Теория категорий

Тутанов Михаил
на основе лекций Петрова В.А.
под редакцией @keba4ok

6 сентября 2021 г.

Содержание

Основные определения

Определение 1. *Категория $\mathcal{C}$* – это

- класс[1] $Ob\mathcal{C}$, элементы которого называются *объектами*;
- попарно непересекающиеся множества *морфизмов* $Hom(X,Y)$[2] для любых двух X и Y из $Ob\mathcal{C}$;
- операция композиции $\circ$: $Hom(Y,Z) \times Hom(X,Y) \to Hom(X,Z)$, удовлетворяющая двум аксиомам.

Аксиомы композиции:

- ассоциативность $(f) = f \circ (g)$;
- для любого A из $\mathcal{C}$[3] существует $id_A \in Hom(A,A)$ такое, что $f_A = f$, $id_A = f$ для любого осмысленного f.

Определение 2. Два объекта X и Y в категории $\mathcal{C}$ называются *изоморфными*, если $\exists f \in Hom(X,Y)$ и $g \in Hom(Y,X)$ такие, что $f = id_Y$, $g = id_X$. f и g в этом случае называются *изоморфизмами.*

Определение 3. Объект A в категории $\mathcal{C}$ называется *терминальным* (*инициальным*), если для любого X из $\mathcal{C}$ $|Hom(X,A)| = 1$ ($|Hom(A,X)| = 1$)

Утверждение 1. Если терминальный (инициальный) объект существует, то он единственен с точностью до единственного изоморфизма.

Доказательство. Пусть A и A' – терминальные объекты, тогда из определения существует единственный f из A в A' и единственный g из A' в A, композиция f в этом случае будет элементом $Hom(A',A')$, но $id_{A'}$ также элемент этого одноэлементного множества, поэтому $f = id_{A'}$, аналогично $g = id_A$, то есть A и A' изоморфны по определению. □

Как можно заметить, инициальный и терминальный объекты подозрительно похожи, для того, чтобы формализовать наше подозрение, введём понятие двойственной (противоположной) категории.

Определение 4. Для категории $\mathcal{C}$ определим следующую категорию $\mathcal{C}^{op}$, которую будем называть *двойственной (противоположной)*: $Ob\mathcal{C}^{op} = Ob\mathcal{C}$, $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y,X)$, $f^{op} \circ^{op} g^{op} = g$.

Примечание 1. Иницальный объект в $\mathcal{C}$ соответсвует терминальному в $\mathcal{C}^{op}$ и наоборот.

Примеры на основные определения

Примеры категорий с указанием терминальных и инициальных объектов:

- *Sets*: $ObSets$ = все множества, $Hom(X,Y)$ = все отображения из X в Y, $\circ$ – обычная композиция отображений. Инициальный объект – $\emptyset$, терминальный – любой, состоящий из одного элемента (нетрудно проверить, что они действительно попарно изоморфны);

[1] Если вдруг даже множество, то такая категория называется *малой*
[2] Обозначение Mor на мой взгляд логичнее, но используется сильно реже
[3] Ob по-хорошему писать надо, но оно часто опускается

- $Groups$, $Rings$ и т.д. морфизмы были определены на первом курсе. В $Vect_F$ и инициальный, и терминальный объект – 0;
- Top: объекты – топологические пространства, морфизмы – непрерывные отображения. Инициальный и терминальный объект такие же, как и для $Sets$;
- $HTop$: $ObHTop$ – компактно-порождённые топологические пространства, морфизмы – непрерывные отображения, профакторизованные по гомотопиям;
- Категория с одним элементом, $Ob\mathcal{C} = X$, морфизмы в этом случае образуют моноид.
- Частичный (пред)порядок на M (ЧУМ), $Ob\mathcal{C} = M$, $Hom(x, y) = \emptyset$, если $x, = \emptyset$, иначе.
- $Rels$, $ObRels =$ все множества, $Hom(X, Y) =$ все подмножества в $X \times Y$, $R \circ S = \{(x, z) | \exists y \in Y, (x, y) \in S, (y, z) \in T\}$

Ещё определения

Определение 5. *Произведением* объектов X и Y в категории $\mathcal{C}$ называется объект $X \times Y$, обладающий следующим универсальным свойством: фиксированы морфизмы $pr_X : X \times Y \to X$ и $pr_Y : X \times Y \to Y$ и для любого объекта Z с морфизмами $f : Z \to X$ и $g : Z \to Y$, существует единственный морфизм $h : Z \to X \times Y$, делающий диаграмму коммутативной: $pr_X \circ h = f$, $pr_Y \circ h = g$.

