVENTO A E CON S COME NUMERO DI TENTATIVI TOTALI EFFETTUATI:

$$F(A) = \frac{S_A}{S}$$

PER LA LEGGE DEI GRANDI NUMERI CON UN NUMERO ELEVATISSIMO DI TENTATIVI IL VALORE DI F(A) TENDERÀ A QUELLO DI P(A)

- LA DEFINIZIONE FREQUENTISTICA DI PROBABILITÀ DI UN EVENTO È IL LIMITE CUI TENDE LA FREQUENZA RELATIVA DELL'EVENTO AL CRESCERE DEL NUMERO DEGLI ESPERIMENTI:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

- UNA VARIABILE CASUALE (O ALEATORIA) È UNA VARIABILE CHE PUÒ ASSUMERE VALORI DIVERSI IN DIPENDENZA DA QUALCHE FENOMENO ALEATORIO (OVVERO UN FENOMENO NON PREVEDIBILE CON PRECISIONE, MA CHE È COMUNQUE POSSIBILE STIMARE).

UN ESEMPIO, IL RISULTATO DEL LANCIO DI UN DADO A 6 FACCE PUÒ ESSERE VISTO COME UNA VARIABILE CASUALE CHE PUÒ ASSUMERE UNO DEI 6 POSSIBILI VALORI 1, 2, 3, 4, 5, 6 OGNUNO CON PROBABILITÀ $P(E) = 1/6$

- COMBINAZIONI

	SENZA SOSTITUZIONE	CON SOSTITUZIONE
ORDINATE	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
NON ORDINATE	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

IL COEFFICIENTE BINOMIALE SI SVOLGE NEL SEGUENTE MODO:

$$\binom{a}{x} = \frac{a!}{x!(a-x)!}$$

PASSEGGIATA ALEATORIA SEMPLICE IN $\mathbb{Z}$

UNA PASSEGGIATA ALEATORIA È LA FORMALIZZAZIONE DELL'IDEA DI PRENDERE PASSI SUCCESSIVI IN DIREZIONI CASUALI. SEGUENDO LO SCHEMA DI BERNOULLI DI PARAMETRO p, IL RISULTATO È COMPRESO TRA 0 E 1.

OGNI PERCORSO DI LUNGHEZZA p PUÒ ESSERE INTERPRETATO COME RISULTATO DI UN ESPERIMENTO DI PASSEGGIATA ALEATORIA; CI SONO QUINDI 2^p PERCORSI IN QUANTO 2 SONO LE POSSIBILI SCELTE E p IL NUMERO TOTALE DI SCELTE DA PRENDERE, OGNUNA CON $\frac{1}{2^p} = 2^{-p}$ PROBABILITÀ.

PER CAPIRE IL RUOLO DI p SI CONSIDERI L'EVENTO IN CUI IL PERCORSO PASSA PER IL PUNTO $(2,2)$, I PRIMI 2 PASSI DOVRANNO PER FORZA ESSERE POSITIVI, E SONO PRESENTI 2^{p-2} CAMMINI CON QUESTA PROPRIETÀ (ESSERE POSITIVI). QUINDI LA PROBABILITÀ DEL NOSTRO EVENTO È UGUALE A 1 QUALSIASI SIA IL VALORE DI p.

INDICHIAMO CON $X_1, X_2 \dots$ I PASSI INDIVIDUALI, E CON $S_1, S_2, \dots$ LE POSIZIONI MAN MANO. QUINDI:

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

L'EVENTO "ALL'EPOCA n IL PUNTATORE È NEL PUNTO r" È INDICATO CON:

$\{S_n = r\}$ LA CUI PROBABILITÀ INDICHIAMO CON $P_{n,r}$

IL NUMERO $N_{n,r}$ DI CAMMINI DALL'ORIGINE AL PUNTO (n,r) È

$N_{n,r} = \binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{q}$ E QUINDI $P_{n,r} = P\{S_n = r\} = \binom{n}{\frac{n+r}{2}} 2^{-n}$

IN CUI p = N° DI +1 PRESENTI NEL CAMMINO

E q = N° DI −1 PRESENTI NEL CAMMINO

IL COEFF. BIN DI CUI SOPRA È = 0 A MENO CHE $0 \le \frac{n+r}{2} \le n$

PRINCIPIO DI RIFLESSIONE

SI CONSIDERI $n = p+q$ SIMBOLI DI CUI p HANNO SIMBOLO $+1$ E q HANNO SIMBOLO -1. LA SOMMA PARZIALE RAPPRESENTA LA DIFFERENZA TRA IL NUMERO DI $+1$ E -1 NELLE PRIME k POSIZIONI: $S_k = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k$
QUINDI

$$S_0 = 0 \qquad S_k - S_{k-1} = \pm 1 = \varepsilon_k \qquad S_n = p - q$$

CI RIFERIAMO A n COME ALLA LUNGHEZZA DI UN CAMMINO, E VI SONO 2^n CAMMINI DI LUNGHEZZA n. DATO UN PUNTO (n,x) SE p (NUMERO DI $+1$) È POSITIVO E q (NUMERO DI -1) NEGATIVO AVREMO

$$n = p+q \quad , \quad x = p-q$$

E UN PERCORSO DALL'ORIGINE A (n,x) ESISTE SE E SOLO SE n E x HANNO LA FORMA INDICATA SOPRA.

TEOREMA DEL BALLOTTAGGIO

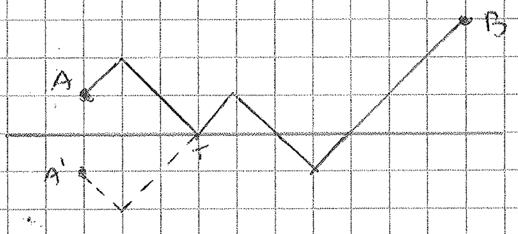
SUPPONIAMO CHE IN UN BALLOTTAGGIO, UN CANDIDATO P OTTENGA p VOTI E UN CANDIDATO Q NE PRENDA q, DOVE $p > q$ (P È IN VANTAGGIO). LA PROBABILITÀ CHE DURANTE IL CONTEGGIO VI SIANO SEMPRE PIÙ VOTI PER P CHE PER Q È UGUALE A

$$\frac{p-q}{p+q}$$

$p-q$ ← VOTI PER P IN PIÙ DI Q
$p+q$ ← VOTI TOTALI

L'INTERO INSIEME DI VOTI PUÒ ESSERE RAPPRESENTATO DA UN CAMMINO DI LUNGHEZZA $p+q$ IN CUI $\varepsilon_k = +1$ SE IL K-ESIMO VOTO È PER P. IL CANDIDATO P È IN VANTAGGIO SEMPRE SE E SOLO SE $S_1 > 0, \dots, S_n > 0$, OVVERO SE TUTTI I VERTICI SONO SOPRA ALL'ASSE t (TEMPO).

- LEMMA:
IL NUMERO DI CAMMINI DA A A B CHE TOCCANO O ATTRAVERSANO L'ASSE X È UGUALE AL NUMERO DI TUTTI I CAMMINI DA A' A B



- TEOREMA DEL BALLOTTAGGIO
SIANO n E x INTERI POSITIVI, CI SONO ESATTAMENTE $\frac{x}{n} N_{n,x}$ CAMMINI $(S_1, \dots, S_n = x)$ DALL'ORIGINE AL PUNTO (n,x) TALI CHE $S_1 > 0, \dots, S_n > 0$.

TORNANDO ALLA PASSEGGIATA ALEATORIA

- LEMMA:
LA PROBABILITÀ CHE NON VENGA ALCUN RITORNO ALL'ORIGINE ENTRO L'EPOCA $2n$ INCLUSA, È LA STESSA PROBABILITÀ CHE UN RITORNO AVVENGA ALL'EPOCA $2n$.

IN SIMBOLI:

$$P\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0\} = P\{S_{2n} = 0\} = u_{2n}$$

QUINDI DI SICURO $n > 0$. QUANDO QUESTO EVENTO SI VERIFICA TUTTE LE S_i SONO POSITIVE O TUTTE NEGATIVE, ESSENDO EQUIPROBABILI SI PUÒ RISCRIVERE NELLA FORMA

$$P\{S_1 > 0, \dots, S_{2n} > 0\} = \frac{1}{2} u_{2n}$$

FORMULA DI STIRLING

FORMULA DI APPROSSIMAZIONE PER NUMERI FATTORIALI MOLTO GRANDI

$$n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\theta_n}$$ CON ERRORE $|\theta_n| < \frac{1}{12n}$

! IN UNA PASSEGGIATA ALEATORIA, LA PROBABILITÀ CHE $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ASSUMA UN CERTO VALORE x È $P(S_n = x)$ QUINDI $S_n = 2(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n) - n$, IMPOSTANDO $U_n = \underbrace{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n}_{\text{SIMBOLO SIMBOLI } +1 \text{ E } -1}$ ABBIAMO:

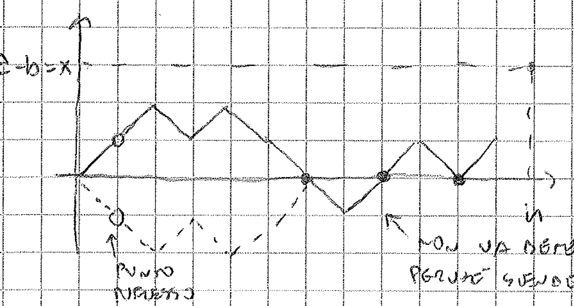
$$P(S_n = x) = P(2U_n - n = x) = P\left(U_n = \frac{x+n}{2}\right) = \binom{n}{\frac{x+n}{2}} p^{\frac{x+n}{2}} \tilde{p}^{\frac{n-x}{2}}$$ CON $\tilde{p} = 1 - p$

IL NUMERO DI CAMMINI POSSIBILI IN UNA CAMMINATA ALEATORIA, CHE NON TOCCANO L'ASSE DELLE ASCISSE È DATO DA $\binom{n}{a} = \binom{a+b}{a}$

ESEMPIO: SI CONTINO I CAMMINI IN CUI IL CANDIDATO A VA IN SVANTAGGIO.

SUBITO VENGONO ESCLUSI I CAMMINI CHE NON SALGONO A +1 NEL PRIMO PASSO, QUINDI RIMANGONO $n-1$ ESTRAZIONI SU $a-1$ SCHEDE:

$\binom{n-1}{a-1}$ È POSSIBILE CALCOLARE IL CAMMINO RIFLESSO, CHE È SPECULARE ALL'ASSE DELLE ASCISSE. INFATTI TUTTI I CAMMINI CHE STANNO SOTTO L'ASSE DELLE ASCISSE QUANDO TOCCANO L'ASSE NON VANNO ESCLUSI MA VANNO BENE PERCHÉ DEVONO ARRIVARE IN CIMA.



$$\underbrace{\binom{n-1}{a-1}}_{\text{N° DI CAMMINI SOPRA ALL'ASSE DELLE ASCISSE}} - \underbrace{\binom{n-1}{a+1}}_{\text{N° DI CAMMINI CHE SUBITO SONO SOTTO L'ASSE POI RISALGONO}} = \text{CASI FAVOREVOLI}$$

$$\binom{n}{a} = \text{TUTTI I POSSIBILI CAMMINI}$$

$$\rightarrow \frac{\binom{n-1}{a-1} - \binom{n-1}{a+1}}{\binom{n}{a}}$$

$$\frac{\dfrac{(n-1)!}{(a-1)!(n-a)!} - \dfrac{(n-1)!}{(a+1)!(n-a-2)!}}{\dfrac{n!}{a!(n-a)!}} = \dots$$

RIPASSO DISTRIBUZIONE BINOMIALE (DI BERNOULLI)

DEFINISCE LA DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ DI n PROVE RIPETUTE E INDIPENDENTI QUANDO I RISULTATI POSSIBILI DI CIASCUNA PROVA POSSONO ESSERE SOLTANTO DUE:

- IL SUCCESSO: p (PROBABILITÀ FAVOREVOLE ALL'EVENTO)
- L'INSUCCESSO: $q = 1-p$ (PROBABILITÀ SFAVOREVOLE ALL'EVENTO)

LA DISTRIBUZIONE BINOMIALE È LA PROBABILITÀ DI OTTENERE x SUCCESSI IN n PROVE INDIPENDENTI. QUESTA PROBABILITÀ È DATA DA

$$P_x = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad \text{CON} \quad 0 \leq x \leq n$$

LA DISTRIBUZIONE BINOMIALE $B(n,p)$ HA DUE PARAMETRI:

n = NUMERO DI PROVE EFFETTUATE
p = PROBABILITÀ DI SUCCESSO DELLA SINGOLA PROVA DI BERNOULLI

TORNANDO ALLA PASSEGGIATA ALEATORIA

SIA DATA UNA SUCCESSIONE $(U_n)_n$ DI VARIABILI ALEATORIE INDIPENDENTI E IDENTICAMENTE DISTRIBUITE, DI TIPO $B(1,p)$. PER OGNI $n \geq 1$ CONSIDERIAMO LA VARIABILE ALEATORIA $X_n = 2U_n - 1$: LE VARIABILI ALEATORIE X_n SONO ANCH'ESSE INDIPENDENTI E CON IDENTICA DISTRIBUZIONE; INOLTRE CIASCUNA X_n PUÒ ASSUMERE I VALORI 1 E -1, CON PROBABILITÀ p E $q = 1-p$ RISPETTIVAMENTE.
SI CHIAMA PASSEGGIATA ALEATORIA SEMPLICE LA SUCCESSIONE $(S_n)_n$, OVE SI PONGA:

→ SOMMA DI n ELEMENTI (1 o -1)

$$S_0 = 0, \qquad S_n := S_{n-1} + X_n \qquad \text{PER} \quad n \geq 1$$

U_n IN $X_n = 2U_n - 1$, PUÒ ASSUMERE SOLO VALORI 0 o 1 (SUCCESSO o INSUCCESSO).

QUANDO $p = q = \frac{1}{2}$ SI DICE CHE LA PASSEGGIATA È <u>SIMMETRICA</u>, ALTRIMENTI È ASIMMETRICA.
ESSENDO $X_n = 2U_n - 1$, RISULTERÀ $S_n = 2B_n - n$, DOVE B_n HA DISTRIBUZIONE BINOMIALE $B(n,p)$.
S_n PUÒ QUINDI ASSUMERE I VALORI: $-n, 2-n, 4-n, \dots, n-4, n-2, n$
E SI HA:

$$P([S_n = 2k - n]) = \binom{n}{k} p^k p^{n-k} \qquad \text{PER OGNI} \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

IN PARTICOLARE SE n È PARI $n = 2h$ SI HA:

$$P([S_n = 0]) = P([S_{2h} = 0]) = \binom{2h}{h} (pq)^h$$

A TAL PROPOSITO OSSERVIAMO CHE AD OGNI EVENTO DEL TIPO $[S_n = k]$ CORRISPONDONO $\binom{n}{\frac{n+k}{2}}$ EVENTI ELEMENTARI FAVOREVOLI (SE $n+k$ È PARI, ALTRIMENTI NESSUNO).

SI TROVA UN CAMMINO DELLA PASSEGGIATA ALEATORIA CHE PORTA ALLA POSIZIONE K DOPO n PASSI (NON NECESSARIAMENTE PER LA PRIMA VOLTA).
$[S_n = j]$ INDICA "LA PASSEGGIATA VISITA LA POSIZIONE j".

TORNANDO AL PRINCIPIO DI RIFLESSIONE

TEOREMA: SIA $(S_n)_n$ UNA PASSEGGIATA ALEATORIA CON PARAMETRI p E q, E SI DENOTI CON $(S^*_n)_n$ LA PASSEGGIATA ALEATORIA DUALE, OTTENUTA SCAMBIANDO IL VALORE DI p CON QUELLO DI q. ASSEGNATI AD ARBITRIO DUE ISTANTI k ED h, CON $k<h$, E DUE POSIZIONI a E b SI HA:

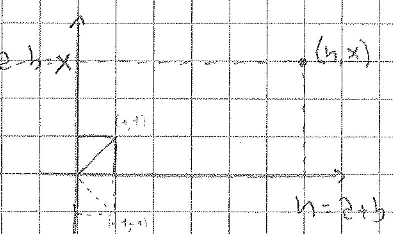
$$P([S_h=b]|[S_k=a]) = P([S^*_h=-b]|[S^*_k=-a])$$

$$P([S_{h-k}=b-a]) = P([S^*_{h-k}=a-b])$$

IL SIGNIFICATO DI QUESTO PRINCIPIO SI PUÒ RIASSUMERE DICENDO CHE AD OGNI TRAIETTORIA CHE PORTA DALLA POSIZIONE a ALLA POSIZIONE b IN m PASSI, CORRISPONDE BIUNIVOCAMENTE UNA TRAIETTORIA SPECULARE CHE PORTA DALLA POSIZIONE $-a$ ALLA $-b$ IN m PASSI. LA PROBABILITÀ DI CIASCUNA TRAIETTORIA DEL PRIMO TIPO COINCIDE CON QUELLA DELLA CORRISPONDENTE TRAIETTORIA DEL SECONDO TIPO, PUR DI SCAMBIARE IL RUOLO DI p CON QUELLO DI q.

TORNANDO AL PROBLEMA DEL BALLOTTAGGIO

DATA UN'ELEZIONE CON n VOTI E DUE SOLI CANDIDATI A E B CHE RICEVONO RISPETTIVAMENTE a E b VOTI, DOVE $a>b$ E $a+b=n$ QUAL'È IL PROBLEMA CHE NELLO SPOGLIO DEI VOTI, A RISULTI IN OGNI MOMENTO (ESCLUSO L'INIZIO) STRETTAMENTE IN VANTAGGIO SU B. LA PROBABILITÀ È DATA DA $\frac{a-b}{a+b}$



PER DIMOSTRARE QUESTO TEOREMA SI PROVI A CONTARE IL NUMERO DI CAMMINI CHE PARTONO DAL PUNTO $(1,1)$ E TERMINANO AL PUNTO (n,x) SENZA TOCCARE L'ASSE DELLE ASCISSE. PRENDO QUINDI IL NUMERO DI CAMMINI CHE PARTONO DAL PUNTO $(1,1)$, OVVERO $n-1$ VOTI TOTALI SU $a-1$ VOTI PER A, QUESTO PERCHÉ IL CAMMINO SIA SEMPRE POSITIVO, DOVRÀ ESSERCI PER FORZA. POI PER IL PRINCIPIO DI RIFLESSIONE TOLGO IL NUMERO DI CAMMINI CHE PARTONO SOTTO L'ASSE DELLE ASCISSE E POI RISALGONO, IL TUTTO DIVISO IL NUMERO TOTALE DI CAMMINI.

DAL PUNTO (1,1) — DAL PUNTO (1,-1) — TOTALI — SAPENDO CHE $n-a=b$

$$\frac{\binom{n-1}{a-1}-\binom{n-1}{a}}{\binom{n}{a}} = \frac{\frac{(n-1)!}{(a-1)!(n-1-a+1)!}-\frac{(n-1)!}{a!(n-1-a)!}}{\frac{n!}{a!(n-a)!}} = \frac{\frac{(n-1)!}{(a-1)!(b)!}-\frac{(n-1)!}{a!(b-1)!}}{\frac{n!}{a!\,b!}} = \frac{a-b}{n} = \frac{a-b}{a+b}$$

ESEMPIO

SIA DATO IL NUMERO DI CAMMINI CHE PARTONO DALL'ORIGINE E AL TEMPO $2n$ TORNANO ALL'ORIGINE, OVVERO $S_1>0, S_2>0, \dots, S_{2n-1}>0, S_{2n}=0$. LA PROBABILITÀ CHE UN CAMMINO ABBIA QUESTO PERCORSO È:

$$L_{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

CAMMINI FAVOREVOLI / N° ~~TOTALE~~ DI CAMMINI TOTALI

ESCLUDENDO TUTTAVIA IL PRIMO PASSO E L'ULTIMO, CHE DOVRANNO PER FORZA ESSERE $+1$ E -1, COMUNQUE >0 IL VALORE TOTALE RIMANGONO $2n-2$ ~~CAMMINI~~ PASSI DA FARE

TOGLIENDO SOLO IL PRIMO PASSO RIMANGONO $2n-1$ PASSI DA FARE, QUINDI

$a=n$
$b=n-1$
$a+b=2n-1$

LA PROBABILITÀ CHE IL CAMMINO SIA SEMPRE POSITIVO, PER IL TEOREMA DEL BALLOTTAGGIO $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)$ È QUINDI $\frac{n-(n-1)}{n+n-1} = \frac{1}{2n-1}$

APPLICANDO ORA IL N° TOTALE DEI CAMMINI AL NUMERO DI EVENTI FAVOREVOLI:

$$\underbrace{\frac{1}{2n-1}}_{\text{N° TOTALE DEI CAMMINI}}\cdot\underbrace{\binom{2n-1}{n-1}}_{\text{EVENTI FAVOREVOLI}}\begin{matrix}=a+b\\=b\end{matrix} = \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,(2n-1-(n-1))!} = \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,n!} = L_{2n-2}$$

ESEMPIO

CASI FAVOREVOLI — $\frac{1}{2^{2n}}$ CASI TOTALI

Si definisca $u_{2n} = \binom{2n}{n}2^{-2n}$ ovvero il numero di casi favorevoli diviso il numero di casi totali → il numero di cammini che arrivano a zero al tempo $2n$ diviso il n° di cammini totali

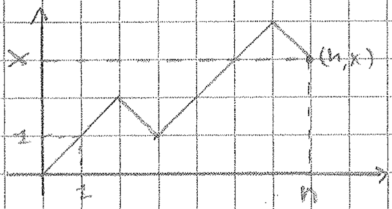
$u_{2n} = P(S_{2n}=0)$ e $u_{2n} = P(S_1\neq 0, S_2\neq 0, \dots, S_{2n}\neq 0)$ quindi la probabilità u_{2n} è la stessa sia che S_{2n} sia $=0$ sia che non lo sia mai (sia che alla fine tocchi lo zero, sia che non lo tocchi mai).

Quindi $f_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n}$ risolvendo: (dato che $f_0 = 0$ e $f_{2n} = \frac{1}{2n}u_{2n-2}$)

$$u_{2n} = \frac{\cancel{2n}(2n-1)(2n-2)!}{n^2(n-1)!^2}\cdot 2^{-(2n-2)}\cdot 2^{-2} = \frac{u_{2n-2}(2n-1)}{2n} = u_{2n-2} - u_{2n} =$$

$$u_{2n-2}\left(1-\frac{2n-1}{2n}\right) = \frac{u_{2n-2}}{2n} = f_{2n}$$

Qual'è la probabilità $P(S_1>0,\dots,S_{n-1}>0, S_n = x)$ con $x>0$

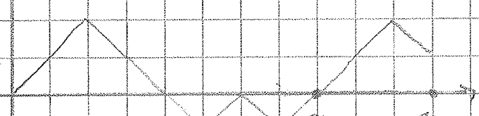


Escludendo come al solito il primo vi sono $n-1$ passi da calcolare, quindi $a+b = n-1$ e partendo dal livello 1 bisogne ordinate avremo $a-b = x-1$ da raggiungere.
Infine $2a = n+x \to a = \frac{n-1+x-1}{2} = \frac{n+x-2}{2}$

CAMMINI CHE TOCCANO ← PRINCIPIO DI RIFLESSIONE

$$\frac{\binom{n-1}{\frac{n+x-2}{2}} - \binom{n-1}{\frac{n+x}{2}}}{\binom{n}{\frac{n+x}{2}}}$$

Si calcoli la probabilità che l'ultimo zero prima di $2n$ avvenga al tempo k. Per far ciò si spezza in due parti, la prima in cui vi sono tutti i cammini che al tempo $2k$ arrivano a zero, e la seconda con i cammini che non tornano più a zero, dal tempo $2k$ al tempo $2n$.

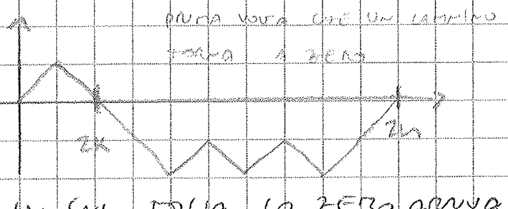


$$\frac{\underbrace{u_{2k}\cdot 2^{2k}}_{\text{cammini che arrivano a zero al tempo } 2k}\cdot\underbrace{u_{2n-2k}\cdot 2^{2n-2k}}_{\text{cammini che da } 2k \text{ a } 2n \text{ non toccano lo zero}}}{\underbrace{2^{2n}}_{\text{cammini totali}}}$$

$= u_{2k}\cdot u_{2n-2k}$

EQUAZIONE DEL RINNOVAMENTO

$$u_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} f_{2k}\, u_{2n-2k}$$



Si divide il cammino in due parti, la prima in cui tocca lo zero arriva fino a $2k$ e la seconda, la parte rimanente, arriva da $2k$ a $2n$, in cui torna poi nuovamente a zero

$$\frac{f_{2k} \cdot 2^{2k} \cdot u_{2n-2k} \cdot 2^{2n-2k}}{2^{2n}}$$

Qual è la probabilità che il percorso sia positivo per un certo tempo e negativo per un altro periodo di tempo?
Per risolvere ciò è necessario contare gli intervalli di tempo in cui è positivo e quelli in cui è negativo.

- Nell'intervallo $[i, i+1]$ dico che è positivo se $S_i > 0$ o $S_{i+1} > 0$, e negativo se $S_i < 0$ o $S_{i+1} < 0$

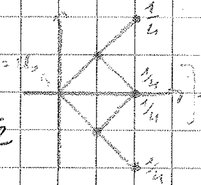
$b_{2k,2n}$ è la probabilità che il cammino di lunghezza $2n$ sia positivo per un tempo $2k$, ne consegue che

$$\sum_{k=0}^{n} b_{2k,2n} = 1$$

La probabilità è $\boxed{b_{2k,2n} = u_{2k} \cdot u_{2n-2k}}$

Dimostrazione (per induzione)

Supponiamo $n = 1$, calcoliamo $b_{0,2}$ e $b_{2,2}$
ovviamente $u_0 = 1$ e $u_2 = \frac{1}{2}$



$u_2 = \frac{1}{2}$ probabilità di arrivare a 0 dopo $2n$ passi

$$b_{0,2} = b_{2,2} = \frac{1}{2} = u_0 \cdot u_2 = u_2 \cdot u_0$$

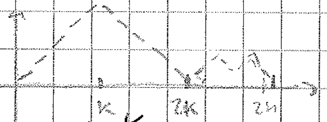
Supponiamo vera fino ad $n-1$, si dimostra quindi per n

- il caso estremo è $b_{2n,2n} = \underbrace{P(S_1 \geq 0, \dots, S_{2n} \geq 0)}_{\text{positivo per tutto il tempo}} = u_{2n} = u_{2n} \cdot u_0$
- il caso $b_{0,2n} = \underbrace{P(S_1 \leq 0, \dots, S_{2n} \leq 0)}_{\text{negativo per tutto il tempo}} = u_{2n} = u_{2n} \cdot u_0$
- il caso in cui vi è k compreso tra 1 e $n-1$ inclusi:

$$b_{2k,2n} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} f_{2j} \cdot b_{2k-2j,\underbrace{2n-2j}_{\text{lunghezza cammino}}} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-k} f_{2j} \cdot b_{2k,2n-2j}$$

una parte fino al passo zero e una fino alla fine

la metà perché prima c'è un passo



- per induzione, dato che tutti i numeri sono $\leq n$ $= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} f_{2j} \cdot u_{2k-2j} \cdot u_{2n-2k} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-k} f_{2j} \cdot u_{2k} \cdot u_{2n-2j-2k} =$

$$= \frac{1}{2} u_{2k} \cdot u_{2n-2k} + \frac{1}{2} u_{2k} \cdot u_{2n-2k} = u_{2k} u_{2n-2k} \quad \text{c.v.d.}$$

Legge arcoseno

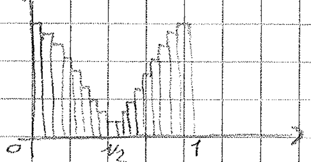
Considerando ℓ_{2n} la percentuale di tempo in cui la passeggiata aleatoria è positiva; ℓ_{2n} può quindi assumere i valori $0, \frac{2}{2n}, \frac{4}{2n}, \dots, \frac{2n-2}{2n}, 1$. La probabilità che ℓ_{2n} sia compresa tra $\frac{1}{2}$ ed un certo x è la somma per tutti i valori k compresi tra $\frac{n}{2}$ e $n \cdot x$.

gli errori tendono a 1

considerando $\ell = \frac{k}{n}$

$$P\left(\frac{1}{2} < \ell_{2n} < x\right) = \sum_{\frac{n}{2} < k < nx} u_{2k} \cdot u_{2k-2} = \sum_{\frac{n}{2} < k < xn} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} e^{\varepsilon_k} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi(n-k)}} e^{\varepsilon_{n-k}} \simeq \sum_{\frac{n}{2} < k < xn} \frac{1}{\pi \sqrt{k(n-k)}} =$$

$$= \sum_{\frac{n}{2} < k < xn} \frac{1}{n\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\ell(1-\ell)}} \to \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} = \frac{1}{\pi} \left[2 \arcsin(\sqrt{y})\right]_{\frac{1}{2}}^{x}$$



PER APPROSSIMARE LA PROBABILITÀ CHE UN ARCO DI TEMPO SI TROVI TRA DUE VALORI, SI UTILIZZA L'ARCOSENO, FINO A QUANDO NON SI È TROPPO VICINI A 0 o 1, IN QUANTO I VALORI LÌ SONO TROPPO DENSI. INFATTI PER $\ell \to 0$ o $\ell \to 1$ LA FUNZIONE TENDE ALL'INFINITO. LA PROBABILITÀ È SIMMETRICA RISPETTO A $1/2$ IN QUANTO LA PASSEGGIATA STESSA È SIMMETRICA; IL MINIMO È $\frac{1}{2}$, PARADOSSALMENTE

SI SUPPONGA DI SAPERE CHE AL TEMPO $2n$ I GIOCATORI SONO PARI: LA PROBABILITÀ CHE IL PRIMO GIOCATORE SIA IN VANTAGGIO PER UN TEMPO $2k$ È LO STESSO PROBLEMA DI PRIMA CON IL VINCOLO DEL PAREGGIO. QUESTA PROBABILITÀ È DATA DA $p = \frac{1}{n+1}$: TUTTI GLI $n+1$ VALORI DI K QUINDI HANNO LA STESSA PROBABILITÀ.

