

Modelo de Kuramoto

Oscar Rogelio Arévalo Cordon
170507

& *GuillaumeBenjaminDomengeTreville*
157190

& *AnaMuñizTellería*
164840

& *MarianaGracielaMartínezAguilar*
166297

Noviembre 2019

1. Introducción

La sincronización en los grupos de luciérnagas juega un papel importante en su reproducción, la manera que se reconocen y en su competencia como especie.

Por ejemplo, para su proceso de reproducción, o de apareamiento, la luciérnaga macho da una luz a una frecuencia natural a la que las luciérnagas hembras responden y así se encuentran.

Para explicar este fenómeno se han hecho estudios centrados en las dinámicas de dos osciladores como modelo de sincronización. Con este paradigma, las dos entradas a los osciladores se influyen una a la otra e intercambian información. Es a través de este patrón de luz que las luciérnagas comunican su posición y su frecuencia. Entonces, nuestro modelo necesariamente debe tomar estos factores en cuenta y lo puede hacer incorporando las formas de comunicación entre nuestros osciladores.

A lo largo del tiempo se han desarrollado diferentes modelos para explicar este fenómeno, un ejemplo es el de Kuramoto para osciladores químicos, otro es el modelo de Peskin que está enfocado en la sincronización de los marcapasos.

Como hipótesis principal tenemos que la habilidad de sincronizar de las luciérnagas es directamente proporcional al número de luciérnagas que puede ver.

2. Modelo de estímulo externo

En 1984 Ermentrout y Rinzel propusieron un modelo sencillo de este problema en el cual se estudia el ritmo de una luciérnaga respondiendo a un estímulo externo y periódico. El modelo propone $\theta(t)$ como la fase de parpadeo de la luciérnaga y el cual ocurre cuando $\theta = 0$. En el caso de que no haya estímulo se supone que $\dot{\theta} = \omega$, donde ω es la frecuencia natural de parpadeo de la luciérnaga.

Definimos el estímulo externo por su fase Θ y su comportamiento $\dot{\Theta} = \Omega$. El modelo replica el comportamiento de la luciérnaga frente al estímulo de la siguiente manera: si la fase del estímulo está más adelantada que la de la luciérnaga, ésta va a acelerar su periodo hasta que ya no sea el caso y en caso de que el estímulo esté más atrasado, la luciérnaga va a frenar su frecuencia hasta que ya no esté adelantada. Se logra este comportamiento con esta ecuación:

$$\dot{\theta} = \omega + A \sin(\Theta - \theta),$$

donde A es la capacidad de la luciérnaga para modificar su frecuencia.

2.1. Análisis Cualitativo del modelo

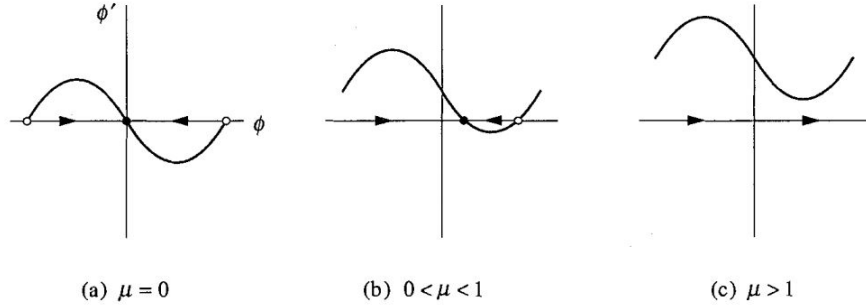
Para ver si se puede alcanzar la sincronización vamos a estudiar la diferencia entre las fases.

Sea $\phi = \Theta - \theta$, tenemos entonces $\dot{\phi} = \dot{\Theta} - \dot{\theta} = \Omega - \omega + A \sin(\phi)$, introduciendo

