

# Теория категорий

Тутанов Михаил и Копейкина Софья  
на основе лекций Петрова В.А.  
под редакцией @keba4ok

5 октября 2021 г.

# Содержание

|                                 |    |
|---------------------------------|----|
| Основные определения            | 3  |
| Примеры на основные определения | 3  |
| Ещё определения                 | 4  |
| Функтор                         | 6  |
| Примеры функторов               | 6  |
| Мономорфизмы и эпиморфизмы      | 7  |
| Естественные преобразования     | 8  |
| Эквивалентность категорий       | 8  |
| Скелеты                         | 10 |
| Лемма Йонеды                    | 11 |
| Пределы                         | 11 |
| Сопряжённые функторы            | 13 |

## Основные определения

**Определение 1.** Категория  $\mathcal{C}$  – это

- класс<sup>1</sup>  $\text{Ob } \mathcal{C}$ , элементы которого называются *объектами*;
- попарно непересекающиеся множества *морфизмов*  $\text{Hom}(X, Y)$ <sup>2</sup> для любых двух  $X$  и  $Y$  из  $\text{Ob } \mathcal{C}$ ;
- операция композиции  $\circ: \text{Hom}(Y, Z) \times \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$ , удовлетворяющая двум аксиомам.

Аксиомы композиции:

- ассоциативность  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ ;
- для любого  $A$  из  $\mathcal{C}$ <sup>3</sup> существует  $\text{id}_A \in \text{Hom}(A, A)$  такое, что  $f \circ \text{id}_A = f$ ,  $\text{id}_A \circ f = f$  для любого осмысленного  $f$ .

**Определение 2.** Два объекта  $X$  и  $Y$  в категории  $\mathcal{C}$  называются *изоморфными*, если  $\exists f \in \text{Hom}(X, Y)$  и  $g \in \text{Hom}(Y, X)$  такие, что  $f \circ g = \text{id}_Y$ ,  $g \circ f = \text{id}_X$ .  $f$  и  $g$  в этом случае называются *изоморфизмами*.

**Определение 3.** Объект  $A$  в категории  $\mathcal{C}$  называется *терминальным* (*инициальным*), если для любого  $X$  из  $\mathcal{C}$   $|\text{Hom}(X, A)| = 1$  ( $|\text{Hom}(A, X)| = 1$ )

*Утверждение 1.* Если терминальный (инициальный) объект существует, то он единственен с точностью до единственного изоморфизма.

*Доказательство.* Пусть  $A$  и  $A'$  – терминальные объекты, тогда из определения существует единственный  $f$  из  $A$  в  $A'$  и единственный  $g$  из  $A'$  в  $A$ , композиция  $f \circ g$  в этом случае будет элементом  $\text{Hom}(A', A')$ , но  $\text{id}_{A'}$  также элемент этого одноэлементного множества, поэтому  $f \circ g = \text{id}_{A'}$ , аналогично  $g \circ f = \text{id}_A$ , то есть  $A$  и  $A'$  изоморфны по определению.  $\square$

Как можно заметить, инициальный и терминальный объекты подозрительно похожи, для того, чтобы формализовать наше подозрение, введём понятие двойственной (противоположной) категории.

**Определение 4.** Для категории  $\mathcal{C}$  определим следующую категорию  $\mathcal{C}^{op}$ , которую будем называть *двойственной* (*противоположной*):  $\text{Ob } \mathcal{C}^{op} = \text{Ob } \mathcal{C}$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ ,  $f^{op} \circ^{op} g^{op} = g \circ f$ .

*Примечание 1.* Инициальный объект в  $\mathcal{C}$  соответствует терминальному в  $\mathcal{C}^{op}$  и наоборот.

## Примеры на основные определения

Примеры категорий с указанием терминальных и инициальных объектов:

- *Sets*:  $\text{Ob } \text{Sets} =$  все множества,  $\text{Hom}(X, Y) =$  все отображения из  $X$  в  $Y$ ,  $\circ$  – обычная композиция отображений. Инициальный объект –  $\emptyset$ , терминальный – любой, состоящий из одного элемента (нетрудно проверить, что они действительно попарно изоморфны);

<sup>1</sup>Если вдруг даже множество, то такая категория называется *малой*

<sup>2</sup>Обозначение *Mor* на мой взгляд логичнее, но используется сильно реже

<sup>3</sup> $\text{Ob}$  по-хорошему писать надо, но оно часто опускается

- *Groups, Rings* и т.д. морфизмы были определены на первом курсе. В  $Vect_F$  и инициальный, и терминальный объект – 0;
- *Top*: объекты – топологические пространства, морфизмы – непрерывные отображения. Инициальный и терминальный объект такие же, как и для *Sets*;
- *HTop*:  $Ob\ HTop$  – компактно-порождённые топологические пространства, морфизмы – непрерывные отображения, профакторизованные по гомотопиям;
- Категория с одним элементом,  $Ob\ C = X$ , морфизмы в этом случае образуют моноид.
- Частичный (пред)порядок на  $M$  (ЧУМ),  $Ob\ C = M$ ,  $Hom(x, y) = \emptyset$ , если  $x \leq y$ ,  $= \emptyset$ , иначе.
- *Rel*s,  $Ob\ Rel$ s = все множества,  $Hom(X, Y)$  = все подмножества в  $X \times Y$ ,  $R \circ S = \{(x, z) | \exists y \in Y, (x, y) \in S, (y, z) \in T\}$