Пользуясь принципом двойственности можно определить копроизведение, развернув все стрелки.

Определение 6. *Копроизведением* объектов X и Y в категории $\mathcal{C}$ называется объект $X \amalg Y$, обладающий следующим универсальным свойством: фиксированы морфизмы $i_X : X \amalg Y \leftarrow X$ и $i_Y : X \amalg Y \leftarrow Y$ и для любого объекта Z с морфизмами $f : Z \leftarrow X$ и $g : Z \leftarrow Y$, существует единственный морфизм $h : Z \leftarrow X \amalg Y$, делающий диаграмму коммутативной: $h \circ i_X = f$, $h \circ i_Y = g$.

Утверждение 2. Если (ко)произведение существует, то оно единственно с точностью до единственного изоморфизма.

Доказательство. Следует из определения через универсальное свойство. Если взять два объекта с этим свойством, то из них будут единственные стрелки в друг друга, а композиция окажется id, подробнее см. утверждение1. Далее подобные доказательства будут полностью опускаться. □

Примеры на произведение и копроизведение:

- *Sets*: $X \times Y$ – обычное декартово произведение; $X \amalg Y$ – дизъюнктное объединение X и Y[4];
- *Groups*: $G \times H$ – опять же декартово произведение; $G \amalg H = G * H$ – свободное произведение групп (во втором семестре оно задавалось ровно этим универсальным свойством);
- *Top*: аналогично *Sets*;
- ЧУМ: $x \times y = min(x, y)$, $x \amalg y = max(x, y)$.

  Определим ещё одну важную категорию (пока что в частном случае, когда-нибудь здесь появится значительно более общее определение)

  Определение 7. *Категорией стрелки* $\mathcal{C}/A$, где $\mathcal{C}$ – категория, а A – объект в ней, называется следующая категория: $Ob\mathcal{C}/A =$ пары (X, f), где $X \in Ob\mathcal{C}$, $f \in Hom(X, A)$; $Hom((X, f), (Y, g) = \{h \in Hom(X, Y) | f = g \circ h\}$.

  Терминальным объектом в этой категории будет (A, id_A). Аналогично, развернув стрелки, можно определить категорию $\mathcal{C} \setminus A$

  Определение 8. Произведение в категории стрелки называется *расслоённым произведением*.

  Рассмотрим примеры расслоённых произведений:

  – *Sets*: $X \times_A Y = \{(x, y) \in X \times Y | f(x) = g(y)\}$;
  – $Sets^{op}$: $X \amalg_A Y = X \amalg Y / \sim$, где $\sim$ порождено $f(a) \sim g(a)$. В *Top* это просто склейка;
  – *Groups*: произведение как на *Sets*, $G \amalg_K H$ – свободное произведение с объединённой подгруппой.

  Определение 9. *Функтором* F называется отображение между двумя категориями C и D (определённое и на объектах, и на морфизмах) с ожидаемыми свойствами:

  – Если $f \in Hom(X, Y)$, то $\mathcal{F}(f) \in Hom(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$;
  – $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$;
  – $\mathcal{F}(id_A) = id_{\mathcal{F}(A)}$.

  Примеры функторов:

  – $\pi_1 : Top \to Groups$;
  – Если M_1 и M_2 – моноиды (как категории с одним объектом), тогда $\mathcal{F}$ – гомоморфизм моноидов;
  – M – моноид, $\mathcal{F} : M \to Vect_K$ – это выбор векторного пространства и гомоморфизма $M \to End(V)$;
  – В ЧУМе функторы – монотонные отображения;
  – $\mathcal{F} : \mathbb{1} \to \mathcal{C}$ – выбор объекта в $\mathcal{C}$, а если наоборот, то функтор единственен, то есть одноэлементная категория с одним морфизмом – это «терминальная» категория (строгое определение будет позднее).

[4] Для меня странно, что произведение в этом случае существует всегда, а двойственное к нему – нет, но что поделать