$$\tau = At \text{ y } \mu = \frac{\Omega - \omega}{A}$$

Obtenemos el sistema adimensional

$$\dot{\phi} = \mu + \sin(\phi).$$



Podemos ver que cuando $\mu = 0$ el sistema presenta un punto crítico estable $\phi^* = 0$. En este caso la luciérnaga está sincronizada con el estímulo y parpadean al mismo tiempo. Cuando $0 < \mu < 1$ el punto crítico se recorre a $0 < \phi^*$, lo cual quiere decir que en ese punto estable la luciérnaga tiene la misma frecuencia que el estímulo pero que están desfasados, la luciérnaga está "Phase-Locked", este fenómeno tiene sentido ya que con $0 < \mu$, $\Omega > \omega$ el estímulo está constantemente forzando la luciérnaga a ir más rápido, pero esta se queda atrasada ya que no quiere acelerar más. En $\mu = 1$ podemos ver una bifurcación de tipo silla-nodo. Cuando $1 < \mu$ no hay punto crítico lo cual implica que la luciérnaga no puede alcanzar la misma frecuencia que el estímulo por lo que se atrasa cada vez más. Eventualmente, cuando $\phi = 2\pi$ los osciladores estarán de nuevo en fase, pero nunca tendrán la misma frecuencia.

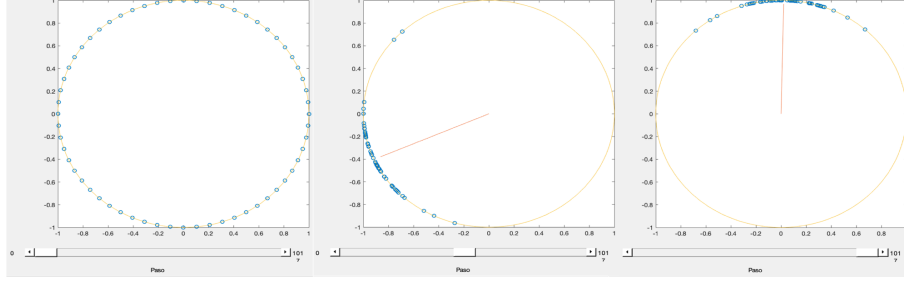
Gracias a este sencillo modelo, podemos ver cuáles son los diferentes comportamientos que pueden presentar las luciérnagas, pero veremos a continuación que el modelo se vuelve muy complejo en cuanto buscamos modelar varias luciérnagas y su comportamiento entre ellas.

3. El modelo de Kuramoto con N osciladores

Hay dos maneras de ver este problema: considerando la actividad del ritmo de cada elemento y estudiándolo en términos físicos. Otra manera de ver esto es considerando osciladores no lineales que de manera global llegan a un ciclo límite de amplitud constante.

Originalmente Wiener analizó el problema de sincronización usando integrales de Fourier, lo cual era algo complicado. Kuramoto analizó un modelo de osciladores fase con un ciclo límite acoplado y cuyas frecuencias se distribuyen de cierta manera. Este modelo es bastante popular pues es lo suficientemente simple como para poder trabajar con él, pero no es lo suficientemente simple que sea trivial.

El modelo Kuramoto es un modelo de campo medio. Esto significa que se consideran los efectos que producen todos los componentes del sistema (todos los osciladores, todas las luciérnagas) sobre uno de ellos como un único efecto promediado llamado el campo medio. En este caso este efecto promediado es el nivel de sincronización que nuestros osciladores tienen después de cierto tiempo



de interacción.

Este modelo considera N osciladores (luciérnagas) en el círculo unitario \mathbb{S} . Cada uno de estos osciladores tiene una frecuencia natural, ω_i , $i = 1, \dots, N$. Como nuestros osciladores son "del mismo tipo", es decir, todos son luciérnagas iguales, entonces podemos decir que estas ω_i son variables aleatorias idénticamente distribuidas con función de densidad de probabilidad $g(\omega)$. Entonces las fases $\theta_i(t)$ cambian de la siguiente manera:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i). \quad (1)$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que la media de la distribución de cada ω_i es cero (en caso contrario solo estandarizamos). Ahora pasamos al parámetro de orden del modelo.

3.1. Parámetros de orden en el modelo

El parámetro de orden de este modelo está definido como:

$$r \exp i\psi = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp i\theta_j. \quad (2)$$

La interpretación de esta ecuación es bastante sencilla: es el promedio que captura el ritmo colectivo producido por la población (nuestras luciérnagas). Esto se debe a que $\exp i\theta_j$ es el lugar en \mathbb{S} en el cual está el j -ésimo oscilador, luego sumamos todos estos lugares y dividimos entre la cantidad de osciladores. Esto es un promedio.