## Ещё определения

**Определение 5.** *Произведением* объектов  $X$  и  $Y$  в категории  $C$  называется объект  $X \times Y$ , обладающий следующим универсальным свойством: фиксированы морфизмы  $pr_X : X \times Y \rightarrow X$  и  $pr_Y : X \times Y \rightarrow Y$  и для любого объекта  $Z$  с морфизмами  $f : Z \rightarrow X$  и  $g : Z \rightarrow Y$ , существует единственный морфизм  $h : Z \rightarrow X \times Y$ , делающий диаграмму коммутативной:  $pr_X \circ h = f$ ,  $pr_Y \circ h = g$ .

Пользуясь принципом двойственности можно определить копроизведение, развернув все стрелки.

**Определение 6.** *Копроизведением* объектов  $X$  и  $Y$  в категории  $C$  называется объект  $X \amalg Y$ , обладающий следующим универсальным свойством: фиксированы морфизмы  $i_X : X \amalg Y \leftarrow X$  и  $i_Y : X \amalg Y \leftarrow Y$  и для любого объекта  $Z$  с морфизмами  $f : Z \leftarrow X$  и  $g : Z \leftarrow Y$ , существует единственный морфизм  $h : Z \leftarrow X \amalg Y$ , делающий диаграмму коммутативной:  $h \circ i_X = f$ ,  $h \circ i_Y = g$ .

*Утверждение 2.* Если (ко)произведение существует, то оно единственно с точностью до единственного изоморфизма.

*Доказательство.* Следует из определения через универсальное свойство. Если взять два объекта с этим свойством, то из них будут единственные стрелки в друг друга, а композиция окажется  $id$ , подробнее см. утверждение1. Далее подобные доказательства будут полностью опускаться.  $\square$

Примеры на произведение и копроизведение:

- *Sets*:  $X \times Y$  – обычное декартово произведение;  $X \amalg Y$  – дизъюнктное объединение  $X$  и  $Y$ <sup>4</sup>;
- *Groups*:  $G \times H$  – опять же декартово произведение;  $G \amalg H = G * H$  – свободное произведение групп (во втором семестре оно задавалось ровно этим универсальным свойством);
- *Top*: аналогично *Sets*;

<sup>4</sup>Здесь ранее было указано, что оно существует не всегда, это неправда, оно всегда есть

- ЧУМ:  $x \times y = \min(x, y)$ ,  $x \sqcup y = \max(x, y)$ .

Определим ещё одну важную категорию (пока что в частном случае, когда-нибудь здесь появится значительно более общее определение)

**Определение 7.** *Категорией стрелки*  $\mathcal{C}/A$ , где  $\mathcal{C}$  – категория, а  $A$  – объект в ней, называется следующая категория:  $\text{Ob } \mathcal{C}/A = \text{пары } (X, f)$ , где  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ ,  $f \in \text{Hom}(X, A)$ ;  $\text{Hom}((X, f), (Y, g)) = \{h \in \text{Hom}(X, Y) | f = g \circ h\}$ .

Терминальным объектом в этой категории будет  $(A, \text{id}_A)$ . Аналогично, развернув стрелки, можно определить категорию  $\mathcal{C} \setminus A$

**Определение 8.** Произведение в категории стрелки называется *расслоённым произведением*.

Рассмотрим примеры расслоённых произведений:

- *Sets*:  $X \times_A Y = \{(x, y) \in X \times Y | f(x) = g(y)\}$ ;
- *Sets*<sup>op</sup>:  $X \sqcup_A Y = X \sqcup Y / \sim$ , где  $\sim$  порождено  $f(a) \sim g(a)$ . В *Top* это просто склейка;
- *Groups*: произведение как на *Sets*,  $G \sqcup_K H$  – свободное произведение с объединённой подгруппой.

**Определение 9.** *Функтором*  $\mathcal{F}$  называется отображение между двумя категориями  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{D}$  (определённое и на объектах, и на морфизмах) со свойствами:

- Если  $f \in \text{Hom}(X, Y)$ , то  $\mathcal{F}(f) \in \text{Hom}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ ;
- $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$ ;
- $\mathcal{F}(\text{id}_A) = \text{id}_{\mathcal{F}(A)}$ .

Примеры функторов:

- $\pi_1 : \text{Top} \rightarrow \text{Groups}$ ;
- Если  $M_1$  и  $M_2$  – моноиды (как категории с одним объектом), тогда  $\mathcal{F}$  – гомоморфизм моноидов;
- $M$  – моноид,  $\mathcal{F} : M \rightarrow \text{Vect}_K$  – это выбор векторного пространства и гомоморфизма  $M \rightarrow \text{End}(V)$ ;
- В ЧУМе функторы – монотонные отображения;
- $\mathcal{F} : \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{C}$  – выбор объекта в  $\mathcal{C}$ , а если наоборот, то функтор единственен, то есть одноэлементная категория с одним морфизмом – это «терминальная» категория (строгое определение будет позднее).

