Przytoczony przykład sprowadzenia formy kwadratowej do sumy kwadratów opisaną metodą. Niech w trójwymiarowej przestrzeni pewną bazą f_1, f_2, f_3 będzie dana forma kwadratowa

$$A(x;x) = 2\eta_1\eta_2 + 4\eta_1\eta_3 - \eta_2^2 - 8\eta_3^2$$

Przyjmijmy

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_2', \\ \eta_2 &= \eta_1' \\ \eta_3 &= \eta_3'. \end{aligned}$$

Wówczas otrzymamy

$$A(x;x) = -\eta_1^2 + 2\eta_1\eta_2 + 4\eta_2\eta_3 - 8\eta_3^2$$

Dalej przyjmując

$$\eta_1^* = -\eta_1' + \eta_2'$$

$$\eta_2^* = \quad \eta_2'$$

$$\eta_3^* = \qquad \eta_3'$$

otrzymamy nowe wyrażenie na formę kwadratową

$$A(x;x) = -\eta_1^{*2} + \eta_2^{*2} + 4\eta_2^*\eta_3^* - 8\eta_3^{*2}$$

Przekształcenie

$$\xi_1 = \eta_1^*,$$

$$\xi_2 = \quad \eta_2^* + 2\eta_3^*$$

$$\xi_3 = \qquad eta_3^*$$

wydzieli z naszej formy kwadratowej jeszcze jeden pełny kwadrat i forma przyjmie postać kanoniczną:

$$A(x;x) = -\xi_1^2 + \xi_2^2 - 12\xi_3^2.$$

Mając wzory wyrażające $\eta_1^*, \eta_2^*, ..., \eta_n^*$ przez $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$, a następnie $\eta_1^{**}, \eta_2^{**}, ..., \eta_n^{**}$ przez $\eta_1^*, \eta_2^*, ..., \eta_n^*$ itd. możemy otrzymać wyrażenie współrzędnych $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ poprzez współrzędne początkowe $\eta_1, eta_2, ..., \eta_n$

$$\xi_1 = c_{11}\eta_1 + c_{12}\eta_2 + \cdots + c_{1n}\eta_n,$$

$$\xi_2 = c_{21}\eta_1 + c_{22}\eta_2 + \cdots + c_{2n}\eta_n,$$

....

$$\xi_1 = c_{n1}\eta_1 + c_{n2}\eta_2 + \cdots + c_{nn}\eta_n.$$

I tak w przytoczonym przykładzie wzory te mają postać

$$\xi_1 = \eta_1 - \eta_2,$$

$$\xi_2 = \eta_1 \quad + 2\eta_3,$$

$$\xi_3 = \quad \eta_3.$$

Przypominając sobie(§1, ustep 7), że macierz dająca przekształcenie współrzędnych jest macierzą odwrotną i transponowaną względem przekształcenia bazy, możemy wyrazić wektory nowej bazy $e_1, e_2, ..., e_n$ poprzez wektory starej bazy $f_1, f_2, ..., f_n$:

Przypominając sobie(§1, ustep 7), że macierz dająca przekształcenie współrzędnych jest macierzą odwrotną i transponowaną względem przekształcenia bazy, możemy wyrazić wektory nowej bazy $e_1, e_2, ..., e_n$ poprzez wektory starej bazy $f_1, f_2, ..., f_n$:

$$e_1 = d_{11}f_1 + d_{12}f_2 + d_{1n}f_n,$$

$$e_2 = d_{21}f_1 + d_{22}f_2 + d_{2n}f_n,$$

....

$$e_1 = d_{n1}f_1 + d_{n2}f_2 + d_{nn}f_n,$$

Jeżeli w procesie sprawdzenia ani razu nie dokonywaliśmy przekształcenia zmieniającego od razu dwie współrzędne (jak widzieliśmy, takiego przekształcenia trzeba dokonać, gdy w przekształconej formie brak jest kwadratów lub współrzędnych lub jeżeli trzeba zmieniać numerację), to wzory na przekształcenie mają postać:

$$\xi_1 = c_{11}\eta_1 + c_{12}\eta_2 + \ldots + c_{1n}\eta_n,$$

$$\xi_1 = \quad c_{22}\eta_2 + \ldots + c_{2n}\eta_n,$$

....

$$\xi_1 = \qquad c_{nn}\eta_n,$$

tj.przekształcenia jest tzw. *macierzą trójkątną.*łatwo sprawdzić, że macierz przekształcania bazy będzie w tym przypadku także macierzą trójkątną postaci

$$e_1 = d_{11} f_1,$$

$$e_2 = d_{21} f_1 + d_{22} f_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$e_n = d_{n1} f_1 + d_{n2} f_n + \dots + d_{nn} f_n.$$

Tutaj $d_{\alpha\beta}$ jest dopełnieniem algebraicznym elementu c_β macierzy $[c_{ik}]$ podzielonym przez wyznacznik tej macierzy.

§6. SPROWADZANIE FORMY KWADRATOWEJ DO SUMY KWADRATÓW ZA POMOCĄ PRZEKSZTAŁCENIA TRÓJKĄTNEGO

1. W tym paragrafie podamy jeszcze jeden sposób konstruowania bazy, w której forma kwadratowa sprowadza się do sumy kwadratów. W odróżnieniu od poprzedniego paragrafu podamy wzory wyrażające szukaną bazę $e_1, e_2, ..., e_n$ bezpośrenio przez bazę wyjściową (a nie jak w kilku krokach, jak w §5). Będziemy jednak przy tym musieli nałożyć na formę $A(x; y)$ i na szukaną bazę $f_1, f_2, ..., f_n$ następujące ograniczenie: Niech $[a_{ik}]$ będzie macierzą formy dwuliniowej $A(x; y)$ w bazie $f_1, f_2, ..., f_n$. Założymy, że następujące minory macierzy $[a_{ik}]$ są różne od zera([1]):