LA DIMOSTRAZIONE È ANALOGA A PRIMA: BISOGNA CONTARE IL NUMERO DI CAMMINI TALI CHE $S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \dots, S_{2n-1} \geq 0, S_{2n} = 0$, CHE SAPPIAMO ESSERE $L_{2n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, VISTO CHE TUTTI I CAMMINI HANNO STESSA PROBABILITÀ, BISOGNA DIVIDERE L_{2n} PER IL NUMERO DI CAMMINI CHE HANNO $S_{2n} = 0$, CIOÈ $\binom{2n}{n}$. QUINDI

$$\frac{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{n+1}$$

DIMOSTRAZIONE PER $1 \leq k \leq n-1$

SI CONSIDERI $1 \leq k \leq n-1$ E SI CONSIDERI CHE VERO FINO AD $n-1$: I CAMMINI NEI QUALI IL PRIMO GIOCATORE È IN VANTAGGIO PRIMA O POI ARRIVANO A 0. SIA J IL PRIMO TEMPO IN CUI I CAMMINI ARRIVANO A 0: ~~SIA~~ 0 FINO A J IL CAMMINO È POSITIVO OPPURE È NEGATIVO. NEL PRIMO CASO J VALE AL MASSIMO K, QUINDI I CAMMINI SONO:

$$\sum_{J=1}^{k} L_{2J-2} \cdot L_{2n-2J}$$

NEL SECONDO CASO, OVVERO IL VANTAGGIO DEL SECONDO GIOCATORE: $\sum_{l=1}^{n-k} L_{2l-2} \cdot L_{2n-\dots}$

SE $l=1$, $J=n$

SE $l=n-k$, $J=k+1$

QUINDI $\displaystyle\sum_{J=1}^{k} L_{2J-2} \cdot L_{2n-2J} + \sum_{J=k+1}^{n} L_{2J-2} L_{2n-2J} = \boxed{\sum_{J=1}^{n} L_{2J-2} \cdot L_{2n-2J}}$

↳ CONTANDOLI ASSIEME E CHIAMANDO NEL SECONDO $J = n-l+1$:

ORA SI NOTA CHE LA FORMULA NON DIPENDE PIÙ DA k, QUINDI TUTTI I VALORI $1 \leq k \leq n-1$ HANNO PROBABILITÀ UGUALE: PER $k=0$ E $k=n$ ESSO È $\frac{1}{n+1}$, PER GLI ALTRI INVECE

$$\frac{1-\frac{2}{n+1}}{n-1} = \frac{\frac{n-1}{n+1}}{n-1} = \frac{1}{n+1}$$

FACENDO L'ISTOGRAMMA CON $\ell = \frac{k}{n}$ SI HA

PER PASSEGGIATE ALEATORIE NON SIMMETRICHE $(p \neq \frac{1}{2})$ SI È VISTO CHE LA PASSEGGIATA TORNA A 0 SOLO UN NUMERO FINITO DI VOLTE CON PROBABILITÀ 1, CHE SEGUE DAL LEMMA DI BOREL-CANTELLI $P(S_{2n}=0) = \binom{2n}{n} p^n p^{1-n}$ ~~...~~ IN CASO $p = \frac{1}{2}$ SIMMETRICA, IL LEMMA NON SI PUÒ APPLICARE PERCHÉ LA SERIE NON CONVERGE, PERÒ SI È VISTO CHE PUÒ TORNARE A 0 INFINITE VOLTE: $P(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) = u_{2n}$ CHE VA COME $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ALL'INFINITO.

Esercizi

Si consideri la passeggiata aleatoria simmetrica, qual'è la probabilità che al tempo 7 valga 5? ($P(S_7=5)$?)

$k-(7-k)=5$

$2k=12 \to k=6$

$$P(S_7=5)=\binom{7}{6}\frac{1}{2^7}=\frac{7\cdot\cancel{6}}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{2^7}=\frac{\cancel{42}\,7}{256}$$

Calcolare $P(S_8=2)$ — proprietà coeff. binom.

$k-(8-k)=2$

$2k=10$

$k=5$

$$P(S_8=2)=\binom{8}{5}\frac{1}{2^8}=\binom{8}{3}\frac{1}{2^8}=\frac{8\cdot7\cdot6}{2\cdot3}\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{7}{32}$$

Calcolare $P(S_1>0, S_2>0, \dots, S_7>0, S_8=0)$?

$\#(S_1>0,\dots,S_8=0)=L_{2\cdot4-2}=L_6=\binom{6}{3}\frac{1}{4}$ N.B. $8=2n$ quindi $L_{2n}=L_{2\cdot4}$

$$P(S_1>0,\dots,S_8=0)=\#(S_1>0,\dots,S_8=0)\cdot\#\text{cammini}=\binom{6}{3}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{6\cdot5\cdot4}{2\cdot3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{5}{256}$$

Considerando una passeggiata asimmetrica, $P(S_1>0,\dots,S_7>0,S_8=0)$?

→ Tutti i cammini hanno stessa probabilità, quindi si ottiene allo stesso modo della simmetrica ma moltiplicando per $\frac{1}{2^8}p^4(1-p)^4$, cioè $\frac{1}{2^{2n}}p^n(1-p)^n$

Per una passeggiata simmetrica, $P(S_1\geq0,\dots,S_5\geq0,S_6=0)$?

$$P(\dots)=L_6\cdot\frac{1}{2^6}=\binom{6}{3}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{6\cdot5\cdot4}{2\cdot3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{5}{64}$$

Progetto

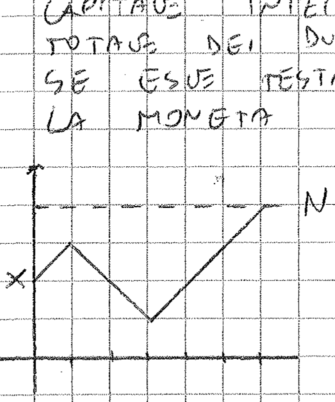
Verificare il tempo che una passeggiata aleatoria passa positiva e negativa:

$$P_{2k,2n}=u_{2k}u_{2n-2k}\simeq\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{l(1-l)}} \quad \text{con } l=\frac{k}{n}$$

Per verificarlo, supponiamo per $n=4$, si genera una passeggiata aleatoria lunga 8 casualmente poi si conta per quanto tempo è positiva e quanto negativa. La legge dei grandi numeri dice che per n grande nelle passeggiate aleatorie (h_k numero delle passeggiate aleatorie positive per un tempo $2k$): $\frac{h_k}{N}\simeq P_{2k,2n}$ dove N è il totale delle passeggiate

Il problema della rovina del giocatore

Supponendo di avere A e B, due giocatori che partono con un capitale iniziale rispettivamente di x ed $N-x$, quindi il capitale totale dei due giocatori è N. In ogni istante tirando una moneta se esce testa A guadagna 1 e B lo perde, e viceversa con croce. La moneta ha probabilità p che esca testa.



Se il capitale x del giocatore A arriva ad N, quello del giocatore B arriva a 0.

La domanda è: sapendo che il capitale di A è inizialmente x, qual'è la probabilità che in un tempo futuro arrivi ad N o a 0?

SIA U_x LA PROBABILITÀ DI ROVINA DEL GIOCATORE A, SE EGLI PARTE CON UN CAPITALE INIZIALE X. IN TAL CASO OVVIAMENTE $U_0 = 1$ E $U_N = 0$.

SUPPONENDO $0 < X < N$ QUANDO ESCE TESTA IL CAPITALE DIVENTA $X+1$ E QUANDO CROCE $X-1$. SIANO ALLORA GLI EVENTI:

E = (PRIMO LANCIO TESTA) $\quad G$ = (ROVINA DEL GIOCATORE A)

$\tilde{E}$ = (EVENTO COMPLEMENTARE DI E, QUINDI NON ESCE TESTA)

FORMULA DELLE PROBABILITÀ TOTALI: $P(G) = P(G|E)P(E) + P(G|\hat{E})P(\tilde{E})$

SAPPIAMO CHE $P(E) = p$ E $P(\tilde{E}) = 1 - p = \tilde{p}$

LA PROBABILITÀ DI ROVINA DEL GIOCATORE IN CASO DI VITTORIA DIVENTA CON CAPITALE $X+1$ ED È UGUALE A PRIMA MA CON UN CAPITALE MAGGIORATO DI 1, VICEVERSA IN CASO DI PERDITA. QUINDI:

$$U_x = p \cdot U_{x+1} + \tilde{p} \cdot U_{x-1}$$

CON $0 < X < N$ E $0 < p < 1$
SAPENDO INOLTRE CHE $p + \tilde{p} = 1$

$$(p + \tilde{p})U_x = p \cdot U_{x+1} + \tilde{p} \cdot U_{x-1}$$

$$p(U_{x+1} - U_x) = \tilde{p}(U_x - U_{x-1})$$

$$U_{x+1} - U_x = \frac{\tilde{p}}{p}(U_x - U_{x-1})$$

SUPPONENDO ORA CHE $p = \frac{1}{2}$ $\quad (E\ \tilde{p} = \frac{1}{2})$

$$U_{x+1} - U_x = U_x - U_{x-1} = \dots = U_1 - U_0$$

SAPPIAMO CHE $U_0 = 1$ E $U_N = 0$

PERCHÉ AVREMO CHE -1 CON $U_N - U_0$ AVREMO $U_1 - U_0 = -\frac{1}{N}$

$$-1 = U_N - U_0 = \sum_{x=1}^{N-1}(U_{x+1} - U_x) = N(U_1 - U_0)$$

$$U_x = U_0 + \sum_{y=0}^{x-1}(U_{y+1} - U_y) = 1 - \frac{X}{N}$$

SE SCRIVO LA SOMMA PER ESTESO: $U_0 + (U_1 - U_0) + (U_2 - U_1) + \dots + (U_x - U_{x-1})$ LA SOMMATORIA SARÀ $-\frac{1}{N}$ PER X VOLTE

LA PROBABILITÀ CHE ALL'INFINITO NESSUNO DEI DUE GIOCATORI SI ROVINI MA RIMANGANO SEMPRE BILANCIATI, È 0. QUESTO PERCHÉ SI HANNO 2 EVENTI INCOMPATIBILI: LA PROBABILITÀ CHE SI ROVINI SOLO A, CHE È $\frac{1}{2}$, LA PROBABILITÀ CHE SI ROVINI SOLO B CHE È $\frac{1}{2}$ E LA LORO SOMMA FA GIÀ 1 QUINDI LA PROBABILITÀ CHE NON SI ROVINI NESSUNO È 0.

TORNANDO A $\boxed{U_x = 1 - \frac{X}{N}}$ LA PROBABILITÀ DI ROVINA TENDERÀ AD 1 ALL'AUMENTARE DI N

SI SUPPONGA PERÒ CHE $p \neq \frac{1}{2}$, DATA LA SEGUENTE SOMMA GEOMETRICA:

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha^k = \frac{\alpha^{N+1} - 1}{\alpha - 1} = \frac{1 - \alpha^{N+1}}{1 - \alpha} \qquad \text{CON } \alpha \neq 1$$

QUINDI $S = \sum_{k=0}^{N} \alpha^k$ MOLTIPLICANDO PER α ENTRAMBI I MEMBRI $\alpha S = \sum_{k=1}^{N+1} \alpha^k \to (\alpha - 1) S = \alpha^{N+1} - 1 \to$

$\to S = \dfrac{\alpha^{N+1} - 1}{\alpha - 1} \to |\alpha| < 1 \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \dfrac{1}{1-\alpha}$

SIA ALLORA $p \neq \frac{1}{2}$ QUINDI $\frac{\tilde{p}}{p} \neq 1$ ALLORA

$$u_{x+1} - u_x = \frac{\tilde{p}}{p}(u_x - u_{x-1}) = \dots = \left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^x (u_1 - u_0)$$

$$u_N = u_0 + \sum_{x=0}^{N-1} (u_{x+1} - u_x) = 1 + \left(\sum_{x=0}^{N-1} \left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^x\right)(u_1 - u_0) = 0$$

$$0 = 1 + \frac{\left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^N - 1}{\frac{\tilde{p}}{p} - 1} (u_1 - u_0) =$$

$$u_1 - u_0 = - \frac{\frac{\tilde{p}}{p} - 1}{\left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^N - 1} =$$

$$u_x = u_0 + \sum_{y=0}^{x-1} \left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^y (u_1 - u_0)$$

$$\boxed{u_x = 1 - \frac{\left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^x - 1}{\left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^N - 1}}$$

SUPPONIAMO $p > \frac{1}{2} \to p > \tilde{p} \to \frac{\tilde{p}}{p} < 1 \quad 1 - \dfrac{\left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^x - 1}{\left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^N - 1}$ PER $N \to \infty \to u_x$ TENDE A $\left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^x$

SUPPONIAMO $p < \frac{1}{2} \to p < \tilde{p} \to \frac{\tilde{p}}{p} > 1 \quad 1 - \dfrac{\left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^x - 1}{\left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^N - 1}$ PER $N \to \infty \to u_x$ TENDE A 1

QUINDI SE p DIMINUISCE È PIÙ PROBABILE CADERE IN ROVINA, E SE p AUMENTA, È MENO PROBABILE

ESEMPIO

$N = 100, \quad p = \frac{1}{3} \quad e \quad \tilde{p} = \frac{2}{3}, \quad x = 50 \qquad \frac{\tilde{p}}{p} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{1} = 2$

$$u_x = 1 - \frac{\left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^{50} - 1}{\left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^{100} - 1} = 1 - \frac{1 - \frac{1}{\left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^{50}}}{\left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^{50} - \frac{1}{\left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^{50}}} = 1 - \frac{1 - \frac{1}{2^{50}}}{2^{50} - \frac{1}{2^{50}}} = \text{TENDE A } 1$$

INIBAGA

LA PROBABILITÀ CHE UN GIOCATORE SI ROVINI CON UNA MONETA CON $p = \frac{1}{3}$ TENDE A 1, QUINDI È QUASI CERTO

PROCESSO DI DIRAMAZIONE DI GALTON-WATSON

CONSISTE NEL PROCESSO PER DESCRIVERE L'EVOLUZIONE DI UNA POPOLAZIONE NEL TEMPO, AD ESEMPIO APPLICABILE AL CALCOLO DELLA PROBABILITÀ DI ESTINZIONE DI UN COGNOME.

SIANO $X_0, X_1, X_2, \dots$ GLI INDIVIDUI DELLA GENERAZIONE $0, 1, 2 \dots$
L'IPOTESI È CHE OGNI INDIVIDUO INDIPENDENTEMENTE DAGLI ALTRI, GENERI UN CERTO NUMERO DI FIGLI, NELLA GENERAZIONE SUCCESSIVA ESSI AVRANNO QUINDI UNA CERTA DISTRIBUZIONE

$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ QUESTA SOMMATORIA È LA PROBABILITÀ CHE UN INDIVIDUO ABBIA K FIGLI.

SUPPONIAMO CHE $X_0 = 1$ E $p_0 > 0$ QUINDI LA GENERAZIONE RADICE, OVVERO LA GENERAZIONE 0 HA UN SOLO INDIVIDUO, ~~SUCCESS~~ IL QUALE HA PROBABILITÀ SEMPRE POSITIVA DI FARE FIGLI. INOLTRE $p_0 + p_1 < 1$

$\sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \mu$ CON $\mu < \infty$ OVVERO LA PREVISIONE DEL NUMERO DEI FIGLI È FINITA

$$\mu = P(X_1)$$

- SUPPONENDO SEMPRE $X_0 = 1$ QUAL'È L'ATTESA DI X_n? OVVERO $P(X_n)$?

SUPPONIAMO X, Y VARIABILI ALEATORIE A VALORI INTERI, ALLORA $P(X|Y=j)$

$$p(i,j) = P(X=i \quad Y=j)$$
$$p_1(i) = P(X=i) = \sum_j p(i,j)$$
$$p_2(j) = P(Y=j) = \sum_i p(i,j)$$

SUPPONIAMO $p_2(j) > 0$

$$P(X=i \mid Y=j) = \frac{p(i,j)}{p_2(j)} = p_{1|2}(i|j)$$

$$P(Y=j \mid X=i) = \frac{p(i,j)}{p_1(i)} = p_{2|1}(j|i)$$

$P(X \mid Y=j) = \sum_i i\, p_{1|2}(i|j)$ OVVERO QUAL'È L'ATTESA DI X SAPENDO CHE $Y=j$?

$$P(Y \mid X=i) = \sum_j j\, p_{2|1}(j|i)$$

INTRODUCIAMO UNA VARIABILE ALEATORIA $P(X|Y)$ CHE ASSUME IL VALORE $P(X|Y=j)$ QUANDO $Y=j$, IN CUI Y PERÒ È SCONOSCIUTO.
SIAMO INTERESSATI SOLO AI VALORI CON PROBABILITÀ POSITIVA: $p_2(j) > 0$

DA QUI: $P(X) = P(P(X|Y))$ QUINDI LA PREVISIONE DI X È UGUALE ALLA PREVISIONE DELLA PREVISIONE DI X DATO Y

$$P(P(X|Y)) = \sum_j P(X|Y=j)\, p_2(j) =$$
$$\sum_j \left(\sum_i i\, p_{1|2}(i|j)\right) p_2(j) =$$
$$\sum_i \sum_j i\, p(i,j) = \sum_i i\, p_1(i) = P(X)$$

$$p_{1|2}(i|j) = \frac{p(i,j)}{p_2(j)}$$
$$\Updownarrow$$
$$p_{1|2}(i|j)\, p_2(j) = p(i,j)$$

TEOREMA

SUPPOSTO CHE $X_0 = 1$ E $\mu = P(X_1) = \sum_k^{\infty} k p_k$

$P(X_n) = \mu^n$

DIMOSTRAZIONE

$P(X_n) = P(P(X_n | X_{n-1})) =$

$P(X_{n-1}\mu) = \mu P(X_{n-1})$

$P(X_1) = \mu$

$P(X_n) = \mu^n$

$P(X_n | X_{n-1} = j) = j\mu$

$P(X_n | X_{n-1}) = X_{n-1}\mu$

QUANDO X_{n-1} È CONOSCIUTO, OVVERO UGUALE A j, ALLORA LA PREVISIONE È $j\mu$, QUANDO È VARIABILE ALEATORIA INVECE È $X_{n-1}\mu$

L'ATTESA DI X_n SE $\mu > 1$ TENDE ALL'INFINITO, SE $\mu = 1$ RIMANE 1 E SE $\mu < 1$ TENDE A 0

CONSEGUENZA

QUANDO $\mu < 1$ ALLORA IL PROCESSO SI ESTINGUE CON PROBABILITÀ 1

$E_n = (X_n = 0)$ È L'EVENTO IN CUI AL TEMPO n NON RIMANGONO PIÙ INDIVIDUI (QUINDI NEANCHE NELLE GENERAZIONI SUCCESSIVE)

$E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$

$$P(E_n) = P(X_n = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P(X_n = k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} k P(X_n = k) = 1 - P(X_n) =$$

$$= 1 - \mu^n \xrightarrow[\text{PER } n \to \infty]{} 1$$

FUNZIONE GENERATRICE

$(X_n)_{n \geq 0}$ $\quad X_n \in \mathbb{R}, \; x_n \in \mathbb{C}$

DATA UNA SUCCESSIONE X_n DEFINIAMO FUNZIONE GENERATRICE DELLA SUCCESSIONE COME:

$$\varphi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n u^n$$

QUANDO LA SERIE CONVERGE

ESEMPIO

DATI $|X_n| \leq 1$ LA FUNZIONE GENERATRICE $\varphi(u)$ È DEFINITA PER $|u| < 1$

! LA FUNZIONE GENERATRICE IDENTIFICA LA SUCCESSIONE, SE CONOSCIAMO LA FUNZIONE POSSIAMO CONOSCERE ANCHE LA SUCCESSIONE.

$$\varphi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n u^n$$

$$X_k = \frac{d^k \varphi}{d u^k}(0) = \frac{1}{k!}$$

DERIVATA K-ESIMA CALCOLATA IN 0

$$X_0 = \varphi(0), \quad \varphi'(u) = \sum_{n=1}^{\infty} n x_n u^{n-1}, \quad \varphi'(0) = x_1$$

$$\frac{d^k \varphi(u)}{d u^k} = \sum_{n=k}^{\infty} x_n (n)_k u^{n-k} \qquad (n)_k = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

$$\varphi^{(k)}(0) = X_k k!$$

CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI X_n È UNA DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ

$X_n \geq 0 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} X_n = 1$

X VARIABILE ALEATORIA $\quad P(X=n) = X_n$

$P(X) = \lim_{u \to 1} \varphi'(u) \qquad \varphi'(u) = \sum_{n=1}^{\infty} n X_n u^{n}$

$P((X)_k) = \lim_{u \to 1} \varphi^{(k)}(u)$

$(x)_k = x(x-1)\dots(x-k+1)$

$\varphi^{(k)}(u) = \sum_{n=k}^{\infty} (n)_k X_k u^{n-k}$

$P((X)_k) = \lim_{u \to 1} \varphi^{(k)}(u) = \sum_{n=k} (n)_k p_n$

- DISTRIBUZIONE BINOMIALE DI PARAMETRI n E p

$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad 0 \leq k \leq n$

$\varphi(u) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$u^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pu)^k (1-p)^{n-k} =$

$= (p \cdot u + (1-p))^n$

FORMULA DI NEWTON
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$\varphi'(u) = np(p \cdot u + (1-p))^{n-1}$

SE $u=1$ $\varphi'(1) = np = P(X)$

PER CALCOLARE LA VARIANZA È POSSIBILE UTILIZZARE LA DERIVATA SECONDA

$\varphi''(1) = P((X)_2) = P(X(X-1)) = P(X^2) - P(X) = n(n-1)p^2$

$\varphi''(u) = n(n-1)p^2 (pu + (1-p))^{n-2}$

$VAR(X) = P(X^2) - P(X)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2$

- DISTRIBUZIONE DI POISSON DI PARAMETRO $\lambda > 0$

$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$\varphi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} u^n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda u)^n}{n!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda u} = e^{\lambda(u-1)}$

QUINDI

$P(X=k) = p_k$

$\varphi'(u) = \lambda e^{\lambda u} e^{-\lambda} \qquad \varphi'(1) = \lambda$

VARIANZA: $\varphi''(u) = \lambda^2 e^{\lambda u} e^{-\lambda} \qquad \varphi''(1) = \lambda^2 = P(X^2) - P(X)$

$Var(X) = P(X^2) - P(X)^2 = (P(X^2) - P(X)) + P(X) - P(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

- DISTRIBUZIONE GEOMETRICA DI PARAMETRO p $\quad 0<p<1$

$P(X=k)=p_k=(1-p)^{k-1}p \qquad k=1,2,\dots$

$\varphi(u)=\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p\,u^k=\sum_{k=1}^{\infty}p\,u((1-p)u)^{k-1}=p\,u\sum_{j=1}^{\infty}((1-p)u)^j=\frac{pu}{1-(1-p)u}$

LA SERIE CONVERGE PER $|u|<\frac{1}{1-p}$

$P(X)=\varphi'(1)$

$\varphi'(u)=\frac{p(1-(1-p)u)+(1-p)pu}{(1-(1-p)u)^2}$

$\varphi'(1)=\frac{p^2+(1-p)p}{p^2}=\frac{p}{p^2}=\frac{1}{p}$

SIANO X,Y VARIABILI STOCASTICHE INDIPENDENTI

$P(X=i,Y=j)=P(X=i)\cdot P(Y=j)$

$\varphi_X(u),\varphi_Y(u)$ SIA $Z=X+Y$ ALLORA $\varphi_Z(u)=P(u^Z)=P(u^{X+Y})=P(u^X\cdot u^Y)=$

$=P(u^X)\cdot P(u^Y)$

QUAL È LA DISTRIBUZIONE DI Z?

CONVOLUZIONE

$P(Z=n)=\sum_{k=0}^{n}P(X=k,Y=n-k)\underset{\text{INDIPENDENTI}}{\overset{\text{ESSENDO}}{=}}\sum_{k=0}^{n}P(X=k)P(Y=n-k)=\sum_{k=0}^{n}p_k\,q_{n-k}$

$p_k=P(X=k) \qquad q_k=P(Y=k)$

ESEMPIO DISTRIBUZIONE BINOMIALE DI PARAMETRI n E p

$\varphi(u)=(pu+(1-p))^n$ $\qquad$ UN SINGOLO EVENTO E: $\varphi_E(u)=1-p+pu$

X POISSON DI PARAM. λ_1 $\qquad$ X E Y VARIABILI ALEATORIE INDIPENDENTI

Y POISSON DI PARAM. λ_2 $\qquad$ $Z=X+Y$

$\varphi_Z(u)=\varphi_X(u)\,\varphi_Y(u)=e^{\lambda_1(u-1)}e^{\lambda_2(u-1)}=e^{(\lambda_1+\lambda_2)(u-1)}$

ESEMPIO DISTRIBUZIONE GEOMETRICA DI PARAMETRO p $\quad 0<p<1$

SIANO X,Y CON DISTRIBUZIONE GEOMETRICA E $Z=X+Y$

$\varphi_Z(u)=\left(\frac{pu}{1-(1-p)u}\right)^2$

IN QUANTO Z È COME LA PROBABILITÀ DEL SUCCESSO DOPO AL PRIMO, QUINDI IL SECONDO (2) SE FOSSE STATO L'R-ESIMO SAREBBE STATO ELEVATO ALLA r

$\varphi_{Z_r}(u)=\left(\frac{pu}{1-(1-p)u}\right)^r$ $\qquad$ $P(Z_r=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}$

SUPPONIAMO DI AVERE UNA SUCCESSIONE $X_1,X_2,X_3,\dots$ i.i.d. CON VALORI INTERI NON NEGATIVI.