## Функтор

**Определение 10.** *Функтор* - это отображение  $F : C \rightarrow D$  между категориями со следующими свойствами:

1. Если  $X \in \text{Ob } C$ , то  $F(x) \in \text{Ob } D$
2.  $\forall A, B \in \text{Ob } C$  и  $F : A \rightarrow B - F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ , причем "произведение переходит в произведение" и "единичный гомоморфизм в единичный гомоморфизм т.е.  
 $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$  и  $F(id_A) = id_{F(A)}$

*Утверждение 3.*  $A \simeq B \Rightarrow F(A) \simeq F(B)$

Доказательство:

$A \simeq B$ , значит  $\exists f : A \rightarrow B$  и  $g : B \rightarrow A$  такие, что  $f \circ g = id_B$  и  $g \circ f = id_A$ .

Вспомним, что функтор сохраняет произведение и единичный гомоморфизм:

$F(f) \circ F(g) = id_{F(B)}$  и  $F(g) \circ F(f) = id_{F(A)}$ .

Мы нашли гомоморфизмы с нужными нам свойствами, а значит  $F(A) \simeq F(B)$ .

QED

## Примеры функторов

### 1. Забывающий функтор

Такой функтор стандартно обозначается как  $U$ , он "забывает" алгебраические структуры. Рассмотрим на примере групп:

$U : \text{Groups} \rightarrow \text{Sets}$

$U(G) = G$  как множество

$U(f) = f$  как отображение множеств

### 2. Свободный функтор

Это функтор, который "вспоминает" алгебраическую структуру. Рассмотрим также на примере групп:

$F : \text{Sets} \rightarrow \text{Groups}$

$F(X)$  = свободная группа, порожденная  $X$

$F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ , который переводит образующие в образующие:  $x \mapsto f(x)$

### 3. Конкретный пример свободного функтора между ассоциативными алгебрами с единицей и векторными пространствами:

$K$  - поле,  $U : K - \text{Alg} \rightarrow \text{Vect}_K$  и  $F : \text{Vect}_K \rightarrow K - \text{Alg}$

$F(V) = T(V) = K \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus V^{\otimes 3} \oplus \dots$

Со следующей структурой:

$V^{\otimes n} \times V^{\otimes m} \rightarrow V^{\otimes (n+m)}$

$(v_1 \otimes \dots \otimes v_n; u_1 \otimes \dots \otimes u_m) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_m$

А с гомоморфизмами дела обстоят следующим образом:

$f : V \rightarrow W$ , тогда  $F(f) : T(V) \rightarrow T(W)$ , который работает так:

$V^{\otimes n} \rightarrow W^{\otimes n}$

$v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto f(v_1) \otimes \dots \otimes f(v_n)$

### 4. Аналогично между коммутативными алгебрами и векторными пространствами:

$S : K - \text{CommAlg} \rightarrow \text{Vect}_K$

$S(V) = T(V)_{\langle u \otimes v - v \otimes u \rangle}$ , что называется *симметрической алгеброй*

5. Еще пример - между абелевыми и обычными группами:

$$F : AbGroups \rightarrow Groups$$

$$F(G) = G/[G, G]$$

$$F(f)[g] = [f(g)]$$

6. *Множества с выделенной точкой* и свободный функтор между ними и категорией множеств:

$Sets_*$  - это категория, определенная следующим образом:  $Ob\ Sets_*$  состоит из элементов следующего вида:  $(A, a \in A)$ . Гомоморфизмы устроены так:  $f_* : (A, a) \rightarrow (B, b)$ , причем переводит выделенную точку в выделенную точку.

Свободный функтор выглядит так:

$$F : Sets \rightarrow Sets_*$$

$$A \mapsto A \sqcup \{\emptyset\}$$

$$f \mapsto f \times (\emptyset; \emptyset)$$

7. *Контрпредставимый функтор* - это функтор, действующий из категории в категорию множеств  $F : C \rightarrow Sets$ , построенный следующим образом:

$$A \in Ob\ C \quad F(A) = Hom(A, X)$$

$$f : X \rightarrow Y \quad F(f) : Hom(A, X) \rightarrow Hom(A, Y)$$

$$\phi \mapsto f \circ \phi$$

Определение 11. *Контрвариантный функтор* из  $C$  в  $D$  - это функтор из  $C^{op}$  в  $D^{op}$ :

$$A \in Ob\ C \quad F(A) \in Ob\ D$$

$$f : A \rightarrow B \quad F(f) : F(B) \rightarrow F(A) \text{ и } F(f \circ g) = F(g) \circ F(f), F(id_A) = id_{F(A)}$$

Определение 12. *Представимый функтор* - это такой функтор  $h_A : C^{op} \rightarrow Sets$ ,  $A \in Ob\ C$ , действующий по правилу:

$$h_A(X) = Hom(X, A), \quad h_A(f) : \phi \mapsto \phi \circ f$$

## Мономорфизмы и эпиморфизмы

Мы хотим определить "инъективность" и "сюръективность" для гомоморфизмов между элементами категорий. Делается это следующим образом:

