

Otimização de Sistemas

1. Revisão de Álgebra Linear

1.1 Matrizes

1.1.1. Definição

Conjunto de elementos ordenados em forma retangular.

Ex : $A_{(m \times n)}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & 7 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

1.1.2. Notação :

Ex.:

$$A(m \times n) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

1.1.3. Matrizes Especiais

a) *Matriz nula* : $a_{ij} = 0, \forall i, j (i \leq m; j \leq n)$.

b) *Matriz quadrada* : $m = n$ (ordem n).

c) *Matriz diagonal* : $m = n$, $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$.

d) *Matriz identidade (E ou I)* : matriz diagonal com $a_{i,i} = 1$.

e) *Matriz simétrica* : $m = n$, $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$.

f) *Matriz transposta* de $\mathbf{A}_{(m \times n)}$: $\mathbf{A}^T (n \times m)$, $a_{ij}^T = a_{ji}$

g) *Matriz triangular*:

$$a_{ij} = 0 \forall i > j \quad (\text{superior})$$

$$a_{ij} = 0 \forall i < j \quad (\text{inferior}).$$

h) *Matriz vetor*: matriz $(n \times 1)$.

1.1.4. Operações com matrizes

a) Igualdade : $\mathbf{A}_{(m \times n)} = \mathbf{B}_{(m \times n)}$, se $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$.

b) Adição : $\mathbf{C}_{(m \times n)} = \mathbf{A}_{(m \times n)} + \mathbf{B}_{(m \times n)} \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i, j$.

c) Multiplicação por uma constante λ :

$$\mathbf{B}_{(m \times n)} = \lambda \cdot \mathbf{A}_{(m \times n)} \Rightarrow b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}, \forall i, j .$$

d) Multiplicação de matrizes :

$$\mathbf{A}_{(m \times n)} \cdot \mathbf{B}_{(n \times p)} = \mathbf{C}_{(m \times p)}$$

onde

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}, \quad \forall i, k$$

Notas : i) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

ii) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$, onde $(\mathbf{A}, \mathbf{E}_{(n \times n)})$

e) Propriedades das operações com matrizes:

1. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$
2. $\alpha.(\lambda\mathbf{A}) = \lambda.(\alpha\mathbf{A}) = (\alpha\lambda)\mathbf{A}$
3. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
4. $\mathbf{A}(\lambda.\mathbf{B}) = (\lambda.\mathbf{A})\mathbf{B} = \lambda.(\mathbf{AB})$
5. $(\alpha + \lambda)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \lambda\mathbf{A}$
6. $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$
7. $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$
8. $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
9. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$

1.1.5. Determinantes

$$p = a_{\alpha_1,1} \cdot a_{\alpha_2,2} \dots a_{\alpha_n,n}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são números distintos, $\alpha_i \neq \alpha_k$. Essa seqüência é uma permutação do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Uma "inversão" na seqüência $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ acontece cada vez que $\alpha_i > \alpha_k$, para $i < k$.

Ex :

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 = 2, 3, 1, 4$ possui 2 inversões.

O nº de inversões de uma seqüência é designado por $N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Determinante de uma matriz \mathbf{A} de ordem n é a soma dos termos p obtidos por todas as permutações possíveis da seqüência $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, multiplicados por (-1) elevado ao número de inversões das respectivas seqüências:

$$|\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A}) = \sum (-1)^{N(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \cdot a_{\alpha_1,1} \cdot a_{\alpha_2,2} \dots a_{\alpha_n,n}$$

$$\text{Ex : } |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^0 a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + (-1)^2 a_{21} a_{32} \cdot a_{13} + (-1)^2 a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} + (-1)^1 a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} + (-1)^3 a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + (-1)^1 a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23}.$$

1.1.5.1. Propriedades dos determinantes

- a) Se $a_{ij} = 0 \forall i$ ou $a_{ij} = 0 \forall j \Rightarrow \det \mathbf{A} = 0$ (singular).
- b) $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, n$ ou $i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow \det \mathbf{B} = \lambda \cdot \det \mathbf{A}$.
- c) \mathbf{B} é obtida pela permuta de duas linhas ou duas colunas de $\mathbf{A} \Rightarrow \det \mathbf{B} = - \det \mathbf{A}$.
- d) Se $a_{ij} = \lambda \cdot a_{kj}$, $j = 1, 2, \dots, n$ ou $a_{ij} = \lambda \cdot a_{ik}$, $i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow \det \mathbf{A} = 0$.
- e) Se $b_{ij} = a_{ij} + \lambda \cdot a_{kj}$, $j = 1, 2, \dots, n$; $i \neq k$ ou $b_{ij} = a_{ij} + \lambda \cdot a_{ik}$ $i = 1, 2, \dots, n$; $j \neq k \Rightarrow \det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}$.

1.1.5.2. Co-fator, menor complementar

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

1.1.5.3. Expansão do determinante em co-fatores

$$\det \mathbf{A} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj}$$

1.1.6. Determinante de uma matriz triangular

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

1.1.7. "Rank" de uma matriz, r :

Seja $A_{(m \times n)}$. Se:

a) Existe pelo menos uma submatriz S de A , de ordem r , com $\det S \neq 0$;

b) Toda submatriz T de A , de ordem $r_i > r$, possui $\det T = 0$;

então r é o "rank",

1.1.8. Matriz inversa

$$B = A^{-1} \Leftrightarrow BA = AB = E$$

Notas : i) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$$\text{ii) } A^{-1} = (\text{cof}A)^T / \det A$$

1.2. Sistemas de equações lineares - tratamento matricial

1.2.1. Conversão

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\text{A } i\text{-ésima equação: } \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot x_k = b_i$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} x_1 + \dots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$A_1.x_1 + A_2.x_2 + \dots + A_n.x_n = \mathbf{b} \text{ ou } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

1.2.2. Regra de Cramer

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}; \Delta = \det A$$

$$\Delta_i = \det \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & \overset{i}{\downarrow} b & \dots & A_n \end{bmatrix}$$

1.2.3. Método de Eliminação de Gauss - Jordan

Consiste em diagonalizar a matriz dos coeficientes, através de operações elementares na matriz aumentada: $\bar{A} = \begin{bmatrix} A & : & b \end{bmatrix}$.