SUPPONIAMO DI AVERE N (VARIAB. ALEAT.) A VALORI INTERI NON NEGATIVI INDIPENDENTE DA $(X_1,X_2,\dots)$

DEFINIAMO $Z=\sum_{k=0}^{N} X_k$ (IN CUI SIA N CHE X_k SONO V.A.) LA FUNZIONE GENERATRICE DI Z È:

$\varphi_Z(u)=\varphi_N(\varphi_{X_1}(u))$ FUNZIONE GENERATRICE DI Z È COMPOSIZIONE DELLA FUNZIONE GENERATRICE DI N E X_1 (IN QUANTO È UGUALE PER OGNI X)

$\varphi_Z(u)=P(u^Z)=P(P(u^Z|N))=$

$=P(u^Z|N=k)$ = È COME DIRE CHE SE N=K ALLORA $Z=X_1+\dots+X_k$

$=P(u^{X_1+\dots+X_k}) = P(u^{X_1}\cdot u^{X_2}\cdot\ldots\cdot u^{X_k}) = P(u^{X_1})\cdot P(u^{X_2})\cdot\ldots\cdot P(u^{X_k})$

$=\varphi_{X_1}(u)^k$

SE N NON È CONOSCIUTO, QUINDI $P(u^Z|N)$ = ALLORA $=\varphi_{X_1}(u)^N$

QUINDI $P(P(u^Z|N)) = P(\varphi_{X_1}(u)^N) = \varphi_N(\varphi_{X_1}(u))$

PRENDIAMO N CON DISTRIBUZIONE DI POISSON DI PARAMETRO λ

$E_1, E_2, \dots$ SISTEMA DI BERNOULLI DI PARAMETRO p IN CUI $v = pu+(1-p)$

$Z=\sum_{k=1}^{N} E_k$ $\quad\varphi_Z(u)=e^{\lambda(v-1)}$ = AL POSTO DI v VA LA FUN. GEN. DI E_1 QUINDI:

$= e^{\lambda(pu+(1-p)-1)} = e^{\lambda pu+\lambda(1-p)-\lambda} = e^{\lambda p(u-1)}$

È COME TIRARE UNA MONETA UN CERTO NUMERO ALEATORIO DI VOLTE, IL QUALE HA DISTRIBUZIONE DI POISSON IN λ, CONTANDO IL NUMERO DEI SUCCESSI OTTENUTI, ALLORA I SUCCESSI HANNO DISTRIBUZIONE DI POISSON CON PARAMETRO λp

---

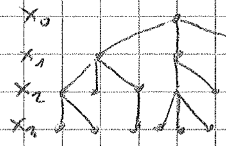
PROCESSO DI GALTON-WATSON

$\varphi(u)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k u^k$ $\quad\varphi(u)=\varphi_{X_1}(u)$ $\quad X_0=1$

DATO $X_n = X_n^{(1)}+\dots+X_n^{(X_1)}$ INDIVIDUI NELLA N-ESIMA GENERAZIONE

$\varphi_{X_n}(u)=\varphi_{X_1}(\varphi_{X_{n-1}}(u))$

$\varphi_{X_n}(u)=\underbrace{\varphi_{X_1}\circ\varphi_{X_1}\circ\ldots\circ\varphi_{X_1}}_{n}(u)$



LA FUNZIONE GENERATRICE DATI p_0, p_1, p_2 INDICA LA PROBABILITÀ CHE UN INDIVIDUO i ABBIA FIGLI, DI CONSEGUENZA $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$

ESEMPIO

$\varphi(s)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}s^2+\frac{1}{6}s^3$ CON $p_0=\frac{1}{2}, p_1=0, p_2=\frac{1}{3}, p_3=\frac{1}{6}$ = SOMMA = 1

$P(X_3=2)$ PROBABILITÀ CHE VI SIANO 2 INDIVIDUI ALLA III GENERAZIONE

$\varphi_{X_2}(s)=\varphi(\varphi(s)) = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}s^2+\frac{1}{6}s^3\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}s^2+\frac{1}{6}s^3\right)^3$

$\varphi_{X_3}(s)=\varphi(\varphi_{X_2}(s))$ = UGUALE A PRIMA, AL POSTO DELLE S SOSTITUIRE CON $\varphi(s)$

$P(X_n) = \mu^n$

$\varphi_{X_n}(s) = \varphi \cdot \varphi_{X_{n-1}}(s)$ COMPONENDO LA FUNZIONE GENERATRICE È POSSIBILE OTTENERE L'ATTESA TROVANDO LA DERIVATA PRIMA

$\varphi'_{X_n}(s) = \varphi'(\varphi_{X_{n-1}}(s)) \cdot \varphi'_{X_{n-1}}(s)$

PER LA VARIANZA SI CALCOLA LA DERIVATA SECONDA CHE TENDE A 1: $\varphi''(1-) < +\infty$

$$\varphi''(1-) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, p_k < +\infty$$

$$P(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot p_k$$

$VAR(X_1)$

$P(X_n(X_n-1))$ CALCOLABILE CON LA FUNZIONE GENERATRICE:

$\varphi''_{X_n}(1-)$

$\to \varphi'_{X_n}(u) = \varphi'(\varphi_{X_{n-1}}(u))\, \varphi'_{X_{n-1}}(u)$

$\to \varphi''_{X_n}(u) = \varphi''(\varphi_{X_{n-1}}(u))\, \varphi'_{X_{n-1}}(u)^2 + \varphi'(\varphi_{X_{n-1}}(u))\, \varphi''_{X_{n-1}}(u)$

SIANO $\rho = \varphi''(1-)$ E $\sigma_n = \varphi''_{X_n}(1-)$ SE SI FA TENDERE u A 1 IN $\varphi''_{X_n}(u)$ QUEST'ULTIMO TENDERÀ A σ_n, INFATTI:

$\sigma_n = \rho\mu^2 + \mu\sigma_{n-1}$ QUESTA RICORRENZA SE VIENE DIVISA PER μ^n SI HA:

$\xi_n = \frac{\sigma}{\mu^n}$ $\quad \xi_n = \rho\mu^{2-n} + \xi_{n-1} = \rho\mu^{2-n} + \rho\mu^{2-(n-1)} + \xi_{n-2}$ = E COSÌ VIA FINO A 0

SE CONOSCO L'ATTESA $P(X_n(X_n-1))$ LA VARIANZA DI X_n È

$VAR(X_n) = \sigma_n + \mu^n - \mu^{2n}$ CON $\mu < 1$ OPPURE $\mu = 1$ O $\mu > 1$

- CASO $\mu = 1$

$\xi = nP = \sigma_n$

LA VARIANZA CALCOLATA CON LA FUNZIONE GENERATRICE PERMETTE DI CALCOLARE LA PROBABILITÀ DI ESTINZIONE.

LE IPOTESI FATTE SONO $p_0 > 0$ E $p_0 + p_1 < 1$

LA PROBABILITÀ CHE SI ESTINGUA ALLA PRIMA GENERAZIONE È p_0, ALLA SECONDA È $p_1 \cdot p_0$, ALLA TERZA È $p_1^2 \cdot p_0$, ECCETERA. QUINDI

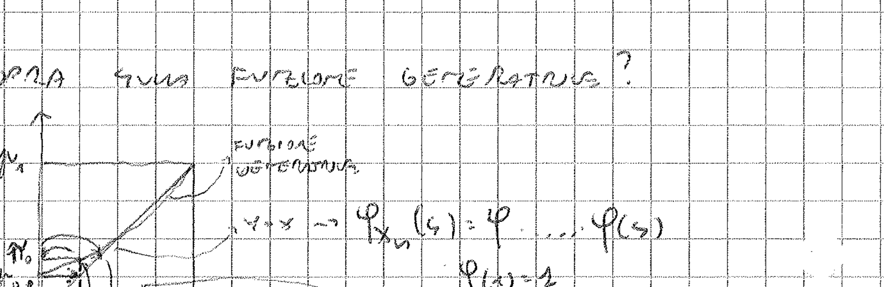
$$p_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_1^k\right) = \frac{p_0}{1-p_1}$$

COSA IMPLICANO LE IPOTESI SOPRA SULLA FUNZIONE GENERATRICE?

$p_0 = \varphi(0)$

$$\varphi''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot s^{k-2} \cdot p_k$$

LA DERIVATA SECONDA È POSITIVA SE LA CURVA DEL GRAFICO È POSITIVA



SIA $\pi_n = P(X_n = 0)$ PROBABILITÀ CHE AL TEMPO n SI SIA ESTINTA $\pi_n = \varphi_{X_n}(0)$

$\tilde{\pi}_n = P(E_n)$ DIMOSTRAZIONE

$E_n = (X_n = 0) \qquad E_n \uparrow E$

$\tilde{\pi}_n \uparrow \tilde{\pi} \quad E = $ (ESTINZIONE)

$\tilde{\pi} = P(E) \qquad \tilde{\pi}_n = \varphi(\tilde{\pi}_{n-1}) \qquad \tilde{\pi}_n = \overbrace{\varphi \cdot \ldots \cdot \varphi}^{n}(0) = \varphi(\overbrace{\varphi \cdot \ldots \cdot \varphi}^{n-1}(0)) = \ldots$

$\tilde{\pi} = \varphi(\tilde{\pi})$

SE CONSIDERO $\tilde{\tilde{\pi}}$ LA PIÙ PICCOLA SOLUZIONE DI $\tilde{\pi} = \varphi(\tilde{\pi})$ ALLORA $0 < \tilde{\tilde{\pi}}$; SE APPLICO φ A TUTTE E DUE LE PARTI OTTENGO:

$p_0 = \tilde{\pi}_1 < \tilde{\tilde{\pi}}$

$= \tilde{\pi}_2 < \tilde{\tilde{\pi}}$

$=$ ECCETERA, QUINDI $\tilde{\pi}_n$ È SEMPRE PIÙ PICCOLO DI $\tilde{\tilde{\pi}}$: $\tilde{\pi}_n < \tilde{\tilde{\pi}}$

- CASO DI $\mu > 1$

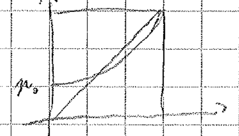
SAPPIAMO CHE φ È UN GRAFICO CONVESSO, E TALE GRAFICO NON PUÒ AVERE PIÙ DI 2 INTERSEZIONI CON UNA RETTA.

SE $\mu = \varphi'(1+) > 1$ $\qquad \varphi(1) = 1$

ALLORA $\varphi(u) + \int_u^1 \varphi'(s)\,ds = \varphi(1) = 1$

$\varphi(1) = \varphi(u) + \int_u^1 \varphi'(s)\,ds \rightarrow \varphi(u) = 1 - \int_u^1 \varphi'(s)\,ds$ SE $\varphi'(1) = \mu > 1$

ALLORA $\exists\, \delta$ t.c. $\varphi'(s) > 1$ CON $\delta < s < 1$

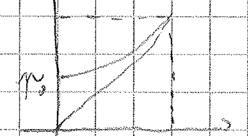


$\varphi(u) = 1 - \int_u^1 \varphi'(s)\,ds < 1 - \int_u^1 1\,ds = 1 - (1-u) = u$

- CASO DI $\mu \leq 1$

IN CUI $\mu = \varphi'(1+) \leq 1$ LA FUNZIONE φ È STRETTAMENTE CONVESSA, QUINDI

$\mu \Rightarrow \varphi'(u) < 1$ PER $u < 1$



$\varphi(u) = 1 - \int_u^1 \varphi'(s)\,ds > 1 - \int_u^1 1\,ds = 1-(1-u) = u$

CON $\mu = 1$ LE GENERAZIONI RIMANGONO EQUILIBRATE, OVVERO DA 1 FIGLIO E COSÌ VIA

ESEMPIO

$p_0 = \frac{1}{2},\ p_1 = \frac{1}{4},\ p_2 = \frac{1}{4}$ PRIMA COSA DA VEDERE È COME RISULTA μ

$\mu = \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ QUINDI $\mu < 1 \Rightarrow \tilde{\pi} = 1$ PROBABILITÀ DI ESTINZIONE È $= 1$

UGUALE NEL CASO IN CUI μ FOSSE STATO $=$

ESEMPIO

$p_0 = \frac{1}{3},\ p_1 = 0,\ p_2 = \frac{1}{3},\ p_3 = \frac{1}{3}$

CALCOLO $\mu = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{5}{3} > 1$ QUINDI LA PROBABILITÀ DI ESTINZIONE È

< 1, PER CALCOLARLA PRENDIAMO LA FUNZIONE GENERATRICE $\varphi(s) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}s^2 + \frac{1}{3}s$

E DOBBIAMO TROVARE LA PIÙ PICCOLA SOLUZIONE PER L'EQUAZIONE $\varphi(s) = s$

$\frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{3}s^2 + \frac{1}{3} - s = 0$

$s^3 + s^2 - 3s + 1 = 0$ EQUAZIONE DI III GRADO

$(s-1)(s^2 + As + B) = s^3 + s^2 - 3s + 1$

$s^3 + As^2 + Bs - s^2 - As - B$ $\quad A - 1 = 1 \quad B - A = -3 \quad -B = 1 \quad B = -1 , A = 2$

$s^2 + 2s - 1 = 0$ (EQUAZIONE DI II GRADO A PARTIRE DA QUELLA DI III)

$\hookrightarrow s = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \boxed{-1 \pm \sqrt{2}} = \tilde{\pi}$ PROBABILITÀ DI ESTINZIONE

ESEMPIO

SIA $q_0 = p_0$, $q_1 = p_0 + p_1$, $q_k = p_0 + \dots + p_k$

PRENDENDO U CON LEGGE UNIFORME IN $[0,1]$ ALLORA SE $U \leq q_0$ AVREMO $X=0$, SE $q_0 < U \leq q_1$ AVREMO $X=1$, SE $q_{k-1} < U \leq q_k$ AVREMO $X=K$

CATENE DI MARKOV

CON QUESTO MODELLO DI PROCESSO STOCASTICO SI INTRODUCE IL CONCETTO DI DIPENDENZA TRA VARIABILI ALEATORIE AL VARIARE DEL TEMPO.

IL PROCESSO PIÙ SEMPLICE È RAPPRESENTATO DALLO SCHEMA DI BERNOULLI, AD ESEMPIO IL LANCIO DI UNA MONETA CONSISTE IN UNA SERIE DI EVENTI EQUIPROBABILI E STOCASTICAMENTE INDIPENDENTI, AL VARIARE DEL TEMPO; AL TEMPO I-ESIMO LA PROBABILITÀ DI QUELL'EVENTO È UGUALE A PRESCINDERE DAGLI EVENTI PASSATI, IN QUANTO INDIPENDENTI E IDENTICAMENTE DISTRIBUITI.

IL PROBLEMA È TROVARE MODELLI IN CUI SI HA UNA DIPENDENZA DAGLI EVENTI PASSATI, MA CON UN TEMPO TRATTABILE.

CATENE DI MARKOV OMOGENEE CON UN NUMERO FINITO O UN'INFINITÀ NUMERABILE DI STATI

UN ESEMPIO È LA SUCCESSIONE DELLE LETTERE DI UN TESTO. SIANO:

- S: LO SPAZIO DEGLI STATI (INSIEME FINITO O NUMERABILE)
- ρ_s: LA DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ INIZIALE (CON $s \in S$) $\rightarrow \sum_{s \in S} \rho_s = 1$
- $p_{s,s'}$: LA MATRICE DI TRANSIZIONE ($\forall_s \in S$ CON $s, s' \in S$ E $0 \leq p_{s,s'} \leq 1$) $\rightarrow \sum_{s' \in S} p_{s,s'} = 1$

È POSSIBILE DEFINIRE UNA SUCCESSIONE INFINITA DI VARIABILI ALEATORIE SPECIFICANDO LA DISTRIBUZIONE DELLE PRIME N.

DATE QUINDI: $X_0, X_1, X_2, \dots$

$$P(X_0 = s_0, X_1 = s_1, \dots, X_n = s_n) = \rho_{s_0} p_{s_0,s_1} p_{s_1,s_2} \dots p_{s_{n-1},s_n}$$

SE INVECE DI CONSIDERARE I PRIMI n ELEMENTI, CONSIDERASSIMO I PRIMI $n+1$

$$P(X_0 = s_0, X_1 = s_1, \dots, X_n = s_n, X_{n+1} = s_{n+1}) = \rho_{s_0} p_{s_0,s_1} \dots p_{s_{n-1},s_n} p_{s_n,s_{n+1}}$$

GLI STATI DEVONO ESSERE COMPATIBILI, PERCHÉ CONOSCENDO n ANCHE $n+1$ È CONOSCIUTO. QUESTI DATI X_n NON SONO INDIPENDENTI, HANNO UNA PROPRIETÀ CHIAMATA DI MARKOV.

- **PROPRIETÀ DI MARKOV**

$$P(X_{n+1} = s' \mid X_0 = s_0, \dots, X_{n-1} = s_{n-1}, X_n = s_n)$$

RISOLVENDO: $\dfrac{P(X_0 = s_0, \dots, X_{n-1} = s_{n-1}, X_n = s_n, X_{n+1} = s')}{P(X_0 = s_0, \dots, X_{n-1} = s_{n-1}, X_n = s')}$ ← PROBABILITÀ CHE SI VERIFICHINO ENTRAMBI / ← PROBABILITÀ CHE SI VERIFICHI SOLO IL SECONDO

$$= \frac{p_{s_0}\, p_{s_0,s_1} \cdots p_{s_{n-1},s}\, p_{s,s'}}{p_{s_0}\, p_{s_0,s_1} \cdots p_{s_{n-1},s}} = p_{s,s'}$$ ← PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE DA UNO STATO s AD UNO STATO s'

! LA PROBABILITÀ CHE LA CATENA AL TEMPO $n+1$ SIA NELLO STATO s' SAPENDO TUTTO QUELLO CHE È SUCCESSO PRIMA (GLI STATI PASSATI), DIPENDE IN REALTÀ SOLO DALLO STATO PRECEDENTE.

L'OMOGENEITÀ È DATA DAL FATTO CHE APPUNTO $p_{s,s'}$ NON DIPENDE DA n, QUINDI È OMOGENEA NEL TEMPO.

- LE CATENE DI MARKOV HANNO 2 STATI:

$S = \{0, 1\}$ CON DISTRIBUZIONI INIZIALI p_0, p_1

LA MATRICE DI TRANSIZIONE È: $\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$ CON $0 \le p, q \le 1$

↳ MATRICE STOCASTICA IN CUI TUTTE LE COMPONENTI SONO COMPRESE TRA 0 E 1 E LA SOMMA DELLE RIGHE È = 1

UN ESEMPIO PUÒ ESSERE UNA MACCHINA CHE FUNZIONA O MENO AL VARIARE DEL TEMPO

$P(X_2 = s' \mid X_0 = s)$ $\qquad P(X_0 = s) = p_s$

$$= \frac{P(X_0 = s, X_2 = s')}{P(X_0 = s)} = \frac{\sum_{s_1 \in S} P(X_0 = s, X_1 = s_1, X_2 = s')}{P(X_0 = s)} = \frac{\sum_{s_1 \in S} p_s\, p_{s,s_1}\, p_{s_1,s'}}{p_s}$$

SOMMA DI TUTTI I POSSIBILI STATI CHE PUÒ ASSUMERE X_1

$$= \sum_{s_1 \in S} p_{s,s_1}\, p_{s_1,s'} = p^{(2)}_{s,s'}$$ (PROBABILITÀ DI PASSARE DALLO STATO s AD s' IN 2 PASSI)

SE INVECE DI UTILIZZARE IL TEMPO 0 SI UTILIZZASSE IL TEMPO n

$$P(X_{n+2} = s' \mid X_n = s) = p^{(2)}_{s,s'}$$

SE INVECE DI CONSIDERARE 2 TEMPI SE NE CONSIDERASSERO K

$$P(X_{n+k} = s' \mid X_n = s) = \sum_{s_1, \dots, s_{k-1}} p_{s,s_1}\, p_{s_1,s_2} \cdots p_{s_{k-1},s'} = p^{(k)}_{s,s'}$$

$$p^{(2)}_{s,s'} = \sum_{s_1} p_{s,s_1}\, p_{s_1,s'} = (\Pi^2)_{s,s'}$$ TUTTI I VALORI ASSUMIBILI DA s_1 $\qquad \Pi = (p_{s,s'})$

$\sum p_{s,s_1} p_{s_1,s'}$ È IL PRODOTTO RIGA PER COLONNA DELLA MATRICE

IN GENERALE $p^{(k)}_{s,s'} = (\Pi^k)_{s,s'}$ CON $0 \le p^{(k)}_{s,s'} \le 1$ $\quad \sum_{s'} p^{(k)}_{s,s'} = 1$

CATENA DI MARKOV A 2 STATI

$S = \{0, 1\}$ $\quad p_0, p_1$ $\quad \Pi = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$

$$p^{(n)}_{0,0} = (\Pi^n)_{0,0} = (\Pi^{n-1} \cdot \Pi)_{0,0} = \sum_s p^{(n-1)}_{0,s}\, p_{s,0} = p^{(n-1)}_{0,0}\, p + p^{(n-1)}_{0,1} (1-q) =$$

$$p^{(n-1)}_{0,0}\, p + (1 - p^{(n-1)}_{0,0})(1-q) = p^{(n-1)}_{0,0}(p + q - 1) + (1-q) =$$

$$= p_{0,0}^{(n-2)}(p+q-1)^2 + (1-q)(p+q-1) + (1-q) = p_{0,0}^{(n-k)}(p+q-1)^k + (1-q)\sum_{j=0}^{k-1}(p+q-1)^j =$$

$$= \sum_s p_{0,s}^{(n-2)} - (p+q-1)^n + (1-q)\cdot\frac{1-(p+q-1)^n}{1-(p+q-1)}$$

Siccome $0<p<1$ e $0<q<1$ allora sicuramente $0<p+q<2$ e $0<p+q-1<1$ facendo tendere n all'infinito i valori elevati alla n tendono a 0, all'aumentare di n verso infinito le probabilità convergono.

• Passeggiata aleatoria vista come catena di Markov

Es. di distribuzione iniziale

$\rho_0 = 1$, $\rho_s = 0 \quad s \neq 0 \quad S = \mathbb{Z}$

$p_{s,s+1} = p \quad p_{s,s-1} = 1-p \quad p_{s,s'} = 0$ per $s' \neq s+1, s-1$

Se calcoliamo la probabilità di andare da s a s' in 2 passi

$p_{s,s'}^{(2)} = \sum_{s_1} p_{s,s_1} p_{s_1,s'}$ (possibili traiettorie della passeggiata aleatoria: DX SX, SX DX, DX DX, SX SX)

$p_{s,s}^{(2)} = 2p(1-p)$ e $p_{s,s+2}^{(2)} = p^2 \quad p_{s,s-2}^{(2)} = (1-p)^2$

$p_{s,s+k}^{(n)} = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}}$ sapendo che $a+b=n \Rightarrow a-b=k \rightarrow a = \frac{n+k}{2}$

• Rovina del giocatore vista come catena di Markov

$S = \{0, \dots, N\}$ con $0 < s < N \qquad p_{0,0} = 1$ e $p_{N,N} = 1$

$p_{s,s+1} = p \quad p_{s,s-1} = 1-p \quad p_{s,s'} = 0$ per $s \neq s+1, s-1$

→ capitale iniziale prima scommessa

$p_{0,s} = 0 \quad s \neq 0 \quad p_{N,s} = 0 \quad s \neq N \qquad \rho_{\bar{s}} = 1 \quad \rho_s = 0 \quad s \neq \bar{s}$

• Processo di diramazione di Galton-Watson visto come catena di Markov

$S = \mathbb{N} \qquad X_0, X_1, X_2, \dots \qquad \rho_1 = 1$ al tempo zero si parte con un solo individuo (stato iniziale 1 figlio con probabilità 1).

$p_{s,s'}$ = probabilità di passare dallo stato s a s'
è la somma delle singole probabilità degli s individui, in quanto indipendenti tra loro

$$\varphi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k u^k$$

La funzione generatrice per $p_{s,s'}$ è $\varphi(u)^s$ per sapere i figli calcolo la derivata

$$p_{s,s'} = \frac{d^{s'}\varphi^s(u)}{du^{s'}} \cdot \frac{1}{s'!}$$

Esempio

Supponiamo di avere 2 urne A e B in cui vi sono 3 palline bianche e 3 nere distribuite, 3 nell'urna A e 3 nell'urna B. Ogni volta se ne estrae una dall'urna A e una dall'urna B e vengono scambiate.
Lo stato è il numero di palline bianche nell'urna A.

$S = \{0,1,2,3\}$ valori del n° di palline bianche nell'urna A

$p_{s,s+1}$ = probabilità di estrarre una pallina nera dall'urna A $= \frac{3-s}{3} \cdot \frac{3-s}{3}$

$p_{s,s+1} = \left(\frac{3-s}{3}\right)^2$ VERO PER $0 \le s \le 2$

QUAL'È LA PROBABILITÀ CHE IL NUMERO DI PALLINE BIANCHE NON CAMBI?

$$p_{s,s} = \frac{s}{3}\cdot\frac{3-s}{3} + \frac{3-s}{3}\cdot\frac{s}{3} = 2\cdot\frac{s(3-s)}{9}$$

$$p_{s,s-1} = \frac{s}{3}\cdot\frac{s}{3} = \left(\frac{s}{3}\right)^2$$

• CLASSIFICAZIONE DEGLI STATI

$s \le s'$ SIGNIFICA s COMUNICA CON s' SE $\exists n \ge 0$ t.c. $p^{(n)}_{s,s'} > 0$

$p^{(n)}_{s,s'} = \sum_{s_1,\dots,s_n} p_{s,s_1} p_{s_1,s_2} \cdots p_{s_{n-2},s_{n-1}} p_{s_{n-1},s'}$ È ILLUSTRABILE CON UN GRAFO DIR. IN CUI $s_1 \to s_2$ SE $p_{s_1,s_2} > 0$

DEVE ESISTERE ALMENO UN CAMMINO IN CUI $p^{(n)}_{s,s'}$ È TUTTA POSITIVA, QUINDI NEL GRAFO C'È UN CAMMINO

$$p^{(0)}_{s,s'} = \begin{cases} 1 & \text{SE } s'=s \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

PROPRIETÀ

- SE $s \le s'$ E $s' \le s''$ ALLORA $s \le s''$ (COMUNICA)
- s SI DICE EQUIVALENTE AD s' ($s \simeq s'$) SE $s \le s'$ E $s' \le s$
  ↳ SI DEDUCE CHE $s \le s$ E $s \simeq s$
- SE $s \simeq s'$ E $s' \simeq s''$ ALLORA $s \simeq s''$ (PROPR. TRANSITIVA)
- SE $s \simeq s'$ ALLORA $s' \simeq s$

• CLASSI DI EQUIVALENZA

$[s] = \{ s' \mid s' \simeq s \}$

$[s] \le [s']$ SE $s \le s'$

$s_1 \simeq s$ E $s_1' \simeq s'$ PER LA PROPRIETÀ TRANSITIVA $s_1 \le s_1'$
INFATTI $[s] = [s_1]$ E $[s'] = [s_1']$

- UNA CATENA DI MARKOV CON UNA SOLA CLASSE DI EQUIVALENZA SI DICE IRRIDUCIBILE (ES. PASSEGGIATA ALEATORIA)

- UNA CLASSE $[s]$ SI DICE MASSIMALE SE NON COMUNICA CON ALTRE CLASSI. LA CATENA DI MARKOV UNA VOLTA CHE ARRIVA IN UNA CLASSE MASSIMALE NON PUÒ PIÙ USCIRE.