Определение 13. Гомоморфизм  $f$  называется *мономорфизмом*, если "на него можно сокращать слева т.е.  $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$ "

### Примеры

- $Sets$  - инъективные отображения
- $Groups$  - инъективные гомоморфизмы групп
- $Rings$  - инъективные гомоморфизмы колец

Примечание 2. Сохраняют ли функторы мономорфизмы? НЕТ

Определение 14. Гомоморфизм  $f : X \rightarrow Y$  называется *расщепимым мономорфизмом*, если  $\exists r : Y \rightarrow X$  такой, что  $r \circ f = id_X$

Примечание 3. Сохраняют ли функторы расщепимые мономорфизмы? ДА

Определение 15. Гомоморфизм  $f$  называется *эпиморфизмом*, если "на нее можно сокращать справа т.е.  $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$ "

Аналогично можно определить расщепимый эпиморфизм:

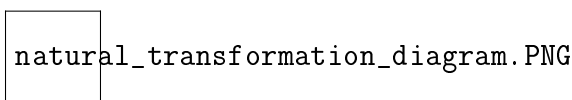
**Определение 16.** Гомоморфизм  $f : X \rightarrow Y$  называется *расщепимым эпиморфизмом*, если  $\exists s : Y \rightarrow X$  такой, что  $f \circ s = id_Y$  **Примеры эпиморфизмов**

- Sets - сюръективные отображения
- Groups - сюръективные гомоморфизмы групп
- HausTop - непрерывные отображения с  $f(X) = Y$

**Упражнение 1.** *Расщепимый мономорфизм + эпиморфизм = изоморфизм* и *Расщепимый эпиморфизм + мономорфизм = изоморфизм*

## Естественные преобразования

**Определение 17.**  $\alpha : F \rightarrow G$  называется *естественным преобразованием* для функторов  $F, G : C \rightarrow D$ , если  $\forall A \in C \exists \alpha_A : F(A) \rightarrow G(A)$  такой, что  $\forall f \in Hom(A, B) \exists \alpha_B : F(B) \rightarrow G(B)$ , причем следующая диаграмма коммутативна:



**Упражнение 2.**  $I = [Ob I = \{0, 1\}, Hom(I) = \{Hom(0, 0) = \{id_0\}, Hom(0, 1) = \{f = \{(0, 1)\}\}, Hom(1, 0) = \emptyset, Hom(1, 1) = \{id_1\}\}]$ .

Задать естественное преобразование это все равно, что задать следующий функтор:  $H : C \times I \rightarrow D \mid H(, 0) = F$  и  $H(, 1) = G$ , со следующей структурой категории  $C \times I$ :  $Ob C \times I = Ob C \times Ob I, Hom(C \times I) = Hom(C) \times Hom(I)$

### Примеры

- $V \in Vect_K$ . Для функторов  $Vect_K \rightarrow Vect_K F : V \mapsto V, f \mapsto f$  и  $G : V \mapsto V^{**}, \phi \mapsto \phi^{**}$  есть естественное преобразование  $\alpha \mid \alpha_V : F \rightarrow G : V = F(V) \mapsto G(V) = V^{**}$  такое, что  $\alpha_V(f)(v) = f(v)$
- *Топологическая группа* - это группа с топологической структурой, на которой заданы две непрерывные операции:  $G \times G \rightarrow G : (a, b) \mapsto ab$  и  $G \rightarrow G : a \mapsto a^{-1}$  (к примеру,  $(\mathbb{R}, +)$  и  $(S^1, \cdot)$  - это топологические группы). В данном примере нас будет интересовать *локально компактные топологические абелевы группы*. Для каждой группы  $A$  определим двойственную:  $A^* = Hom(A, S^1)$  - непрерывные гомоморфизмы групп (вместе с какой-то топологией). Итак, для функторов  $LocCompAb \rightarrow LocCompAb F = Id$  и  $G : A \mapsto A^{**}$  есть естественное преобразование  $\alpha : F \rightarrow G$ , которое определяется так же, как и в предыдущем примере.

## Эквивалентность категорий

**Определение 18.** Есть три функтора  $F, G, H : C \rightarrow D$  и два естественных преобразования:  $\alpha : F \rightarrow G$  и  $\beta : G \rightarrow H$ . *Композиция(вертикальная) естественных преобразований* это естественное преобразование  $\beta \circ \alpha : F \rightarrow H \mid (\beta \circ \alpha)_A = \beta_A \circ \alpha_A$

**Примечание 4.** Заметим, что мы таким образом определили категорию  $Funct(C, D)$  - функторов из  $C$  в  $D$ , в которой морфизмы - это естественные преобразования.



**Определение 19.** Есть четыре функтора  $F, G : C \rightarrow D$ ,  $H, K : D \rightarrow E$  и два естественных преобразования:  $\alpha : F \rightarrow G$  и  $\beta : H \rightarrow K$ .