As operações elementares são:

- a) permuta de linhas;
- b) multiplicação de uma linha por uma constante;
- c) substituição de uma linha por seu valor adicionado a outra linha multiplicada por uma constante.

Ex : Resolva:

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 10$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 9$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 17$$

A matriz aumentada é:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & \vdots & 10 \\ 1 & 1 & 3 & \vdots & 9 \\ 1 & 3 & 4 & \vdots & 17 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow 1/2L_1 \\ \rightarrow L_2 - 1/2L_1 \\ \rightarrow L_3 - 1/2L_1 \end{array}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & 12 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \rightarrow L_3 / 2 \\ \rightarrow L_2 \end{array}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} x_1 = -5 \\ \Rightarrow x_2 = 2 \\ x_3 = 4 \end{array}$$

1.3. Espaços Vetoriais

1.3.1. Conceitos e Notação

Espaço vetorial é o conjunto de todos os vetores com número de coordenadas igual à dimensão do espaço. Ex.: O espaço vetorial R^m é o conjunto de todos os vetores (pontos) com m coordenadas reais.

1.3.2. Combinação Linear

Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n \in R^m$ e $x_1, \dots, x_n \in R$. Então $b = x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + \dots + x_n \cdot A_n$ é um vetor do R^m , chamado *combinação linear* dos vetores A_1, A_2, \dots, A_n .

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \dots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

1.3.3. Vetores Linearmente Independentes (L.I.)

Se a equação vetorial:

$$A_1.x_1 + A_2.x_2 + \dots + A_n.x_n = \mathbf{0}$$

for satisfeita apenas quando $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, então os vetores A_1, A_2, \dots, A_n são *L.I.*

Caso contrário, diz-se que eles são *linearmente dependentes (L.D.)*, isto é, algum vetor A_i pode ser obtido a partir de uma combinação linear dos demais vetores.

Ex:

$$m = 3, n = 2, A_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} . x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_2 = 0$$

Logo, A_1 e A_2 são *L.I.*.

1.3.4. Dimensão de um espaço vetorial

É um número igual à quantidade máxima de vetores *L.I.*, pertencentes ao espaço vetorial.

1.3.5. Base

Um conjunto de vetores $e_1, e_2, \dots, e_n \in R^m$ constitui-se em uma base do R^m se:

a) Eles forem *L.I.*

b) Qualquer vetor $x \in R^m$ puder ser obtido por uma combinação linear de $e_1, e_2, \dots, e_n \in R^m$, isto é,

$$x = x_1.e_1 + x_2.e_2 + \dots + x_n.e_n .$$

Pode-se provar que qualquer base de \mathbb{R}^m possui m vetores.

Ex : $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ constituem-se em uma base do \mathbb{R}^3 , pois:

$$x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \dots + x_n \cdot e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \text{ (L.I.)}$$

Se $x \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, isto é, x é uma combinação linear de

e_1, e_2 e e_3 .

1.3.6. Rank de uma Matriz

Através da expansão do determinante em co-fatores, pode-se mostrar que o "*rank*" de uma matriz ($m \times n$) é igual ao n° máximo de colunas (ou de linhas) L.I.

1.3.7. Matriz Base

Se $A_{(m \times n)}$ possui m colunas L.I., então a matriz quadrada

$$B = [A_{j1} \quad A_{j2} \quad \dots \quad A_{jm}]$$

é uma base de A e a equação $A \cdot x = b$ possui uma solução para qualquer $b \in \mathbb{R}^m$.

$$\text{Ex : } A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \text{ possui uma base } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.3.8. Teorema

Para $A_{(n \times m)}$, são equivalentes as afirmações:

- a) Existe A^{-1} .
- b) Rank de A é igual a n .
- c) $\det A \neq 0$.

1.4. Solução do sistema $Ax = b$, sendo $A_{(m \times n)}, x_{(n \times 1)}, b_{(m \times 1)}$ e $m < n$.

Considere o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde $m < n$. Considere $\text{rank}(A) = m$. Então, arbitrando-se os valores de $(n - m)$ variáveis, pode-se obter uma solução. Para cada conjunto de valores arbitrado, obtém-se uma solução distinta.

1.4.1. Solução básica

Sejam $A_{(m \times n)}$ e $B = [A_{j1} \quad A_{j2} \quad \dots \quad A_{jm}]$ uma base de A . Para qualquer $b \in R^m$, uma solução x tal que

$$[A_{j1} \quad A_{j2} \quad \dots \quad A_{jm}] \begin{bmatrix} x_{j1} \\ x_{j2} \\ \vdots \\ x_{jm} \end{bmatrix} = b \text{ e } x_i = 0 \text{ para } i \neq j_1, \dots, j_m.$$

é chamada de *solução básica* do sistema. As variáveis x_{ij} são chamadas *básicas* e as demais *não-básicas*.

Ex : O sistema:

$$\begin{array}{rrrrrrr} 4x_1 & + & 0x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 0x_5 & = & -10 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 0x_3 & - & 2x_4 & + & 0x_5 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 14 \end{array}$$

possui uma solução básica dada por :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x_5 = \begin{bmatrix} -10 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix}$$

e $x_1 = x_4 = 0$. Segue que $x_2 = 6$, $x_3 = -10$ e $x_5 = 14$. O conjunto das variáveis básicas, para esta solução, é $\{x_2, x_3, x_5\}$, cujos índices formam o conjunto Base $\{2,3,5\}$.

Outra solução básica pode ser obtida, através de operações (transformações) elementares na matriz aumentada do sistema, para se obter o conjunto Base $\{2,3,1\}$:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & : & -10 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 0 & : & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & : & 14 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow L_1 - 2L_3 \\ \rightarrow L_2 - L_3 \\ \rightarrow 1/2L_3 \end{array}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & : & -38 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & : & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & : & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} P/ \ x_4 = x_5 = 0, \\ x_1 = 7, x_2 = -8, x_3 = -38 \end{array}$$

O número máximo de soluções básicas possíveis é:

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

1.4.2. Solução compatível básica

Considere que são impostas restrições às variáveis do sistema anterior, do tipo: $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, 5$. As soluções básicas encontradas não são *compatíveis* com a restrição acima. Soluções básicas que atendem às restrições de desigualdade são chamadas de *soluções compatíveis básicas*.

