

# Теория категорий

6 сентября 2021 г.

# Содержание

<a href="#">Основные определения</a>	<a href="#">3</a>
<a href="#">Примеры на основные определения</a>	<a href="#">3</a>
<a href="#">Ещё определения</a>	<a href="#">4</a>

## Основные определения

**Определение 1.** *Категория  $\mathcal{C}$*  – это

- класс<sup>1</sup>  $Ob\mathcal{C}$ , элементы которого называются *объектами*;
- попарно непересекающиеся множества *морфизмов*  $Hom(X, Y)$ <sup>2</sup> для любых двух  $X$  и  $Y$  из  $Ob\mathcal{C}$ ;
- операция композиции  $\circ: Hom(Y, Z) \times Hom(X, Y) \rightarrow Hom(X, Z)$ , удовлетворяющая двум аксиомам.

Аксиомы композиции:

- ассоциативность  $(f) = f \circ (g)$ ;
- для любого  $A$  из  $\mathcal{C}$ <sup>3</sup> существует  $id_A \in Hom(A, A)$  такое, что  $f_A = f$ ,  $id_A = f$  для любого осмысленного  $f$ .

**Определение 2.** Два объекта  $X$  и  $Y$  в категории  $\mathcal{C}$  называются *изоморфными*, если  $\exists f \in Hom(X, Y)$  и  $g \in Hom(Y, X)$  такие, что  $f = id_Y$ ,  $g = id_X$ .  $f$  и  $g$  в этом случае называются *изоморфизмами*.

**Определение 3.** Объект  $A$  в категории  $\mathcal{C}$  называется *терминальным (инициальным)*, если для любого  $X$  из  $\mathcal{C}$   $|Hom(X, A)| = 1$  ( $|Hom(A, X)| = 1$ )

*Утверждение 1.* Если терминальный (инициальный) объект существует, то он единственен с точностью до единственного изоморфизма.

*Доказательство.* Пусть  $A$  и  $A'$  – терминальные объекты, тогда из определения существует единственный  $f$  из  $A$  в  $A'$  и единственный  $g$  из  $A'$  в  $A$ , композиция  $f$  в этом случае будет элементом  $Hom(A', A')$ , но  $id_{A'}$  также элемент этого одноэлементного множества, поэтому  $f = id_{A'}$ , аналогично  $g = id_A$ , то есть  $A$  и  $A'$  изоморфны по определению.  $\square$

Как можно заметить, инициальный и терминальный объекты подозрительно похожи, для того, чтобы формализовать наше подозрение, введём понятие двойственной (противоположной) категории.

**Определение 4.** Для категории  $\mathcal{C}$  определим следующую категорию  $\mathcal{C}^{op}$ , которую будем называть *двойственной (противоположной)*:  $Ob\mathcal{C}^{op} = Ob\mathcal{C}$ ,  $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y, X)$ ,  $f^{op} \circ^{op} g^{op} = g$ .

*Примечание 1.* Инициальный объект в  $\mathcal{C}$  соответствует терминальному в  $\mathcal{C}^{op}$  и наоборот.

## Примеры на основные определения

Примеры категорий с указанием терминальных и инициальных объектов:

- *Sets*:  $ObSets$  = все множества,  $Hom(X, Y)$  = все отображения из  $X$  в  $Y$ ,  $\circ$  – обычная композиция отображений. Инициальный объект –  $\emptyset$ , терминальный – любой, состоящий из одного элемента (нетрудно проверить, что они действительно попарно изоморфны);

<sup>1</sup>Если вдруг даже множество, то такая категория называется *малой*

<sup>2</sup>Обозначение  $Mor$  на мой взгляд логичнее, но используется сильно реже

<sup>3</sup> $Ob$  по-хорошему писать надо, но оно часто опускается

- *Groups, Rings* и т.д. морфизмы были определены на первом курсе. В  $Vect_F$  и инициальный, и терминальный объект – 0;
- *Top*: объекты – топологические пространства, морфизмы – непрерывные отображения. Инициальный и терминальный объект такие же, как и для *Sets*;
- *HTop*: *ObHTop* – компактно-порождённые топологические пространства, морфизмы – непрерывные отображения, профакторизованные по гомотопиям;
- Категория с одним элементом,  $Ob\mathcal{C} = X$ , морфизмы в этом случае образуют моноид.
- Частичный (пред)порядок на  $M$  (ЧУМ),  $Ob\mathcal{C} = M$ ,  $Hom(x, y) = \emptyset$ , если  $x \neq y$ , иначе.
- *Rels*,  $ObRels =$  все множества,  $Hom(X, Y) =$  все подмножества в  $X \times Y$ ,  
 $R \circ S = \{(x, z) | \exists y \in Y, (x, y) \in S, (y, z) \in T\}$

## Ещё определения

**Определение 5.** *Произведением* объектов  $X$  и  $Y$  в категории  $\mathcal{C}$  называется объект  $X \times Y$ , обладающий следующим универсальным свойством: фиксированы морфизмы  $pr_X : X \times Y \rightarrow X$  и  $pr_Y : X \times Y \rightarrow Y$  и для любого объекта  $Z$  с морфизмами  $f : Z \rightarrow X$  и  $g : Z \rightarrow Y$ , существует единственный морфизм  $h : Z \rightarrow X \times Y$ , делающий диаграмму коммутативной:  $pr_X \circ h = f$ ,  $pr_Y \circ h = g$ .