**Композиция (горизонтальная) естественных преобразований** - это естественное преобразование  $\beta \bullet \alpha : H \circ F \rightarrow K \circ G \mid (\beta \bullet \alpha)_A : H(F(A)) \rightarrow K(G(A))$ , последнее работает следующим образом:  $H(\alpha_A) : H(F(A)) \rightarrow H(G(A))$ ,  $(\beta \bullet \alpha)_A = \beta_{G(A)}(H(\alpha_A))$

**Упражнение 3.** Композиции, определенные таким образом, действительно являются естественными преобразованиями.

**Упражнение 4.** Горизонтальная композиция коммутирует с вертикальной.

**Определение 20.** Категории  $C$  и  $D$  называются **эквивалентными**, если  $\exists F : C \rightarrow D$  и  $G : D \rightarrow C$ , причем есть естественные преобразования

$\alpha : Id_C \rightarrow F \circ G$ ,  $\alpha^{-1} : F \circ G \rightarrow Id_C$  и  $\beta : Id_D \rightarrow G \circ F$ ,  $\beta^{-1} : G \circ F \rightarrow Id_D$  такие, что  $\alpha \circ \alpha^{-1} = Id$ ,  $\alpha^{-1} \circ \alpha = Id$  и  $\beta \circ \beta^{-1} = Id$ ,  $\beta^{-1} \circ \beta = Id$

Теперь приведём некоторые примеры двойственных категорий:

- Двойственность Понтрягина:  $LocCompAb \simeq LocCompAb^{op}$  со следующими функторами:  $F(A) = Hom(A, S^1)$ , где на второй группе компактная открытая топология, и в обратную сторону также. Теперь надо указать естественное преобразование  $id \rightarrow G \circ F : A \rightarrow Hom(Hom(A, S^1), S^1)$ . Примеры:  $\mathbb{Z} \longleftrightarrow S^1$ ,  $(\mathbb{R}, +) \longleftrightarrow (\mathbb{R}, +)$ ,  $CompAb \longleftrightarrow Ab$ ;
- Двойственность Стоуна:  $TotDiscComp^{op} \simeq Bool$ , где  $TotDiscComp$  – вполне несвязные (дополнение открытого открыто) компактные топологические пространства,  $Bool$  – коммутативные кольца с единицей, в которых квадрат любого элемента равен ему самого.  $F(X)$  – булева алгебра открытых множеств в  $X$ , умножение – пересечение, сумма – симметрическая разность.  $G(R)$  – множество максимальных идеалов в  $R$  с топологией Зарисского.
- Двойственность Гельфанда:  $Comp^{op} \simeq C^*$ -алгебры, где  $C^*$ -алгебра – алгебра над  $\mathbb{C}$  с инволюцией  $*$ , нормой, согласованной с  $*$ :  $\|a * \| = \|a\|$ ,  $\|aa^*\| = \|a\|^2$ , и эта алгебра полна как метрическое пространство, с данной нормой, морфизмы – морфизмы алгебр, не увеличивающие норму.  $F(X) \rightarrow Map(X, \mathbb{C})$ ,  $f^*(x) = f(\bar{x})$ ,  $\|f\| = \max |f(x)|$ . Функтор в другую сторону:  $A \rightarrow$  множество максимальных идеалов, устойчивых относительно инволюции, с некоторой топологией.
- Категория накрытий  $Cov(X)$ : фиксируем компактно-порождённое связное топологическое пространство  $X$ ,  $ObCov(X)$  = пары из  $Y$  и накрытия  $Y \rightarrow X$ , морфизмы – непрерывные отображения из  $Y$  в  $Z$ , коммутирующие с выбранными накрытиями. Тогда  $Cov(X)^{op} \simeq \pi_1(X)$ -множества<sup>5</sup>;
- Есть двойственность категорий, возникающая из теории Галуа.

**Теорема 1.** **Критерий эквивалентности категорий:**  $F : C \rightarrow D$  задаёт эквивалентность категорий тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:

- $F$  **унивалентен**, то есть отображение  $Hom(X, Y) \rightarrow Hom(F(X), F(Y))$  инъективно;
- $F$  **полон**, то есть отображение  $Hom(X, Y) \rightarrow Hom(F(X), F(Y))$  сюръективно;
- $F$  **существенно сюръективен**:  $\forall A \in D \exists X \in C : A \cong F(X)$ .

**Примечание 5.** первые два условия означают, что  $F(C)$  – полная подкатегория в  $D$ .

<sup>5</sup>здесь может быть когда-нибудь будет определение  $G$  – множеств

*Доказательство.*

**Лемма 1.**  $A \cong B$ ,  $C \cong D$ , тогда  $\text{Hom}(A, C) \cong \text{Hom}(B, D)$ , причём каждому морфизму слева сопоставляется единственный морфизм, делающий диаграмму из этого морфизма и двух фиксированных изоморфизмов коммутативной.

В одну сторону:  $G : D \rightarrow C$ ,  $F \circ G \simeq id_D$ ,  $X \simeq F(G(X))$  – существенная сюръективность.

Пусть  $Ff = Fg$ ,  $GFf = GFg$ , тогда и  $f$ , и  $g$  делают соответствующую диаграмму из леммы коммутативной, откуда совпадают, то есть  $F$  – унивалентен.

Полнота:  $f : F(A) \rightarrow F(B)$ , рассмотрим  $G(f)$  и диаграмму с  $A, B, GF(A), GF(B)$ , есть единственное  $g$ , делающее диаграмму коммутативной,  $GF(g) = G(f)$ , откуда  $F(g) = f$ .