De uma maneira geral, tem-se:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (m < n)$$

1.5. Sistemas de Inequações Lineares

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

ou $A \cdot x \leq b$

Esse sistema pode ser transformado em um sistema de equações lineares, através da introdução de novas variáveis:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_{n+i} \geq 0$$

Para $A \cdot x \geq b$, tem-se

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j - x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_{n+i} \geq 0$$

As variáveis x_{n+i} , $i = 1, \dots, m$, são chamadas *variáveis de folga*.

1.6. Sistemas de Equações Lineares com variáveis não negativas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \quad \begin{matrix} x_i \geq 0, i = 1, \dots, n, i \neq k \\ x_k \text{ qq} \end{matrix}$$

A introdução de m variáveis de folga transforma o sistema de inequações em um sistema de equações, conforme mostrado anteriormente. A fim de trabalhar com variáveis não negativas, substitui-se x_k por $x'_k - x''_k$, sendo $x'_k \geq 0$ e $x''_k \geq 0$.

1.7. Convexidade

1.7.1. Definição

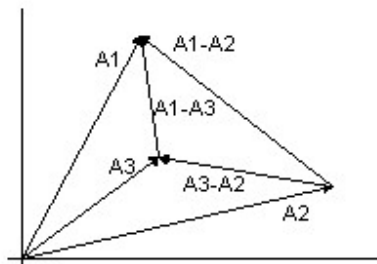
Diz-se que $b \in R^m$ é uma combinação convexa dos vetores $A_1, A_2, \dots, A_n \in R^m$ se:

$$b = \alpha_1 \cdot A_1 + \dots + \alpha_n \cdot A_n$$

$$\text{com : } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \text{ e } \alpha_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, n$$

1.7.2. Interpretação geométrica

Ex₁: Se A_3 é uma combinação convexa de A_1 e A_2 , então:



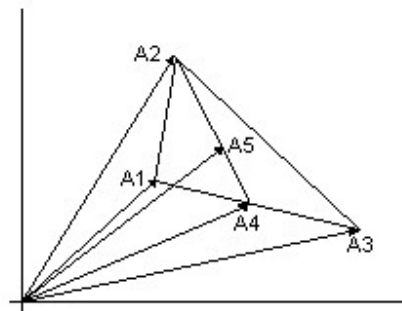
$$A_3 = \alpha \cdot A_1 + (1 - \alpha) \cdot A_2$$

$$A_3 = \alpha \cdot A_1 + A_2 - \alpha \cdot A_2$$

$$(A_3 - A_2) = \alpha(A_1 - A_2).$$

Isto é : os vetores $(A_3 - A_2)$ e $(A_1 - A_2)$ têm a mesma direção, já que $\alpha \in R$.

Ex₂ :



$$A_4 = \alpha \cdot A_1 + (1 - \alpha) \cdot A_2$$

$$A_5 = (1 - k) \cdot A_2 + k \cdot A_4$$

$$= (1 - k) \cdot A_2 + k \cdot A_4$$

$$= (1 - k) \cdot A_2 + k \cdot \alpha \cdot A_1 + k(1 - \alpha) \cdot A_3$$

$$= (k \cdot \alpha) \cdot A_1 + (1 - k) \cdot A_2 + [k(1 - \alpha)] \cdot A_3$$

$$\text{Se } 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ e } 0 \leq k \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq k\alpha \leq 1 \\ 0 \leq 1-k \leq 1 \\ 0 \leq 1-\alpha \leq 1 \\ 0 \leq k(1-\alpha) \leq 1 \end{cases}$$

Como $k\alpha + (1-k) + k(1-\alpha) = 1 \Rightarrow A_5$ é uma combinação convexa de A_1, A_2 e A_3 .

1.7.3. Conjunto Convexo

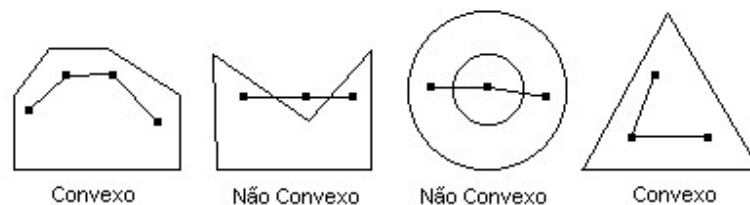
1.7.3.1. Definição

Seja $C \subset \mathbb{R}^m$ e $A_1, A_2 \in C$, quaisquer.

Seja $b = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ uma combinação convexa de A_1 e A_2 , com $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$.

Se $b \in C \Rightarrow C$ é chamado de *conjunto convexo*.

Ex:



1.7.3.2. Ponto extremo

A é um ponto extremo se a condição $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$, com α_1 e α_2 definidos anteriormente, implicar em $A = A_1$ ou $A = A_2$.

2. Modelos de Programação Linear (PL)

2.1. Conceitos

a) Otimização: alocação de recursos, em geral, limitados entre atividades competitivas, procurando atender a um certo objetivo. A minimização de custos ou a maximização de lucros. Em grande parte dos casos práticos, esse objetivo pode ser expresso por uma função, chamada "*função objetivo*" ou "*função custo*", ou ainda de "*função critério*".

b) Restrições: são as limitações existentes nos recursos disponíveis ou ainda as limitações físicas que se impõem às variáveis descritivas das atividades. Essas restrições são representadas por equações e/ou inequações.

c) Programação Linear: problema de otimização em que a função objetivo, bem como as restrições são lineares.

d) Tipos de otimização:

Critério $f(x)$	Restrições	Domínio das variáveis	Denominação
linear	linear	R^n	PL
convexa	linear côncava	R^n	convexa
quadrática	linear	R^n	quadrática
qualquer	quaisquer	Z^n e I^n	inteira
não-linear	não-linear	R^n	não-linear
qualquer	quaisquer	qualquer	dinâmica

2.2. Modelos

2.2.1. Atividades concorrentes

Considere uma unidade fabril com capacidade para produzir n produtos distintos, com diferentes níveis de consumo de recursos e que produzem lucros distintos. Deseja-se definir o nível de produção de cada produto, de forma que o lucro total obtido seja máximo.

Sejam:

- a) x_1, \dots, x_n : os níveis de produção dos n produtos;
- b) c_1, \dots, c_n : os lucros unitários dos n produtos;
- c) b_1, \dots, b_m : os diferentes recursos disponíveis (limitados), necessários à manufatura dos n produtos;
- d) a_{i1}, \dots, a_{in} : os níveis de consumo do recurso i , cujo total é b_i , na fabricação de uma unidade dos produtos x_1, \dots, x_n , respectivamente.