NEL CASO DELLA ROVINA DEL GIOCATORE ABBIAMO $S = \{0, 1, \dots, N-1, N\}$
LE CLASSI SARANNO $\{0\}, \{N\}, \{1, 2, \dots, N-1\}$ GLI STATI 0 ED N NON COMUNICANO CON ALTRI STATI, QUINDI SONO CLASSI MASSIMALI $\{0\}$ E $\{N\}$

MENTRE LA CLASSE $\{1, 2, \dots, N-1\}$ COMUNICA SIA CON LA CLASSE $\{0\}$ CHE CON LA CLASSE $\{N\}$.

$$\{1, \dots, N-1\} \le \{0\}, \quad \{1, \dots, N-1\} \le \{N\}$$

DATA Π MATRICE DI TRANSIZIONE ED S L'INSIEME DEGLI STATI, SIA $s \in S$

→ TUTTI I NUMERI DI PASSI PER CUI LA PROBABILITÀ DI PASSARE DA s AD s IN n PASSI È > 0

$A^+_s = \{ n > 0 \mid p^{(n)}_{s,s} > 0 \}$ SI DEFINISCE IL PERIODO DI s COME $MCD(A^+_s)$

SUPPONIAMO CHE $A^+_s \neq \emptyset$, SE $h_1, h_2 \in A^+_s$ ALLORA $h_1 + h_2 \in A^+_s$

$$p^{(h_1+h_2)}_{s,s} = \left(\Pi^{h_1+h_2}\right)_{s,s} = \left(\Pi^{h_1}\Pi^{h_2}\right)_{s,s} = \sum_{s'} p^{(h_1)}_{s,s'} p^{(h_2)}_{s',s} > 0$$

ESEMPI DI PERIODI

CONSIDERIAMO LA PASSEGGIATA ALEATORIA SU $\mathbb{Z}$ E LO STATO $s = 0$, PER QUALI VALORI $p^{(n)}_{0,0} > 0$ (PER TORNARE A 0 IL NUMERO TOTALE DEI PASSI DEVE ESSERE PARI, QUINDI $A^+_0 \subset 2\mathbb{Z}$ (MULTIPLI DI 2))

$p^{(2)}_{0,0} = p(1-p) > 0$ TUTTAVIA 2 È UN DIVISORE, QUINDI $2 \in A^+_0$

SE INVECE CHE CONSIDERARE LA PASSEGGIATA ALEATORIA SU TUTTO $\mathbb{Z}$, LA CONSIDERASSIMO SOLO SU UN INTERVALLO $[a,b]$:

$[a,b] \subset \mathbb{Z}$ CON CONDIZIONI PERIODICHE, OVVERO LA PROBABILITÀ DI ANDARE DA b AD a È UGUALE A p E LA PROBABILITÀ DI ANDARE DA b A $b-1$ È $1-p$:

$p_{b,a} = p$; $p_{b,b-1} = 1-p$; $p_{a,a+1} = p$; $p_{a,b} = 1-p$

(COME SE GLI STATI FOSSERO DISPOSTI SU UN CERCHIO)

QUAL È IL PERIODO DI x CON $x \in [a,b]$?

INNANZITUTTO BISOGNA DISTINGUERE SE IL NUMERO DI STATI È PARI O DISPARI

↳ SE IL N° DEGLI STATI È PARI → IL PERIODO DI x È 2, INFATTI PER TORNARE SULLO STATO POSSO FARE UN CERTO NUMERO DI GIRI O TORNARE INDIETRO TANTI PASSI QUANTI NE SONO STATI FATTI IN AVANTI.

↳ SE IL N° DEGLI STATI È DISPARI → IL PERIODO DI x È 1 IN QUANTO 2 FA PARTE DELL'INSIEME, IL MCD PUÒ ESSERE O 2 O 1, MA FACENDO UN NUMERO DISPARI DI PASSI, RITORNO, 2 FA PARTE DELL'INSIEME QUINDI IL PERIODO È 1

! UNO STATO CON PERIODO 1 È CHIAMATO PERIODICO

NOTA: TUTTI GLI STATI CHE APPARTENGONO AD UNA CLASSE DI EQUIVALENZA HANNO LO STESSO PERIODO. SE $s \approx s'$ ALLORA IL PERIODO DI s È UGUALE A QUELLO DI s'.

SE q PERIODO DI s E q' PERIODO DI s', $\exists h_1 : p^{(h_1)}_{s,s'} > 0$ E $\exists h_2 : p^{(h_2)}_{s',s} > 0$

ALLORA → $p^{(h_1+h_2)}_{s,s} > 0$ E ANCHE CHE $p^{(h_1+h_2)}_{s',s'} > 0$ INOLTRE $h_1 + h_2 \in A^+_s \cap A^+_{s'}$

$h_1 + h_2$ È DIVISIBILE SIA PER q CHE PER q'

SUPPONIAMO DI PRENDERE UN QUALSIASI ELEMENTO $m \in A^+_s$ $m + h_1 + h_2 \in A^+_{s'}$

QUINDI m È MULTIPLO SIA DI q CHE DI q', SE $m' \in A^+_{s'}$ m' È MULTIPLO DI q

STATI RICORRENTI E TRANSIENTI

GLI STATI DI UNA CATENA DI MARKOV POSSONO ESSERE SUDDIVISI IN RICORRENTI E TRANSIENTI.

$$f^{(n)}_{s,s'} = P(X_n = s', X_1 \neq s', \dots, X_{n-1} \neq s' \mid X_0 = s)$$

PROBABILITÀ CHE PARTENDO DA s, SI ARRIVI AD s' DOPO n PASSI PER LA PRIMA VOLTA.

$$f^{(n)}_{s,s'} \le p^{(n)}_{s,s'} \qquad f_{s,s'} = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}_{s,s'}$$

PROBABILITÀ CHE ARRIVI DA s AD s' IN UN CERTO NUMERO DI PASSI. QUELLI SOMMATI SONO TUTTI EVENTI INCOMPATIBILI, IN QUANTO SE ARRIVO AD UN CERTO N° DI PASSI AD s' PER LA PRIMA VOLTA, LE ALTRE SARANNO NULLE.

PER ABBREVIARE $f^{(n)}_s = f^{(n)}_{s,s} \to f_s = f_{s,s}$

EQUAZIONE DEL RINNOVAMENTO

$$p^{(n)}_{s,s'} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{f^{(k)}_{s,s'}\, p^{(n-k)}_{s',s'}}$$

QUESTA FORMULA COLLEGA LA PROBABILITÀ DI PASSARE DA s AD s' CON LA PROBABILITÀ DI ARRIVARE DA s A s' PER LA PRIMA VOLTA.

→ PROBABILITÀ DI ANDARE DA s AD s' IN n PASSI ED ARRIVARCI PER LA PRIMA VOLTA IN k PASSI, E DOPO $n-k$ PASSI RITORNO DA s' AD s'

RINNOVAMENTO

$$p^{(n)}_{s,s} = \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}_s\, p^{(n-k)}_{s,s}$$

- LO STATO s SI DICE <u>RICORRENTE</u> SE $f_s = 1$ → PROB. DI TORNARE ALLO STATO s È CERTA
- LO STATO s SI DICE <u>TRANSIENTE</u> SE $f_s < 1$

SE s È RICORRENTE TORNA ALLO STATO s CON PROBABILITÀ 1, QUINDI LA CATENA DI MARKOV TORNA INFINITE VOLTE AD s

SIA $f^{(n_1,n_2)}_s = P(X_{n_1} = s, X_{n_1+1} \neq s, \dots, X_{n_2-1} \neq s, X_{n_2} = s, X_{n_2+1} \neq s \mid X_0 = s)$

PROBABILITÀ DI TORNARE AD s PER LA PRIMA VOLTA AL TEMPO n_1 E DI TORNARCI PER LA SECONDA VOLTA AL TEMPO n_2

- QUINDI È LA PROBABILITÀ DI TORNARE AD s ALMENO 2 VOLTE PARTENDO DA s È $\sum_{1 \le n_1 < n_2} f^{(n_1,n_2)}$

• SE UNO STATO È RICORRENTE

$$f^{(n_1,n_2)}_s = f^{(n_1)}_s f^{(n_2-n_1)}_s = \sum_{n_1 \ge 1} \sum_{k=1}^{\infty} f^{(n_1)}_s f^{(k)}_s = \left(\sum_{n_1} f^{(n_1)}_s\right)\left(\sum_{k} f^{(k)}_s\right) = 1$$

• SE UNO STATO È TRANSIENTE

N_s È IL NUMERO DI RITORNI AD s, ALLORA $P(N_s < +\infty \mid X_0 = s) = 1$

$$P(N_s \ge k \mid X_0 = s) = f^{(k)}_s \qquad (N_s = \infty) = \bigcap (N_s \ge k)$$

$$P(N_s = \infty \mid X_0 = s) = \inf f^{(k)}_s = 0$$

DIM. $P_s(N_s) = P(N_s \mid X_0 = s) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, P_s(N_s = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} 1\right) P_s(N_s = k) =$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k \ge j} P_s(N_s = k) = \sum_{j=1}^{k} P_s(N_s \ge j) = \sum_{j=1}^{\infty} f^{j}_s = \frac{f_s}{1 - f_s}$$

SE UNO STATO È RICORRENTE O TRANSIENTE, TUTTI GLI STATI DELLA STESSA CLASSE SARANNO RICORRENTI O TRANSIENTI.

SIA s RICORRENTE, SE $s \leq s'$ ALLORA $s' \leq s$ ED $s \simeq s'$. SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE $s' \not\leq s$, ALLORA $\exists n_1$ t.c. $p^{(n_1)}_{s,s'} > 0$ PERÒ DATO CHE $s' \not\leq s$ SI ARRIVA AD UN ASSURDO PERCHÉ CON PROBABILITÀ POSITIVA TORNERÀ AD s SOLO UN NUMERO FINITO DI VOLTE, MA IN UNO STATO RICORRENTE SI TORNA AD s INFINITE VOLTE.

CIÒ CI DICE CHE SE UNO STATO È RICORRENTE LA SUA CLASSE DI EQUIVALENZA È MASSIMALE: $[s] = \{s' \mid s' \simeq s\}$ È UNA CLASSE MASSIMALE.

SUPPONIAMO $s' \leq s''$ ED $s'' \notin [s]$ MA $s' \in [s]$ ALLORA $s \leq s''$ PER LA PROPRIETÀ TRANSITIVA, SI ARRIVA AD UN ASSURDO PERCHÉ UNO STATO RICORRENTE PUÒ COMUNICARE SOLO CON STATI NELLA STESSA CLASSE DI EQUIVALENZA.

! s È RICORRENTE SE E SOLO SE $\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}_{s,s} = \infty$ OVVERO DIVERGENTE
! s È TRANSIENTE SE E SOLO SE $\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}_{s,s} < \infty$ OVVERO CONVERGENTE

SIA $F(u) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}_s u^n$ FUNZIONE GENERATRICE E $U(u) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}_{s,s} u^n$ FUNZIONE GENERATRICE CON $p^{(n)}_{s,s} = \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}_s p^{(n-k)}_{s,s} \Rightarrow U(u) = 1 + F(u)U(u)$

DIMOSTRAZIONE

$$U(u) = 1 + F(u)U(u) = 1 + \left(\sum_{j=1}^{\infty} f^{(j)}_s u^j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} p^{(k)}_{s,s} u^k\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n} f^{(j)}_s p^{(n-j)}_{s,s}\right)u^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}_{s,s} u^n = U(u)$$

$\hookrightarrow = p^{(0)}_{s,s} = 1$

SUPPONIAMO CHE s SIA RICORRENTE, $f_s = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}_s = 1$

$f_s = \lim_{u \to 1} F(u)$ CON $F(u) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}_s u^k$ SAPPIAMO CHE $U(u) = 1 + F(u)U(u)$ E QUINDI $U(u) = \frac{1}{1-F(u)}$

SE FACCIAMO TENDERE $F(u)$ A 1 ANCHE $F(u)$ LO FARÀ:

$\lim_{u \to 1} U(u) = \infty$ CON $U(u) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}_{s,s} u^{(n)}$ E $\lim_{u \to 1} U(u) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}_{s,s}$

ESEMPIO

PASSEGGIATA ALEATORIA SIMMETRICA SU $\mathbb{Z}$

USANDO LA FORMULA DI STIRLING ABBIAMO $p^{(2n)}_{s,s} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} n^{-\frac{1}{2}}$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} p^{(2n)}_{s,s} = +\infty$

$p^{(2n)}_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot (4p(1-p))^n$ SE $p \neq \frac{1}{2}$ ALLORA $4p(1-p) < 1$

$\sum n^{-\alpha} \begin{cases} +\infty & \text{SE } \alpha \leq 1 \\ < +\infty & \text{SE } \alpha > 1 \end{cases}$

DATA UNA CLASSE DI EQUIVALENZA, GLI STATI SONO O TUTTI RICORRENTI O TUTTI TRANSIENTI.

SE s È RICORRENTE E $s \leq s'$ (E QUINDI $s \simeq s'$) ALLORA ANCHE s' È RICORRENTE.

$\sum_n p^{(n)}_{s,s} = +\infty \quad \exists n_1$ t.c. $p^{(n_1)}_{s,s'} > 0$ E $\exists n_2$ t.c. $p^{(n_2)}_{s',s} > 0$

PRENDIAMO $n \geq n_1 + n_2$ CONSIDERIAMO $p^{(n)}_{s',s'} \geq p^{(n_2)}_{s',s} \cdot p^{(n-n_1-n_2)}_{s,s} \cdot p^{(n_1)}_{s,s'}$

IN MATRICI, PRODOTTO RIGA PER COLONNA $\Pi^{n} = \Pi^{h_2}\Pi^{n-h_1-h_2}\Pi^{h_1}$ $k = n-h_1-h_2$

CONSIDERIAMO LA SERIE $\sum_{n} p^{(n)}_{s',s'} \geq \sum_{n \geq h_1+h_2} p^{(n)}_{s',s'} \geq p^{(h_2)}_{s',s}\, p^{(h_1)}_{s,s'} \sum_{k=0}^{\infty} p^{(k)}_{s,s} = \infty$

CONCRETAMENTE

SIA S FINITO, LA MATRICE DI TRANSIZIONE Π DALLA QUALE È POSSIBILE COSTRUIRE UNA MATRICE DI COMUNICAZIONE CHE HA 1 QUANDO 2 STATI COMUNICANO

$A = (a_{s,s'})$ $\quad a_{s,s'} = 1$ SE $p_{s,s'} > 0$

$a_{s,s'} = 0$ SE $p_{s,s'} = 0$

SAPPIAMO CHE $s \leq s'$ SE $\exists n$ t.c. $p^{(n)}_{s,s'} > 0$; SE $s \leq s'$ $\exists n \leq |S|$ t.c. $p^{(n)}_{s,s'} > 0$

DIRE CHE UNO STATO COMUNICA CON UN ALTRO, SIGNIFICA DIRE CHE ESISTE UN CAMMINO TRA I DUE, OVVERO $\exists s_1, \dots, s_{n-1}$ t.c. $p_{s,s_1} > 0, p_{s_1,s_2} > 0, \dots, p_{s_{n-1},s'} > 0$. SI PUÒ SUPPORRE CHE SIA UN CAMMINO AUTOEVITANTE ($s_i \neq s_j$ PER $i \neq j$). UN CAMMINO AUTOEVITANTE NON PUÒ ESSERE PIÙ LUNGO DEL NUMERO DEGLI STATI.

SI CONSIDERI PER LA MATRICE A L'ELEVAMENTO A POTENZA A^k. PER LE SOMME È POSSIBILE UTILIZZARE LA LOGICA INVECE CHE L'ARITMETICA. ES. $1+1 \to 1 \cup 1 = 1$

$C = I + A + \dots + A^{|S|}$ (CON SOMME LOGICHE AL POSTO DI SOMME ARITMETICHE)

$C_{s,s'} = 1 \iff s \leq s'$ LA MATRICE C HA 1 SE E SOLO SE COMUNICA CON s'

CON UN NUMERO FINITO DI STATI È POSSIBILE CAPIRE SE DUE STATI COMUNICANO TRA LORO, SE INVECE IL NUMERO DI STATI È INFINITO, NON È POSSIBILE SAPERLO.

CALCOLO DEL PERIODO

SI SUPPONGA GLI STATI SIANO FINITI, E VI SIA UN'UNICA CLASSE DI EQUIVALENZA. TUTTI GLI STATI DI UNA CLASSE DI EQUIVALENZA HANNO LO STESSO PERIODO.

PER DETERMINARE IL PERIODO DI UNA CLASSE DI EQUIVALENZA, SIA $s \in C$, I CIRCUITI AUTOEVITANTI CHE PARTONO DA s SONO:

$s, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s$ IN CUI LE PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE SONO TUTTE POSITIVE: $p_{s,s_1} > 0, p_{s_1,s_2} > 0, \dots, p_{s_{n-1},s} > 0$

IL PERIODO DELLA CLASSE DI EQUIVALENZA C È IL MCD DELLE LUNGHEZZE DI TUTTI I CIRCUITI AUTOEVITANTI.

PARTENDO DA s SI PRENDONO LE DIREZIONI CON PROBABILITÀ > 0 E SE SI TORNA AD s SI È OTTENUTO UN CIRCUITO AUTOEVITANTE, COSÌ PER TUTTE LE DIREZIONI DA s.

- - -

SUPPONENDO SEMPRE S FINITO E $C_1, \dots, C_r$ CLASSI DI EQUIVALENZA NEL CASO IN CUI SI ABBIA UN NUMERO DI STATI FINITO, UNA CLASSE È RICORRENTE SE E SOLO SE È MASSIMALE. SE UNA CLASSE NON È MASSIMALE SIGNIFICA CHE COMUNICA CON UN'ALTRA CLASSE, E CIÒ NON È AMMESSO DAGLI STATI RICORRENTI, IN CUI UNO STATO COMUNICA SOLO CON STATI DELLA STESSA CLASSE.

DIMOSTRAZIONE

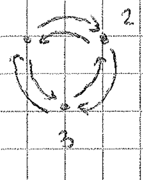
SUPPONIAMO CHE UNO STATO DI UNA CLASSE MASSIMALE NON SIA RICORRENTE, QUINDI PASSA PER QUELLA CLASSE SOLO UN NUMERO FINITO DI VOLTE.
C_k CLASSE MASSIMALE, PARTENDO DA UNO STATO DI TALE CLASSE, SICCOME IL NUMERO DI STATI È FINITO, CON PROBABILITÀ 1 PARTENDO DA UNO STATO:

$P(\exists s \in C_k \text{ t.c. } X_n = s \text{ per infiniti } n \mid X_0 = s_0) = 1$ MA CIÒ SEMBREREBBE UNA CONTRADDIZIONE PERCHÉ SE s_0 È TRANSIENTE E s' ANCHE, ALLORA $P(X_n = s' \text{ per un numero finito di volte} \mid X_0 = s_0) = 1$ E SI HA UN ASSURDO.

! IN CASO DI FINITI STATI SE LA CLASSE È MASSIMALE GLI STATI SONO RICORRENTI, ALTRIMENTI SONO TRANSIENTI. QUESTO IN CASO DI STATI INFINITI NON VALE.

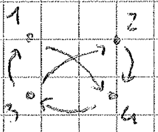
ESEMPIO

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$



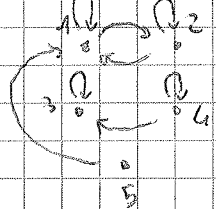
$2 \in A_1^+ \Rightarrow$ IL PERIODO DELLO STATO 1 È 1
$3 \in A_1^+$
(IL MCD È 1)

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



POSSO ANDARE IN TUTTI GLI STATI PARTENDO DA TUTTI GLI STATI, QUINDI VI È UNA SOLA CLASSE DI EQUIVALENZA

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$\{1,2\}, \{3\} \to$ MASSIMALI
$\{5\} \le \{1,2\}$
$\{4\}$ $\{4\} \le \{3\}$

DISTRIBUZIONI STAZIONARIE O INVARIANTI

SUPPONIAMO UNA DISTRIBUZIONE SUGLI STATI $0 \le u_s \le 1$ CON $\sum_{s \in S} u_s = 1$

u_s SI DICE STAZIONARIA O INVARIANTE SE $\forall s' \in S$, $\sum_s u_s p_{s,s'} = u_{s'}$

SE USIAMO u_s COME DISTRIBUZIONE INIZIALE ALLORA $\forall n \ge 0$ $P(X_n = s) = u_s$

$$P(X_1 = s) = \sum_{s'} P(X_0 = s', X_1 = s) = \sum_{s'} u_{s'} p_{s',s} = u_s$$

$$P(X_n = s) = \sum_{s'} P(X_0 = s', X_n = s) = \sum_{s'} P(X_0 = s') P(X_n = s \mid X_0 = s) = \sum_{s'} u_{s'} p^{(n)}_{s',s}$$

$$p^{(n)}_{s',s} = (\Pi^n)_{s',s}$$

$\underline{u} = (u_s)$ VETTORE COLONNA ; u_s È STAZIONARIA SE $\underline{u}^T \Pi = u^T$

SE u_s È UNA DISTRIBUZIONE STAZIONARIA, POSSO CONSIDERARE UNA CATENA DI MARKOV $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ IN CUI n QUINDI VARIA ANCHE NEI NUMERI NEGATIVI.

$$m \in \mathbb{Z} \quad P(X_m = s_0, X_{m+1} = s_1, \dots, X_{m+n} = s_n) = u_{s_0} p_{s_0,s_1} \cdots p_{s_{n-1},s_n}$$

$$P(X_{m-1} = s_{-1}, X_m = s_0, \dots, X_{m+n} = s_n) = u_{s_{-1}} p_{s_{-1},s_0} p_{s_0,s_1} \cdots p_{s_{n-1},s_n}$$

$$\sum_{s_{-1}} P(X_{m-1} = s_{-1}, X_m = s_0, \dots, X_{m+n} = s_n) = \sum_{s_{-1}} \left(u_{s_{-1}} p_{s_{-1},s_0} p_{s_0,s_1} \cdots p_{s_{n-1},s_n}\right)$$

$$= \sum_{s_{-1}} (p_{s_{-1}} p_{s_{-1},s_0}) p_{s_0,s_1} \dots p_{s_{n-1},s_n} = u_{s_0} p_{s_0,s_1} \dots p_{s_{n-1},s_n} =$$

$$= P(X_n = s_0, \dots, X_{m+n} = s_n)$$

PROCESSO STAZIONARIO: NON CAMBIA NEL TEMPO

ES. $S = \{0,1\}$ $\quad \Pi = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$ $\quad 0<p<1$, $0<q<1$ CON p E q PROBABILITÀ DI RIMANERE NELLO STESSO STATO

u_0, u_1

$u_0 p + u_1(1-q) = u_0$

$u_0(1-p) + u_1 q = u_1$ 3 EQUAZIONI LINEARI, LE PRIME 2 LINEARMENTE DIPENDENTI

$u_0 + u_1 = 1$

$u_1 = 1 - u_0$

$u_0 p + (1-u_0)(1-q) = u_0 \longrightarrow u_0(p-(1-q)-1) = q-1$

$u_0 = \frac{1-q}{2-p-q}$ $\qquad u_1 = \frac{1-p}{2-p-q}$

TEOREMA DEL RINNOVAMENTO

DATO UNO STATO $s \in S$ SI PUÒ CONSIDERARE IL TEMPO DI RITORNO $T_s = \{k>0 | X_k = s\}$ DATI $X_0 = s$ E $P_s = 1$. T_s È IL TEMPO DI RITORNO ALLO STATO s.

SE LO STATO s È RICORRENTE, T_s HA PROBABILITÀ 1, SE INVECE È TRANSIENTE LA PROBABILITÀ È INFERIORE A 1.

QUAL È LA PROBABILITÀ CHE UN QUALSIASI TEMPO n SIA UN TEMPO DI RITORNO DI s?

$t_1^{(s)} = T_s^{(1)}, \quad T_s^{(2)} = t_2^{(s)} - t_1^{(s)}, \quad T_s^{(n)} = t_n^{(s)} - t_{n-1}^{(s)}$ TEMPO TRA IL RITORNO N-1 E IL RITORNO N

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} T_s^{(k)}}{n} \xrightarrow[\text{TEMPO}]{} P(T_s^{(1)})$$

$P(N = t_k^{(s)}$ PER UN QUALCHE $k)$ PROBABILITÀ CHE N SIA UN TEMPO DI RITORNO PER UN QUALCHE K

IPOTESI: SUPPONIAMO DI AVERE $f_1, f_2, \dots$ $0 \le f_k \le 1$ E $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = 1$, f_k È LA PROBABILITÀ CHE IL TEMPO DI RITORNO SIA UGUALE A K.

$u_0 = 1$, $\quad u_n = \sum_{k=1}^{n} f_k u_{n-k}$ ← EQUAZIONE DEL RINNOVAMENTO È PROBABILITÀ CHE AL TEMPO n VI SIA UN RITORNO

ENUNCIATO:
SE LA SUCCESSIONE È APERIODICA [$A^+ = \{n \mid f_n > 0\}$ E $q = MCD(A^+)$ APERIODICA VUOL DIRE CHE $q = 1$] ALLORA

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{\mu} \quad \text{CON} \quad \mu = \sum_{k=1}^{\infty} k f_k$$ DISTRIBUZIONE DEL TEMPO DI RITORNO

SE $\mu = +\infty$ ALLORA $\frac{1}{\mu} = 0$ E u_n TENDE A 0

LA CONSEGUENZA DI QUESTO È:

TEOREMA

SE s È UNO STATO RICORRENTE APERIODICO, ALLORA $\forall s' \in S$

$$p_{s',s}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} f_{s',s}\frac{1}{\mu_s} \quad \text{CON} \quad \mu_s = \sum_{k=1}^{\infty} k f_s^{(k)}$$

$$f_{s',s} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{s',s}^{(k)} \qquad f_{s',s}^{(k)} = P(X_k = s, X_{k-1} \neq s, \dots, X_1 \neq s \mid X_0 = s')$$ OVVERO LA PROBABILITÀ DI ARRIVARE IN s PARTENDO DA s' IN k PASSI PER LA PRIMA VOLTA.

$$p_{s',s}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{s',s}^{(k)} p_{s,s}^{(n-k)} = \sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} f_{s',s}^{(k)} p_{s,s}^{(n-k)} + \sum_{[\frac{n}{2}]+1}^{n} f_{s',s}^{(k)} p_{s,s}^{(n-k)} \xrightarrow[\text{(PER } n\to\infty)]{\text{TENDE A}} f_{s',s}\frac{1}{\mu_s}$$

QUANDO k È GRANDE IL TH DEL RINNOVAMENTO DICE CHE QUESTO VA VICINO A $\frac{1}{\mu_s}$

NEL CASO INVECE s SIA PERIODICO, CON PERIODO q ALLORA TUTTI GLI $f_k > 0$ SOLO PER k MULTIPLO DI q

$$u_{nq} = \sum_{k=1}^{n} f_{kq}\, u_{(n-k)q} \qquad u_{nq} \xrightarrow[\text{TENDE}]{} \frac{1}{\mu_s^{(q)}} = \frac{q}{\mu_s} \quad \text{DOVE} \quad \mu_s = \sum_{k=1}^{\infty} k f_{kq} \quad \mu_s^{(q)} = \frac{\mu_s}{q}$$

SUCCESSIONE SOLO SUI MULTIPLI DI q, IN QUESTO CASO È APERIODICO

NEL CASO IN CUI $\mu_s = 0$ ALLORA $u_n \to 0$

SE s È RICORRENTE E $\mu_s = +\infty$ ALLORA $\forall s' \in S \quad p_{s',s}^{(n)} \to 0$

UNO STATO s RICORRENTE SI DICE RICORRENTE <u>POSITIVO</u> SE $\mu_s < \infty$ E RICORRENTE <u>NULLO</u> SE $\mu_s = +\infty$

IL TEMPO DI RITORNO HA UN'ATTESA INFINITA

IL TEMPO DI RITORNO HA UN'ATTESA FINITA

ESEMPIO

PASSEGGIATA ALEATORIA SU $\mathbb{Z}$ CON PARAMETRO p, SE:

- $p \neq \frac{1}{2}$ LO STATO 0 È TRANSIENTE
- $p = \frac{1}{2}$ LO STATO 0 È RICORRENTE

$$P(X_{2n} = 0, X_{2n-2} \neq 0, \dots, X_2 \neq 0 \mid X_0 = 0) = f_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n}$$

$$u_{2n} \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \leftarrow \text{FORMULA DI STIRLING} \qquad \text{E} \quad f_{2n} \simeq \frac{c}{n^{3/2}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 2n f_{2n} = +\infty$$

I TEMPI DI RITORNO TENDONO A DIVENTARE SEMPRE PIÙ NULLI ALL'AUMENTARE DI n

C'È UNA SOLA CLASSE DI EQUIVALENZA

DATA UNA CATENA DI MARKOV IRRIDUCIBILE E APERIODICA ALLORA SE UNO STATO È RICORRENTE POSITIVO (L'ATTESA DEL TEMPO DI RITORNO È POSITIVA) TUTTI GLI STATI SONO RICORRENTI POSITIVI, E $\forall s, s'' \in S$:

$$p_{s,s''}^{(n)} \xrightarrow[\text{TENDE}]{} \nu_{s''} = \frac{1}{\mu_{s''}} \quad \text{DOVE} \quad \mu_{s''} = \sum_{k=1}^{\infty} k f_{s''}^{(k)} \quad \text{E } \nu_s \text{ È L'UNICA}$$

DISTRIBUZIONE INVARIANTE. $\sum_{s\in S} \nu_s = 1 \quad \nu_s = \sum_{s'} \nu_{s'} p_{s',s}$

SE $s' \in S$ È RICORRENTE E s È RICORRENTE POSITIVO DOBBIAMO FAR VEDERE CHE TUTTI GLI ALTRI STATI DI S SONO RICORRENTI POSITIVI.