В другую сторону: построим  $G$ , так как  $F$  существенно сюръективно, можно определить  $G(X) = Y : X \cong F(Y)$ <sup>6</sup>, определим  $G$  на морфизмах, сделав диаграмму из  $A, B, F(G(A)), F(G(B))$  коммутативной получим  $g : F(G(A)) \rightarrow F(G(B))$ , но  $F$  – полный и унивалентный, поэтому  $g = F(h)$ ,  $G(f) := h$ . Изоморфизм между  $id$  и  $F \circ G$  есть по построению, дальше надо построить  $\eta_X : X \rightarrow G(F(X))$ , для этого найдём  $F(\eta_X) : F(X) \rightarrow F(G(F(X)))$ , такое отображение  $F(\eta_X)$  уже найдётся, и  $F$  можно убрать из-за его хороших свойств.  $\square$

## Скелеты

*Определение 21.* Категория *скелетная*, если в ней изоморфные объекты совпадают.

*Определение 22.* *Скелет* категории  $C$  – скелетная полная подкатегория  $D$  (для любого объекта из  $C$  есть изоморфный ему из  $D$ ).

*Примечание 6.* Скелет категории эквивалентен исходной категории, так как можно взять одним из функторов вложение.

Примеры скелетов:

- *Sets* – кардиналы;
- Вполне упорядоченные множества – ординалы;
- $\text{Vect}_F - F^{(I)}$ , где  $I$  – кардинал.

*Утверждение 4.* • В каждой категории существует скелет;

- Скелет эквивалентен исходной категории;
- Скелетные категории эквивалентны тогда и только тогда, когда изоморфны;
- Две категории эквивалентны  $\Leftrightarrow$  их скелеты изоморфны.

*Доказательство.* Первое – возьмём по представителю из каждого класса эквивалентности по отношению изоморфности. Четвёртое следует из третьего. Третье:  $F$  и  $G$  задают эквивалентность  $C$  и  $D$   $A \cong F(G(A))$ , но тогда  $A = F(G(A))$ , построим  $G'$ , на объектах совпадает с  $G$ ,  $f = F(h)$  из хороших свойств  $F$ ,  $G(f) := h$ .  $\square$

<sup>6</sup>при этом мы выбираем один элемент даже не из множества, а из класса

## Лемма Йонеды

**Лемма 2. (Лемма Йонеды)** В произвольной категории  $C$  обозначим за  $h_A$  *ковариантный функтор*  $\text{Hom}(A, -)$ , а за  $\text{Nat}(F, G)$  все естественные преобразования функторов  $F$  и  $G$ . Тогда теорема утверждает, что  $\text{Nat}(h_A, F) \simeq F(A)$ , где  $F$  действует из некоторой категории  $C$  в  $\text{Sets}$ .

*Доказательство:*

Сначала подберем отображение "слева-направо":

Есть естественное преобразование  $\eta : h_A \rightarrow F$ , задача состоит в том, чтобы поставить ему в соответствие элемент из  $F(A)$ . Посмотрим, как оно действует на  $A$ :  $\text{Hom}(A, A) \xrightarrow{\eta_A} F(A)$ . Т.к.  $C$  - категория, то в  $\text{Hom}(A, A)$  есть  $\text{id}_A$ , тогда в соответствии этому естественному преобразованию поставим то, во что отобразится  $\text{id}_A$ , т.е.  $G(\eta) = \eta_A(\text{id}_A) \in F(A)$ .

Теперь "справа-налево":

Задан элемент  $a \in F(A)$ , ему в соответствие поставим естественное преобразование  $\tau : h_A \rightarrow F$  так, что для каждого  $X \in \text{Ob } C$  задано отображение  $\text{Hom}(A, X) \xrightarrow{\tau_X} F(X)$ , действующее следующим образом:  $A \xrightarrow{f} X \mapsto F(f)(a)$ . Проверим его естественность:

*proof-natural.PNG*

По верху:

$$f \mapsto F(f)(a) \mapsto (F(g) \circ F(f))(a)$$

По низу:

$$f \mapsto f \circ g \mapsto F(f \circ g)(a)$$

Вспомним, что наш функтор ковариантный, а он разворачивает композицию, поэтому наше преобразование действительно естественно.

Теперь остается только проверить, что сопоставления взаимно обратные:

В одну сторону:

$$a \in F(A) \xrightarrow{f} A \xrightarrow{f} F(f)(a) \longrightarrow F(\text{id}_A)(a) = \text{id}_{F(A)}(a) = a. \text{ Сошлось.}$$

В другую:

$$\eta_X : A \xrightarrow{f} \eta_A(f) \longrightarrow \eta_A(\text{id}_A) \longrightarrow \tau_X : A \xrightarrow{f} X \mapsto F(f)(\eta_A(\text{id}_A))$$

$$\tau_X(f) = F(f)(\eta_A(\text{id}_A)) = \eta_X(\text{Hom}(A, f)(\text{id}_A)) = \eta_X(f). \text{ То же } =).$$