Dessa forma, podemos formular o problema de otimização como:

Maximizar a função:

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Sujeita às restrições:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m) \quad \text{e} \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

Exemplo: Uma fábrica produz os produtos I, II e III com níveis de consumo de recursos conforme a tabela seguinte:

Recursos	Tempo disponível (em horas/mês)	Horas/ unidade dos Produtos		
		I	II	III
MAQ 01	100	2	3	1
MAQ 02	120	1	1	2
MO 01	176	2	2	3
MO 02	132	1	2	1
Lucro Unitário (\$)		10	15	20
Produção Máxima (unid.)		80,0	20,0	40,0

O problema pode ser formulado como:

$$\text{maximizar } z = 10x_1 + 15x_2 + 20x_3$$

$$\text{sujeita a } \begin{cases} \left. \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 100 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120 \end{array} \right\} \text{(restrições de máquinas)} \\ \left. \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 176 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 132 \end{array} \right\} \text{(restrições de mão - de - obra)} \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

como também : $x_1 \leq 80,0$; $x_2 \leq 20,0$; $x_3 \leq 40,00 \rightarrow$ restrições de mercado.

2.2.2. O problema da dieta

Considere que uma pessoa deseja minimizar o custo de sua dieta diária, mantendo os níveis de consumo recomendados para as diferentes vitaminas.

Sejam:

- a) x_1, \dots, x_n : os níveis de consumo dos n alimentos pertencentes à dieta;
- b) b_i : o nível mínimo de consumo da vitamina i ;
- c) a_{i1}, \dots, a_{in} : as quantidades da vitamina i , contidas nos alimentos $1, \dots, n$, respectivamente;
- d) c_1, \dots, c_n : os custos unitários dos alimentos $1, \dots, n$, respectivamente.

Exemplo: a dieta de uma pessoa deve constar de 03 alimentos, cujos teores de vitaminas, bem como os níveis mínimos de consumo se encontram na tabela seguinte:

Vitaminas	Consumo mínimo diário (mg)	Teor vitamínico dos alimentos (mg/unid)		
		A_1	A_2	A_3
A	80	10	5	10
B	70	8	7	6
C	100	15	3	7
D	60	20	2	9
Preços dos alimentos (\$ / unid)		80	32	180

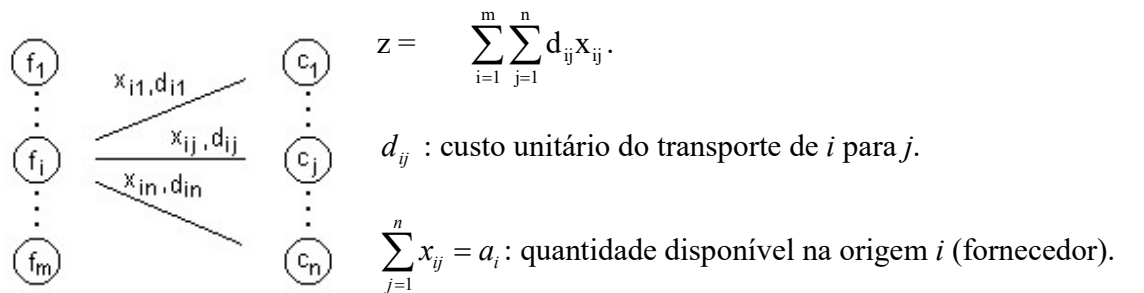
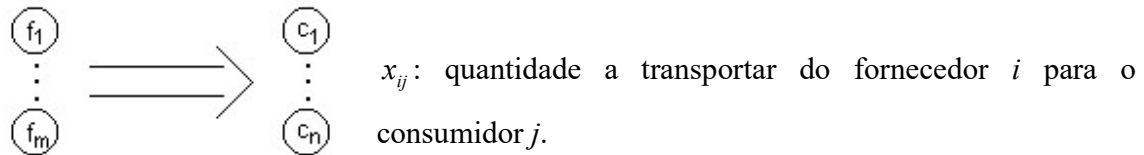
O problema pode então ser formulado como:

$$\text{minimizar } C = 80x_1 + 32x_2 + 180x_3$$

$$\text{sujeita a: } \begin{cases} 10x_1 + 5x_2 + 10x_3 \geq 80 \\ 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 \geq 70 \\ 15x_1 + 3x_2 + 7x_3 \geq 100 \\ 20x_1 + 2x_2 + 9x_3 \geq 60 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2.2.3. O problema do transporte

Consiste em minimizar o custo total do transporte de mercadorias de m centros fornecedores para n centros consumidores.



$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j : \text{quantidade solicitada pelo destino } j \text{ (consumidor).}$$

2.2.4. O problema da designação

Consiste de um caso particular do problema do transporte em que: $m = n$; $a_i = 1 \quad \forall i$; $b_j = 1 \quad \forall j$. O modelo assume, portanto, a seguinte forma:

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$m = n$$

$$\text{sendo } \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1; \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n.$$

Além dessas restrições, deve-se considerar que:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a origem } i \text{ corresponder ao destino } j \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

2.3. Representação gráfica do processo de solução

Consideremos um problema, simplificado, de atividades concorrentes, consistindo da fabricação de dois produtos (A e B), que consomem horas de máquinas e de mão-de-obra, conforme se apresenta de forma esquemática na tabela abaixo:

Recursos	Tempo disponível horas/dia	Nível de consumo dos recursos horas / unidade por produto	
		A	B
MAQ 01	13	1	3
MAQ 02	6	1	1
MO 01	6	2	-
MO 02	4	-	1
Lucro unitário (\$)		12	15

O que corresponde a:

$$\text{máx} : z = 12x_1 + 15x_2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 13$$

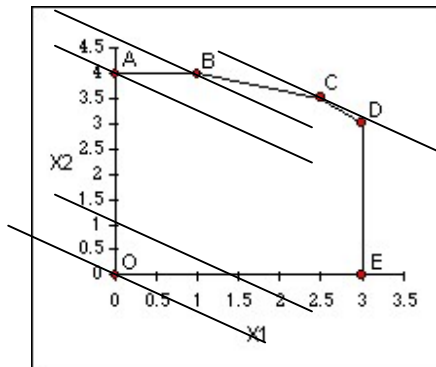
$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$\text{sendo} : 2x_1 \leq 6 \Rightarrow x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

No plano $x_1 \times x_2$, tem-se:



Parametrizando a equação $z = 12x_1 + 15x_2$, obtemos:

$$x_2 = -\frac{4}{5}x_1 + \frac{z}{15} \quad (1).$$

Logo, a maximização ocorrerá no ponto em que a função z assumir o máximo valor, que permite a interceptação da reta (1) com a região \overline{OABCDE} .