$\forall_{s',s''}\ f_{s',s''} = 1$ ← QUESTO È VERO SE ABBIAMO UNA CLASSE RICORRENTE.

SE $f_{s',s''} < 1$ $\quad 1-f_{s',s''}$ $\quad \exists n$ t.c. $p^{(n)}_{s'',s'} > 0$ ALLORA $p^{(n)}_{s'',s'}(1-f_{s',s''})$

ALLORA CI SAREBBE UNA PROBABILITÀ POSITIVA CHE PARTENDO DA s'' CI RITORNI UN NUMERO FINITO DI VOLTE, MA SAPPIAMO CHE SE È RICORRENTE CI SI RITORNA UN NUMERO INFINITO DI VOLTE.

$$p^{(n)}_{s',s} \xrightarrow[n\to\infty]{} f_{s',s}\frac{1}{\mu_s} = \frac{1}{\mu_s} > 0,\quad \exists n_1 > 0\ p^{(n_1)}_{s,s'} > 0,\ p^{(n)}_{s',s'} \geq p^{(n-n_1)}_{s',s}\, p^{(n_1)}_{s,s'}$$

SE FOSSE UN RICORRENTE NULLO IL LATO SINISTRO DOVREBBE ESSERE 1, E SI ARRIVEREBBE AD UN ASSURDO.

SE UNO STATO È RICORRENTE POSITIVO ANCHE TUTTI GLI ALTRI SONO SI RICORRENTI, MA ANCHE RICORRENTI POSITIVI

VOGLIAMO ORA FAR VEDERE CHE ν_s È UNA DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ INVARIANTE

SIA $\bar{s} \in S$ E $p^{(n+1)}_{\bar{s},s} = \sum_{s'} p^{(n)}_{\bar{s},s'} p_{s',s}$, $\quad p^{(n)}_{\bar{s},s} = (\Pi^n)_{\bar{s},s'}$ $\quad \Pi^{n+1} = \Pi^n \Pi$

SIE S È FINITO $p^{(n+1)}_{\bar{s},s} \xrightarrow[\text{TEMPO}]{} \nu_s$ E $p^{(n)}_{\bar{s},s'} \to \nu_{s'}$

$\nu_s = \sum_{s'} \nu_{s'} p_{s',s}$ [DIMOSTRAZIONE MANCANTE]

SUPPONIAMO DI AVERE UNA CATENA DI MARKOV IRRIDUCIBILE MA PERIODICA DI PERIODO $q > 1$.
SE S È LO SPAZIO DEGLI STATI, ALLORA $S = S_0 \cup S_1 \cup \ldots \cup S_{q-1}$, OVVERO UNIONE DI SOTTINSIEMI TUTTI DISGIUNTI

$p_{s,s'} > 0$ CON $s \in S_j$ SOLO SE $s' \in S_{j+1} \pmod q$ LA CATENA DI MARKOV PERCORRE CICLICAMENTE TUTTE LE SOTTOCLASSI.

$p^{(n)}_{\bar{s},\bar{s}} > 0$ SOLO SE n È MULTIPLO DI q.

DATA LA CLASSE $A^+_{\bar{s},s'} = \{n \mid p^{(n)}_{\bar{s},s'} > 0\}$ (TUTTI GLI n PER CUI $p^{(n)}_{\bar{s},s'}$ È POSITIVO)
QUINDI $s' \in S_j$ SE $\forall n \in A^+_{\bar{s},s'}$ ALLORA $n = j \pmod q$

ESEMPIO

SUPPONIAMO DI AVERE $n_1, n_2 \in A^+_{\bar{s},s'}$ ALLORA $\exists \bar{n}$ t.c. $p^{(\bar{n})}_{s',\bar{s}} > 0$, SEGUE CHE $n_1 + \bar{n}$ DEVE ESSERE DIVISIBILE PER q E ANCHE $n_2 + \bar{n}$ DEVE ESSERE DIVISIBILE PER q.

SIA Π MATRICE DI TRANSIZIONE, SI CONSIDERI Π^q (LA SITUAZIONE OGNI MULTIPLO DI q-PASSI) ANCH'ESSA MATRICE DI TRANSIZIONE, QUEST'ULTIMA AVRÀ q CLASSI DI EQUIVALENZA $S_0, S_1, \ldots, S_{q-1}$

CONSIDERIAMO $\Pi^q_{S_j}$ (OVVERO Π^q RISTRETTA ALLA SOTTOCLASSE S_j) È REGOLARE

$(\nu^{(j)}_s)_{s \in S_j}$ DISTRIBUZIONE INVARIANTE.

$\nu = \frac{1}{q}(\nu^{(0)} + \ldots + \nu^{(q-1)})$ DISTRIBUZIONE INVARIANTE PER Π

LA DISTRIBUZIONE INVARIANTE PUÒ ESSERE VISTA COME UN VETTORE, LA CONDIZIONE DI ESSERE UNA DISTRIBUZIONE INVARIANTE DI UNA MATRICE È UN AUTOVETTORE SINISTRO.

$\sum_{s \in S} v_s \, p_{s,s'} = v_{s'}$ AUTOVETTORE SINISTRO

$$v\Pi = \frac{1}{q}\left(v^{(0)} + \dots + v^{(q-1)}\right)\Pi = \frac{1}{q}\left(v^{(1)} + v^{(2)} + \dots + v^{(q)}\right) = v$$

SUPPONENDO DI AVERE UNA CATENA DI MARKOV CON UN NUMERO FINITO DI STATI E IRRIDUCIBILE, QUINDI UN'UNICA CLASSE DI EQUIVALENZA, ALLORA GLI STATI SONO RICORRENTI POSITIVI.
PERCHÉ SE LO STATO s È TRANSIENTE O RICORRENTE ALLORA $\forall s' \in S$, $p^{(n)}_{s',s} \to 0$, ARRIVIAMO AD UN ASSURDO PERCHÉ LA SOMMA $\sum_{s \in S} p^{(n)}_{s',s} = 1$, SE n TENDE ALL'INFINITO, TENDEREBBE A 0 LA LORO SOMMA E NON A 1, QUINDI SI AVREBBE UN ASSURDO.

ESEMPIO

SI PENSI A 2 URNE CON N PALLINE CIASCUNA. N PALLINE BIANCHE ED N NERE, OGNI VOLTA SI PRENDE 1 PALLINA DA OGNI URNA E SI SCAMBIANO.

$s \in \{0, \dots, N\}$ CON s NUMERO DI PALLINE BIANCHE NELL'URNA A.
IN QUESTO CASO È APERIODICA, PERCHÉ PRENDENDO UNO STATO $0 < s < N$ ALLORA $p_{s,s} > 0$ OVVERO CON PROBABILITÀ POSITIVA RIMANGO NELLO STESSO STATO.

SECONDO IL TEOREMA DEL [illegible] AVREMO LA DISTRIBUZIONE INVARIANTE, DOPO MOLTO TEMPO.

$$v_s = \frac{\binom{N}{s}\binom{N}{N-s}}{\binom{2N}{N}}$$

DATA UNA CATENA DI MARKOV IRRIDUCIBILE, SE $\exists$ UNA DISTRIBUZIONE INVARIANTE v, ALLORA GLI STATI SONO RICORRENTI POSITIVI.

$$\sum_{s \in S} v_s = 1 \qquad \sum_{s} v_s \, p_{s,s'} = v_{s'} \qquad \sum_{s} v_s \, p^{(n)}_{s,s'} = v_{s'}$$

$$v\Pi = v \;, \quad v\Pi^2 = v \;, \quad \dots \;, \quad v\Pi^n = v$$

SE GLI STATI FOSSERO O RICORRENTI NULLI O TRANSIENTI, OVVERO SE s' RICORRENTE NULLO O TRANSIENTE, ALLORA $p^{(n)}_{s,s'} \longrightarrow 0$

! SE NON ESISTE LA DISTRIBUZIONE INVARIANTE, GLI STATI POSSONO ESSERE O RICORRENTI NULLI, O TRANSIENTI.

MODELLO DI CODA

SUPPONIAMO CHE AD OGNI ISTANTE POSSA ARRIVARE UN CLIENTE CON PROBABILITÀ p IN UN TEMPO DISCRETO. SE C'È UN CLIENTE ED UNO SPORTELLO, IL TEMPO IMPIEGATO A SERVIRLO È ALEATORIO, NON SI SA. AD OGNI ISTANTE SI HA UNA PROBABILITÀ q CHE IL CLIENTE FINISCA ALLO SPORTELLO E SE NE VADA. SI PUÒ VEDERE COME UNA CATENA DI MARKOV.

$S = \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ NUMERO DEI CLIENTI NEL SISTEMA (SERVITO + QUELLI IN CODA)

CON p PROBABILITÀ DI ARRIVO DI UN CLIENTE E q PROBABILITÀ DI FINE SERVIZIO

$p_{0,1}$ PROBABILITÀ CHE NON CI SIA NESSUNO E ARRIVI UN CLIENTE $= p$ MENTRE $p_{0,0} = 1 - p$

SE INVECE $s \geq 1$

$p_{s,s+1} = p(1-q)$ PROBABILITÀ CHE ARRIVI UN NUOVO CLIENTE E IL SERVIZIO NON FINISCA

$p_{s,s} = (1-p)(1-q) + pq$ PROBABILITÀ CHE NON ARRIVI NESSUN CLIENTE, 2 SCENARI:
- 1 ARRIVA E 1 FINISCE
- NON ARRIVA NESSUNO

$p_{s,s-1} = q(1-p)$ PROBABILITÀ CHE FINISCA UN CLIENTE E NON ARRIVI NESSUNO.

$d = p(1-q) \quad ; \quad l = q(1-p) \quad ; \quad r = (1-p)(1-q) + pq$

$d + l + r = 1$

- SE FOSSE RICORRENTE [POSITIVO] LO SPORTELLO SI LIBERA PERIODICAMENTE E LA CODA È BILANCIATA
- SE FOSSE TRANSIENTE LO SPORTELLO DOPO UN PO' NON SI LIBEREREBBE PIÙ FACENDO ESPLODERE LA CODA.
- SE FOSSE RICORRENTE NULLO LO SPORTELLO SI SVUOTA MA IL TEMPO CHE PASSA TRA UN CLIENTE SERVITO E L'ALTRO È VIA VIA SEMPRE PIÙ LUNGO.

$$\sum_{s=0}^{\infty} v_s = 1 \qquad \sum_s v_s\, p_{s,s'} = v_{s'}$$

	$s' = 1$	$s' > 1$
$v_0(1-p) + v_1 l = v_0$		
$p v_0 = v_1 l$	$v_0 p + v_1 r + v_2 l = v_1$	$v_{s'-1} d + v_{s'} r + v_{s'+1} l = v_{s'}$
$v_1 = \frac{p}{l} v_0$	$v_1 l + v_1 r + v_2 l = v_1$	$(v_{s'-1} d = v_{s'} l)$
	$v_2 l = (1 - l - r) v_1$	$v_{s'+1} l = (1 - l - r) v_{s'}$
	$v_2 = \frac{(1-l-r)}{l} v_1$	$v_{s'+1} = \frac{d v_{s'}}{l}$

$$v_1 = \frac{p}{l} v_0 \qquad v_2 = \frac{(1-l-r)}{l} v_1 \qquad v_{s+1} = \frac{d}{l} v_s$$

$$v_s = \left(\frac{p}{l}\right)\left(\frac{d}{l}\right)^{s-1} v_0 \qquad \sum_{s=0}^{\infty} v_s = 1 \qquad v_0 \left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{p}{l}\right)\left(\frac{d}{l}\right)^{s-1}\right) v_0 = 1$$

CONDIZIONE CHE ESISTA LA DISTRIBUZIONE INVARIANTE È CHE $p(1-q) < q(1-p)$ OVVERO EQUIVALENTE A $\frac{p}{1-p} < \frac{q}{1-q} \iff p < q$ → OVVERO CHE LA PROBABILITÀ CHE ARRIVI UN CLIENTE È PIÙ PICCOLA DI QUELLA CHE LO SPORTELLO SI LIBERI.

QUANDO $p = q$ SONO RICORRENTI NULLI
QUANDO $p > q$ SONO TRANSIENTI
QUANDO $p < q$ SONO RICORRENTI POSITIVI

PARTENDO DALLO STATO 1 VOGLIAMO VEDERE LA PROBABILITÀ CHE IL PROCESSO ARRIVI PRIMA ALLO STATO 0 OPPURE PRIMA ALLO STATO N.

SIA P_1 LA PROBABILITÀ CHE LA CATENA DI MARKOV ARRIVI ALLO STATO 0 PRIMA CHE ALLO STATO N.

$$P_1 = l + d P_2 + r P_1 \quad = \quad (1-r) P_1 = l + d P_2$$

PER GLI STATI SUCCESSIVI INVECE, QUINDI PER $s \geq 2$ $\quad P_s = l P_{s-1} + d P_{s+1} + r P_s$

$$P_N = 0 \qquad P_0 = 1$$

$$P_s(1-r) = l P_{s-1} + d P_{s+1} \qquad P_1 - P_0 = \frac{l}{d}(P_2 - P_1)$$

$$P_s(l+d) = l P_{s-1} + d P_{s+1}$$

$$d(P_{s+1} - P_s) = l(P_s - P_{s-1})$$

$$P_{s+1} - P_s = \frac{l}{d}(P_s - P_{s-1})$$

IN GENERALE $P_{s+1} - P_s = \left(\frac{l}{d}\right)^s (P_1 - P_0)$

INFATTI SI HA $P_N - P_0 = \sum_{s=0}^{N-1} (P_{s+1} - P_s) = (P_1 - P_0) \sum_{s=0}^{N-1} \left(\frac{l}{d}\right)^s$

$$P_1 - P_0 = \frac{1}{\sum_{s=0}^{N-1} \left(\frac{l}{d}\right)^s} \qquad P_s - P_0 = \sum_{k=0}^{s-1} (P_{k+1} - P_k) = \frac{\sum_{k=0}^{s-1} \left(\frac{l}{d}\right)^k}{\sum_{s=0}^{N-1} \left(\frac{l}{d}\right)^s} \xrightarrow{N \to \infty}$$

CON $\frac{l}{d} < 1$ TENDE AD UN VALORE NEGATIVO
CON $\frac{l}{d} \geq 1$ TENDE A 0
E LO STATO 0 È RICORRENTE

MODELLO DI EHRENFEST

SI HANNO 2 URNE A E B CON N PALLINE DISTRIBUITE TRA LE 2 URNE, SCEGLIAMO A CASO UNA PALLINA E LA SPOSTIAMO NELL'ALTRA URNA.

SIA s IL NUMERO DI PALLINE NELL'URNA A, $\pi_{0,1} = 1$ MENTRE SE $0 < s < N$
$\pi_{s,s-1} = \frac{s}{N}$ $\quad \pi_{s,s+1} = \frac{N-s}{N}$ $\quad \pi_{N,N-1} = 1$. PER TORNARE ALLO STESSO STATO DEVO FARE LO STESSO NUMERO DI PASSI A DESTRA E A SINISTRA, QUINDI VI RITORNO SOLO UN NUMERO PARI DI VOLTE.

$\nu^{(0)}, \nu^{(1)}$ DISTRIBUZIONI INVARIANTI: PER Π^2 $\to \nu^{(0)}\Pi^2 = \nu^{(0)}$, $\nu^{(1)}\Pi^2 = \nu^{(1)}$

$\nu = \frac{1}{2}(\nu^{(0)} + \nu^{(1)})$ $\qquad$ PER Π $\to \nu^{(0)} = \nu^{(1)}\Pi$, $\nu^{(1)} = \nu^{(0)}\Pi$

MODELLO DI EHRENFEST MODIFICATO

SI SCEGLIE A CASO IN QUALE URNA METTERE LA PALLINA PRELEVATA CON PROBABILITÀ 1/2 E CON PROBABILITÀ 1/2 SI METTE LA PALLINA SCELTA NELL'URNA OPPOSTA.

$$\pi_{0,1} = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \qquad \pi_{0,0} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad \pi_{s,s+1} = \frac{N-s}{N}\cdot\frac{3}{4}$$

$$\pi_{s,s} = \frac{s}{N}\cdot\frac{1}{4} + \frac{N-s}{N}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \qquad \pi_{s,s-1} = \frac{s}{N}\cdot\frac{3}{4} \qquad \pi_{N,N-1} = \frac{3}{4} \qquad \pi_{N,N} = \frac{1}{4}$$

PARTENDO DA s: $\frac{s}{N}$ È NELL'URNA A $\to \frac{1}{2}$ VA IN B, $\to \frac{1}{4}$ VA IN B, $\to \frac{1}{4}$ VA IN A

$\frac{N-s}{N}$ È NELL'URNA B $\to \frac{1}{2}$ VA IN A, $\to \frac{1}{4}$ VA IN A, $\to$ 1/4 VA IN B

C'È SEMPRE UNA SOLA CLASSE DI EQUIVALENZA ED È APERIODICA.

$$\nu_s = \binom{N}{s}\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

PROBABILITÀ CHE VI SIA UNA PALLINA NELL'URNA A TIRANDO UNA MONETA N VOLTE

SIA $\tilde{\Pi}$ LA PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE PER IL MODELLO DI EHRENFEST MODIFICATO

$$\tilde{\Pi} = \frac{3}{4}\Pi + \frac{1}{4}I$$

SIA $\tilde{\nu}$ LA DISTRIBUZIONE INVARIANTE PER IL MODELLO DI EHRENFEST MODIFICATO

$$\tilde{\nu}\tilde{\Pi} = \tilde{\nu} \qquad \tilde{\nu}\left(\frac{3}{4}\Pi + \frac{1}{4}I\right) = \tilde{\nu} \qquad \frac{3}{4}\tilde{\nu}\Pi + \frac{1}{4}\tilde{\nu}I = \tilde{\nu} \qquad \frac{3}{4}\tilde{\nu}\Pi = \frac{3}{4}\tilde{\nu} \qquad \tilde{\nu}\Pi = \tilde{\nu}$$

CATENE DI NASCITA E MORTE

SIA S LO SPAZIO DEGLI STATI, PER LO STATO 0 ABBIAMO r_0, d_0 DOVE $r_0+d_0=1$ E $l_0=0$, PER $s\ge1$ ABBIAMO l_s, r_s, d_s CON $l_s+r_s+d_s=1$

$p_{0,0}=r_0 \qquad p_{0,1}=d_0 \qquad p_{s,s-1}=l_s \qquad p_{s,s}=r_s \qquad p_{s,s+1}=d_s$

SE PER N ABBIAMO $d_N=0$ LA CATENA NON PUÒ ANDARE PIÙ A DESTRA DI N, QUINDI $S=\{0,\dots,N\}$ GLI STATI SONO QUINDI FINITI.

SE PER QUALCHE s, $r_s>0$ IL PERIODO È 1 (APERIODICA), ALTRIMENTI 2

! TUTTI QUELLI VISTI FIN ORA ERANO PROCESSI DI NASCITA E MORTE TRANNE IL PROCESSO DI DIRAMAZIONE DI GALTON-WATSON, PERCHÉ SI PUÒ PASSARE DA UNO STATO ALL'ALTRO ARBITRARIAMENTE, NON FACENDO SOLO 1 PASSO ALLA VOLTA.

CERCHIAMO UNA DISTRIBUZIONE INVARIANTE DI PROBABILITÀ V_0

$V_0=V_0r_0+V_1l_1 \qquad s\ge1 \qquad V_s=V_sr_s+V_{s-1}d_{s-1}+V_{s+1}l_{s+1}$

$V_sd_s=V_{s+1}l_{s+1}$ SEGUE DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE

SUPPONIAMO VERO FINO A $s-1$

$V_s=V_sr_s+V_sl_s+V_{s+1}l_{s+1} \qquad V_0(1-r_0)=V_1l_1 \qquad V_0d_0=V_1d_1$

$V_s(1-r_s-l_s)=V_{s+1}l_{s+1}$

$V_sd_s=V_{s+1}l_{s+1}$

$V_{s+1}=\frac{d_s}{l_{s+1}}V_s=\frac{d_sd_{s-1}\cdots d_0}{l_1l_2\cdots l_{s+1}} \qquad V_0\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\prod_{j=0}^{k}d_j}{\prod_{j=1}^{k+1}l_k}\right)=1$

$S=\mathbb{N} \qquad N>0 \qquad P_k$ PROBABILITÀ PARTENDO DA k DI ARRIVARE A 0 PRIMA CHE A N

$P_0=1 \qquad P_s=l_sP_{s-1}+r_sP_s+d_sP_{s+1}=$

$P_s(1-r_s)=l_sP_{s-1}+d_sP_{s+1}=$

$d_s(P_{s+1}-P_s)=l_s(P_s-P_{s-1})=$

$P_{s+1}-P_s=\frac{l_s}{d_s}(P_s-P_{s-1})=$

$P_{s+1}-P_s=\left(\prod_{k=1}\frac{l_k}{d_k}\right)(P_1-P_0)=$

$P_N-P_0=\sum_{k=0}^{N-1}(P_k-P_{k-1})=\sum_{k=0}^{N-1}\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{l_j}{d_j}\right)(P_1-P_0)=$

$P_1-P_0=\frac{1}{\sum_{k=0}^{N-1}\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{l_j}{d_j}\right)}$

$P_s-P_0=\frac{\sum_{k=0}^{s-1}\left(\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{l_j}{d_j}\right)\right)}{\sum_{k=0}^{N-1}\left(\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{l_j}{d_j}\right)\right)}$

0 È RICORRENTE SE E SOLO SE $\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{l_j}{d_j}\right)\right)$ È DIVERGENTE

DATA UNA CATENA DI MARKOV (X_k) SE ESISTE UNA DISTRIBUZIONE INVARIANTE ν_s POSSIAMO CONSIDERARLA PER $k \in \mathbb{Z}$ INVECE CHE PER $k \in \mathbb{N}$.
DEFINIAMO $Y_k = X_{-k}$

$$P(Y_m=s_0, Y_{m+1}=s_1, \dots, Y_{m+n}=s_n) = P(X_{-m-n}=s_n, X_{-m-n+1}=s_{n-1}, \dots, X_{-m}=s_0) =$$

$$\nu_{s_n} p_{s_n,s_{n-1}} p_{s_{n-1},s_{n-2}} \cdots p_{s_1,s_0} = \nu_{s_0} q_{s_0,s_1} \cdots q_{s_{n-1},s_n} = \cancel{\nu_{s_0}} \frac{p_{s_1,s_0}\cancel{\nu_{s_1}}}{\cancel{\nu_{s_0}}} \cdot \frac{p_{s_2,s_1}\nu_{s_2}}{\cancel{\nu_{s_1}}} \cdots$$

DEFINISCO UNA MATRICE DEFINITA COME

$$q_{s,s'} = \frac{p_{s',s}}{\nu_s}\nu_{s'} \qquad \sum_{s'} q_{s,s'} = \sum_{s'} \frac{p_{s',s}\nu_{s'}}{\nu_s} = \frac{\cancel{\nu_s}}{\cancel{\nu_s}} = 1$$

CATENE DI MARKOV REVERSIBILI

UNA CATENA DI MARKOV SI DICE REVERSIBILE SE $q_{s,s'} = p_{s,s'}$ CIOE' SE LA MATRICE DI TRANSIZIONE DELLA CATENA DI MARKOV VISTA ALL'INDIETRO E' UGUALE ALLA MATRICE DI TRANSIZIONE DELLA CATENA IN AVANTI.

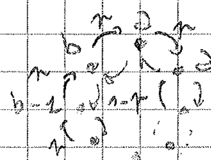
$$\frac{p_{s',s}\nu_{s'}}{\nu_s} = p_{s,s'} \qquad \nu_{s'} p_{s',s} = \nu_s p_{s,s'}$$

COMUNQUE PRENDO 2 STATI QUESTO E' VALIDO

ESEMPIO

PASSEGGIATA ALEATORIA CON CONDIZIONI PERIODICHE SU UN INTERVALLO [a,b] CON CONDIZIONI PERIODICHE.

LA PROBABILITA' $p_{s,s+1} = p$; $p_{s,s-1} = 1-p$; $p_{a,b} = 1-p$; $p_{b,a} = p$
CON $a<s<b$ $\quad p_{b,b-1} = 1-p$; $p_{a,a+1} = p$



$$\nu_s = \frac{1}{b-a+1} = \frac{1}{b-a+1}(1-p) + \frac{1}{b-a+1}p$$

PER VEDERE CHE SIA REVERSIBILE E' NECESSARIO CHE $\frac{1}{b-a+1}p = \frac{1}{b-a+1}(1-p)$ E CIO' E' VERIFICATO SOLO SE $p = \frac{1}{2}$

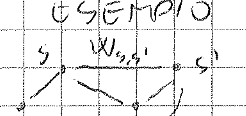
COME SI FA A VEDERE SE UNA CATENA DI MARKOV E' REVERSIBILE?

SIA S LO SPAZIO DEGLI STATI E $\Pi = (p_{s,s'})$ LA MATRICE DI TRANSIZIONE, LA CATENA DI MARKOV E' REVERSIBILE SE E SOLO SE $\exists c_s \geq 0 \ \forall s$ TALI CHE $\sum_{s \in S} c_s < +\infty$ E VERIFICANO LA CONDIZIONE $c_s p_{s,s'} = c_{s'} p_{s',s}$ SE CHIAMIAMO π_s LA QUANTITA' $\frac{c_s}{\sum_{s' \in S} c_{s'}}$ E' VERA LA CONDIZIONE $\pi_s p_{s,s'} = \pi_{s'} p_{s',s}$

$$\sum_s \pi_s p_{s,s'} = \sum_s \pi_{s'} p_{s',s} = \pi_{s'}$$

TROVARE LE COSTANTI C CHE VERIFICANO QUELLA CONDIZIONE CI PERMETTE DI TROVARE SE UNA CATENA E' REVERSIBILE.

ESEMPIO



$W_{s,s'} \geq 0 \qquad W_{s',s} = W_{s,s'}$ DIPENDE DAI VALORI DEL GRAFO NON DALL'ORDINE.

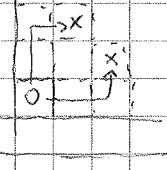
$$p_{s,s'} = \frac{W_{s,s'}}{\sum_{s''} W_{s,s''}} \qquad \sum_{s''} W_{s,s''} = 1$$

$$c_s p_{s,s'} = c_{s'} p_{s,s'} \qquad \frac{c_s W_{s,s'}}{\sum_{s''} W_{s,s''}} = \frac{c_{s'} W_{s',s}}{\sum_{s''} W_{s',s''}} \to \frac{c_s}{c_{s'}} = \frac{\sum_{s''} W_{s,s''}}{\sum_{s''} W_{s',s''}}$$

POSSO PRENDERE $C_s = \sum_{s'} W_{s,s'}$ E ALLORA $\boxed{\pi_s = \frac{\sum_{s'} W_{s,s'}}{\sum_{s''}\sum_{s'} W_{s'',s'}}}$

SUPPONIAMO DI AVERE UNA SCACCHIERA, IL CAVALLO PUÒ FARE DUE PASSI IN UNA DIREZIONE E UNO IN QUELLA PERPENDICOLARE. IN BASE A DOVE SI TROVA PUÒ FARE DA 2 (ANGOLO) A 8 (CENTRO) MOSSE POSSIBILI. CON UN GRAFO SI RAPPRESENTANO TUTTE LE CELLE DI UNA SCACCHIERA, I NODI SONO COLLEGATI IN BASE ALLE MOSSE CHE PUÒ FARE IL CAVALLO.