Пользуясь принципом двойственности можно определить копроизведение, развернув все стрелки.

**Определение 6.** *Копроизведением* объектов  $X$  и  $Y$  в категории  $\mathcal{C}$  называется объект  $X \amalg Y$ , обладающий следующим универсальным свойством: фиксированы морфизмы  $i_X : X \rightarrow X \amalg Y$  и  $i_Y : Y \rightarrow X \amalg Y$  и для любого объекта  $Z$  с морфизмами  $f : X \rightarrow Z$  и  $g : Y \rightarrow Z$ , существует единственный морфизм  $h : X \amalg Y \rightarrow Z$ , делающий диаграмму коммутативной:  $h \circ i_X = f$ ,  $h \circ i_Y = g$ .

**Утверждение 2.** Если (ко)произведение существует, то оно единственно с точностью до единственного изоморфизма.

*Доказательство.* Следует из определения через универсальное свойство. Если взять два объекта с этим свойством, то из них будут единственные стрелки в друг друга, а композиция окажется  $id$ , подробнее см. утверждение 1. Далее подобные доказательства будут полностью опускаться.  $\square$

Примеры на произведение и копроизведение:

- *Sets*:  $X \times Y$  – обычное декартово произведение;  $X \amalg Y$  – дизъюнктное объединение  $X$  и  $Y$ <sup>4</sup>;
- *Groups*:  $G \times H$  – опять же декартово произведение;  $G \amalg H = G * H$  – свободное произведение групп (во втором семестре оно задавалось ровно этим универсальным свойством);
- *Top*: аналогично *Sets*;
- ЧУМ:  $x \times y = \min(x, y)$ ,  $x \amalg y = \max(x, y)$ .

Определим ещё одну важную категорию (пока что в частном случае, когда-нибудь здесь появится значительно более общее определение)

**Определение 7.** *Категорией стрелки*  $\mathcal{C}/A$ , где  $\mathcal{C}$  – категория, а  $A$  – объект в ней, называется следующая категория:  $Ob \mathcal{C}/A$  = пары  $(X, f)$ , где  $X \in Ob \mathcal{C}$ ,  $f \in Hom(X, A)$ ;  $Hom((X, f), (Y, g)) = \{h \in Hom(X, Y) | f = g \circ h\}$ .

Терминальным объектом в этой категории будет  $(A, id_A)$ . Аналогично, развернув стрелки, можно определить категорию  $\mathcal{C} \setminus A$

**Определение 8.** Произведение в категории стрелки называется *расслоённым произведением*.

Рассмотрим примеры расслоённых произведений:

- *Sets*:  $X \times_A Y = \{(x, y) \in X \times Y | f(x) = g(y)\}$ ;
- *Sets*<sup>op</sup>:  $X \amalg_A Y = X \amalg Y / \sim$ , где  $\sim$  порождено  $f(a) \sim g(a)$ . В *Top* это просто склейка;
- *Groups*: произведение как на *Sets*,  $G \amalg_K H$  – свободное произведение с объединённой подгруппой.

**Определение 9.** *Функтором*  $F$  называется отображение между двумя категориями  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{D}$  (определённое и на объектах, и на морфизмах) с ожидаемыми свойствами:

- Если  $f \in Hom(X, Y)$ , то  $\mathcal{F}(f) \in Hom(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ ;
- $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$ ;
- $\mathcal{F}(id_A) = id_{\mathcal{F}(A)}$ .

Примеры функторов:

- $\pi_1 : Top \rightarrow Groups$ ;
- Если  $M_1$  и  $M_2$  – моноиды (как категории с одним объектом), тогда  $\mathcal{F}$  – гомоморфизм моноидов;
- $M$  – моноид,  $\mathcal{F} : M \rightarrow Vect_K$  – это выбор векторного пространства и гомоморфизма  $M \rightarrow End(V)$ ;
- В ЧУМе функторы – монотонные отображения;
- $\mathcal{F} : \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{C}$  – выбор объекта в  $\mathcal{C}$ , а если наоборот, то функтор единственен, то есть одноэлементная категория с одним морфизмом – это «терминальная» категория (строгое определение будет позднее).

<sup>4</sup>Для меня странно, что произведение в этом случае существует всегда, а двойственное к нему – нет, но что поделать