Este é o ponto C, que possui as coordenadas $x_1^\circ = 2,5$ e $x_2^\circ = 3,5$.

Com isso, obtemos $z = z^\circ = 82,5$.

2.4. Solução algébrica - soluções básicas

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_2 + x_4 = 4$$

O sistema $x_1 + x_2 \leq 6$ evolui para $x_1 + x_2 + x_5 = 6$

$$x_1 + 3x_2 \leq 13$$

$$x_1 + 3x_2 + x_6 = 13$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Esse sistema possui uma solução compatível óbvia:

$$\{x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 6, x_6 = 13, x_1 = 0, x_2 = 0\} \Rightarrow 0(0,0)$$

A função $z = 12x_1 + 15x_2$ assume o valor $z = 0$ para esta solução. O valor de z crescerá apenas com o crescimento de x_1 ou de x_2 , o que é possível com a entrada de x_1 e/ou x_2 na base. A fim de simplificar o controle sobre o atendimento às restrições, apenas

uma das variáveis será incrementada, por vez. Como a função objetivo cresce mais rapidamente com x_2 do que com x_1 , então x_2 deverá entrar na base.

Adotando uma estratégia conhecida como “*gulosa*”, a variável x_2 deve assumir o maior valor possível. Entretanto, esta não pode crescer a tal ponto de tornar outra variável negativa. Expressando as variáveis básicas em função das não-básicas, descobre-se aquela que mais rapidamente atinge o valor zero, com o crescimento de x_2 . Essa deve então ceder seu lugar na base para x_2 . Portanto:

$$\begin{aligned}x_3 &= 3 - x_1; & x_1 &= 0 \\x_4 &= 4 - x_2 \\x_5 &= 6 - x_1 - x_2; & x_1 &= 0 \\x_6 &= 13 - x_1 - 3x_2; & x_1 &= 0\end{aligned} \Rightarrow x_4 \text{ sai da base.}$$

A nova base é então $\{x_3, x_2, x_5, x_6\}$, cuja solução básica corresponde a:

$$\{x_3 = 3, x_2 = 4, x_5 = 2, x_6 = 1, x_1 = 0, x_4 = 0\} \Rightarrow z = 60.$$

Observar que essa solução corresponde, no plano $x_1 \times x_2$, ao ponto $(0, 4)$, isto é, ao ponto A.

Para saber se z ainda pode crescer, devemos expressá-la em função das variáveis não-básicas:

$$z = 12x_1 + 15(4 - x_4) = 60 + 12x_1 - 15x_4$$

Como z **decrece** com x_4 , esta deve permanecer fora da base. Mas z **cresce** com x_1 , que deve então entrar na base. Para definir que variável deve sair da base, expressam-se as variáveis (atualmente) básicas, em função das demais. Observa-se, nas equações abaixo, que a variável x_6 é a que mais limita o crescimento de x_1 .

$$\begin{aligned}x_3 &= 3 - x_1 \\x_2 &= 4 - x_4; & x_4 &= 0 \\x_5 &= 6 - x_1 - 4 - x_4 = 2 - x_1; & x_4 &= 0 \Rightarrow x_6 \text{ deve sair da base} \\x_6 &= 13 - x_1 - 12 - x_4 = 1 - x_1; & x_4 &= 0\end{aligned}$$

Assim, a nova base fica $\{x_3, x_2, x_5, x_1\}$. Esses procedimentos podem ser implementados sobre a matriz aumentada do sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 13 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_3 - L_2 \\ L_4 - 3L_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_4 \\ L_3 - L_4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \{x_3 = 2, x_2 = 4, x_5 = 1, x_1 = 1, x_4 = 0, x_6 = 0\}$$

Substituindo, na função objetivo, as variáveis básicas pelas não-básicas, usando a segunda e a quarta linhas da matriz aumentada, tem-se:

$$\begin{aligned} z &= 12x_1 + 15x_2 = 12 \cdot (1 + 3x_4 - x_6) + 15 \cdot (4 - x_4) \\ z &= 72 + 21x_4 - 12x_6 \Rightarrow x_4 \text{ deve entrar e } x_6 \text{ permanecer fora da base} \end{aligned}$$

$$x_1 = 1 + 3x_4 - x_6; x_6 = 0$$

$$x_2 = 4 - x_4$$

$$x_3 = 2 - 3x_4 - x_6; x_6 = 0$$

$$x_5 = 1 - 2x_4 + x_6; x_6 = 0 \Rightarrow x_5 \text{ cede seu lugar na base para } x_4$$

Logo, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -3/2 & 1/2 & \vdots & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & \vdots & 7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & \vdots & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & \vdots & 5/2 \end{bmatrix}$$

A nova solução básica é:

$$\{x_3 = 1/2, x_2 = 7/2, x_4 = 1/2, x_1 = 5/2, x_5 = 0, x_6 = 0\}$$

$$z = 72 + 21x_4 - 12x_6; x_4 = 1/2 - 1/2x_5 + 1/2x_6$$

$$z = 72 + 21/2 - 21/2x_5 + 21/2x_6 - 12x_6 \Rightarrow z = 82,5 - 10,5x_5 - 1,5x_6 \Rightarrow z = z^\circ = 82,5$$

A entrada de x_5 ou x_6 na base reduz o valor de z . Logo $z = 82,5$ é o valor ótimo.

3. O Método Simplex

3.1. Teorema I

"O conjunto de todas as soluções compatíveis de um problema de programação linear é um conjunto convexo".

3.1.1. Demonstração

Seja o problema $\max \quad z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ sujeita a $\begin{cases} \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$ com $c_{(nx1)}, x_{(nx1)}, A_{(m \times n)}, b_{(mx1)}$.