**Следствие 1.**  $\text{Nat}(h_A, h_B) = \text{Hom}(A, B) = h_B(A)$

**Следствие 2. (Вложение Йонеды)**  $h_- : C \rightarrow \text{Set}^{C^{op}}$  - полный унивалентный ковариантный функтор, который действует следующим образом:  $A \mapsto h_A, f : B \rightarrow A \mapsto \text{Hom}(f, -)$

## Пределы

**Определение 23.** *Постоянный функтор* - это функтор  $\text{const}_Z : D \rightarrow C, Z \in \text{Ob } C$ , действующий следующим образом:  $A \mapsto Z, f \mapsto \text{id}$

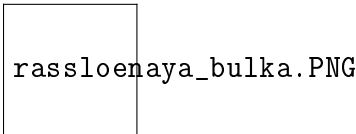
**Определение 24.** Категория  $D$  называется *малой категорией (диаграммой)*, если ее объекты составляют множество.

**Определение 25.**  $D$  - малая категория,  $F : D \rightarrow C$  - функтор. *Предел* - это объект  $\lim F$ , представляющий функтор, который действует следующим образом:  $Z \mapsto \text{Nat}(\text{const}_Z, F)$

*Примечание 7.* Предел это "произведение со стрелками, которые надо уважать"

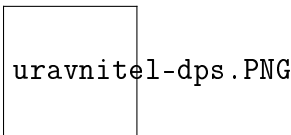
Примеры:

1. Расслоеное произведение:  $D$  - категория с тремя объектами 1, 2, 3 и стрелками  $1 \rightarrow 3$ ,  $2 \rightarrow 3$  - и есть то, во что функтор  $F$  переводит это все:  $X, Y, W \in Ob C$ , стрелки  $X \rightarrow W$ ,  $Y \rightarrow W$ . Пределом такого функтора будет объект  $X \times_W Y$  со следующим свойством:  $\forall Z \in Ob C$  и  $Z \rightarrow X$ ,  $Z \rightarrow Y \exists! h : Z \rightarrow X \times_W Y$ , сохраняющая коммутативность диаграммы.



2. Уравнитель морфизмов:  $D$  - категория с двумя объектами 1, 2 и двумя стрелками  $1 \rightarrow 2$  - и есть то, во что функтор  $F$  переводит это все:  $X, Y \in Ob C$ , две стрелки  $f, g : X \rightarrow Y$ . Пределом такого функтора будет объект  $Eq(f, g)$  со следующим свойством:  $\forall Z \in Ob C$  и  $h : Z \rightarrow X$ , причем  $f \circ h = g \circ h$ ,  $\exists! \alpha : Z \rightarrow Eq(f, g)$ , сохраняющая коммутативность диаграммы.

Уравнитель для  $C = Sets$  будет такой:  $Eq(f, g) = \{x \in X | f(x) = g(x)\}$

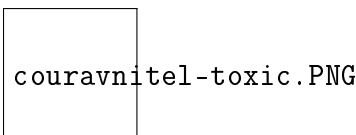


3. Пусть в  $D$  есть инициальный объект  $A$ . Тогда  $\lim F = F(A)$

*Определение 26.* **Копредел**  $F : D \rightarrow C$  - это объект, копредставляющий функтор  $G : Z \mapsto Nat(F, const_Z)$ . Копредставляющий в том смысле, что  $G \simeq Hom(Colim F, --)$

Примеры:

1.  $D$  - дискретная, т.е. есть категория, в которой есть только тождественные морфизмы.  $Ob D = I$ , есть то, во что функтор их переводит:  $(X_i \in C)_{i \in I}$ . Копределом для такой конструкции называется копроизведение  $\coprod X_i$ . В  $Sets$  это дизъюнктивное объединение
2.  $D$  - категория "два объекта - две параллельные стрелки" (как во втором примере предела). Копределом такого функтора называется коуравнитель  $Coeq(f, g)$  со следующим свойством:  $\forall Z \in C$  со стрелкой  $h : Y \rightarrow Z$ , сохраняющей коммутативность диаграммы, т.е.  $h \circ f = h \circ g$ ,  $\exists! \phi : Coeq(f, g) \rightarrow Z$ , сохраняющая коммутативность диаграммы



3.  $D$  - натуральные числа как упорядоченное множество. Функтор переводит их в  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . Если предположить, что  $C = Sets$  и  $X_i \rightarrow X_{i+1}$  - вложения, то  $Colim X_i = \cup X_i$

*Определение 27.* Категория  $C$  называется **полной**, если в  $C$  есть все (малые) пределы. Т.е.  $\forall D$  - малой и  $\forall F : D \rightarrow C \exists \lim F$

**Теорема 2.**  $C$  - полная  $Lra$  в  $C$  существуют произведения и уравнители

*Доказательство:*

$\Rightarrow$  - очевидно (существуют все пределы, значит существуют и их частные случаи)  
 $\Leftarrow$ :  $\lim F = Eq()$

## Сопряжённые функторы

**Определение 28.** Функторы  $F : C \rightarrow D$  и  $G : D \rightarrow C$  называются *сопряжёнными*, если задан естественный изоморфизм бифункторов:  $Hom_D(F(X), Y) \simeq Hom_C(X, G(Y))$ .  $F$  в этом случае сопряжённый *слева* к  $G$ .