$W_{s,s'} = 1$ SE s' È UNA CELLA RAGGIUNGIBILE: $p_{s,s'} = \dfrac{1}{\#\text{ CELLE RAGGIUNGIBILI PARTENDO DA } s}$



$\pi_s = \dfrac{2}{\sum\sum_{s',s''} W_{s',s''}} \longrightarrow \mu_s = \dfrac{1}{\pi_s}$ TEMPO MEDIO DI RITORNO PARTENDO DAGLI ANGOLI

SUPPONIAMO DI AVERE UNA CATENA ERGODICA IN CUI GLI STATI SONO RICORRENTI POSITIVI E APERIODICA.

CON S SPAZIO DEGLI STATI.

$\Pi = (p_{s,s'})$ MATRICE TRANSIZIONE

$\forall_{s,s'} \; p^{(n)}_{s,s'} \xrightarrow[n\to\infty]{} v_{s'}$ CON $v_{s'}$ DISTRIBUZIONE INVARIANTE

! LA CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PERCHÉ SIA REVERSIBILE È CHE PER OGNI SUCCESSIONE $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$, $p_{s_0,s_1} p_{s_1,s_2} \cdots p_{s_{n-1},s_0} = p_{s_0,s_{n-1}} p_{s_{n-1},s_{n-2}} \cdots p_{s_1,s_0}$ (1)

SUPPONIAMO LA CATENA SIA REVERSIBILE

$v_s p_{s,s'} = v_{s'} p_{s',s}$ $\qquad p_{s',s} = \dfrac{v_s p_{s,s'}}{v_{s'}}$

IL PRODOTTO SOPRA (1) PUÒ ESSERE SCRITTO COME:

$\dfrac{v_{s_1} p_{s_1,s_0}}{v_{s_0}} \cdot \dfrac{v_{s_2} p_{s_2,s_1}}{v_{s_1}} \cdot \ldots \cdot \dfrac{v_{s_{n-1}} p_{s_{n-1},s_{n-2}}}{v_{s_{n-2}}} \cdot \dfrac{v_{s_0} p_{s_0,s_{n-1}}}{v_{s_{n-1}}}$ CANCELLANDOSI I V RIMANGONO I p

$\sum_{s_2,\dots,s_{n-1}} p_{s_0,s_1} \cdots p_{s_{n-1},s_0} = p_{s_0,s_1} p^{(n-1)}_{s_1,s_0} \to \sum_{s_1,\dots,s_{n-1}} p_{s_1,s_0} p_{s_2,s_1} p_{s_3,s_2} \cdots p_{s_0,s_{n-1}} =$

$= p_{s_1,s_0} p^{(n-1)}_{s_0,s_1} \to p_{s_0,s_1} p^{(n-1)}_{s_1,s_0} = p_{s_1,s_0} p^{(n-1)}_{s_0,s_1}$ FACENDO TENDERE $n \to \infty$ SI OTTIENE CHE

$v_{s_0} p_{s_0,s_1} = v_{s_1} p_{s_1,s_0}$

UN PROCESSO DI NASCITA E MORTE ERGODICO (IRRIDUCIBILE, RICORRENTE POSITIVO E APERIODICO) È REVERSIBILE.
S È UN INTERVALLO FINITO O INFINITO DI $\mathbb{Z}$, QUINDI DA UNO STATO SI PUÒ ANDARE SOLO ALLO STATO SUCCESSIVO, A QUELLO PRECEDENTE O RIMANERE.

$|s_i - s_{i+1}| \le 1 \qquad |s_{n-1} - s_0| \le 1 \qquad p_{s_0,s_1} \cdots p_{s_{n-2},s_0}$

$p_{s_0,s_{n-2}} \cdots p_{s_1,s_0}$

! SE C'È UNA DISTRIBUZIONE INVARIANTE ALLORA È RICORRENTE POSITIVO E REVERSIBILE.

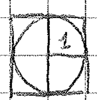
SIANO $p_{s,s+1} = d_s$, $p_{s,s-1} = l_s$, $p_{s,s} = r_s$

$c_s d_s = c_{s+1} l_{s+1} \qquad c_{s+1} = \dfrac{d_s}{l_{s+1}}$

$$C_s = \left(\prod_{k=0}^{s-1} \frac{d_k}{l_{k+1}}\right) C_0 \qquad \sum_{s=0}^{\infty} C_s < +\infty \qquad C_0\left(1+\sum_{s=1}^{\infty}\left(\prod_{k=0}^{s-1}\frac{d_k}{l_{k+1}}\right)\right) = 1$$

METODO MONTECARLO

QUESTO METODO È UN'APPLICAZIONE DELLE CATENE REVERSIBILI



LA PROBABILITÀ CHE PRESO UN PUNTO A CASO ALL'INTERNO DEL QUADRATO $[-1,1]^2$ SIA POI DENTRO AL CERCHIO.

$$\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\} \qquad P = \frac{\text{AREA CERCHIO}}{\text{AREA QUADRATO}} = \frac{\pi}{4}$$

CONSIDERIAMO UNA SUCCESSIONE $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ CON $\underline{x}_i \in [-1,1]^2$

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} \chi_c(\underline{x}_i)}{N} \xrightarrow{\text{LA LEGGE DEI GRANDI NUMERI CI DICE CHE TENDE A}} \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

SUPPONIAMO DI AVERE UN INSIEME DI N ELEMENTI

$A = \{1,\dots,n\}$ SIA P_n INSIEME DELLE PERMUTAZIONI DI A CHE SODDISFANO UNA QUALCHE PROPRIETÀ.

SIA $B \subset P_n$

CONSIDERO LA DISTRIBUZIONE UNIFORME SU P_n

$$P(B) = \frac{\#(B)}{\#(P_n)} = \frac{\#(B)}{n!}$$

MCMC COSTRUISCO UNA CATENA ERGODICA CHE ABBIA LA DISTRIBUZIONE CHE CI INTERESSA COME DISTRIBUZIONE INVARIANTE.

$\underline{X}_n$ CATENA DI MARKOV (NELL'ESEMPIO SU P_n)

$$\frac{\sum_{k=1}^{N} \chi_B(\underline{X}_k)}{N} \to P(B)$$

$\#(A) = n \quad \{i_1,\dots,i_n\}$ CON $1 \le |i_j| \le n \quad i_j \ne i_k$ SE $j \ne k$

OGNI NUMERO HA LA STESSA PROB. DI ESSERE SCELTO

SCELGO A CASO UN NUMERO K FRA 1 E $n-1$ E SCAMBIO i_k CON i_{k+1}
E LA DISTRIBUZIONE INVARIANTE DI QUESTA CATENA È LA DISTRIBUZIONE UNIFORME.

UNO SI PUÒ OTTENERE DALL'ALTRO SCAMBIANDO DUE ELEMENTI SUCCESSIVI.

SIANO π E π' COMUNICANTI $\quad p_{\pi,\pi'} = \frac{1}{\#\{\pi' \text{ COMUNICANO CON } \pi\}} = \frac{1}{n-1}$

DISTRIBUZIONE UNIFORME $\to \nu_\pi = \dfrac{\sum_{\pi'} w_{\pi,\pi'}}{\sum_{\pi}\sum_{\pi'} w_{\pi,\pi'}}$

ALGORITMO DI HASTINGS-METROPOLIS

SI VUOLE STUDIARE UNA CERTA DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ π_s SU UN INSIEME S:

$$\pi_s = \frac{b_s}{K} \qquad \text{CON LA COSTANTE } K = \sum_{s \in S} b_s$$

SI VUOLE TROVARE UNA CATENA DI MARKOV REVERSIBILE TALE CHE π_s SIA LA DISTRIBUZIONE INVARIANTE.

L'ALGORITMO SI SVOLGE NEL SEGUENTE MODO:

DATA $q_{s,s'}$ MATRICE DI PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE, PER CUI S È IRRIDUCIBILE (1 SOLA CLASSE DI EQUIVALENZA) CON LA PROPRIETÀ CHE SE $q_{s,s'} > 0$ ALLORA $q_{s',s} > 0$

SI VUOLE DEFINIRE UNA CM IN CUI $p_{s,s'} = q_{s,s'} \alpha_{s,s'}$ QUANDO $s' \neq s$ CON $0 \leq \alpha_{s,s'} \leq 1$, E $p_{s,s} = q_{s,s} + \sum_{s'' \neq s} \left((1-\alpha_{s,s''}) q_{s,s''} \right)$ QUINDI $\sum_{s'} p_{s,s'} = 1$

DEVE SODDISFARE LA CONDIZIONE DI REVERSIBILITÀ CHE $\pi_s p_{s,s'} = \pi_{s'} p_{s',s}$

$\rightarrow \frac{b_s}{K} p_{s,s'} = \frac{b_{s'}}{K} p_{s',s} \rightarrow b_s p_{s,s'} = b_{s'} p_{s',s} \rightarrow b_s \alpha_{s,s'} q_{s,s'} = b_{s'} \alpha_{s',s} q_{s',s} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{\alpha_{s,s'}}{\alpha_{s',s}} = \frac{b_{s'} q_{s',s}}{b_s q_{s,s'}}$ POSSIAMO DEFINIRE α CON UNA FUNZIONE: $\alpha_{s,s'} = f\left(\frac{b_{s'} q_{s',s}}{b_s q_{s,s'}}\right)$

$\alpha_{s',s} = f\left(\frac{b_s q_{s,s'}}{b_{s'} q_{s',s}}\right)$

$\alpha_{s,s'}$ PUÒ ESSERE CONSIDERATO COME: DATA UNA CM CON $q_{s,s'}$ COME MATRICE DI TRANSIZIONE, $\alpha_{s,s'}$ PUÒ ESSERE COME TIRARE UNA MONETA, SE È TESTA SI VA IN s' SE È CROCE NO.

LA PROPRIETÀ DI QUESTA FUNZIONE DEVE ESSERE:

$$\frac{f(x)}{f(\frac{1}{x})} = x \qquad \text{UNICO VINCOLO CHE } 0 \leq f(x) \leq 1,\ f(1) = 1$$

LE POSSIBILI SCELTE PER f DI SOLITO SONO 2:

- $f(x) = \min(1, x) \rightarrow \frac{f(x)}{f(\frac{1}{x})} = x \rightarrow \frac{\min(1,x)}{\min(1,\frac{1}{x})} = x$
- $f(x) = \frac{x}{1+x} \rightarrow \frac{f(x)}{f(\frac{1}{x})} = x \rightarrow \frac{\frac{x}{1+x}}{\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} = x$

UN CASO PARTICOLARE DI QUESTO ALGORITMO È IL SEGUENTE:

CAMPIONAMENTO DI GIBBS

$S = \{ \underline{x} \mid (x_1, \dots, x_n) \}$ GLI STATI SONO VETTORI CON n ELEMENTI

$$q_{\underline{x},\underline{x}'} = \begin{cases} 0 & \text{SE } \underline{x} \text{ E } \underline{x}' \text{ DIFFERISCONO PER PIÙ DI UNA COMPONENTE} \\ \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi_{\underline{x}'}}{\sum_y \pi_{(x_1, \dots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \dots, x_n)}} & \text{SE } \underline{x} = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \text{ E } \underline{x}' = (x_1, \dots, x_{j-1}, x'_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \end{cases}$$

$\alpha_{\underline{x},\underline{x}'} = \min\left(\frac{\pi_{\underline{x}'} q_{\underline{x}',\underline{x}}}{\pi_{\underline{x}} q_{\underline{x},\underline{x}'}}, 1 \right)$ PROBABILITÀ CHE SIANO TUTTI I VALORI E IN POSIZIONE j CI SIA x_j O x'_j

ESEMPIO: MODELLO DI ISING

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^2 \qquad S = \{-1, 1\}^\Lambda$

I PUNTI CHE DISTANO DI 1

$\langle x, y \rangle \rightarrow |x - y| = 1$

$\pi_{\underline{s}} = \frac{e^{-\beta H(\underline{s})}}{Z}$ CON $H(\underline{s}) = -J \sum_{\langle x,y \rangle} s_x s_y$

E CON Z COSTANTE

TENDONO AD ESSERE DISORDINATI

QUANDO β È ALTO GLI SPIN TENDONO AD ALLINEARSI, QUINDI TUTTI 1 O -1, SE β PICCOLO GLI SPIN?

ESEMPIO: RICOSTRUZIONE DI IMMAGINI

$\Delta \subset \mathbb{Z}^2 \quad S = \{1, \dots, r\}$ ← CON Δ TUTTI I PUNTI DEL RETICOLO E AGLI ELEMENTI IN S VIENE RAPPRESENTATA L'INTENSITÀ DI QUEL PUNTO.

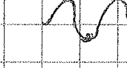
$\underline{s} \in S$

$$A \sum_{\underline{x} \in \Delta} (s'_{\underline{x}} - s_{\underline{x}}) + B \sum_{\langle x,y \rangle} (\underline{s}'_x - \underline{s}'_y) \quad \text{con } A, B > 0$$

↳ QUESTO FA IN MODO CHE SINGOLI PUNTI DIVERSI, O PICCOLI GRUPPI DALL'AREA IN CUI SI TROVANO, VENGANO ELIMINATI.

$$\pi_{s'} = \frac{e^{-\beta H(s')}}{Z}$$

→ DISTRIBUZIONE DI POISSON CHE DÀ PIÙ PROBABILITÀ IN CUI $H(s')$ È PICCOLO, QUINDI I PUNTI DI MINIMO.



PROCESSI DI MARKOV A TEMPO CONTINUO

SI CONSIDERANO PROCESSI DI MARKOV OMOGENEI CON UN NUMERO FINITO O UN'INFINITÀ NUMERABILE DI STATI.
SIA DATA LA DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE (VARIABILE ALEATORIA CHE ASSUME VALORI REALI NON NEGATIVI) DI PARAMETRO $\lambda > 0$.

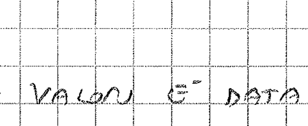
$F(x)$ FUNZIONE DI RIPARTIZIONE, DATA X VARIABILE ALEATORIA, È LA SEGUENTE:

$$F(x) = P(X \le x)$$

LA PROBABILITÀ CHE X SIA COMPRESO TRA DUE VALORI È DATA DA:

$$P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F(b) - F(a)$$

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



! QUESTA È L'UNICA DISTRIBUZIONE CHE SODDISFA LA PROPRIETÀ DELL'ASSENZA DI MEMORIA.

PROPRIETÀ DI ASSENZA DI MEMORIA

SIA X CON DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE $\quad 0 < x_1 < x_2$

$$P(X > x_1 + x_2 \mid X > x_1) = P(X > x_2)$$

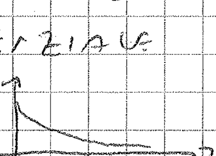
DISTRIBUZIONE "ASSOLUTAMENTE CONTINUA"

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy \quad \text{con } f \text{ densità di probabilità}$$

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(y)\, dy$$

DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



L'ATTESA NEL CASO ASSOLUTAMENTE CONTINUO È:

$$E(x) = P(x) = \int x f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[x(-e^{-\lambda x}) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^{+\infty}$$

QUANDO λ È MOLTO GRANDE L'ATTESA È PICCOLA E VICEVERSA

$$VAR(X) = P(x^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = \ldots = \frac{1}{\lambda}$$

DATI DEI TEMPI CON DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE, QUAL'È LA DISTRIBUZIONE DELLA LORO SOMMA?

SIANO X Y STOCASTICAMENTE INDIPENDENTI CON DENSITÀ DI PROBABILITÀ $p(x)$, $q(y)$ RISPETTIVAMENTE. SIA $Z = X+Y$, Z HA DENSITÀ

CONVOLUZIONE

$$g(z) = \int p(x) q(z-x) dx = \int p(z-y) q(y) dy = p * q(z)$$

X Y STOCASTICAMENTE INDIPENDENTI CON DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE DI PARAMETRO $\lambda > 0$

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad Z = X+Y$$

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) p(z-x) dx = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)} dx = \lambda^2 e^{-\lambda z}\int_0^z dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$$

$X_1, \ldots, X_n$ STOCASTICAMENTE INDIPENDENTI CON DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE DI PARAMETRO λ.

$Z = X_1 + \ldots + X_n$ $\quad Z$ HA DENSITÀ $g(z) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} z^{n-1} e^{-\lambda z} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$

QUESTA È CHIAMATA DISTRIBUZIONE DI ERLANG (UN CASO PARTICOLARE DELLA DISTRIBUZIONE GAMMA).

SIANO X Y STOCASTICAMENTE INDIPENDENTI CON DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE DI PARAMETRI $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ ALLORA $Z = \min(X, Y)$ HA UNA DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE DI PARAMETRO $\lambda_1 + \lambda_2$ E

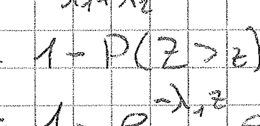
$$P(Z = X) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \qquad P(Z = Y) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$P(Z \leq z) = 1 - P(Z > z) = 1 - P(\min(X, Y) > z) = 1 - P((X > z)(Y > z)) =$$
$$= 1 - e^{-\lambda_1 z} e^{-\lambda_2 z} = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) z}$$

DENSITÀ CONGIUNTA DI X E Y

FUNZIONE DI X E Y CHE CALCOLA L'INTEGRALE DELLA DENSITÀ DI UNA CERTA REGIONE.

$$g(x, y) = \begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 y} & x \geq 0 \quad y \geq 0 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$



$P(Z = X)$ $\qquad P(Z = X) = \int\int_{x\geq 0\, y \geq 0} \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 y} dx dy =$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \int_0^{+\infty} \left(\int_0^y e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 y} dx\right) dy = \lambda_1 \lambda_2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_2 y} \left[-\frac{e^{-\lambda_1 x}}{\lambda_1}\right]_0^y dy =$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_2 y} \left(\frac{-e^{-\lambda_1 y} + 1}{\lambda_1}\right) dy = -\lambda_2 \int_0^{+\infty} \left(-e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) y} + e^{-\lambda_2 y}\right) dy =$$

$$= -\lambda_2 \left(\left[\frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) y}}{(\lambda_1 + \lambda_2)}\right]_0^{+\infty} - \left[\frac{e^{-\lambda_2 y}}{\lambda_2}\right]_0^{+\infty}\right) = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$X_1, \dots, X_n$ STOCASTICAMENTE INDIPENDENTI CON DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE DI PARAMETRO $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ RISPETTIVAMENTE.

$Z = \min(X_1, \dots, X_n)$ HA DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE DI PARAMETRO $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ E

$$P(Z = X_j) = \frac{\lambda_j}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$$

SUPPONIAMO DI AVERE X VARIABILE ALEATORIA CON FUNZIONE DI RIPARTIZIONE $F(x)$, LA QUALE È CONTINUA E STRETTAMENTE CRESCENTE, QUINDI È INVERTIBILE: F^{-1}. SUPPONIAMO CHE U ABBIA DISTRIBUZIONE UNIFORME IN $[0,1]$, ALLORA $F^{-1}(U)$ HA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE F.

SE SI VUOLE CALCOLARE LA PROBABILITÀ $P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) =$
$= P(U \leq F(x)) = F(x)$

$$Y = F(X) = 1 - e^{-\lambda x} \to e^{-\lambda x} = 1 - Y \to -\lambda x = \log(1-Y) \to X = \frac{-\log(1-Y)}{\lambda} \to$$

$$X = \frac{-\log(1-U)}{\lambda}$$

PROCESSI DI MARKOV CON TEMPO CONTINUO OMOGENEI CON SPAZIO DEGLI STATI FINITO O NUMERABILE.

SIA S LO SPAZIO DEGLI STATI (FINITO O NUMERABILE), LA DISTRIBUZIONE INIZIALE $0 \leq \rho_s \leq 1$ E $\sum_{s \in S} \rho_s = 1$. SIA ANCHE LA PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE $\forall t \geq 0$ E OGNI COPPIA DI STATI s, s', $P_{s,s'}(t)$ LA QUALE È COMPRESA TRA 0 E 1.

$$P_{s,s'}(0) = \begin{cases} 1 & s' = s \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

EQUAZIONI DI CHAPMAN-KOLMOGOROV

DATI $t_1 \geq 0$ E $t_2 \geq 0$, $P_{s,s'}(t_1 + t_2) = \sum_{s''} P_{s,s''}(t_1) P_{s'',s'}(t_2)$

X_t PROCESSO DI MARKOV CON TEMPO CONTINUO
$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$

$$P(X_0 = s_0, X_{t_1} = s_1, \dots, X_{t_n} = s_n, X_{t_{n+1}} = s_{n+1}) = \rho_{s_0} P_{s_0,s_1}(t_1) \dots P_{s_{n-1},s_n}(t_n - t_{n-1}) P_{s_n,s_{n+1}}(t_{n+1} - t_n)$$

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{j-1} < t' < t_j < \dots < t_n$$

$$P(X_0 = s_0, X_{t_1} = s_1, \dots, X_{t_{j-1}} = s_{j-1}, X_{t'} = s', X_{t_j} = s_j, \dots, X_{t_n} = s_n) =$$
$$= \rho_{s_0} P_{s_0,s_1}(t_1) \dots P_{s_{j-1},s'}(t' - t_{j-1}) P_{s',s_j}(t_j - t') \dots P_{s_{n-1},s_n}(t_n - t_{n-1}) =$$
$$= \sum_{s'} P_{s_{j-1},s'}(t' - t_{j-1}) P_{s',s_j}(t_j - t') = P_{s_{j-1},s_j}(t_j - t_{j-1})$$

PROCESSO DI POISSON

DISTRIBUZIONE DI POISSON, DISTRIBUZIONE DISCRETA, DI PARAMETRO $\lambda > 0$

$$P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \qquad \text{SIA } S = \mathbb{N}$$

$$\rho_0 = 1, \quad \rho_s = 0 \quad \text{PER } s \geq 1$$

$$P_{s,s'}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{s'-s}}{(s'-s)!} e^{-\lambda t} & \text{SE } s' \geq s \\ 0 & \text{SE } s' < s \end{cases}$$

SIANO X, Y VARIABILI ALEATORIE CON DISTRIBUZIONE DI POISSON STOCASTICAMENTE INDIPENDENTI DI PARAMETRI λ_1, λ_2 ALLORA $Z = X + Y$ HA DISTRIBUZIONE DI POISSON DI PARAMETRO $\lambda_1 + \lambda_2$

! LA FUNZIONE GENERATRICE DELLA DISTRIBUZIONE DI POISSON DI PARAMETRO $\lambda > 0$ È $\varphi(u) = \exp(\lambda(u-1))$.

LA FUNZIONE GENERATRICE DI Z È $e^{\lambda_1(u-1)} e^{\lambda_2(u-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(u-1)}$

EQ. DI CH-KO

$$\sum_{s''} P_{s,s''}(t_1) P_{s'',s'}(t_2) = \sum_{s''=s}^{s'} \frac{(\lambda t_1)^{(s''-s)}}{(s''-s)!} e^{-\lambda t_1} \cdot \frac{(\lambda t_2)^{(s'-s'')}}{(s'-s'')!} e^{-\lambda t_2}$$

PRENDIAMO $k = s''-s$

$$= e^{-\lambda(t_1+t_2)} \sum_{k=0}^{s'-s} \frac{(\lambda t_1)^k}{k!} \cdot \frac{(\lambda t_2)^{(s'-s-k)}}{(s'-s-k)!} \cdot (s'-s)! = e^{-\lambda(t_1+t_2)} (\lambda(t_1+t_2)) =$$

$$= P_{s,s'}(t_1 + t_2)$$

IL PROCESSO DI POISSON FA PARTE DI UNA CLASSE DI PROBLEMI CHIAMATI "PROCESSI DI CONTEGGIO"

PROCESSI DI CONTEGGIO

$(N_t)_{t \geq 0}$ TALI PROCESSI SONO CARATTERIZZATI DA ALCUNE PROPRIETÀ:

1) $N_0 \equiv 0$ E $P(N_0 = 0) = 1$

2) N_t HA VALORI INTERI NON NEGATIVI

3) N_t NON DECRESCENTE

! LO SPAZIO DEGLI STATI SONO GLI INTERI NON NEGATIVI:

$P_{s,s'}(t) = 0$ PER $s' < 0$ (LA PROBABILITÀ DI ANDARE DA s A s' CON $s < s'$ E $s' < 0$ È 0)

LE PROPRIETÀ AGGIUNTIVE FORNITE DAL PROCESSO DI POISSON:

4) N_t HA INCREMENTI STAZIONARI

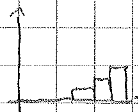
$$t_0 < t_1 < \ldots < t_n \longrightarrow P(N_{t_1} - N_{t_0} = k_1, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n) =$$

$$= P(N_{t_1+u} - N_{t_0+u} = k_1, \ldots, N_{t_n+u} - N_{t_{n-1}+u} = k_n)$$ → SPOSTO IN AVANTI DI u MA LA PROBABILITÀ RIMANE UGUALE

5) N_t HA INCREMENTI INDIPENDENTI

$$t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n \to P(N_{t_1}-N_{t_0}=k_1, \dots, N_{t_n}-N_{t_{n-1}}=k_n) =$$
$$P(N_{t_1}-N_{t_0}=k_1)\dots P(N_{t_n}-N_{t_{n-1}}=k_n) = \frac{(\lambda(t_1-t_0))^{k_1}}{k_1!}e^{-\lambda(t_1-t_0)}\cdot\dots$$
$$\dots\frac{(\lambda(t_n-t_{n-1}))^{k_n}}{k_n!}e^{-\lambda(t_n-t_{n-1})}$$

IL PROCESSO DI POISSON PUÒ FARE SOLO SALTI DI 1, QUESTO PERCHÉ:



PRENDIAMO UN INTERVALLO DA 0 A T, DIVIDENDO IN INTERVALLI DI LUNGHEZZA $\frac{T}{2^h}$, QUAL'È LA PROBABILITÀ CHE SIANO TUTTI ≤ 1? QUESTA PROBABILITÀ È CALCOLABILE COME IL PRODOTTO DI TUTTE LE PROBABILITÀ, DATO CHE SONO INDIPENDENTI TRA LORO.

$$P\left(\prod_{k=0}^{2^h-1}\left(N_{\left(\frac{k+1}{2^h}\right)T}-N_{\left(\frac{k}{2^h}\right)T}\leq 1\right)\right) = \prod_{k=0}^{2^h-1}P\left(N_{\left(\frac{k+1}{2^h}\right)T}-N_{\left(\frac{k}{2^h}\right)T}\leq 1\right) = P\left(\left(N_{\frac{T}{2^h}}\leq 1\right)\right)^{2^h} =$$
$$=\left(e^{-\frac{\lambda T}{2^h}}+\frac{\lambda T}{2^h}e^{-\frac{\lambda T}{2^h}}\right)^{2^h} = e^{-\lambda T}\left(1+\frac{\lambda T}{2^h}\right)^{2^h}\xrightarrow[h\to\infty]{} e^{-\lambda T}e^{\lambda T} = 1$$

QUINDI ALL'AUMENTARE DEL NUMERO DI h ($\sim 2^h$) OVVERO DI PARTIZIONI DELLA LUNGHEZZA T È SEMPRE PIÙ PROBABILE ESSI SIANO INFERIORI ALLA LUNGHEZZA 1.

- SUPPONIAMO CHE CON UNA PROBABILITÀ p IL CLIENTE CHE ARRIVA SIA UN UOMO E CON PROBABILITÀ $1-p$ UNA DONNA.
SE N_t È UN PROCESSO DI POISSON DI PARAMETRO λ, ALLORA $N_t = N_t^{(1)}+N_t^{(2)}$, ALLORA $N_t^{(1)}$ E $N_t^{(2)}$ SONO DUE PROCESSI DI POISSON STOCASTICAMENTE INDIPENDENTI DI PARAMETRO λp, $\lambda(1-p)$.