Chamando C o conjunto definido por $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ e $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Se $\mathbf{x}_1 \in C$ e $\mathbf{x}_2 \in C$, então:

$$\begin{cases} \mathbf{Ax}_1 \leq \mathbf{b} \Rightarrow \alpha \mathbf{Ax}_1 \leq \alpha \mathbf{b} \text{ ou } \mathbf{A}(\alpha \mathbf{x}_1) \leq \alpha \mathbf{b} \\ \mathbf{Ax}_2 \leq \mathbf{b} \Rightarrow (1-\alpha) \mathbf{Ax}_2 \leq (1-\alpha) \mathbf{b} \text{ ou } \mathbf{A}(1-\alpha) \mathbf{x}_2 \leq (1-\alpha) \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0} \text{ ou somando:} \\ \mathbf{x}_2 \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{A}[\alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha) \mathbf{x}_2] \leq \mathbf{b} \end{cases}$$

Logo:

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{x}_1 + (1-\alpha) \mathbf{x}_2 \in C \quad \text{pois :}$$

$$\alpha + (1-\alpha) = 1 \text{ e se } 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ (} 0 \leq 1-\alpha \leq 1 \text{) e } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Logo C é convexo.

3.2. Teorema II

"Toda solução básica compatível do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ é um ponto extremo do conjunto convexo C ".

3.2.1. Demonstração

Considere $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ um solução básica compatível.

Então $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$.

Considere ainda $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ e $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \in C, y_i, z_i \geq 0$.

Como $\mathbf{x} \in C$, que é um conjunto convexo, então:

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{y} + (1 - \alpha) \mathbf{z}, 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Ou ainda:

$$x_i = \alpha y_i + (1 - \alpha) z_i, \quad (i \leq m)$$

$$x_j = 0 = \alpha y_j + (1 - \alpha) z_j, \quad (m < j \leq n).$$

a) Para $0 < \alpha < 1 \Rightarrow y_j = 0, z_j = 0, j = m, \dots, n$. Assim, $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{z}$, já que possuem as mesmas variáveis não-básicas.

b) Para $\alpha = 0 \Rightarrow z_j = 0, j = m, \dots, n$. Assim, $\mathbf{x} = \mathbf{z}$.

c) Para $\alpha = 1 \Rightarrow y_j = 0, j = m, \dots, n$. Assim, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Portanto, \mathbf{x} é ponto extremo.

3.3. Teorema III

"Se a função objetivo possui máximo (ou mínimo) finito, então existe um ponto extremo do conjunto convexo C , que produz o valor ótimo da função".

3.3.1. Demonstração

A partir do teorema II, conclui-se facilmente que o conjunto de pontos extremos, pertencentes ao espaço de soluções do problema, é um conjunto finito. Portanto, sejam $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$ os pontos extremos de C .

Seja $\mathbf{x}_0 \in C$ um ponto de máximo, isto é:

$$M = z(\mathbf{x}_0) \geq z(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x}$$

Para $\alpha_j \geq 0$ e $\sum_{j=1}^p \alpha_j = 1$, $\mathbf{x}_0 = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_p \mathbf{x}_p$, já que \mathbf{x}_0 pertence ao conjunto convexo C .

Avaliando o valor da função objetivo no ponto \mathbf{x}_0 , tem-se:

$$z(\mathbf{x}_0) = z(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_p \mathbf{x}_p) = \alpha_1 z(\mathbf{x}_1) + \dots + \alpha_p z(\mathbf{x}_p)$$

Seja: \mathbf{x}_m um ponto extremo, tal que $z(\mathbf{x}_m) \geq z(\mathbf{x}_i), \forall i = 1, \dots, p$. Então, combinando essa condição com a equação acima, tem-se:

$$\alpha_1 z(\mathbf{x}_m) + \alpha_2 z(\mathbf{x}_m) + \dots + \alpha_p z(\mathbf{x}_m) \geq z(\mathbf{x}_0)$$

$$\text{ou } z(\mathbf{x}_m) \sum_{j=1}^p \alpha_j \geq z(\mathbf{x}_0)$$

Ou ainda:

$$z(\mathbf{x}_m) \geq z(\mathbf{x}_0)$$

Combinando com

$$z(\mathbf{x}_m) \leq z(\mathbf{x}_0) \Rightarrow z(\mathbf{x}_0) = z(\mathbf{x}_m).$$

3.3.2. Teorema IV

"Se a função objetivo assume valor máximo (mínimo) em mais de um ponto extremo, então a função tem o mesmo valor para qualquer combinação convexa desses pontos extremos".

3.3.3. Demonstração

Sejam $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_q$ pontos extremos tais que: $z(\mathbf{x}_1) = z(\mathbf{x}_2) = \dots = z(\mathbf{x}_q) = M$.

Seja \mathbf{x} uma combinação convexa de $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_q$. Então:

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^q \alpha_j \mathbf{x}_j, \sum_{j=1}^q \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0,$$

Logo:

$$z(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^q \alpha_j z(\mathbf{x}_j) = z(\mathbf{x}_q) \sum_{j=1}^q \alpha_j = M.$$

3.4. Forma padrão - Forma canônica

Diz-se que o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ está na forma *padrão (standard)* se $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ e $b_j \geq 0$, $j = 1, \dots, m$. Se, além disso, o sistema apresenta uma base óbvia, diz-se que ele está na *forma canônica*.

3.5. Solução através de tabelas

Se a forma canônica do sistema do problema anterior for aumentada de uma equação, correspondendo a função objetivo, tem-se:

$$\begin{array}{rcccccccc} 1z & - & 12x_1 & - & 15x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & + & 0x_6 & = & 0 \\ 0z & + & 1x_1 & + & 0x_2 & + & 1x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & + & 0x_6 & = & 3 \\ 0z & + & 0x_1 & + & 1x_2 & + & 0x_3 & + & 1x_4 & + & 0x_5 & + & 0x_6 & = & 4 \\ 0z & + & 1x_1 & + & 1x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 1x_5 & + & 0x_6 & = & 6 \\ 0z & + & 1x_1 & + & 3x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & + & 1x_6 & = & 13 \end{array}$$

<i>Fator limitante</i> q	<i>Base</i>	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
		1	-12	-15	0	0	0	0	0	$L_0 + 15L_2$
3/0	x_3	0	1	0	1	0	0	0	3	L_1
4/1	x_4	0	0	1	0	1	0	0	4	L_2
6/1	x_5	0	1	1	0	0	1	0	6	$L_3 - L_2$
13/3	x_6	0	1	3	0	0	0	1	13	$L_4 - 3L_2$