Interpretar los valores de este parámetro también es fácil pues si nuestra r (radio) resultante es parecido a uno significa que todos nuestros osciladores se han sincronizado y están localizados cerca en el círculo unitario (pues para todo j los $\exp i\theta_j$ se parecen entonces la suma es cercana a N y al dividirlo entre N es cercano a 1). Si el valor de r es cercano a cero significa que al contrario, nuestros osciladores no están sincronizados, están todos esparcidos en el círculo unitario.

3.2. Interpretando el modelo con los parámetros de orden

El parámetro de orden sirve para simplificar nuestro modelo. Porque si 2 lo multiplicamos por $\exp -i\theta_i (i = 1, \dots, N)$ obtenemos:

$$r \exp i(\psi - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp i(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Tomando la parte real y la parte imaginaria tenemos que la imaginaria es igual a :

$$r \operatorname{sen}(\psi - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \operatorname{sen}(\theta_j - \theta_i) \quad i = 1, \dots, N.$$

Esta última ecuación lo podemos sustituir en 1 para obtener una versión más simple que dependa del promedio del comportamiento de los osciladores. Tenemos así:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + Kr \operatorname{sen}(\psi - \theta_i). \quad (3)$$

Suponemos que la función de densidad de probabilidad g es simétrica alrededor de cero, que es estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$ y es estrictamente decreciente en $(0, \infty)$.

Lo que podemos también hacer para analizar las soluciones es que consideremos a $\psi = 0$ pues solo representa una rotación, siempre podemos ir rotando nuestro marco de referencia para que esto sea cierto. Así 3 se convierte en:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + Kr \operatorname{sen}(\theta_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Y así las soluciones de 4 tienen dos tipos de comportamientos a largo plazo dependiendo del tamaño de $|\omega_i|$ relativo a Kr . son cuando:

$$\omega_i = Kr \operatorname{sen}(\theta_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Si $|\omega_i| \leq Kr$ podemos encontrar los puntos de equilibrio de manera analítica:

$$\omega_i = Kr \operatorname{sen}(\theta_i),$$

con $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$. Estos osciladores están "fijos" puesto que su fase está "fija" en una frecuencia. Pero si $\frac{\pi}{2} \leq |\theta|$ entonces las soluciones siguen girando alrededor de nuestro círculo, en algunas partes giran más rápido que en otras, pero no se estabilizan. El primer caso es cuando estamos cerca de la esperanza de la función de probabilidad g , mientras que el segundo es cuando estamos en sus colas.

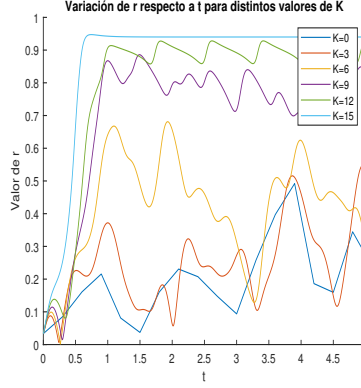


Figura 2: Variación de r respecto a t para distintos valores de K , $N=30$

4. Experimentación numérica

Para poder obtener una idea de el comportamiento del sistema, realizamos una experimentación numérica. Le aplicamos al sistema de ecuaciones diferenciales el método Runge-Kutta 2/3 y visualizamos el comportamiento de los osciladores en un círculo. Lo más importante de esta experimentación es que nos permitió observar el comportamiento de r , y por lo tanto observar si el sistema se acopla o no.

Cuando observamos que r alcanza un valor estable con el paso del tiempo, es cuando tenemos una K que permite que los osciladores se acoplen (que se acerquen asintóticamente a una misma frecuencia). Podemos observar entonces los siguientes resultados:

En la figura 2, comparamos 6 simulaciones del modelo con $N=30$ y con valores de K entre 0 y 15. Además, las frecuencias naturales de cada componente las obtuvimos con números aleatorios distribuidos Normal con $\mu = 10y\sigma = 4$.

Este comportamiento se observa de manera similar al cambiar el valor de N , Incluimos también en la figura 3 la variación de r para simulaciones con $N=10$. En todas estas figuras se puede observar el mismo comportamiento. Notamos que para mayores valores de K , r converge con el tiempo a un valor fijo. Lo que significa que los osciladores se acoplan. Esto nos dice que puede existir un valor de K crítico que indique a partir de cual valor de K los osciladores se acoplan.