PER VEDERE CHE SONO PROCESSI DI POISSON INDIPENDENTI SI DEVE CALCOLARE $P(N_t^{(1)}=k_1, N_t^{(2)}=k_2) = P(N_t=k_1+k_2)P(N_t^{(1)}=k_1 \mid N_t=k_1+k_2) =$
$$=\frac{(\lambda t)^{k_1+k_2}}{(k_1+k_2)!}e^{-\lambda t}\binom{k_1+k_2}{k_1}p^{k_1}(1-p)^{k_2} = e^{-(\lambda p)t}e^{-(\lambda(1-p)t)}\cdot\frac{1}{k_1!}\cdot\frac{1}{k_2!}\cdot(\lambda p t)^{k_1}(\lambda(1-p)t)^{k_2}$$
$$=\frac{(\lambda p t)^{k_1}}{k_1!}\cdot e^{-\lambda p t}\cdot\frac{(\lambda(1-p)t)^{k_2}}{k_2!}\cdot e^{-\lambda(1-p)t}$$

$p_1, p_2, \dots, p_r \qquad 0\leq p_j\leq 1 \qquad p_1+\dots+p_r=1$

$N_t = N_t^{(1)}+\dots+N_t^{(r)}$ $\qquad N_t^{(1)},\dots,N_t^{(r)}$ SONO PROCESSI DI POISSON INDIPENDENTI DI PARAMETRO $\lambda p_1,\dots,\lambda p_r$

SE $N_1,\dots,N_r$ SONO PROCESSI DI POISSON INDIPENDENTI DI PARAMETRO $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ ALLORA $N = N_1+\dots+N_r$ È UN PROCESSO DI POISSON DI PARAMETRO $\lambda_1+\dots+\lambda_r$

N_t PROCESSO DI POISSON DI PARAMETRO $\lambda_1+\dots+\lambda_n$

$p_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_1+\dots+\lambda_r} \qquad \lambda p_j = (\lambda_1+\dots+\lambda_r)\frac{\lambda_j}{\lambda_1+\dots+\lambda_r}$

Sia U tempo del primo salto, qual'è la distribuzione di U?
(ovvero quanto tempo devo aspettare per avere il primo salto?)

$$P(U \leq t) = 1 - P(U > t) = 1 - P(N_t = 0) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Supponiamo di prendere $0 \leq a < b < T$, qual'è la probabilità che U sia tra a e b:

[illegible]

$$P(a < U \leq b \mid N_T = 1) = \frac{P(N_a = 0, N_b - N_a = 1, N_T - N_b = 0)}{P(N_T = 1)} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda a} \cdot \lambda(b-a) e^{-\lambda(b-a)} e^{-\lambda(T-b)}}{\lambda T e^{-\lambda T}} = \frac{e^{-\lambda T}}{e^{-\lambda T}} \cdot \frac{b-a}{T}$$

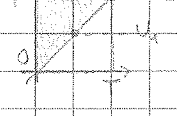
ha distribuzione uniforme

$U_1, \dots, U_n$ tempi dei primi n salti e $0 < a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq T$ vari intervallini, qual'è la probabilità che:

$$P(a_1 < U_1 \leq b_1, a_2 < U_2 \leq b_2, \dots, a_n < U_n \leq b_n \mid N_T = n)$$

anche qui la distribuzione è uniforme, non più però nell'intervallo $[0,1]$ ma

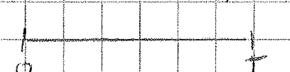
$$n! \frac{\prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)}{T^n}$$



hanno distribuzione uniforme non in tutto il quadrato ma solo in questo triangolo, perché U_1 deve essere minore di U_2 questa è la regione dell'ipercubo in cui $0 < x_1 < \dots < x_n \leq T$

Simulazione del processo di Poisson di parametro λ

Prima di tutto bisogna vedere quanti sono i salti da 0 a T.



Sia V che ha distribuzione uniforme in $[0,1]$, controllo se V è $\leq e^{-\lambda T}$ se è vero allora $N = 0$, altrimenti guardo se V è $\leq e^{-\lambda T} + \lambda T e^{-\lambda T}$ se ciò è vero allora $N = 1$ e così via, se ciò non è vero quando se $V \leq e^{-\lambda T} + \lambda T e^{-\lambda T} + \frac{(\lambda T)^2}{2} e^{-\lambda T}$ se è vero $N = 2$

Una volta trovato il n° di salti nell'intervallo è necessario vedere la loro posizione, per far ciò genero n variabili indipendenti con distribuzione uniforme in $[0,T]$, si generano variabili aleatorie con distribuzione in $[0,1]$ moltiplicandoli per T diventano con distribuzione in $[0,T]$.

Un altro modo di generare un processo di Poisson

Abbiamo visto che il primo salto ha distribuzione esponenziale, se considero i tempi fra i salti, sono indipendenti con distribuzione esponenziale. $V_1, V_2, V_3, \dots$ variabili aleatorie indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro λ.

Pongo $U_1 = V_1$, $U_2 = V_1 + V_2$, $U_3 = V_1 + V_2 + V_3$, ecc...

e definisco $N_t = k$ se $U_k \leq t$ $U_{k+1} > t$

numero dei salti avvenuti prima di t

distribuzione di Poisson

$$P(N_t = k) = P(U_k \leq t, U_{k+1} > t) = P(U_k \leq t) - P(U_{k+1} \leq t)$$

U_k ha densità
$$\begin{cases} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

distribuzione di Erlang di parametro k

U_{k+1} HA DENSITÀ $\begin{cases} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} t^k e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$$P(U_k \leq t) - P(U_{k+1} \leq t) = \int_0^t \frac{\lambda}{(k-1)!} s^{k-1} e^{-\lambda s} ds - \int_0^t \frac{\lambda^{k+1}}{k!} s^k e^{-\lambda s} ds =$$

$$= \int_0^t \frac{\lambda^k s^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda s} ds - \left(\left[-\frac{\lambda^k}{k!} s^k e^{-\lambda s} \right]_0^t + \int_0^t \frac{\lambda^k}{(k-1)!} s^{k-1} e^{-\lambda s} ds \right) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

SE DEFINIAMO $N_t = \max\{k; U_k \leq t\}$ $\quad P(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$

$P(N_{t_1} = k_1, N_{t_2} - N_{t_1} = k_2, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n) =$ (SAPPIAMO CHE $U_k \leq t_1$ E $U_{k+1} > t_1$)

$$= \prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{(\lambda(t_{j+1} - t_j))^{k_j}}{k_j!} e^{-\lambda(t_{j+1} - t_j)} \right)$$

SIANO $V_1, V_2, \dots$ INDIPENDENTI CON DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE DI PARAMETRO λ
SIANO $Z_1, Z_2, \dots$ INDIPENDENTI CON DISTRIBUZIONE UNIFORME IN $[0,1]$

$V_k = -\frac{\log Z_k}{\lambda}$ $\quad F(x) = y \quad 1 - e^{-\lambda x} = y \quad e^{-\lambda x} = 1 - y$

$x = -\frac{1}{x} \log(1-y)$ $e^{-\lambda(t_{j+1} - t_j)}$

! IL PRIMO METODO PUÒ ESSERE USATO ANCHE PER I PUNTI (A CASO) SU UN PIANO, QUEST'ULTIMO SOLO PER IL PROCESSO DI POISSON STANDARD.

CARATTERIZZAZIONE INFINITESIMALE DEL PROCESSO DI POISSON

$P_{s,s}(h) = 1 - \lambda h + O(h)$ $\quad \lim_{h \to 0} \frac{O(h)}{h} = 0$

$P_{s,s+1}(h) = \lambda h + O(h)$

$P_{s,s'}(h) = O(h)$

- $P_{s,s}(h) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + O(h)$
- $P_{s,s+1}(h) = \lambda h e^{-\lambda h} = \lambda h(1 - \lambda h + O(h)) = \lambda h - \lambda^2 h^2 + O(h) = \lambda h + O(h)$
- $P_{s,s'}(h) = \begin{cases} 0 & \text{SE } s' < s \\ \frac{(\lambda h)^{(s'-s)}}{(s'-s)!} e^{-\lambda h} = O(h) & \text{SE } s' \geq s \end{cases}$

! SE INDICO CHE LE PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE DEVONO RISPETTARE I TRE PUNTI PRECEDENTI, AUTOMATICAMENTE OTTENGO IL PROCESSO DI POISSON.

$$P_{0,s}(t+h) = \sum_{s'} P_{0,s'}(t) P_{s',s}(h) = P_{0,s}(t) P_{s,s}(h) + P_{0,s-1}(t) P_{s-1,s}(h) +$$

$$+ \sum_{\substack{s' \neq s \\ s' \neq s-1}} P_{0,s'}(t) P_{s',s}(h) = \frac{P_{0,s}(t+h) - P_{0,s}(t)}{h} = \frac{-\lambda h P_{0,s}(t) + O(h)}{h} +$$

$$+ \frac{\lambda h P_{0,s-1}(t) + O(h)}{h} + \frac{O(h)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} -\lambda P_{0,s}(t) + \lambda P_{0,s-1}(t) = \underbrace{P'_{0,s}(t)}_{\text{DERIVATA}} \quad \text{SE } s \geq 1$$

IN CASO $s = 0$ $\quad P'_{0,0}(t) = -\lambda P_{0,0}(t)$

Supponiamo un processo di Poisson non omogeneo nel tempo, ad esempio ci sono momenti del giorno in cui ci sono più arrivi che altri momenti.

Definiamo la funzione $\lambda(s)$ dato $\Lambda(t) = \int_s^t \lambda(s)\,ds$, sia $S = \mathbb{N}$ e
$P_0 = P(X_0 = 0) = 1 \quad P_s = 0 \quad s \neq 0$

$$P_{s,s'}(t,t') = \begin{cases} 0 & \text{se } s'<s \\ \dfrac{(\Lambda(t') - \Lambda(t))^{s'-s}}{(s'-s)!} e^{-(\Lambda(t') - \Lambda(t))} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2 tempi

Sapendo che

$$\Lambda(t') - \Lambda(t) = \int_t^{t'} \lambda(s)\,ds$$

Ritornando al caso di processo di Poisson omogeneo:

Processi di tipo esponenziale

Sia sempre lo spazio degli stati S e la distribuzione iniziale P_s con $s \in S$
$0 \le P_s \le 1 \quad \sum_s P_s = 1$

$v_s > 0$ rappresenta il parametro della distribuzione esponenziale del tempo in cui rimaniamo nello stato s.

! Dato uno stato s se ci chiediamo quanto tempo dovremo stare nello stato s, quello non dipende dal tempo precedente, e quindi può essere solo una distribuzione esponenziale.

Quando lasciamo uno stato s qual è la probabilità di andare in uno stato s'?

Dato che dobbiamo lasciare lo stato in cui ci troviamo

$$a_{s,s'} \quad 0 \le a_{s,s'} \le 1 \quad \forall s \ \sum_{s'} a_{s,s'} = 1 \quad a_{s,s} = 0$$

Caso del processo di Poisson

$$v_s = \lambda > 0 \qquad a_{s,s+1} = 1 \qquad a_{s,s'} = 0 \ \text{ per } s' \neq s+1$$

abbastanza piccolo h

$$P_{s,s'}(h) = v_s a_{s,s'} h + o(h)$$

h è necessario che con probabilità di ordine h facciamo solo 1 salto

$$P(T_s \le h) = 1 - e^{-v_s h}$$

$$P_{s,s}(h) = e^{-v_s h} + o(h) = 1 - v_s h + o(h) =$$
$$= v_s h + o(h)$$

T_s tempo di permanenza nello stato s

$$P(T_s > h) = e^{-v_s h}$$
$$P(T_s \le h) = 1 - e^{-v_s h}$$

Chiamiamo $q_{s,s'} = v_s a_{s,s'}$ l'intensità di transizione dallo stato s ad s'

$$\sum_{s'} q_{s,s'} = v_s$$

EQ. CH-KO
$$P_{s,s}(t+h) = \sum_{s'} P_{s,s'}(t) P_{s',s}(h) = P_{s,s}(t) P_{s,s}(h) + \sum_{s' \neq s} P_{s,s'}(t) P_{s',s}(h) =$$
$$= P_{s,s}(t)(1 - v_s h + o(h)) + \sum_{s'\neq s} P_{s,s'}(t)(q_{s',s} h + o(h)) =$$
$$= \underline{\frac{P_{s,s}(t+h) - P_{s,s}(t)}{h}} = \underline{\frac{-v_s h + o(h)}{h}} P_{s,s}(t) + \sum_{s'\neq s} \underline{\frac{q_{s',s} + o(h)}{h}} P_{s,s'}(t)$$

$$P'_{s,s}(t) = -v_s P_{s,s}(t) + \sum_{s' \neq s} q_{s',s} P_{s',s}(t)$$
$$P'_{\bar{s},s}(t) = -v_s P_{\bar{s},s}(t) + \sum_{s' \neq s} q_{s',s} P_{\bar{s},s'}(t)$$

EQUAZIONI DI KOLMOGOROV IN AVANTI

$S = \{0, 1\}$ $\quad v_0, v_1 \quad a_{0,1} = a_{1,0} = 1 \quad q_{0,1} = v_0 \; ; \; q_{1,0} = v_1$

$$P'_{0,0}(t) = -v_0 P_{0,0}(t) + v_1 P_{0,1}(t)$$
$$P'_{0,1}(t) = -v_1 P_{0,1}(t) + v_0 P_{0,1}(t)$$

[PAG. 49 APPUNTI BRUNA COPIA INTEGRAZIONE (SINO RISOLUZIONE IMMAGINI]

$$P_{0,0}(t) + P_{0,1}(t) = 1$$
$$P_{0,1}(t) = 1 - P_{0,0}(t)$$
$$u(t) = P_{0,0}(t)$$

EQUAZ. LINEARE NON OMOGENEA (PERCHÈ C'È IL $+ v_1$ FINALE)

$$u'(t) = -v_0 u(t) + v_1(1 - u(t)) = (v_1 - v_0) u(t) + v_1$$

SOLUZIONE PARTICOLARE

$$\bar{u}(t) \equiv C$$
$$(v_1 - v_0) C + v_1 = 0$$
$$C = -\frac{v_1}{v_1 - v_0}$$

$u_0(t)$ SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI OMOGENEE

$$u'_0(t) = (v_1 - v_0) \qquad \frac{u'_0(t)}{u_0(t)} = v_1 - v_0$$
$$\log(u_0(t)) = a + (v_1 + v_0)t$$
$$u_0(t) = e^{a + (v_1 - v_0)t}$$
$$u'(t) = (v_1 - v_0) u(t) + v_1$$
$$u(t) = u_0(t) + C = e^{a + (v_1 - v_0)t} + C = P_{0,0}(t)$$
$$\bar{u}(v_1 - v_0) + v_1 = 0$$
$$C = \bar{u} = \frac{v_1}{v_1 - v_0}$$
$$P_{0,1}(t) = 1 - P_{0,0}(t)$$

PROCESSI DI PURA NASCITA

SI POSSONO PENSARE COME UNA GENERALIZZAZIONE DEL PROCESSO DI POISSON.

$S = \mathbb{N} \quad \lambda_k > 0 \quad k \geq 0 \quad v_k = \lambda_k$ (IL TEMPO IN CUI RIMANIAMO NELLO STATO k E' DATO DA λ_k)

$a_{k,k+1} = 1 \quad a_{k,k'} = 0$ PER $k' \neq k+1$

PURA NASCITA DESCRIVONO COME SI EVOLVE UNA POPOLAZIONE, SUPPONENDO CHE LA POPOLAZIONE POSSA SOLO AUMENTARE.

FISSIAMO UNO STATO DI PARTENZA Y, $P_{Y,Y'}(t)$ PER $Y'<Y$ $P_{Y,Y'}(t)=0$

$P'_{Y,Y}(t) = -\overset{=v_Y}{\lambda_Y} P_{Y,Y}(t) + \lambda_{Y-1} P_{Y,Y-1}(t) = -\lambda_Y P_{Y,Y}(t)$

$P'_{Y,Y'}(t) = -\lambda_{Y'} P_{Y,Y'}(t) + \lambda_{Y'-1} P_{Y,Y'-1}(t)$ CON $Y' \geq Y+1$

SAPENDO $q_{Y,Y'} = v_Y \underbrace{\partial_{Y,Y'}}_{1 \text{ SE } Y'=Y+1}$, $q_{Y,Y+1} = \lambda_Y$; $q_{Y,Y'}=0$ SE $Y' \neq Y+1$

SAPPIAMO CHE $P_{Y,Y}(0) = e^{0}$ E $P_{Y,Y}(t) = e^{0-\lambda_Y t} = e^{-\lambda_Y t}$

PROBLEMA DELL' ESPLOSIONE

$P_{0,Y}(t)$ SI HA UN'ESPLOSIONE SE PER QUALCHE t $\sum_Y P_{0,Y}(t) < 1$ VUOL DIRE CHE IN UN TEMPO FINITO LA POPOLAZIONE CRESCE IN MODO INFINITO

$S_N(t) = \sum_{Y=0}^{N} P_{0,Y}(t)$ $\mu_N(t) = 1 - S_N(t)$ $\mu(t) = \lim_{N\to\infty} \mu_N(t) = \inf_N \mu_N(t)$

PROBABILITÀ DI ESPLOSIONE ENTRO t

IL RISULTATO È CHE:

TEOREMA

PROBABILITÀ DI ESPLOSIONE

- SE $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = +\infty$ ALLORA $\mu(t) = 0$ $\forall t$
- SE $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < +\infty$ ALLORA $\exists t$ t.c. $\mu(t) > 0$

! UN ESEMPIO È IL PROCESSO DI POISSON IN CUI $\lambda_k \equiv \lambda > 0$ E QUINDI $\sum_k \frac{1}{\lambda_k} = \infty$ E QUINDI NON VI SONO ESPLOSIONI

! UN ALTRO ESEMPIO È IL PROCESSO DI CRESCITA LINEARE $\lambda_k = k\lambda$ $S = \{1, 2, \dots\}$ E $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda k} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ ANCHE QUI NON VI SONO ESPLOSIONI.

~~IL PROBLEMA DELL'ESPLOSIONE PARTENDO DA $P_{0,Y}(t)$ PER SEMPLICITÀ C'È UN'ESPLOSIONE SE PER QUALCHE $\bar{t}$ $\sum_Y P_{0,Y}(\bar{t}) < 1$.~~

~~SI DEFINISCE~~

~~$S_N(t) = \sum_{Y=0}^{N} P_{0,Y}(t)$ PROBABILITÀ CHE A t CI SI TROVI IN UNO STATO $\leq N$~~

E

Dim.: $P'_{0,Y}(t) = -\lambda_Y P_{0,Y}(t) + \lambda_{Y-1} P_{0,Y-1}(t)$ EQ. IN AVANTI DI KOLMOGOROV

$S_N(t) = \sum_{Y=0}^{N} P_{0,Y}(t)$ PROBABILITÀ CHE CI SI TROVI IN UNO STATO $\leq N$

$\mu_N(t) = 1 - S_N(t)$

$\lim_{N\to\infty} \mu_N(t) = \inf_N (\mu_N(t))$ È LA PROBABILITÀ DI ESPLOSIONE

(USE CHE $\sum_{Y=0}^{\infty} P_{0,Y}(t) < 1$)

SE ESPLODE, $\lim_{N\to\infty} \mu_N(t)$ È POSITIVA $[(1 - \text{QUALCOSA MINORE DI } 1) > 0]$

DERIVIAMO $S_N(t)$:

$S'_N(t) = \sum_{Y=0}^{N} P'_{0,Y}(t) = \sum_{Y=0}^{N} \left(-\lambda_Y P_{0,Y}(t) + \lambda_{Y-1} P_{0,Y-1}(t)\right) = -\lambda_N P_{0,N}(t)$

DERIVANDO $\mu_N(t)$: $\mu_N'(t) = -S_N'(t) = \lambda_N P_{0,N}(t)$

$$\mu_N(t) = \mu_N(0) + \int_0^t \mu_N'(y)\,dy$$

MA $\mu_N(0)=0$ PERCHÉ $P_{0,0}(0)=1$ E $P_{0,y}(0)=0$ PER $y \geq 1$,

QUINDI $\mu_N(t) = \lambda_N \int_0^t P_{0,k}(y)\,dy$

$$\int_0^t P_{0,N}(y)\,dy = \frac{\mu_N(t)}{\lambda_N}$$

$$\int_0^t \left(\sum_{k=0}^{N} P_{0,k}(y)\right) dy = \sum_{k=0}^{N} \frac{\mu_k(t)}{\lambda_k}$$

LA PRIMA SIMMETRIA È S_N, CIOÈ $1-\mu_N$:

$$\int_0^t (1-\mu_N(t))\,dy = \sum_{k=0}^{N} \frac{\mu_k(t)}{\lambda_k}$$

SUPPONENDO CHE $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < +\infty$, CIOÈ CHE CONVERGA

SI PUÒ MAGGIORARE $\mu_k(t)$ CON 1 PERCHÉ È UNA PROBABILITÀ, QUINDI

$$\int_0^t (1-\mu_N(y))\,dy \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$$

PER $N \to \infty$ SE $\forall_s\ \mu(s)=0$, SI AVREBBE CHE $t < \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{\lambda_k}$.

SUPPONENDO CHE $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = +\infty$ (DIVERGE)

$$\int_0^t S_N(y)\,dy = \sum_{k=0}^{N} \frac{\mu_k(t)}{\lambda_k} \geq \mu(t) \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{\lambda_k}$$

$\mu_k(t)$ È DECRESCENTE AL VARIARE DI k, QUINDI È $\geq \mu(t)$

SE $N \to \infty$

$$\underbrace{\int_0^t S_N(y)\,dy}_{\text{FINITO}} \geq \mu(t) \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}}_{\text{INFINITO}}$$

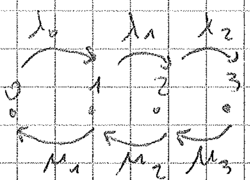
ALLORA PERCHÉ SIA FINITO $\geq \mu(t)$ INFINITO, $\mu(t)$ DEVE ESSERE $=0 \Rightarrow$ NO ESPLOSIONE

UN ESEMPIO ~~È~~ UN PROCESSO DI POISSON CON $\lambda_k \equiv 1 > 0$ E $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = +\infty$

UN ALTRO ESEMPIO È IL PROBLEMA DI CRESCITA LINEARE O DI YULE, DOVE $\lambda_k = k\lambda$, QUINDI $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \lambda^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \to +\infty$. SE λ_k CRESCESSE PIÙ VELOCEMENTE CHE IN MODO LINEARE, SI AVREBBE UNA SERIE CONVERGENTE E QUINDI UN'ESPLOSIONE. INFATTI $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ CONVERGE PER $\alpha > 1$ E DIVERGE PER $\alpha \leq 1$

PROCESSI DI NASCITA E MORTE

$S = \mathbb{N}$, $\nu_0 = \lambda_0$ e per $k \geq 1$ ci sono λ_k (processo di nascita) e μ_k (processo di morte): $\nu_k = \lambda_k + \mu_k$ quindi $a_{k,k+1} = \dfrac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k}$
$(a_{0,1} = 1)$ e $a_{k,k-1} = \dfrac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k}$



le intensità

$$q_{0,1} = \lambda_0 \qquad q_{k,k+1} = \lambda_k \qquad q_{k,k-1} = \mu_k$$

In quanto che le equazioni di Kolmogorov in avanti sono:

Dato $\bar{s}$, $P'_{\bar{s},s}(t) = -\nu_s P_{\bar{s},s}(t) + \sum_{s'} q_{s',s} P_{\bar{s},s'}(t)$

Sapendo che $\nu_s = \sum_{s'} q_{s,s'}$ e $q_{s,s'} = \nu_s a_{s,s'}$

quindi $P'_{\bar{s},s}(t) = -(\lambda_s + \mu_s) P_{\bar{s},s}(t) + \lambda_{s-1} P_{\bar{s},s-1}(t) + \mu_{s+1} P_{\bar{s},s+1}(t)$ per $s \geq 1$

$$P'_{\bar{s},0}(t) = -\lambda_0 P_{\bar{s},0}(t) + \mu_1 P_{\bar{s},1}(t)$$

Queste equazioni non sono soddisfatte solo dalle probabilità di transizione, ma anche da quelle di trovarsi in uno stato preciso...

$$P_s(t) = P(X_t = s) = \sum_{s'} \rho_{s'} P_{s',s}(t)$$ con ρ distr. iniziale

Infatti derivando

$$P'_s(t) = \sum_{s'} \rho_{s'} P'_{s',s}(t)$$

Visto che tutte le $P'_{s',s}(t)$ mantengono le equazioni di Kolmogorov, anche la loro sommatoria le soddisfa, quindi anche $P'_s(t)$ le soddisfa.

Un processo di nascita e morte non esplode se $\exists c$ t.c. $\forall s$ $\lambda_s \leq c \wedge \forall s$ $\mu_s \leq c$ quindi l'intensità dei passaggi è maggiorata da quella di un processo di Poisson con $\lambda = c$, quindi non c'è esplosione.

Esempi (dalla teoria delle code):

- Uno sportello solo, clienti o serviti subito in un tempo aleatorio o in coda, indico con M/M/1 dove M sta per "memoryless": un M al primo simbolo significa arrivi di Poisson, al secondo servizio esponenziale.
  Il processo è il numero totale di clienti nel sistema: $S = \mathbb{N}$, X_t = numero clienti al tempo t: X_t è un processo di nascita e morte in via dell'assenza di memoria.
  Dati arrivi di Poisson con $\lambda > 0$ e tempo di servizio esponenziale di parametro $\mu > 0$, $\rho_0 = 1$ e $\rho_s = 0$ per $s \geq 1$.

$\nu_0 = \lambda$ perché il tempo del primo cliente ha parametro λ, quindi $a_{0,1} = 1$ e $q_{0,1} = \lambda$

$\nu_s = \lambda + \mu$ $\quad a_{s,s+1} = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}$ $\quad a_{s,s-1} = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}$ perché sono esponenziali

$$q_{s,s+1} = \lambda \qquad q_{s,s-1} = \mu$$

Le equazioni in avanti di Kolmogorov sono: per $P_s(t)=P(X_t=s)$

$$P'_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

$$P'_s(t) = -(\mu+\lambda)P_s(t) + \lambda P_{s-1}(t) + \mu P_{s+1}(t)$$

Rispetto ai processi di pura nascita, la prima equazione coinvolge anche P_1 quindi non si può risolvere perché P_1 si collega a P_2 ecc...

Però si può vedere se esiste una distribuzione invariante che è una distribuzione "limite" nel senso che a tempo infinito la distribuzione della probabilità degli stati tende alla distribuzione invariante. La troviamo cercando qualcosa che non cessi nel tempo $\Rightarrow$ derivata nulla $\Rightarrow$ costante, cioè $P_s(t) \equiv P_s$, quindi

$$\begin{cases} -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) = 0 \\ -(\lambda+\mu)P_s(t) + \lambda P_{s-1}(t) + \mu P_{s+1}(t) = 0 \end{cases}$$

sia $\sum_{s=0}^{\infty} P_s = 1$ $\qquad P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$

$P_{s+1} = \frac{\lambda}{\mu} P_s$ per induzione

Quindi, iterando $P_s = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0$ e riconoscendo che sono probabilità (ovvero la sommatoria è 1) si ha $P_0 \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s = 1$

Se $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ la serie converge, quindi serve $\lambda < \mu$ da cui $P_0 \cdot \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow P_0 = 1 - \frac{1}{\mu}$, sotto queste condizioni (cioè $\lambda < \mu$):

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \quad \text{e} \quad P_s = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

e la distribuzione invariante è geometrica (partendo da 0)

! Dopo molto tempo la probabilità di transizione degli stati è data dalla distribuzione invariante, e la distr. invar. è anche quanto tempo si passa negli stati $\Rightarrow$ si stabilizza o ogni tanto si svuota (perché passa un tempo positivo nello stato 0). simula??

Per simularlo, inizialmente si genera una variabile di parametro λ e si va in 1, poi si generano due variabili aleatorie di parametro λ e μ: se $V_\lambda < V_\mu$ si sale di 1, altrimenti si scende.

- Caso $M/M/\infty$

Caso di un infinito numero di sportelli, arrivi di parametro λ e tempi di servizio di parametro μ

$v_0 = \lambda \qquad a_{0,1} = 1 \qquad q_{0,1} = \lambda$

per $s \geq 1$ $\quad v_s = \lambda + s\mu \quad a_{s,s+1} = \frac{\lambda}{\lambda+s\mu} \quad a_{s,s+1} = \frac{s\mu}{\lambda+s\mu}$

$q_{s,s+1} = \lambda \qquad q_{s,s-1} = s\mu$

Le equazioni di Kolmogorov sono:

$$P'_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

$s \geq 1$ $\quad P'_s(t) = -(\lambda + s\mu)P_s(t) + \lambda P_{s-1}(t) + (s+1)\mu P_{s+1}(t)$

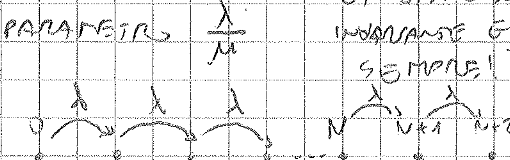
Da cui, con lo stesso procedimento di prima:

$$P_0 = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \qquad P_s = \frac{\lambda^s}{\mu^s s!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

Che è una distribuzione di Poisson di parametro $\frac{\lambda}{\mu}$

La distribuzione invariante esiste sempre!