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
	<i>Base</i>	1	-12	0	0	15	0	0	60	$L_0 + 12L_4$
3/1	x_3	0	1	0	1	0	0	0	3	$L_1 - L_4$
4/0	x_2	0	0	1	0	1	0	0	4	L_2
2/1	x_5	0	1	0	0	-1	1	0	2	$L_3 - L_4$
1/1	x_6	0	1	0	0	-3	0	1	1	L_4

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
	<i>Base</i>	1	0	0	0	-21	0	12	72	$L_0 + 21/2L_3$
2/3	x_3	0	0	0	1	3	0	-1	2	$L_1 - 3/2L_3$
4/1	x_2	0	0	1	0	1	0	0	4	$L_2 - 1/2L_3$
1/2	x_5	0	0	0	0	2	1	-1	1	$1/2L_3$
1/(-3)	x_1	0	1	0	0	-3	0	1	1	$L_4 + 3/2L_3$

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
	<i>Base</i>	1	0	0	0	0	10.5	1.5	82.5	$z^\circ = 82.5$
	x_3	0	0	0	1	0	-1.5	0.5	0.5	

	x_2	0	0	1	0	0	0.5	0.5	3.5
	x_4	0	0	0	0	1	0.5	-0.5	0.5
	x_1	0	1	0	0	0	1.5	0.5	2.5

3.5.1. Generalização

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}; \mathbf{A}_{(m \times n)}$$

$$\mathbf{x}, \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$$

		z	x_1	x_2	\dots	x_n	x_{n+1}	\dots	x_{n+m}	b
Fator q	Base	1	a_{01}	a_{02}	\dots	a_{0n}	0	\dots	0	0
q_1	x_{n+1}	0	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1n}	1	\dots	0	b_1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
q_m	x_{n+m}	0	a_{m1}	a_{m2}	\dots	a_{mn}	0	\dots	1	b_m

$$a_{oj}^{(0)} = \begin{cases} -c_j, j = 1, \dots, n \\ 0, j = n+1, \dots, n+m \end{cases}$$

1. Identificar uma solução básica compatível inicial.
2. Escolher variável não-básica que deve entrar na base.

$$a_{oi} = \min a_{oj}; j = j_1, \dots, j_n; j_k \notin B; \text{ dentre } a_{oj} < 0.$$

Seleciona-se assim a variável i para entrar na base.

3. Escolher a variável que deve sair da base.

$$q_l = \min \left(q_j = \frac{b_j}{a_{ji}} \right); j = 1, \dots, m; \text{ dentre os } q_j \geq 0$$

Obs: O índice l identifica a posição no conjunto $B = \{\dots\}$ da variável básica que deve deixar a base.

4. Transforma-se a linha l para $a_{lk}^{(t+1)} = \frac{1}{a_{li}^{(t)}} a_{lk}^{(t)}; k = 1, \dots, n + m + 1$.

5. A fim de "zerar" os demais elementos da i -ésima coluna:

$$a_{pk}^{(t+1)} = a_{pk}^{(t)} - \left[\frac{a_{pi}}{a_{li}} a_{lk} \right]^{(t)}, \quad \begin{matrix} p = 0, 1, \dots, n (\neq l) \\ k = 1, \dots, n + m + 1 \end{matrix}$$

Retorna-se ao passo dois e repetem-se os demais passos, enquanto o ótimo não for atingido.

3.6. Problemas de minimização

Esses problemas podem ser resolvidos de formas distintas:

3.6.1. $\text{Min } z = \text{Max } (-z)$

Maximiza-se o simétrico da função objetivo.

3.6.2. Alteram-se os critérios de otimalidade e de entrada na base

3.7. Situações especiais

3.7.1. Empate de v variáveis na entrada

Escolhe-se arbitrariamente qualquer das " v " variáveis para entrar na base.

Obs: O n° de iterações para alcançar o "ótimo" é função da variável escolhida.

3.7.2. Empate na saída - degeneração

Isso significa que mais de uma variável se anula ao mesmo tempo. Escolhe-se aleatoriamente uma delas para deixar a base.

Nesse caso, variáveis básicas assumem o valor **zero**. Diz-se que a solução é *degenerada*.

Ex : $\max z = 2x_1 + 3x_2$

s.a. $x_1 \leq 3$

$x_2 \leq 4$

$x_1 + 3x_2 \leq 12$

Forma canônica:

$$\begin{cases} z - 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 12 \end{cases}$$

Fator q	(1)	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
	Base	1	-2	-3	0	0	0	0	$L_0 + 3L_2$
3/0	x_3	0	1	0	1	0	0	3	L_1
4/1	x_4	0	0	1	0	1	0	4	L_2
12/3	x_5	0	1	3	0	0	1	12	$L_3 - 3L_2$
	(2)	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
	Base	1	-2	0	0	3	0	12	$L_0 + 2L_3$
3/1	x_3	0	1	0	1	0	0	3	$L_1 - L_3$
4/0	x_2	0	0	1	0	1	0	4	L_2
0/1	x_5 x_5	0	1	0	0	-3	1	0	L_3
	(3)	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
	Base	1	0	0	0	-3	2	12	$L_0 + L_1$

3/3	x_3	0	0	0	1	3	-1	3	$1/3L_1$
4/1	x_2	0	0	1	0	1	0	4	$L_2 - 1/3L_1$
0/(-3)	x_1	0	1	0	0	-3	1	0	$L_3 + L_1$
	(4)	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
	Base	1	0	0	1	0	1	15	$z^\circ = 15$
	x_4	0	0	0	1/3	1	-1/3	1	
	x_2	0	0	1	-1/3	0	1/3	3	
	x_1	0	1	0	1	0	0	3	

Se de (1) para (2) escolhermos x_5 em vez de x_4 :

	(1)	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
<i>Fator q</i>	<i>Base</i>	1	-2	-3	0	0	0	0	$L_0 + L_3$
3/0	x_3	0	1	0	1	0	0	3	L_1
4/1	x_4	0	0	1	0	1	0	4	$L_2 - 1/3L_3$
12/3	x_5	0	1	3	0	0	1	12	$1/3L_3$