Примеры сопряжённых функторов:

- $G : Groups \rightarrow Sets$  – забывающий функтор,  $F : Sets \rightarrow Groups$  –  $F(X)$  – свободная группа;
- $G : Ab \rightarrow Groups$  – в некотором смысле тоже забывающий,  $F : Groups \rightarrow Ab$ :  $F(H) = H^{ab} = H/[H, H]$ ;
- $G : Vect_K \rightarrow Sets$  – забывающий,  $F : Sets \rightarrow Vect_K$ ,  $F(I) = K^{(I)}$ ;
- $G : CommRings \rightarrow Sets$  – забывающий,  $F : Sets \rightarrow CommRings$ :  $F(X) = \mathbb{Z}[X]$ ;
- $G : Rings \rightarrow Sets$  – забывающий,  $F : Sets \rightarrow Rings$ ,  $F(X) = \mathbb{Z}X = T^*(\mathbb{Z}^{(X)})$ ;
- $G : K-Alg \rightarrow Vect_K$  – «забывающий»,  $F : Vect_K \rightarrow K-Alg$ :  $F(V) = T^*(V)$ ;

*Упражнение 5.*  $F : (\mathbb{Z}, le) \rightarrow (\mathbb{R}, le)$ , найти сопряжённые слева и справа.

**Теорема 3.** Если  $F : C \rightarrow D$  сопряжённый слева к  $G : D \rightarrow C$ , то  $G$  сохраняет пределы, а  $F$  – копределы, то есть  $G(\lim K) \simeq \lim(G \circ K)$ .

*Доказательство.* Надо задать  $Hom_C(X, G(\lim K)) \simeq Nat(const_X, G \circ K)$ , воспользуемся сопряжённостью функторов и определением предела:  $Hom_C(X, G(\lim K)) \simeq Hom_D(F(X), \lim K) \simeq Nat(const_{F(X)}, K) \simeq Nat(const_X, G \circ K)$ .  $\square$

**Теорема 4. Теорема Фрейда:** Пусть  $D$  полна,  $G : D \rightarrow C$  сохраняет пределы и выполнено условие (\*):

$\forall X \in C \exists \{A_i\}_{i \in I(X)}$ , где  $I(X)$  – множество объектов  $D$ , вместе с  $f_i : X \rightarrow G(A_i)$ , такое что для любых  $A \in D$  и  $f : X \rightarrow G(A)$ ,  $\exists \phi_i : A_i \rightarrow A : f = G(\phi_i) \circ f_i$ . Тогда у  $G$  есть сопряжённый слева.

*Доказательство.* Определим *категорию стрелок*:  $X/G$ ,  $Ob X/G = f : X \rightarrow G(A)$ ,  $Mor(f : X \rightarrow G(A), g : X \rightarrow G(B)) = \{\phi : A \rightarrow B : G(\phi) \circ f = g\}$ .

**Лемма 3.** У  $G$  есть сопряжённый слева  $\Leftrightarrow \forall X \in C$  в  $X/G$  есть инициальный объект.

*Доказательство.* Надо задать  $\forall X \in D, \eta_X : X \rightarrow G(F(X)) : Hom(X, G(Y)) \simeq Hom(F(X), Y)$  так что  $\forall \phi \in Hom(F(X), Y), \phi \longmapsto G(\phi) \circ \eta_X$  задаёт биекцию. Так как  $Hom(\text{инициальный объект}, -)$  – одноэлементное множество, для любых  $X, Y, f : X \rightarrow G(Y)$ , должен существовать единственный морфизм  $G(F(X)) \rightarrow G(Y)$ , делающий диаграмму коммутативной:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\eta_X} & G(F(X)) \\
 & \searrow \textcircled{4} & \downarrow \textcircled{3} \\
 & & G(Y)
 \end{array}$$

Пусть  $F$  у нас есть, возьмём в качестве  $\eta_X$  элемент  $\text{Hom}(X, G(F(X))) \simeq \text{Hom}(F(X), F(X))$ , соответствующий  $\text{id}_{F(X)}$ .

В другую сторону: определим  $F(X)$  через лемму Йонеды как объект, такой что  $\text{Hom}_D(F(X), Y) \simeq \text{Hom}_C(X, G(Y))$ ,  $\phi \rightarrow G(\phi) \circ \eta_X$ .  $f : X \rightarrow X'$ ,  $\text{Hom}(F(X), F(X')) \simeq \text{Hom}(X, G(F(X')))$ , определим  $F(f)$  как морфизм, соответствующий  $\eta_{X'} \circ f$ , тогда  $G(F(f)) \circ \eta_X = \eta_{X'} \circ f$ . Проверим, что  $F$  сохраняет композицию:  $X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{f'} X''$ .  $F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f) \Leftrightarrow G(F(f') \circ F(f)) \circ \eta_X = \eta_{X''} \circ f' \circ f$ . Левая часть равна  $GF(f') \circ GF(f) \circ \eta_X$ , правая =  $GF(f') \circ \eta_{X'} \circ f = GF(f') \circ GF(f) \circ \eta_X$ .

□

□