Determinar el valor crítico de K para $N < \infty$ de manera analítica es una tarea que no ha sido lograda. En cambio, al plantear el caso extremo de $N \rightarrow \infty$, Kuramoto logró determinar un valor exacto de K crítico, este procedimiento se explora en la siguiente sección.

En el script KuramotoApp.m de MATLAB también se puede interactuar gráficamente con el modelo. Variando así los valores de N , K , y la distribución

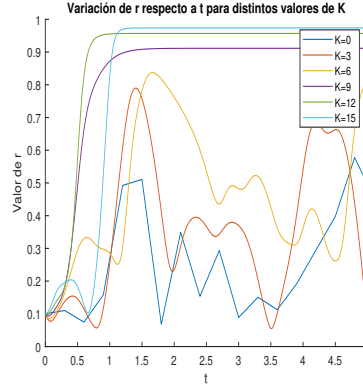


Figura 3: Variación de r respecto a t para distintos valores de K , $N=10$

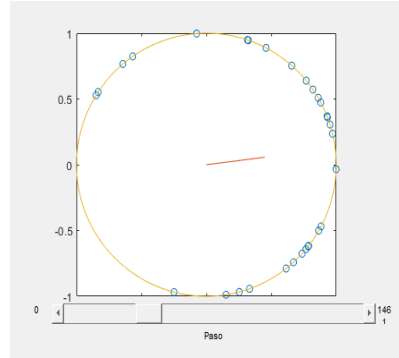


Figura 4: Apariencia gráfica de KuramotoApp

de las frecuencias naturales de los osciladores. En la figura 4 se puede observar la apariencia gráfica de este script de MATLAB.

5. Análisis de Kuramoto, determinando un valor de crítico de K

Kuramoto adivinó correctamente el comportamiento a largo plazo, es decir, cuando N tiende a infinito, usando algunas hipótesis de la simetría. Más específicamente encontró soluciones estables donde $r(t)$ es constante y $\psi(t)$ rota de manera uniforme con frecuencia ω . De esta forma, cuando rota con frecuencia ω si escogemos correctamente su origen, podemos usar la hipótesis de que $\psi = 0$ sin pérdida de generalidad.

Así, transformamos la ecuación a

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - Krsen(\theta_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Como r se asume constante en la ecuación, todos nuestros osciladores son independientes. Ahora queda resolver la ecuación para encontrar los movimientos de los osciladores. Estos movimientos utilizan los valores de r y ψ , por lo que tienen que ser consistentes con los que definimos inicialmente. Esta hipótesis de auto-consistencia se vuelve crítica en nuestro análisis.

Las soluciones de 5 muestran dos tipos de comportamiento en el largo plazo, dependiendo del tamaño de $|\omega_i|$ respecto a Kr . Los osciladores como $\omega_i \leq Kr$ se aproximan a un punto fijo determinado explícitamente por:

$$\omega_i = Krsen(\theta_i), \quad (6)$$

donde $|\theta_i| \leq 1/2\pi$. Estos osciladores los llamamos *locked* o fijos cuando están *phase - locked* con la frecuencia ω en el marco original. Por el contrario, los osciladores $|\omega_i| > Kr$ son *drifting*, ya que ellos se mueven alrededor del círculo de manera no uniforme, perdiendo y ganando velocidad. Los osciladores *locked* corresponden al centro de $g(\omega)$ y los osciladores *drifting* a las colas.

En este punto, Kuramoto ya explicó por qué la población se divide en dos grupos. Pero sabemos que la existencia de osciladores de *drifting* contradice aparentemente la hipótesis original de que r y ψ son constantes. A raíz de esto surge la pregunta de, ¿cómo el centro de la población puede mantenerse constante con esa cantidad de osciladores *drifting* que están en constante movimiento alrededor del círculo?