	(2)	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
	<i>Base</i>	1	-1	0	0	0	1	12	$L_0 + L_1$
3/1	x_3	0	1	0	1	0	0	3	
0/(-1/3)	x_4	0	-1/3	0	0	1	1/3	0	$L_2 + 1/3L_1$
4/(1/3)	x_2	0	1/3	1	0	0	1/3	4	$L_3 - 1/3L_1$

	(3)	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
	<i>Base</i>	1	0	0	1	0	1	15	$Z^{ot} = 15$
	x_1	0	1	0	1	0	0	3	
	x_4	0	0	0	1/3	1	1/3	1	
	x_2	0	0	1	-1/3	0	1/3	3	

3.7.3. Soluções Múltiplas

$$\text{Ex : } \max z = x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a. } x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 13$$

Forma canônica:

$$\begin{cases} z - x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 13 \end{cases}$$

Fator q	(1)	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
	Base	1	-1	-3	0	0	0	0	$L_0 + 3L_2$
3/0	x_3	0	1	0	1	0	0	3	L_1
4/1	x_4	0	0	1	0	1	0	4	L_2
13/3	x_5	0	1	3	0	0	1	13	$L_3 - 3L_2$

<i>Fator q</i>	(2)	<i>z</i>	<i>x</i> ₁	<i>x</i> ₂	<i>x</i> ₃	<i>x</i> ₄	<i>x</i> ₅	<i>b</i>	
	<i>Base</i>	1	-1	0	0	3	0	12	<i>L</i> ₀ + <i>L</i> ₃
3/1	<i>x</i> ₃	0	1	0	1	0	0	3	<i>L</i> ₁ - <i>L</i> ₃
4/0	<i>x</i> ₂	0	0	1	0	1	0	4	<i>L</i> ₂
1/1	<i>x</i> ₅	0	1	0	0	-3	1	1	<i>L</i> ₃

	(3)	<i>z</i>	<i>x</i> ₁	<i>x</i> ₂	<i>x</i> ₃	<i>x</i> ₄	<i>x</i> ₅	<i>b</i>	
	<i>Base</i>	1	0	0	0	0	1	13	<i>L</i> ₀
2/3	<i>x</i> ₃ <i>x</i> ₅	0	0	0	1	3	-1	2	1/3 <i>L</i> ₁
4/1	<i>x</i> ₂	0	0	1	0	1	0	4	<i>L</i> ₂ - 1/3 <i>L</i> ₁
1/(-3)	<i>x</i> ₁	0	1	0	0	-3	1	1	<i>L</i> ₃ + <i>L</i> ₁

	(4)	<i>z</i>	<i>x</i> ₁	<i>x</i> ₂	<i>x</i> ₃	<i>x</i> ₄	<i>x</i> ₅	<i>b</i>	
	<i>Base</i>	1	0	0	0	0	1	13	
	<i>x</i> ₄	0	0	0	1/3	1	-1/3	2/3	
	<i>x</i> ₂	0	0	1	-1/3	0	1/3	10/3	
	<i>x</i> ₁	0	1	0	1	0	0	3	

$$z = x_1 + 3x_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 10/3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + (1 - \alpha) \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 10/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 2\alpha \\ 10/3 + (2/3)\alpha \end{bmatrix}; \quad z(\mathbf{x}) = 13$$

3.8 Solução Inicial

3.8.1. Todas as restrições do tipo \leq e todos os $b_i \geq 0$

$\forall x_j \geq 0 \Rightarrow$ forma canônica (solução compatível básica óbvia).

3.8.2. $b_k < 0$, para algum k , ou alguma restrição do tipo \geq .

Nesse caso a solução básica óbvia, composta pelas *variáveis de folga*, será não compatível.

Ex:

$$\text{Max } z = 2x_1 + x_2$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 13$$

Para eliminar esse inconveniente, introduz-se uma *variável artificial* na k -ésima equação, cujo coeficiente deve ter sinal contrário daquele da *variável de folga* da mesma equação.

Ex :

$$x_1 + 3x_2 - x_5 + x_6 = 13$$

A fim de não alterar a k -ésima equação, deve-se garantir que a variável artificial seja nula, quando se atingir o ótimo. Isso pode ser conseguido de duas maneiras:

I. Método do “M grande”

Para não permitir que x_6 pertença à base ótima, altera-se a função-objetivo para:

$$Z_{\text{novo}} = Z - Mx_6, \text{ sendo } M \gg \text{que as quantidades envolvidas no problema.}$$

II. Método da função-objetivo artificial

Constrói-se a função $W = \sum x_{\text{artificial}}$, que deve ser minimizada. Obviamente,

$$W^{\text{ótimo}} = 0 \text{ e todos os } x_{i,\text{artificial}} = 0.$$

Ex :

$$\min W = x_6 \Leftrightarrow \max(-W) = -x_6$$

	(1)	$-W$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
$Fator\ q$	$Base$	1	0	0	0	0	0	1	0	$L_0 - L_3$ (linha 0 em função das variáveis não-básicas)
	x_3	0	1	0	1	0	0	0	3	L_1
	x_4	0	0	1	0	1	0	0	4	L_2
	x_6	0	1	3	0	0	-1	1	13	L_3

	(2)	$-W$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
	$Base$	1	-1	3	0	0	1	0	-13	$L_0 + 3L_2$

3/0	x_3	0	1	0	1	0	0	0	3	L_1
4/1	x_4	0	0	1	0	1	0	0	4	L_2
13/3	x_6	0	1	3	0	0	-1	1	13	$L_3 - 3L_2$

	(3)	$-W$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
	Base	1	-1	0	0	3	1	0	-1	$L_0 + L_3$
3/1	x_3	0	1	0	1	0	0	0	3	$L_1 - L_3$
4/0	x_2	0	0	1	0	1	0	0	4	L_2
1/1	x_6	0	1	0	0	-3	-1	1	1	L_3

	(4)	$-W$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
	Base	1	0	0	0	0	0	1	0
	x_3	0	0	0	1	3	1	-1	2
	x_2	0	0	1	0	1	0	0	4
	x_1	0	1	0	0	-3	-1	1	1

	(5)	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
	Base	1	-2	-1	0	0	0	-	0	$L_0 + L_2 + 2L_3$
	Base	1	0	0	0	-5	-2		6	
	x_3	0	0	0	1	3	1	-	2	
	x_2	0	0	1	0	1	0	-	4	
	x_1	0	1	0	0	-3	-1	-	1	