- Caso M/M/N



Si ha un numero finito di sportelli.
Il ragionamento è analogo a prima, si ha che quando il numero di clienti che sono in coda supera $N \Rightarrow$ nuova intensità di transizione. Si hanno:

$$-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0$$

$$-(\lambda + \mu s) P_s + \lambda P_{s-1} + ((s+1)\mu) P_{s+1} = 0 \qquad \text{per } 1 \le s \le N-1$$

$$(-\lambda + N\mu) P_s + \lambda P_{s-1} + N\mu P_{s+1} = 0$$

Da cui:

per $1 \le s \le N-1$: $\quad P_s = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{s!} P_0$

per $s > N$: $\quad P_s = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{N!} \frac{1}{N^{s-N}}$

La soluzione alla sommatoria per ottenere la sommatoria delle probabilità

$$\left(\underbrace{\sum_{s=0}^{N} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{s!}}_{\text{finita}} + \underbrace{\sum_{s=N+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{N!} \frac{1}{N^{s-N}}}_{\text{infinita, si esegue invece se converge la serie geometrica.}} \right) P_0 = 1$$

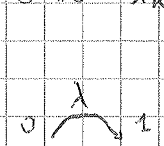
$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N \frac{1}{N!} \left(\sum_{k=s}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu N}\right)^k \right)$$ che è finita solo se $\frac{\lambda}{\mu N} < 1 \Rightarrow \lambda < \mu N$

Se $\lambda < \mu N$, la distribuzione invariante esiste

- Caso M/M/N/K (K limite massimo alla lunghezza della coda: il cliente K+1 viene rifiutato)

In questo caso la distribuzione invariante esiste sempre perché lo spazio degli stati è $\{0, \dots, K\}$. Supponendo $\lambda_K = 0$, arrivata a K l'intensità di passare a $K+1$ è 0.

Dati λ_0, μ_1



$$P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t)$$

$$P_1'(t) = -\mu_1 P_1(t) + \lambda_0 P_0(t)$$

La distribuzione invariante è data da:

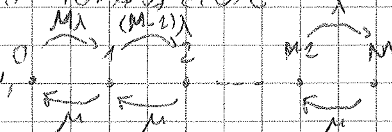
$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_0} \cdot \frac{\mu_1}{\lambda_0 + \mu_1} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \mu_1}$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1}} = \frac{\mu_1}{\lambda_0 + \mu_1}$$

- Caso riparazione di macchine

M macchine 1 riparatore, tempo di funzionamento esponenziale di parametro λ, tempo di riparazione esponenziale di param. μ.

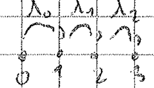
$S = \{0, \dots, M\}$ rappresenta il numero di macchine in riparazione



Una macchina si guasta nel minimo tra M tempi esponenziali, quindi $M\lambda$ nello stato 0, poi $(M-1)\lambda$ ecc...
Essendoci un numero finito di stati, esiste anche la distribuzione invariante. Si può pensare che $\lambda_M = 0$, cioè che da M a $M+1$ non si possa andare.

Processo di pura nascita di Yule

λ_k



i passaggi sono caratterizzati dall'intensità dei lambda.

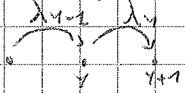
intensità cresce linearmente

Processo di Yule (o di crescita lineare): $\lambda_k = k\lambda$

$S = \{1, 2, 3, \dots\}$ (nel caso di 0 sarebbe 0 l'intensità quindi si elimina)

Supponiamo come esempio una popolazione di individui in cui quando uno muore ne nascono due, questo soddisfa il processo di Yule.
↳ tutti hanno una durata della vita esponenziale.
Supponendo k individui, vi saranno k tempi esponenziali, una distribuzione esponenziale di parametro λ.

$P_{x,y}(t)$ passare dallo stato x allo stato y in tempo t, eq. in avanti:



sempre $P_{x,x}(0) = 1$

$$P'_{x,y}(t) = \lambda_{y-1} P_{x,y-1}(t) - \lambda_y P_{x,y}(t)$$

$$P'_{x,x}(t) = -\lambda_x P_{x,x}(t)$$ → dovremmo mettere $x-1$, ma è impossibile tornare indietro in questi processi.

$$P_{x,x}(t) = e^{-\lambda_x t}$$

Derivata ↳
$$P'_{x,x+1}(t) = \lambda_x P_{x,x}(t) - \lambda_{x+1} P_{x,x+1}(t) = \lambda_x e^{-\lambda_x t} - \lambda_{x+1} P_{x,x+1}(t)$$
$$= \lambda_x \int_0^t e^{-\lambda_{x+1}(t-s)} e^{-\lambda_x s}\, ds = \lambda_x e^{-\lambda_{x+1} t} \int_0^t e^{(\lambda_{x+1}-\lambda_x)}\, ds$$
$$= -\lambda_x \lambda_{x+1} e^{-\lambda_{x-1} t} \int_0^t e^{(\lambda_{x+1}-\lambda_x)s}\, ds + \lambda_x e^{-\lambda_{x+1} t} e^{(\lambda_{x+1}-\lambda_x)t} =$$
$$= -\lambda_{x+1}(P_{x,x+1}(t)) + \lambda_x e^{-\lambda_x t}$$

Processo di Yule $\lambda_x = x\lambda$

$$P_{x,x+1}(t) = x\lambda \int_0^t e^{-(x+1)\lambda(t-s)} e^{-x\lambda s}\, ds =$$
$$= x\lambda e^{-(x+1)\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s}\, ds = x\lambda e^{-(x+1)\lambda t} \left[\frac{e^{\lambda s}}{\lambda}\right]_0^t =$$
$$= x\lambda e^{-(x+1)\lambda t}\left(\frac{e^{\lambda t}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\right) = x\left(e^{-x\lambda t} - e^{-(x+1)\lambda t}\right) =$$
$$= x e^{-x\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})$$

$P_{x,x+2}(t)$ = simile a prima ma iterando una volta in più

$$P_{x,y}(t) = \binom{y-1}{y-x} e^{-x\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{y-x}$$ → se $y = x+1$:
$$= \binom{x}{1} e^{-x\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})$$

SUPPONIAMO $X_1, X_2, \dots, X_J$ I TEMPI TRA UN PASSAGGIO E L'ALTRO, TUTTI STOCASTICAMENTE INDIPENDENTI CON DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE DI PARAMETRO $\lambda, 2\lambda, \dots, J\lambda$

SIANO $U_1, U_2, \dots, U_J, U_{J+1}$ I TEMPI DI PASSAGGIO TRA UNO STATO E L'ALTRO

CHIAMIAMO INOLTRE $X_J = U_J - U_{J-1}$

$U_1 = 0$ È IL TEMPO IN CUI PASSIAMO ALLO STATO 1, MA PARTIAMO PROPRIO DA LÌ

$X_1 + \dots + X_J$ TEMPO DI ARRIVO ALLO STATO J

CHIAMIAMO $V_1, \dots, V_J$ VAR. ALEAT. INDIPENDENTI CON DISTR. ESPONENZ. DI PAR. λ

$\max(V_1, \dots, V_J)$ HA LA STESSA DISTRIBUZIONE DI $X_1 + \dots + X_J$

↳ IL MINIMO HA UNA LEGGE ESPONENZIALE DI PARAMETRO $J\lambda$, TOGLIENDO IL VALORE MINIMO SE SI RICALCOLA IL MINIMO SARÀ UNA LEGGE ESPONENZIALE DI PARAMETRO $(J-1)\lambda$, E COSÌ VIA FINO AD ARRIVARE AL MASSIMO.

$$P(\max(V_1, \dots, V_J) < t) = P((V_1 \le t)(V_2 \le t) \dots (V_J \le t)) = (1 - e^{-\lambda t})^J$$

$$P_{1,J}(t) = P((\underbrace{X_1 + \dots + X_J}_{\text{TEMPO PASSATO ALLO STATO J}} \le t)(\underbrace{X_1 + \dots + X_{J+1}}_{\text{TEMPO PASSATO ALLO STATO J+1}} > 1)) =$$

$$= P(X_1 + \dots + X_J \le t) - P(X_1 + \dots + X_{J+1} \le t) =$$

$$= (1 - e^{-\lambda t})^J - (1 - e^{-\lambda t})^{J+1} = (1 - e^{-\lambda t})^J (1 - 1 + e^{-\lambda t}) =$$

$$= e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^J$$ DISTRIBUZIONE GEOMETRICA DI PARAMETRO λt

PROCESSI DI RINNOVAMENTO

SIA LA SUCCESSIONE DI VARIABILI INDIPENDENTI IDENTICAMENTE DISTRIBUITE $X_1, X_2, \dots$

UNA QUALSIASI

$F(x) = P(X_i \le x)$

$F(x) = 0$ PER $x < 0$ ED $F(0) < 1$ → NON È POSSIBILE SIANO TUTTE $= 0$

$S_n = X_1 + \dots + X_n$ $\quad N(t) = \max\{k \mid S_k \le t\}$ → QUANTI EVENTI SI SONO VERIFICATI PRIMA DEL TEMPO t. ES. GENTE CHE ARRIVA AD UNO SPORTELLO.

$P(N(t) < \infty) = 1$

TUTTI I FATTI SI SONO VERIFICATI PRIMA DI t

$P(N(t) = \infty) = (S_1 \le t)(S_2 \le t) \dots$

$F(0) < 1 \quad \exists \delta \quad F(\delta) < 1$

$P(X_k > \delta) > 0 \quad E_k = (X_k > \delta)$ PER LA LEGGE DEI GRANDI NUMERI $P\left(\frac{\sum_{j=1}^{N} E_j}{N} \xrightarrow[N \to \infty]{} \mu\right) = 1$

$P(S_k \to \infty) = 1 \quad P(N(t) \to \infty) = 1$

SE $N(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} k < \infty \Rightarrow S_{k+1} > t \ \forall t \quad S_{k+1} = +\infty$

SUPPONIAMO PER SEMPLICITÀ CHE X_1 ABBIA UNA DISTRIBUZIONE ASSOLUTAMENTE CONTINUA CON DENSITÀ f.

$F(x) = \int_0^x f(y)\,dy$ E CHE $\exists P(X_1) = \mu$ CON $\mu = \int_0^\infty x f(x)\,dx$

TEOREMA DEL RINNOVAMENTO

$$P\left(\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\mu}\right) = 1$$ DA QUESTO RISULTATO SEGUE

LEGGE FORTE DEI GRANDI NUMERI

$$P\left(\frac{\sum_{k=1}^{N} X_k}{N} \longrightarrow \mu\right) = 1$$

TENDE A μ CON N CHE TENDE A ∞

MEDIA ARITMETICA DELLE PRIME N

TEOREMA DEL RINNOVAMENTO

$$S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}$$

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)}$$

SE $t \to \infty$

$N(t) \to \infty$ CON PROB. 1

ED ENTRAMBI I LATI TENDONO A μ, QUINDI:

$$P\left(\frac{t}{N(t)} \to \mu\right) = 1 \qquad P\left(\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}\right) = 1$$

ESEMPIO

- LAMPADINA, NUMERO DEI GUASTI PRIMA DI t. ALL'AUMENTARE DEL TEMPO AUMENTA LA PROBABILITÀ DI GUASTO DI UN CERTO APPARECCHIO.

$N(t)$ NUMERO DEI GUASTI PRIMA DI t.

X_1 TEMPO DI FUNZIONAMENTO $\mu = P(X_1)$

$X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. $\quad P\left(\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}\right) = 1$

ESEMPIO

- SPORTELLO DI UNA BANCA. SUPPONIAMO IL TEMPO DI SERVIZIO ABBIA DISTRIBUZIONE CON F. DI RIPARTIZIONE G, CON ATTESA μ_G, ARRIVI DI POISSON DI PARAMETRO $\lambda > 0$ (UN CLIENTE VIENE RESPINTO SE LO SPORTELLO È OCCUPATO).

a) QUAL'È IL TASSO DEGLI ARRIVI E SERVITI DI CLIENTI NELLA BANCA? (PERCHÉ QUANDO UNO ARRIVA (CON DISTR. DI POISSON) E TROVA LO SPORTELLO OCCUPATO VIENE RESPINTO DALLA BANCA, E QUANDO SI LIBERA UNO SPORTELLO, QUAL'È IL TEMPO DI ARRIVO DI UN CLIENTE?)

$$\mu = \mu_G + \frac{1}{\lambda}$$ TASSO DEGLI ARRIVI $\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t}$ $\quad$ È $\frac{1}{\mu_G + \frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda}{\lambda\mu_G + 1}$

b) QUAL'È LA PROPORZIONE DEI CLIENTI SERVITI?

$\bar{N}(t)$ NUMERO TOTALE DEI CLIENTI ARRIVATI PRIMA DI t, SIA QUELLI RESPINTI CHE QUELLI AMMESSI.

$$P\left(\frac{\bar{N}(t)}{t} \to \frac{1}{\frac{1}{\lambda}}\right) = 1 \qquad P\left(\frac{N(t)}{\bar{N}(t)} \to \frac{\frac{\lambda}{\lambda\mu_G+1}}{\lambda}\right) = 1 \qquad \frac{\frac{\lambda}{\lambda\mu_G+1}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda\mu_G+1}$$

PROCESSI DI RINNOVAMENTO CON RICOMPENSA

DATA LA SUCCESSIONE $X_1, X_2, \dots$ DI VARIABILI ALEATORIE INDIPENDENTI E IDENTICAMENTE DISTRIBUITE, RAPPRESENTA I TEMPI TRA DUE FATTI. (ES. INCIDENTI DI UNA COMPAGNIA ASSICURATIVA)

$F(x) = P(X_1 \le x)$ $\quad F(x) = 0$ SE $x < 0$ E $F(0) < 1$

SUCCESSIONE $R_1, R_2, \dots$ DI VARIABILI ALEATORIE i.i.d. CHE RAPPRESENTANO LE RICOMPENSE. ES. PREZZI DA PAGARE PER L'ASSICURAZIONE.

R_i <u>NON</u> È INDIPENDENTE DA X_i

$(X_1, R_1), (X_2, R_2), \dots$ i.i.d.

$\exists P(X_1) \quad \exists P(R_1)$

$N(t)$ PROCESSO DI RINNOVAMENTO ASSOCIATO A $X_1, X_2, \dots$

$S_n = \sum_{i=1}^{N(t)} R_k \quad \mu = P(X_1) \quad P\left(\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}\right) = 1$

$S_{N(t)} \le t < S_{N(t)+1} \quad Y(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} R_k$ ← IMPORTO TOTALE CHE LA COMPAGNIA DEVE PAGARE FINO AL TEMPO t

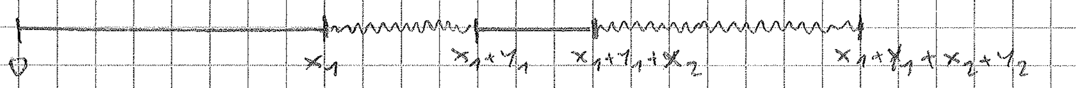
LEGGE DEI GRANDI NUMERI

$P\left(\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{N} R_N}{N} = P(R_1)\right) = 1$ QUINDI SE FACCIAMO $\frac{\sum_{k=1}^{N(t)} R_k}{t} = \frac{\sum_{k=1}^{N(t)} R_k}{N(t)} \cdot \frac{N(t)}{t}$

$P\left(\frac{\sum_{k=1}^{N(t)} R_k}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{P(R_1)}{\mu}\right) = 1$ ← ATTESA DI DUE FATTI CHE SI SUCCEDONO

PROCESSI DI RINNOVAMENTO ALTERNATI

$X_1, X_2, X_3, \dots$ i.i.d.
$Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ i.i.d. } INDIPENDENTI TRA LORO



INTERVALLI DI TEMPO CHE SI ALTERNANO, ALCUNI DISTRIBUITI COME $X_1, X_2, \dots$ ALTRI COME $Y_1, Y_2, \dots$

ES. MACCHINA CHE ALTERNA PERIODI DI FUNZIONAMENTO $(X_1, X_2, \dots)$ E PERIODI DI RIPARAZIONE $(Y_1, Y_2, \dots)$

$F(x) = P(X_1 \le x) \quad F(x) = 0$ SE $x < 0 \quad F(0) < 1$

$G(x) = P(Y_1 \le x) \quad G(x) = 0$ SE $x < 0 \quad G(0) < 1$

! FINO AD UN TEMPO t QUAL È LA PERCENTUALE DI TEMPO IN CUI LA MACCHINA HA FUNZIONATO E IN CUI È STATA IN RIPARAZIONE.

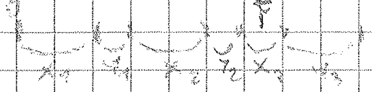
! QUESTO PROCESSO PUÒ ESSERE RICONDOTTO A UN PROCESSO DI RINNOVAMENTO CON RICOMPENSA.

$Z_1 = X_1 + Y_1, \ldots, Z_k = X_k + Y_k$ $\qquad R_k = X_k$

$N(t)$ PROCESSO DI RINNOVAMENTO ASSOCIATO ALLA SUCCESSIONE $Z_1, Z_2, \ldots$

$$P\left(\frac{\sum_{k=1}^{N(t)} R_k}{t} \longrightarrow \frac{P(X_1)}{P(X_1)+P(Y_1)}\right) = 1$$

MEDIA DI X_1 $\quad \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$ → ATTESA DEL TEMPO DI FUNZIONAMENTO



Z_k RAPPRESENTA UN CICLO COMPLETO X_k+Y_k, SE IL t STA IN MEZZO A QUESTO INTERVALLO, QUESTO SCARTO NON VIENE CONSIDERATO → MA SE SI TENDE t ALL'INFINITO QUESTO SCARTO RIMANENTE TENDE A 0

ES. PROCESSO DI CODA

$M/G/1$ → 1 SOLO SPORTELLO

G → DISTRIBUZIONE DEL TEMPO DI SERVIZIO, IN QUESTO CASO NON È SPECIFICATA

M ↓ I CLIENTI ARRIVANO SEGUENDO UN PROCESSO DI POISSON

! VERIFICHIAMO SE ESISTE UNA DISTRIBUZIONE INVARIANTE STAZIONARIA.

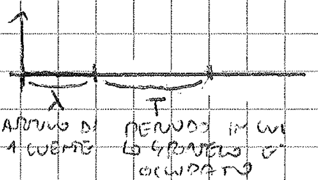
- SUPPONIAMO CHE IL TEMPO DI SERVIZIO HA DENSITÀ DI PROBABILITÀ $g(t)$
- SAPPIAMO CHE GLI ARRIVI SONO UN PROCESSO DI POISSON DI PARAMETRO λ

QUAL'È L'ATTESA DEL NUMERO DEI CLIENTI CHE ARRIVANO MENTRE UN CLIENTE VIENE SERVIZIO?

→ $\int_0^{\infty} \lambda t g(t)\, dt$

!! SI PUÒ PENSARE AI CLIENTI CHE ARRIVANO MENTRE UN CLIENTE VIENE SERVITO, COME I SUOI "FIGLI" IN UN PROCESSO DI DIRAMAZIONE.

LA DOMANDA È: PRIMA O POI SI LIBERERÀ LO SPORTELLO COMPLETAMENTE (SPORTELLO LIBERO SENZA CLIENTI IN CODA) → È COME DIRE ~~SE~~ LA POPOLAZIONE SI AZZERERÀ.



$$\nu = \int_0^{+\infty} t g(t)\, dt = \frac{\mu}{\lambda}$$

OGNI CLIENTE VIENE SERVITO PER UN TEMPO CHE HA ATTESA μ

L'ATTESA DI TUTTA LA GENERAZIONE (DEL n° DI DISCENDENTI) SI PUÒ SCRIVERE COME: $\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k = \frac{1}{1-\mu}$ [DATO $\mu < 1$] → SE $\mu \geq 1$ LO SPORTELLO RIMARREBBE PRATICAMENTE SEMPRE OCCUPATO

IN DEFINITIVA VIENE: $\frac{\mu}{\lambda(1-\mu)}$

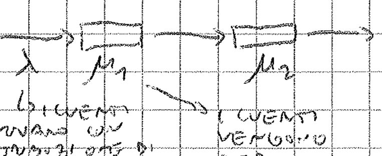
! SI ALTERNA L'ATTESA DI UN TEMPO IN CUI È LIBERO $\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ E UN TEMPO IN CUI È OCCUPATO $\left(\frac{\mu}{\lambda(1-\mu)}\right)$

PERCENTUALE IN CUI È LIBERO

$$\frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda(1-\mu)}}$$

RETI DI CODE

I CLIENTI VENGONO SERVITI DA UNO SPORTELLO, E QUANDO TERMINANO POSSONO VENIRE SERVITI DA UN ALTRO SPORTELLO E COSÌ VIA.



$$S = \mathbb{N}^2 = \underbrace{\mathbb{N}}_{\text{CODA + SERVITI I SPORTELLO}} \times \underbrace{\mathbb{N}}_{\text{CODA + SERVITI II SPORTELLO}}$$

CI CHIEDIAMO SE ESISTE UNA DISTRIBUZIONE STAZIONARIA

STATI → $(0,0) \xleftarrow{\mu_2} (0,1)$ ← SUBITO CLIENTE VIENE SERVITO

INTENSITÀ λ

$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$
$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$
$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$

ARRIVA UN CLIENTE

DISTRIB. STAZ. t.c.

$$\sum_{h_1=0}^{\infty} \sum_{h_2=0}^{\infty} P_{h_1,h_2} = 1$$

! SE SOMMIAMO LE FRECCE CHE ENTRANO DEVONO BILANCIARE LE FRECCE CHE ESCONO.

$$\lambda P_{0,0} = \mu_2 P_{0,1}$$

→ $(h,0)$ CON $h>0$ DA QUESTO STATO POSSIAMO USCIRE: → O ARRIVA UN NUOVO CLIENTE.
→ UN CLIENTE CLIENTE VIENE SERVITO E SE NE VA.

h CLIENTI NELLA PRIMA CODA E 0 NELLA SECONDA

$$(\underbrace{\lambda}_{\text{ARRIVA UN CLIENTE}} + \underbrace{\mu_1}_{\text{ESCE UN CLIENTE}}) P_{h,0}$$

DA QUESTO STATO COME POSSIAMO ENTRARE: → ARRIVA UN CLIENTE NELLO SPORTELLO 2

$$\mu_2 P_{h,1} + \lambda P_{h-1,0}$$

$$(\lambda + \mu_1) P_{h,0} = \mu_2 P_{h,1} + \lambda P_{h-1,0}$$

→ $(0,m)$ DA CUI SI ESCE: → SE ARRIVA UN NUOVO CLIENTE
→ SE UNO FINISCE IL SERVIZIO E SE NE VA VIA

$$(\underbrace{\lambda}_{\text{ARRIVA}} + \underbrace{\mu_2}_{\text{SE NE VA}}) P_{0,m} = \underbrace{\mu_2 P_{0,m+1}}_{\text{ENTRA UN NUOVO CLIENTE AL SECONDO SPORTELLO}} + \underbrace{\mu_1 P_{1,m-1}}_{\text{FINISCE NEL PRIMO SPORTELLO ED ENTRA AL SECONDO SPORTELLO}}$$

PER ENTRARE IN QUESTO STATO

→ (h,m) SI ESCE

$$(\underbrace{\lambda}_{\text{ARRIVANO}} + \underbrace{\mu_1}_{\text{FINISCE NEL PRIMO}} + \underbrace{\mu_2}_{\text{FINISCE NEL SECONDO}}) P_{h,m} = \mu_2 P_{h,m+1} + \mu_1 P_{h+1,m-1} + \underbrace{\lambda P_{h-1,m}}_{\text{ARRIVA E PRIMA DA FUORI.}}$$

SI ENTRA

! SIA LE ENTRATE CHE LE USCITE SONO PROCESSI DI POISSON.
SI POSSONO CONSIDERARE GLI SPORTELLI COME UNO UNICO.

SE CONSIDERO $P_{h,m} = \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^h \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu_1}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^h \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu_2}}$ $\quad \lambda < \mu_1$, $\lambda < \mu_2$

RAPPRESENTA LA DISTRIB. INVARIANTE

PROPRIETÀ DI JACKSON
UNA DISTRIBUZIONE È IL RISULTATO DELLA MOLTIPLICAZIONE DI DUE DISTRIBUZIONI.

RETI DI CODE APERTE

SUPPONIAMO DI AVERE K SPORTELLI, PER OGNUNO ABBIAMO UN PARAMETRO r_i: INTENSITÀ DEL PROCESSO DI POISSON DEGLI ARRIVI ALLO SPORTELLO i.

ABBIAMO ANCHE UNA MATRICE DI TRANSIZIONE $a_{i,j}$ PROBABILITÀ DI PASSARE DALLO SPORTELLO i ALLO SPORTELLO J. (i PUÒ ESSERE = A J)

$$\sum_j a_{i,j} \leq 1 \qquad 1 - \sum_{j=1}^{K} a_{i,j}$$ ← PROBABILITÀ DI USCIRE DAL SISTEMA

PERCHÉ IL SISTEMA SI POSSA STABILIZZARE I CLIENTI DEVONO AVERE POTER USCIRE.

TROVARE UNA DISTRIBUZIONE INVARIANTE O STAZIONARIA

$$\lambda_i = r_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_{ji}$$

PROBAB. CHE UN CLIENTE ESCA DALLO SPORTELLO J E VADA IN QUELLO i

INTENSITÀ DEI CLIENTI CHE ESCONO DALLO SPORTELLO i (DEVONO BILANCIARSI CON QUELLI CHE ENTRANO)

CLIENTI CHE ENTRANO DALL'ESTERNO

! SE ESISTE UNA SOLUZIONE DEL SISTEMA (SOPRA) TALE CHE $\forall i \; \lambda_i < \mu_i$ ALLORA LA DISTRIBUZIONE INVARIANTE È DATA DA:

$$P_{n_1,\dots,n_k} = \prod_{j=1}^{k} \left(\left(\frac{\lambda_j}{\mu_j}\right)^{n_j} \left(\frac{1}{1-\frac{\lambda_j}{\mu_j}}\right) \right)$$

NELL'ESEMPIO DI PRIMA

$r_1 = \lambda$ (I CLIENTI ARRIVANO SOLO AL PRIMO SPORTELLO)

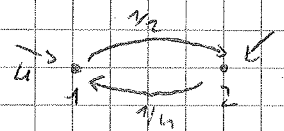
$r_2 = 0$

$a_{1,2} = 1$

$a_{1,1} = 0$

$a_{2,2} = 0$

ESEMPIO



$r_1 = 4$ $\quad a_{1,1} = 0$

$r_2 = 5$ $\quad a_{1,2} = 1/2$

$\mu_1 = 1$ $\quad a_{2,1} = 1/4$

$\mu_2 = 2$ $\quad a_{2,2} = 0$

$$\begin{cases} 4 + \lambda_2 \frac{1}{4} = \lambda_1 \\ 5 + \lambda_1 \frac{1}{2} = \lambda_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_2 = 4(\lambda_2 - 4) = 4\lambda_1 - 16 \\ 5 + \lambda_1 \frac{1}{2} = 4\lambda_1 - 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_2 = 4\lambda_1 - 16 \\ \frac{7}{2}\lambda_1 = 21 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_2 = 8 \\ \lambda_1 = 6 \end{cases}$$

QUINDI $\mu_1 > 6$ $\mu_2 > 8$ SE I DUE μ NON SODDISFANO QUESTA CONDIZIONE NON SI AVREBBE UNA DISTRIBUZIONE STAZIONARIA PERCHÉ AUMENTEREBBE SEMPRE LA CODA.

RETI DI CODE CHIUSE

IL NUMERO TOTALE DEI CLIENTI RIMANE SEMPRE UGUALE, NON ENTRANO E NON ESCONO.

LA DISTR. ~~STAZ.~~ INVARIANTE QUI È VINCOLATA DAL N° TOTALE DEI CLIENTI.