Kuramoto evadió este problema pidiendo a sus osciladores de *drifting* una forma y una distribución estacionaria en el círculo. Como resultado, el centro se mantiene fijo, aunque los osciladores se mueven individualmente. Sea $\rho(\theta, \omega)d\theta$ una ecuación que denota la fracción de osciladores con frecuencia natural ω que están en el intervalo de θ a $\theta + d\theta$. La estacionalidad requiere que $\rho(\theta, \omega)$ sea inversamente proporcional a la velocidad de θ ; de esta forma los osciladores se acumulan cuando hay poca velocidad y se distribuyen cuando hay mucha velocidad. Llegamos a:

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{C}{|\omega - Krsin\theta|}. \quad (7)$$

Normalizando la constante C con $\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta, \omega) d\theta$ para cada ω , nos deja:

$$C = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega^2 - (Kr)^2}$$

Después invocamos la condición de auto-consistencia; el valor constante del parámetro de orden debe ser consistente con la ecuación $re^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}$. Vamos a utilizar los paréntesis de ángulo para denotar las poblaciones medias, obteniendo:

$$\langle e^{i\theta} \rangle = \langle e^{i\theta} \rangle_{lock} + \langle e^{i\theta} \rangle_{drift}$$

Como $\psi = 0$, por hipótesis, $\langle e^{i\theta} \rangle = r \langle e^{i\psi} \rangle = r$. Entonces,

$$r = \langle e^{i\theta} \rangle_{lock} + \langle e^{i\theta} \rangle_{drift}$$

Ahora evaluamos la contribución de los osciladores *locked*. En este estado de bloqueo, $\sin(\theta^*) = \omega/Kr$ para todo $|\omega| \leq Kr$. Como N tiende a infinito, la distribución de las fases bloqueadas son simétricas alrededor de $\theta = 0$, como $g(\omega) = g(-\omega)$. Se observa que hay tantos osciladores en θ^* como en $-\theta^*$. Entonces $\langle \sin\theta \rangle_{lock} = 0$ y

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{lock} = \langle \sin\theta \rangle_{lock} = \int_{-Kr}^{Kr} \cos\theta(\omega) g(\omega) d\omega$$

donde $\theta(\omega)$ es definido como en 6. Haciendo un cambio de variable de ω a θ

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{lock} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta g(Kr \sin\theta) Kr \cos\theta d\theta = Kr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta g(Kr \sin\theta) d\theta$$

Ahora consideramos los osciladores en *drifting*. Obtenemos

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{drift} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{|\omega| > Kr} e^{i\theta} \rho(\theta, \omega) g(\omega) d\omega d\theta$$

Esta integral desaparece. Esto se sigue de $g(\omega) = g(-\omega)$ y la simetría de $\rho(\theta + \pi, -\omega) = \rho(\theta, \omega)$ que se obtiene por 7. Por lo tanto, obtenemos que la condición de auto-consistencia se reduce a

$$r = Kr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta \quad (8)$$

En la ecuación 8 encontramos un equilibrio trivial en $r = 0$, para cualquier valor de K . Esto corresponde a un estado incongruente con $\rho(\theta, \omega) = 1/2\pi$ para todo θ, ω . Una segunda rama de soluciones corresponde a una estado de sincronización parcial. Esta satisface

$$1 = K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta \quad (9)$$

La rama tiene una bifurcación desde $r = 0$ para un valor $K = K_c$ obtenido cuando r tiende a 0 por la derecha en 9. Así,

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)},$$

lo que corresponde a la fórmula de Kuramoto de *criticalcoupling* en el principio de la sincronización colectiva. Cuando expandemos el integrando de la ecuación 9 en las potencias de r tenemos que la bifurcación es supercrítica si $g''(0) < 0$ (el caso genérico para densidades de $g(\omega)$ suaves y unimodales) y es subcrítica si $g''(0) > 0$. Cerca del origen, la amplitud de la bifurcación sigue:

$$r \approx \sqrt{\frac{16}{\pi K_c^3}} \sqrt{\frac{\mu}{-g''(0)}}, \quad (10)$$

donde $\mu = \frac{K - K_c}{K_c}$ es la distancia normalizada.

Referencias

- [1] Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1993, D. Garlaschelli, W.Th.F. den Hollander (2015) Spontaneous Synchronization in Complex Networks, Leiden Institute of Physics (LION), Mathematical Institute (MI).
- [2] Steven H. Strogatz (2000) From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators, Center for Applied Mathematics and Department of Theoretical and Applied Mechanics, Kimball Hall, Cornell University.